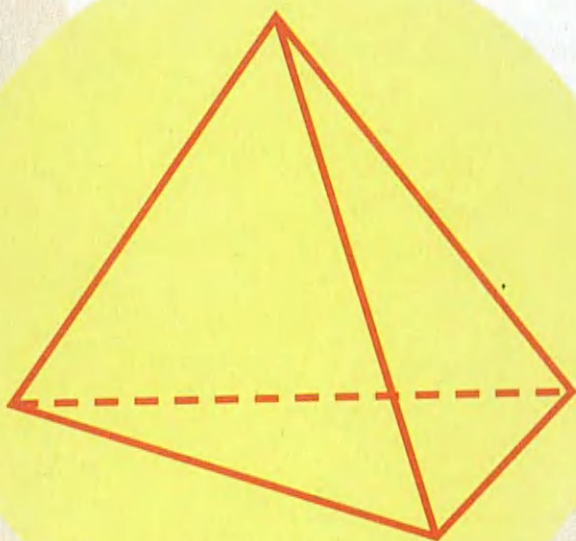


МАТЕМАТИКА

Самостійні
та контрольні роботи



А.П. Єршова
В.В. Голобородько

ГЕОМЕТРІЯ

10-11 клас

А.П. Єршова, В.В. Голобородько

**САМОСТІЙНІ
ТА
КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ
З ГЕОМЕТРІЇ
ДЛЯ 10–11 КЛАСУ**

Різнорівневі дидактичні матеріали

**ГІМНАЗІЯ
Харків
2007**

Посібник містить самостійні та контрольні роботи з усіх найважливіших тем курсу геометрії 10–11 класу.

Роботи складаються з 6 варіантів трьох рівнів складності.

Дидактичні матеріали призначені для організації диференційованої самостійної роботи учнів.

Передрук окремих розділів і всього видання — заборонено.
Будь-яке комерційне використання цього видання можливе лише з дозволу авторів.

Рецензенти:

Ю.В. Гандель, доктор фізико-математичних наук,
професор Харківського Національного університету,
відмінник освіти України

О.Ю. Харик, Соросівський учитель, учитель-методист,
викладач математики фізико-математичного
ліцею № 27 м. Харкова

Художник-оформлювач *М. Л. Курдюмов*

ЄРШОВА Алла Петрівна
ГОЛОБОРОДЬКО Вадим Володимирович

Самостійні та контрольні роботи
з геометрії
для 10–11 класу

Відповідальний за випуск *К. П. Бондаренко*
Комп'ютерна верстка *С. І. Удалов*

ПЕРЕДМОВА

*Основні особливості запропонованого збірника
самотійних та контрольних робіт:*

1. Збірник містить повну добірку самотійних та контрольних робіт з усього курсу геометрії 10–11 класу, як основного, так і поглибленого.
Контрольні роботи розраховані на один урок, самотійні роботи — на 35–45 хвилин, у залежності від теми та рівня підготовки учнів.
Увага! Оскільки специфіка оформлення розв'язань геометричних задач суттєво залежить від вимог учителя, рекомендуємо вчителям у деяких роботах за необхідністю скорочувати запропоновані варіанти, послаблювати вимоги до оформлення розв'язків або проводити роботи за 1,5–2 уроки.
2. Збірник дозволяє здійснити диференційований контроль навчальних досягнень, оскільки завдання розподілені за трьома рівнями складності А, Б і В. Рівень А відповідає обов'язковим програмним вимогам, Б — середньому рівню складності, завдання рівня В призначені для учнів, які виявляють підвищений інтерес до математики, а також для використання в класах, школах, гімназіях і ліцеях з поглибленим вивченням математики. Для кожного рівня наведено 2 розміщених поруч рівноцінних варіанти (як вони зазвичай записуються на дошці), тому на уроці достатньо одної книги на парті.
3. До книги включено домашні самотійні і практичні роботи, які містять творчі, нестандартні задачі з кожної з розглянутих тем, а також завдання підвищеної складності. Ці завдання можуть в повному обсязі або частково пропонуватися як додаткові завдання при проведенні контрольних робіт. За бажанням вчителя виконання кількох або навіть одного з таких завдань може оцінюватися найвищою оцінкою. Відповіді до контрольних і домашніх самотійних робіт подаються в кінці книги.
4. Тематика та зміст робіт охоплюють вимоги діючих програм з геометрії для 10–11 класу. Для зручності користування книгою подається таблиця тематичного розподілу робіт за підручником «Геометрія» А. В. Погорелова.

Наша адреса в Інтернеті: www.axiom.com.ua.

- а) три різних площини, які не містять точку A ;
 точку C ;
 б) пряму, по якій перетинаються площини CMK і SBC ;
 DKM і SAB ;
 в) площину, яка проходить через прямі SA і KC .
 SB і MD .

②

Точка D є спільною для двох різних площин α і β та прямої a . Як може розміщуватися пряма a відносно α і β ? Укажіть всі можливі випадки.

③

Кожна з трьох різних прямих перетинається з двома іншими. Скільки різних площин можна провести через дані прямі, взяті попарно? Укажіть і обґрунтуйте всі можливі варіанти.

②

Точка D є спільною для двох різних прямих a і b і площини α . Як можуть розміщуватися прямі a і b відносно площини α ? Укажіть всі можливі випадки.

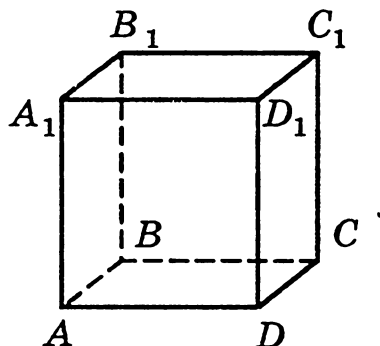
③

Три різні площини мають спільну точку. Скільки різних прямих може утворюватися при перетині цих площин? Укажіть і обґрунтуйте всі можливі варіанти.

С-2. НАЙПРОСТІШІ НАСЛІДКИ АКсіОМ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Варіант А1

①



Користуючись даним рисунком, виконайте завдання:

- а) назвіть площину, яка проходить через точку B_1 і пряму A_1C_1 ,
 точку A і пряму BD ,

Варіант А2

і вкажіть дві прямі, які належать цій площині;

б) укажіть точку перетину прямої AC_1 з площиною D_1DC . прямої BD_1 з площиною A_1AD .

2

Точки A , B , C і D не лежать в одній площині. Обираючи з даних точок по три, побудуйте дві площини, які перетиналися б

по прямій BC .

по прямій AD .

Які аксіоми і теореми при цьому використовувалися?

3

Відомо, що через точки A , B і C можна провести безліч різних площин. Яким чином треба обрати точку D , щоб площина, яка проходить через A , B , C і D , була єдиною? Відповідь поясніть.

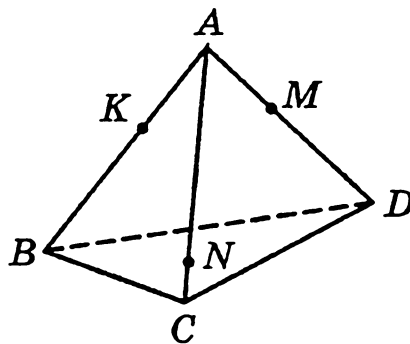
3

Відомо, що через пряму a і точку A можна провести безліч різних площин. Яким чином треба обрати точку B , щоб площина, яка проходить через пряму a і точки A і B , була єдиною? Відповідь поясніть.

Варіант Б1

Варіант Б2

1



Користуючись даним рисунком, виконайте завдання:

а) назвіть площину, яка проходить через

пряму MN і точку B ,

пряму KN і точку D ,

і вкажіть пряму її перетину

з площиною ABD ;

з площиною ADC ;

б) побудуйте точку перетину

прямої KN з площиною BCD .

прямої MN з площиною BCD .

②

Прямі a і b перетинаються в точці C .

Оберіть у просторі точку D , яка разом з даними прямими визначала б дві площини, які

перетинаються по прямій CD . перетинають площину даних прямих.

Які аксіоми і теореми при цьому використовувалися?

③

Точки A, B, C і D лежать в одній площини. Яким чином мають розміщуватися ці точки,

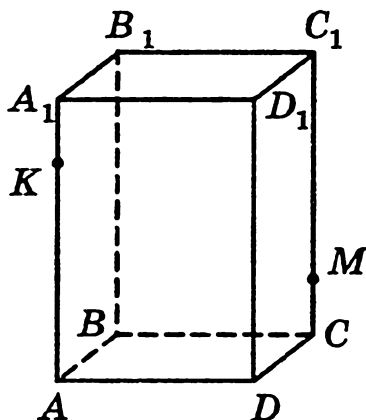
щоб через A, B і C можна було провести площину, яка не містить точку D ? щоб будь-яка площина, яка проходить через B і C , містила б A і D ?

Чому інше розміщення точок не забезпечує виконання даної умови?

Варіант В1

Варіант В2

①



Користуючись даним рисунком, виконайте завдання:

а) назвіть площину, яка проходить через точку K і пряму A_1C_1 , через точку M і пряму AC ,
і вкажіть пряму її перетину з площиною ABC ; з площиною $B_1C_1D_1$;

б) побудуйте точку перетину прямої MK з площиною $B_1C_1D_1$. прямої KM з площиною $A_1B_1C_1$.

②

Пряма l проходить через точку A , але не проходить через точку B . Оберіть у просторі точку C , яка

разом з даною прямою, а також разом з двома даними точками визначала б дві площини, які перетинаються по прямій AC .

разом з двома даними точками визначала б площину, яка перетинає площину, що містить l і B , по прямій AB .

Які аксіоми і теореми при цьому використовувалися?

③

Точки A , B , C і D лежать в одній площині. Розгляньте всі випадки їх взаємного розміщення і вкажіть ті випадки, при яких

через точки B і C можна провести площину, яка не містить точок A і D .

через точки A і B неможливо провести площину, яка не містить ні точки C , ні точки D .

Чому інше розміщення точок не забезпечує виконання даної умови?

С-3. ЗАСТОСУВАННЯ АКСІОМ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА ЇХ НАСЛІДКІВ У ЗАДАЧАХ НА ДОВЕДЕННЯ

Варіант А1

①

Прямі AB і CD перетинаються. Доведіть, що прямі AD і BC лежать в одній площині.

②

Прямі AB і l не лежать в одній площині. Площина α містить пряму l і точку B . Доведіть, що точка A не лежить в площині α .

Варіант А2

①

Дано пряму AB і точку C поза нею. Точки K і M лежать на відрізках AC і BC відповідно. Доведіть, що прямі KM і AB лежать в одній площині.

②

Прямі AB , AC і AD не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі BC і AD не перетинаються.

3

Доведіть, що

через будь-які три точки можна провести площину

через будь-яку пряму і точку можна провести площину

(у доведенні розгляньте два випадки).

Варіант Б1**1**Три вершини квадрата лежать в площині α . Доведіть, що і четверта вершина квадрата також лежить у площині α .**2**Площини α і β перетинаються по прямій m . Пряма l перетинає площину α в точці A , а площину β — в точці B (точки A і B не лежать на прямій m). Доведіть, що прямі m і l не перетинаються.**3**Прямі a і b перетинаються. Доведіть, що існує пряма c , яка перетинає кожен з двох даних прямих, але не лежить з ними в одній площині.**Варіант В1****1**

Середини сторін п'ятикутника лежать в одній площині. Доведіть, що всі його вершини лежать в тій самій площині.

Варіант Б2**1**Дві сусідні вершини і точка перетину діагоналей трапеції лежать у площині α . Доведіть, що і дві інші вершини трапеції лежать у площині α .**2**Точки A і B — спільні точки площин α і β . Пряма a лежить в α , не лежить в β і проходить через точку A . Пряма b лежить в β , не лежить в α і проходить через точку B . Доведіть, що прямі a і b не перетинаються.**3**Площини α і β перетинаються по прямій l . Доведіть, що існує площина γ , яка не збігається з α і β і містить пряму l .**Варіант В2****1**

Середини всіх діагоналей п'ятикутника лежать в одній площині і не збігаються. Доведіть, що вершини п'ятикутника лежать в тій самій площині.

②

Площина α перетинає прямі MA , MB і MC в точках A_1 , B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що дані прямі лежать в одній площині тоді і тільки тоді, коли точки A_1 , B_1 і C_1 лежать на одній прямій.

③

Кінці відрізка AB лежать у двох різних площинах, які перетинаються по прямій a . Доведіть, що існує площина, що містить пряму a , відносно якої точки A і B лежать в різних півпросторах.

②

Площини α і β перетинаються по прямій l . Точки A і B лежать в площинах α і β відповідно. Доведіть, що відрізок AB перетинається з прямою l тоді і тільки тоді, коли один з його кінців лежить на прямій l .

③

Чотири точки не лежать в одній площині. Доведіть, що існує площина, яка проходить через дві з них так, що дві інші точки лежать відносно неї в різних півпросторах.

С-4. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ В ПРОСТОРИ. ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

Варіант А1

①

Відомо, що точки A , B , C і D лежать в одній площині. не лежать в одній площині.

Визначте, чи можуть прямі AB і CD

- а) бути паралельними;
- б) перетинатися;
- в) бути мимобіжними.

Відповідь підтвердіть посиланням на відповідні теоретичні факти.

②

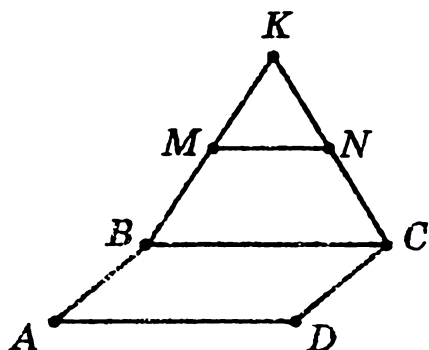
Дано паралельні прямі a і b та пряму c , яка перетинає a , але не перетинає b .

Доведіть, що b і c — мимобіжні прямі.

②

Дано прямі a і b , які перетинаються, і пряму c , яка паралельна a , але не перетинає b .

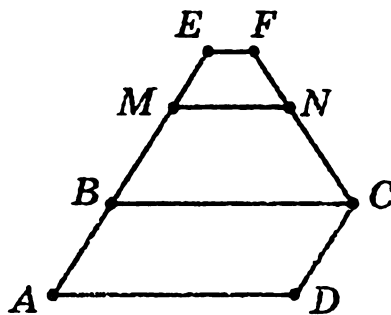
3



Трикутник BKC і прямокутник $ABCD$ не лежать в одній площині (див. рисунок). Точки M і N — середини відрізків BK і KC відповідно.

- а) Доведіть, що $AD \parallel MN$.
 б) Знайдіть AD , якщо $MN = 4$ см.

3



Квадрат $ABCD$ і трапеція $BEFC$ (BC і EF — основи) не лежать в одній площині (див. рисунок). Точки M і N — середини відрізків BE і FC відповідно.

- а) Доведіть, що $MN \parallel AD$.
 б) Знайдіть MN , якщо $AB = 8$ см, $EF = 4$ см.

Варіант Б1

1

Відомо, що

прямі a і b перетинаються, а
 прямі b і c паралельні.

прямі a і b — мимобіжні, а
 прямі b і c паралельні.

Визначте, чи можуть прямі a і c

- а) бути паралельними;
 б) перетинатися;
 в) бути мимобіжними.

Позитивні відповіді підтвердіть рисунком; негативні відповіді аргументуйте.

2

В паралелограмі $ABCD$ через вершину B проведено пряму l , яка не лежить у площині паралелограма. Доведіть, що прямі l і AD — мимобіжні.

2

В трикутнику ABC через вершину B проведено пряму l , яка не лежить у площині трикутника. Доведіть, що прямі l і AC — мимобіжні.

3

Точка M лежить на відрізку AB . Відрізок AB перетинається з площиною α

в точці B . Через точки A і M проведено паралельні прямі, які перетинають α в точках A_1 і M_1 .

в точці M . Через точки A і B проведено паралельні прямі, які перетинають α в точках A_1 і B_1 .

а) Доведіть, що точки

A_1 , M_1 і B лежать на одній прямій.

A_1 , M і B_1 лежать на одній прямій.

б) Знайдіть довжину відрізка AB , якщо

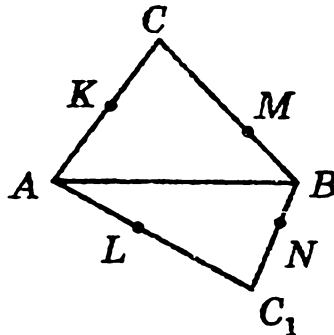
$AA_1 : MM_1 = 3 : 2$, $AM = 6$ см.

$AA_1 : BB_1 = 3 : 2$, $AM = 6$ см.

Варіант В1

Варіант В2

1



Трикутники ABC і ABC_1 не лежать в одній площині. Точки K , M , N , L лежать на відрізках AC , CB , BC_1 , AC_1 відповідно (див. рисунок).

Визначте, чи можуть

відрізки KL і MN

відрізки KN і ML

а) бути паралельними;

б) перетинатися;

в) лежати на мимобіжних прямих.

Позитивні відповіді підтвердіть хоча б одним описом побудови точок K , M , N , L , яка відповідає даній відповіді.

2

Площини α і β перетинаються по прямій c . Площина γ перетинає дані площини по двом паралельним прямим a і b відповідно. Доведіть, що пряма c паралельна кожній з цих прямих.

2

Дано дві паралельні прямі a і b і точку M , яка не лежить у площині цих прямих. Через a і M проведено площину α , а через b і M — площину β . Доведіть, що пряма перетину α і β паралельна кожній з даних прямих.

③

Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено площину α . Через точки B , C і D проведено прямі, які перетинають α в точках B_1 , C_1 і D_1 відповідно.

Знайдіть DD_1 , якщо $BB_1 = 4$ см, $CC_1 = 12$ см.

Знайдіть CC_1 , якщо $BB_1 = 3$ см, $DD_1 = 7$ см.

С-5. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ. ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПЛОЩИН

Варіант А1

①

Відомо, що пряма a паралельна площині α , а пряма b

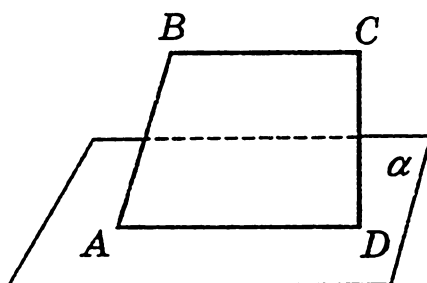
перетинає площину α .

лежить у площині α .

Визначте, чи можуть прямі a і b

- а) перетинатися;
- б) бути паралельними;
- в) бути мимобіжними.

②



Через сторону AD чотирикутника $ABCD$ проведено площину α (див. рисунок). Відомо, що

$$\angle BSA = \angle CAD.$$

$$\angle ABC + \angle DAB = 180^\circ.$$

Доведіть, що $BC \parallel \alpha$.

③

Дано трикутник ABC . Побудуйте площину, паралельну площині даного трикутника.

③

Дано квадрат $ABCD$. Побудуйте площину, паралельну площині даного квадрата.

Варіант Б1

①

Відомо, що прямі a і b — мимобіжні, а пряма c

паралельна a . Площина α визначається паралельними прямими a і c .

перетинається з a . Площина α визначається прямими a і c , що перетинаються.

Визначте, чи може пряма b

- а) бути паралельною площині α ;
- б) перетинатися з площиною α ;
- в) лежати в площині α .

②

Через вершину A ромба $ABCD$ проведено пряму AM , яка не лежить у площині ромба. Доведіть, що пряма BC паралельна площині MAD .

②

Через вершину B квадрата $ABCD$ проведено пряму BK , яка не лежить у площині квадрата. Доведіть, що пряма CD паралельна площині ABK .

③

Пряма a паралельна площині α . Побудуйте площину β , яка паралельна α і проходить через пряму a .

③

Побудуйте площину, паралельну площині двох паралельних прямих a і b .

Варіант В1

①

Відомо, що площини α і β перетинаються по прямій s . Пряма l паралельна площині β

і паралельна прямій s .

і є мимобіжною до прямої s .

Визначте, може чи пряма l

- а) бути паралельною площині α ;
- б) перетинатися з площиною α ;
- в) лежати в площині α .

②

Точки A , B , C і D не лежать в одній площині. M — середина відрізка AD . Доведіть, що площина MDC паралельна прямій, яка проходить через середини відрізків AB і BC .

②

Точки A , B , C і D не лежать в одній площині. M — середина відрізка AD . Через пряму BM і середину відрізка DC проведено площину. Доведіть, що ця площина паралельна прямій AC .

Варіант В2

③

Відрізки AA_1 , BB_1 і CC_1 не лежать в одній площині й перетинаються в точці K , яка є серединою кожного з них.

Доведіть, що площини AB_1C_1 і A_1BC паралельні. Доведіть, що площини ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні.

С-6. ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПЛОЩИН. ЗОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР НА ПЛОЩИНІ

Варіант А1

①

Дано паралельні площини α і β . Паралельні прямі a і b перетинають площину α в точках A і B , а площину β — в точках A_1 і B_1 .

Доведіть, що $AB = A_1B_1$.

Доведіть, що $\angle BAA_1 = \angle A_1B_1B$.

②

Назвіть геометричні фігури, які можуть бути паралельними проєкціями

а) відрізка;

а) променя;

б) паралелограма.

б) трапеції.

③

Визначте, чи можуть

дві прямі, що перетинаються, дві мимобіжні прямі проєктуватися:

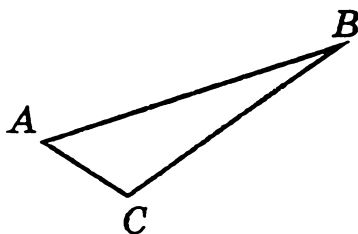
а) в дві прямі, що перетинаються;

б) в дві паралельні прямі;

в) в одну пряму;

г) в пряму і точку.

④



$\triangle ABC$ — паралельна проєкція рівнобедреного трикутника (AC — проєкція основи).

Побудуйте проекцію

середньої лінії трикутника, яка з'єднує його бічні сторони.

бісектриси трикутника, проведеної з вершини, протилежної до основи.

Варіант Б1**1**

Дано паралельні площини α і β .

В площині α проведено пряму a . В площині β обрано точку B , і через неї проведено пряму b , паралельну a .

Доведіть, що пряма b лежить у площині β .

2

Назвіть геометричні фігури, які можуть бути паралельними проекціями

а) кола;

б) двох мимобіжних прямих.

а) трикутника;

б) двох прямих, які перетинаються.

3

Визначте, чи можливо при паралельному проектуванні

прямокутника

ромба

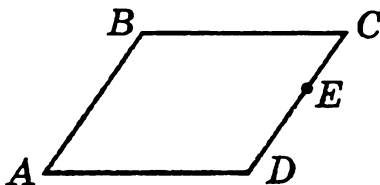
отримати:

а) паралелограм;

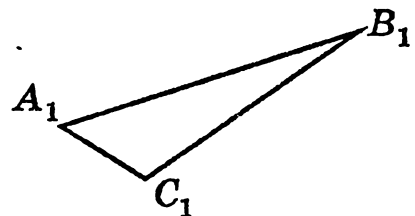
б) квадрат;

в) трапецію;

г) відрізок.

4

Паралелограм $ABCD$ — паралельна проекція ромба. Побудуйте проекцію перпендикуляра, проведеного з точки E до прямої AC .

4

Трикутник $A_1B_1C_1$ — паралельна проекція рівнобедреного трикутника ABC (A_1C_1 — проекція основи). Побудуйте проекцію перпендикуляра, проведеного з середини бічної сторони до основи трикутника.

Варіант Б2

Варіант В1

①

Дано паралельні площини α і β . Точки A і B лежать в площині α , а точки C і D — в площині β . Відомо, що

відрізки AB і CD рівні, а відрізки AD і BC перетинаються. Визначте, в якому відношенні відрізки AD і BC діляться точкою перетину.

відрізки AD і BC перетинаються і рівні, а $AB = CD$. Знайдіть величину кута ACD .

②

Назвіть геометричні фігури, які можуть бути паралельними проєкціями

а) двох паралельних відрізків;
б) гострого кута.

а) двох паралельних прямих;
б) тупого кута.

③

Укажіть розміщення площини даного

правильного трикутника

квадрата

відносно напрямку проєктування і площини проєкції, при якому його проєкцією є

а) рівнобедрений трикутник;
б) правильний трикутник;
в) трикутник з висотою, яка дорівнює висоті даного трикутника;
г) відрізок.

а) прямокутник;
б) квадрат;
в) ромб;
г) відрізок.

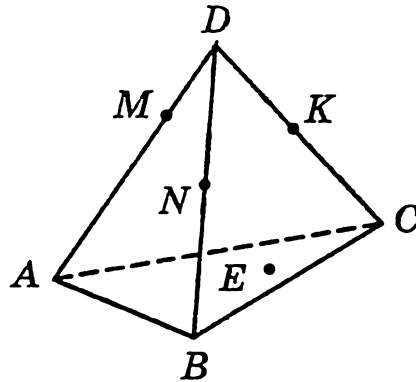
④

Дано паралельну проєкцію кола з центром в точці O . Побудуйте зображення

квадрата, описаного навколо даного кола.

правильного трикутника, вписаного в дане коло.

**С-7*. ПОЧАТКОВІ ПОНЯТТЯ
СТЕРЕОМЕТРІЇ
(домашня самостійна робота)**

Варіант 1**①**

Точка E лежить у площині ABC .

Побудуйте точку перетину

прямої DE з площиною MNK . прямої DE з площиною BMC .

②

Точка M не лежить у площині паралелограма $ABCD$. Побудуйте лінію перетину

площин ABM і CDM .

площин BCM і ADM .

③

Точки A , B , C і D не лежать в одній площині. Доведіть, що

середини шести відрізків з кінцями в цих точках є вершинами трьох паралелограмів.

прямі, які з'єднують середини відрізків AB і CD , AC і BD , AD і BC , перетинаються в одній точці.

④

Через середини двох медіан трикутника проведено площину, яка не збігається з площиною трикутника. Доведіть, що проведена площина паралельна одній з сторін трикутника.

④

В площини α обрано точки A і B , а в паралельній до неї площині β — точки C і D , причому середини відрізків AC і BD не збігаються. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків AC і BD , паралельна площинам α і β .

⑤

Дано паралельну проекцію рівнобічної трапеції, в яку можна вписати коло. Побудуйте точ-

⑤

Дано паралельну проекцію рівнобедреного прямокутного трикутника. Побудуйте проекцію

ки дотику сторін трапеції до вписаного кола.

квадрата, вписаного в даний трикутник так, що дві вершини квадрата лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах.

⑥

Дано паралельну проекцію правильного шестикутника $ABCDEF$. Побудуйте проекції:

- а) бісектриси кута ABD ; а) бісектриси кута BDE ;
б) бісектриси кута між AC і BE . б) бісектриси кута між CE і AD .

К-1. АКсіОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

Варіант А1

Варіант А2

①

Дано паралельні площини α і β і пряму l , яка паралельна площині α . перетинає площину α .

Визначте, чи може пряма l

- а) бути паралельною площині β ;
б) перетинати площину β ;
в) лежати в площині β .

②

Дві сусідні вершини і точка перетину діагоналей квадрата лежать у площині α . Доведіть, що й дві інші вершини квадрата лежать у цій площині.

②

Сторона AB і діагональ BD прямокутника $ABCD$ лежать у площині α . Доведіть, що й вершина C прямокутника лежить у цій площині.

③

Площина, паралельна стороні AC трикутника ABC , перетинає сторону AB в точці A_1 , а сторону BC — в точці C_1 .

Знайдіть A_1C_1 , якщо $AC = 12$ см, $BA_1:BA = 1:3$.

Знайдіть AC , якщо $A_1C_1 = 3$ см, $BC:BC_1 = 4:1$.

④

B_1 C_1

④

O_1

A_1

A_1

D_1

Точки A_1 , B_1 і C_1 — паралельні проєкції вершин A , B і C ромба $ABCD$ на дану площину. Побудуйте проєкцію вершини D на цю площину.

Точки A_1 , D_1 і O_1 — паралельні проєкції вершин A і D квадрата $ABCD$ і точки перетину його діагоналей O на дану площину. Побудуйте проєкції вершин B і C на цю площину.

Варіант Б1

①

Пряма a і площина α

паралельні прямій b .

паралельні площині β .

Визначте, може чи пряма a

- бути паралельною площині α ;
- перетинати площину α ;
- лежати в площині α .

②

Доведіть, що

кожна з двох паралельних прямих

кожна з двох прямих, які перетинаються,

не може перетинати кожен з двох мимобіжних площин.

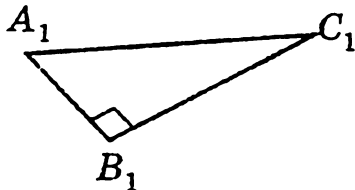
③

Точки A_1 і B_1 лежать в площині α , а точки A_2 і B_2 — в площині β , паралельній α , причому відрізки A_1A_2 і B_1B_2 перетинаються в точці C .

Знайдіть A_1A_2 , якщо $B_1B_2 = 18$ см, $B_1C = 8$ см, $CA_2 = 5$ см.

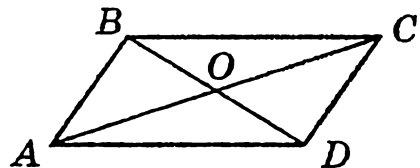
Знайдіть B_1B_2 , якщо $A_1A_2 = 20$ см, $CA_2 = 12$ см, $B_1C = 6$ см.

④



$\triangle A_1B_1C_1$ — проєкція прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою AC , в якому $AB:BC = 1:3$. Побудуйте проєкцію бісектриси прямого кута цього трикутника.

④



Паралелограм $ABCD$ — проєкція ромба з гострим кутом 60° (кут B і D — проєкції тупих кутів ромба). Побудуйте проєкцію перпендикуляра, проведеного з точки перетину діагоналей до сторони ромба.

Варіант Б2

Варіант В1Варіант В2

①

Площини α і β паралельні. Площина γ перетинає ці площини по прямих a і b відповідно, а пряма l

паралельна прямій a .

перетинається з прямою a .

Визначте, чи може пряма l

а) бути паралельною площинам β і γ ;

б) перетинатися з площинами β і γ ;

в) лежати хоча б в одній з площин β або γ .

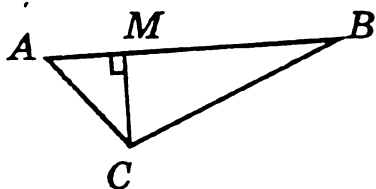
②

Доведіть, що дві різні прямі паралельні, якщо будь-яка площина, яка перетинає одну з них, перетинає і іншу.

③

Площина α перетинає сторони кута ACB в точках A_1 і B_1 , а паралельна їй площина β — в точках A_2 і B_2 . Знайдіть B_1B_2 , якщо $CB_1 = 14$ см, $CA_1:A_1B_1 = 2:5$, $A_1A_2 = A_1B_1$.

④



$\triangle ABC$ — проекція рівнобедреного трикутника, причому AC — проекція його основи, а CM — висоти. Побудуйте проекцію центра кола, описаного навколо трикутника.

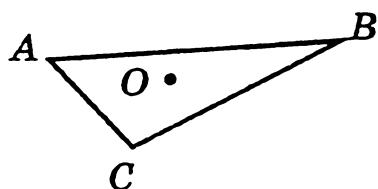
②

Доведіть, що дві різні площини паралельні, якщо будь-яка пряма, яка перетинає одну з них, перетинає і іншу.

③

З точки D , яка не лежить у жодній з двох паралельних площин α і β , проведено два промені, які перетинають площину α в точках A_1 і A_2 , а площину β — в точках B_1 і B_2 . Знайдіть A_1A_2 , якщо $DB_2:B_2A_2 = 2:3$, $DA_2 = 20$ см, $B_1B_2 = A_2B_2$.

④



Точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC , проекція якого подана на рисунку. Побудуйте проекції висот трикутника.

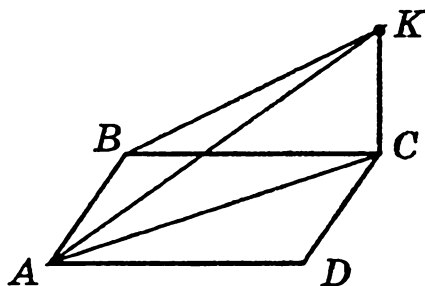
С-8. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ У ПРОСТОРИ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Варіант А1

①

Прямі a і b перпендикулярні до одної прямої c . Чи можуть прямі a і b перетинатися? бути мимобіжними?

②



Пряма KC перпендикулярна площині квадрата $ABCD$ (див. рисунок).

Знайдіть KB , якщо $KA = \sqrt{34}$ см, $AC = 3\sqrt{2}$ см.

Знайдіть KA , якщо $BC = 2$ см, $KB = \sqrt{21}$ см.

③

Через точку O — точку перетину діагоналей ромба $ABCD$ — проведено пряму SO , перпендикулярну до площини ромба. Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини BSD .

③

Через вершину C прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою AB проведено пряму MC , перпендикулярну до площини трикутника. Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини MBC .

④

Через сторону AB прямокутника $ABCD$ проведено площину α , перпендикулярну до сторони BC . Доведіть, що $AD \perp \alpha$.

④

Площина α перпендикулярна до сторін AD і BC чотирикутника $ABCD$, причому $AD \neq BC$. Доведіть, що $ABCD$ — трапеція.

Варіант Б1

①

Через вершини A і B паралелограма $ABCD$ проведено паралельні прямі AA_1 і BB_1 , причому

$AA_1 \perp AD$.

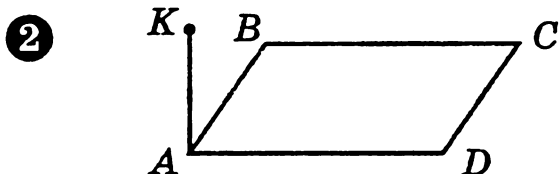
$BB_1 \perp BC$.

Варіант Б2

Визначте взаємне розміщення

- а) прямих BB_1 і BC ;
б) площин A_1AD і B_1BC .

- а) прямих AA_1 і AD ;
б) площин A_1AD і B_1BC .



Пряма KA перпендикулярна до площини ромба $ABCD$ (див. рисунок).

Знайдіть KC , якщо $KB = \sqrt{19}$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle D = 120^\circ$.

Знайдіть KB , якщо $KC = \sqrt{57}$ см, $BD = 4$ см, $\angle C = 60^\circ$.

③

Точка M не належить площині прямокутника $ABCD$. Відомо, що $MA = MB = MC = MD$ і O — точка перетину AC і BD . Доведіть, що $MO \perp (ABC)$.

③

Точка M не належить площині ромба $ABCD$. Відомо, що $\angle AMO = \angle CMO$, $\angle BMO = \angle DMO$, де O — точка перетину діагоналей ромба. Доведіть, що $MO \perp (ABC)$.

④

Дано три попарно перпендикулярних відрізки DA , DB і DC . Пряма l паралельна лінії перетину площин ADC і DBC . Доведіть, що $l \perp (DBA)$.

④

Прямокутні трикутники ABC і ABD мають спільний катет і не лежать в одній площині. Пряма l перпендикулярна до прямих DC і BC . Доведіть, що $l \parallel AB$.

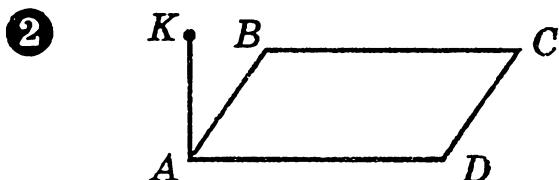
Варіант В1

①

Дано дві перпендикулярні прямі a і b і площину α . Чи можливе таке їх взаємне розміщення, при якому

- а) обидві прямі паралельні α ?
б) обидві прямі паралельні одній прямій, яка лежить в α ?

- а) одна з прямих паралельна α , а інша перпендикулярна до α ?
б) обидві прямі перпендикулярні до α ?



Варіант В2

Пряма AK перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$ (див. рисунок).

Знайдіть KA , якщо $KB = 13$ см, $KC = 12\sqrt{3}$ см, $KD = 12\sqrt{2}$ см.

3

O — точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$, пряма MA перпендикулярна до площини квадрата. Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до площини AMO .

4

Площина γ перетинає паралельні площини α і β по прямих a і b відповідно, а площина δ перетинає площини α , β і γ . Відомо, що $a \perp \delta$. Доведіть, що $b \perp \delta$.

Знайдіть KC , якщо $KB = 12\sqrt{2}$ см, $KD = 13$ см, $BD = \sqrt{407}$ см.

3

D — середина сторони AC правильного трикутника ABC , пряма BK перпендикулярна до площини трикутника. Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини BKD .

4

Площина γ перетинає дві площини α і β . Пряма l , по якій перетинаються α і β , і пряма k , яка не належить жодній з даних площин, перпендикулярні до площини γ . Доведіть, що пряма k паралельна площинам α і β .

С-9. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА. ВЛАСТИВОСТІ ТОЧКИ, РІВНОВІДДАЛЕНОЇ ВІД ВЕРШИН МНОГОКУТНИКА

Варіант А1

1

З точки S до площини α проведено перпендикуляр SO і похилі SA і SB .

Знайдіть SB , якщо $SA = 20$ см, $AO = 16$ см, $OB = 5$ см.

2

Точка S знаходиться на відстані 4 см від площини правильного трикутника і рівновіддалена від його вершин. Периметр трикутника дорівнює $9\sqrt{3}$ см. Знайдіть відстань от точки S до вершин трикутника.

Варіант А2

2

Точка S віддалена від кожної з вершин квадрата $ABCD$ на 13 см. Площа квадрата дорівнює 288 см². Знайдіть відстань від точки S до площини квадрата.

3

Відрізки AB , CD і EF спираються кінцями в дві паралельні площини. Відомо, що

проекція відрізка AB на одну з даних площин більше проекції відрізка CD , але менше проекції EF . $AB > CD > EF$.

Порівняйте довжини

відрізків AB , CD і EF .

проекцій даних відрізків на одну з площин.

Варіант Б1

Варіант Б2

1

З точки до площини проведено дві похилі. Відомо, що

різниця довжин похилих дорівнює 5 см, а їх проекції дорівнюють 7 і 18 см.

довжини похилих 25 і 30 см, а різниця їх проекцій — 11 см.

Знайдіть відстань від даної точки до площини.

2

Площа прямокутного трикутника — 24 см^2 , а різниця його катетів — 2 см. Точка, віддалена від площини трикутника на 12 см, рівновіддалена від його вершин. Знайдіть відстань від даної точки до вершин трикутника.

2

Один з катетів прямокутного трикутника на 4 см менше гіпотенузи, а другий катет дорівнює 12 см. Точка поза площиною трикутника віддалена від кожної з його вершин на 26 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.

3

Відрізки AB , CD і EF впираються кінцями в дві паралельні площини. Відрізки AB_1 , CD_1 і EF_1 — їх проекції на одну з цих площин. Відомо, що

$$\angle ABB_1 > \angle CDD_1 > \angle EFF_1. \quad \angle B_1BA > \angle D_1DC > \angle F_1FE.$$

Порівняйте довжини відрізків AB , CD і EF .

Варіант В1**1**

З точки до площини проведено дві похилі. Відомо, що

одна з них має довжину $4\sqrt{5}$ см, а довжина її проекції — 8 см. Кут між проекціями дорівнює 60° , а відрізок, що сполучає основи похилих, дорівнює 7 см. Знайдіть довжину другої похилої.

Скільки розв'язків має задача?

2

Точка, яка розміщена на відстані 60 см від площини рівнобічної трапеції, рівновіддалена від її вершин. Діагональ трапеції перпендикулярна до її бічної сторони і дорівнює 30 см. Висота трапеції дорівнює 24 см. Знайдіть відстань від даної точки до вершин трапеції.

3

Відрізки AB , CD і EF впираються кінцями в дві паралельні площини.

Відомо, що $\cos \alpha > \cos \beta > \cos \gamma$,

де α , β і γ —

кути між даними відрізками і їх проекціями на одну з даних площин відповідно.

Порівняйте довжини відрізків AB , CD і EF .

Варіант В2

одна з них має довжину 11 см, а довжина її проекції — $2\sqrt{30}$ см. Кут між похилими дорівнює 60° , а відрізок, що сполучає основи похилих, дорівнює $\sqrt{97}$ см. Знайдіть довжину проекції другої похилої.

2

Точка віддалена від кожної з вершин рівнобічної трапеції на 65 см. Діагональ трапеції дорівнює 40 см і перпендикулярна до бічної сторони, а проекція діагоналі на більшу основу трапеції дорівнює 32 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трапеції.

кути між даними відрізками і перпендикулярами, проведеними з точок A , C і E відповідно на площину, яка містить точки B , D і F .

К-2. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Варіант А1

①

Похила, проведена з точки до площини, дорівнює 10 см і утворює зі своєю проекцією на дану площину кут 30° . Знайдіть відстань від точки до площини.

②

Через вершини A і B трикутника ABC проведено паралельні прямі AA_1 і BB_1 , причому $AA_1 \perp AB$ і $AA_1 \perp AC$. Доведіть, що $BB_1 \perp BC$.

③

Точка S не лежить у площині прямокутника $ABCD$ і рівновіддалена від його вершин.

Знайдіть відстань від точки S до площини прямокутника, якщо сторони прямокутника дорівнюють 6 і 8 см, а $SA = 13$ см.

④

Вершина A трикутника ABC є основою перпендикуляра AD до площини трикутника. Доведіть, що

якщо $\angle BDA = \angle CDA$, то
 $\angle DBC = \angle DCB$.

①

З точки, віддаленої від площини на 8 см, до площини проведено похилу і перпендикуляр, кут між якими дорівнює 60° . Знайдіть довжину похилої.

②

Через вершини A і B трикутника ABC проведено прямі AA_1 і BB_1 , причому $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AC$, $BB_1 \perp AB$, $BB_1 \perp BC$. Доведіть, що $AA_1 \parallel BB_1$.

Знайдіть відстань від точки S до вершин прямокутника, якщо відстань від точки S до площини ABC дорівнює 24 см, $AB = 12$ см, $BC = 16$ см.

якщо $\angle DBA = \angle DCA$, то
 $\angle DBC = \angle DCB$.

Варіант Б1

①

Через сторону AC трикутника ABC проведено площину α , яка не збігається з площиною трикутника. Знайдіть відстань від точки B до площини α , якщо

Варіант Б2

сторони AB і BC відповідно рівні 23 і 33 см, а їх проекції на площину α відносяться як 2:3.

②

Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AM , перпендикулярну до прямих AD і AC . Доведіть, що $AB \perp (AMD)$.

③

Точка віддалена від кожної з вершин рівнобедреного трикутника на 65 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника, якщо його основа й бічна сторона відповідно дорівнюють 48 і 40 см.

④

Вершина A трикутника ABC є серединою відрізка DE , перпендикулярного до площини трикутника. Доведіть, що

$$DB = BE.$$

$$DC = CE.$$

Варіант В1

①

Відрізки AB і CD впираються кінцями в дві паралельні площини, причому відрізок AB дорівнює проекції відрізка CD на одну з площин.

Знайдіть відстань між площинами, якщо більший з відрізків дорівнює 7 см, а менша з проекцій — 1 см.

②

Через точку, яка не належить прямій l , проведено дві площини, одна з яких паралельна l , а інша — перпендикулярна до l , а також пряму m , паралельну l . Як розміщена пряма m по відношенню до лінії перетину площин?

$AB = BC = 13:15$, а їх проекції на площину α рівні 10 і 18 см.

②

Пряма CK перпендикулярна до катета AC і висоти CD прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$). Доведіть, що $BC \perp (ACK)$.

③

Площа рівнобедреного трикутника з основою 48 см дорівнює 768 см^2 . На відстані 60 см від площини трикутника обрано точку, яка знаходиться на однаковій відстані від вершин трикутника. Знайдіть цю відстань.

Варіант В2

②

Через точку, яка не належить прямій l , проведено дві різні площини, паралельні l , та пряму m , перпендикулярну до l . Як розміщена пряма m по відношенню до лінії перетину площин?

Знайдіть відстань між площинами, якщо менша з проекцій дорівнює 3 см, а більший з відрізків — $\sqrt{41}$ см.

3

Точка поза площиною квадрата віддалена від кожної з його вершин на 40 см. Інша точка віддалена від даної точки та від кожної з вершин квадрата на 25 см. Знайдіть площу квадрата.

3

Точка віддалена від площини правильного трикутника на 32 см і рівновіддалена від його вершин. Інша точка віддалена від вершин трикутника та від даної точки на 25 см. Знайдіть площу даного трикутника.

4

Визначте геометричне місце точок, рівновіддалених

від даної площини та від прямої, яка лежить в цій площині (без доведення).

від даної площини та від точки, яка лежить в цій площині (без доведення).

С-10. ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ

Варіант А1

1

MA — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC з гіпотенузою AB . Доведіть, що $MC \perp BC$.

2

Катет BC прямокутного трикутника ABC ($\angle B = 90^\circ$) лежить у площині α . З вершини A до площини α проведено перпендикуляр AO . Знайдіть BC , якщо $OB = 6$ см, $OC = 10$ см.

3

KB — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Побудуйте відстань від точки K до прямої AD .

Варіант А2

1

MA — перпендикуляр до площини трикутника ABC . На стороні BC обрано точку D , причому $MD \perp BC$. Доведіть, що AD — висота трикутника ABC .

2

Основа AC рівнобедреного трикутника ABC лежить у площині α . З вершини B до площини α проведено перпендикуляр BO . На стороні AC обрано точку D так, що $OD \perp AC$. Знайдіть BD , якщо $AB = BC = 26$ см, $AC = 48$ см.

від точки K до прямої AC .

Варіант Б1**①**

B_1B — перпендикуляр до площини ромба $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O . Доведіть перпендикулярність прямої AC і площини B_1OB .

②

З точки до площини прямокутного трикутника з катетами 15 і 20 см проведено перпендикуляр завдовжки 16 см. Основа перпендикуляра — вершина прямого кута трикутника. Знайдіть відстань від даної точки до гіпотенузи.

③

Точка K — середина сторони AB квадрата $ABCD$. MK — перпендикуляр до площини квадрата. Побудуйте відстань

від точки M до прямої AC .

від точки M до прямої BD .

Варіант В1**①**

Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Доведіть перпендикулярність

прямої AC і площини B_1BD .

прямої BD і площини C_1CA .

②

З точки M до площини ромба $ABCD$ проведено перпендикуляр AM завдовжки 8 см. Відомо, що відстань від точки M до прямої BC дорівнює 10 см, $\angle B = 120^\circ$. Знайдіть відстань від точки M до прямої BD .

②

З точки M до площини ромба $ABCD$ проведено перпендикуляр BM . Відомо, що $BD = 6$ см, $\angle A = 60^\circ$, а відстань від точки M до прямої CD дорівнює 6 см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AC .

③

Дано трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$). До площини трапеції проведено перпендикуляр KM (точка M лежить на стороні CD).

Варіант Б2**①**

C_1C — перпендикуляр до площини ромба $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O . Доведіть перпендикулярність прямої BD і площини C_1OC .

②

З точки до площини трикутника зі сторонами 13, 14 і 15 см проведено перпендикуляр, основа якого — вершина кута, протилежного до сторони 14 см. Відстань від даної точки до цієї сторони дорівнює 20 см. Знайдіть відстань від точки до площини трикутника.

Варіант В2

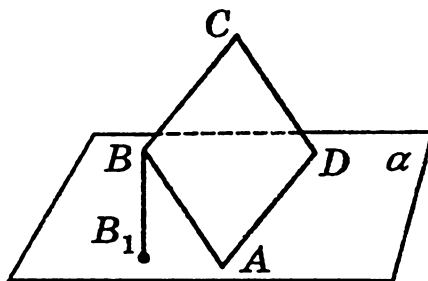
Діагональ BD є бісектрисою кута CDA . Побудуйте відстань від точки K до прямої BD .

Діагональ AC є бісектрисою кута $B CD$. Побудуйте відстань від точки K до прямої AC .

С-11. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ. ВЛАСТИВОСТІ ТОЧКИ, РІВНОВІДАЛЕНОЇ ВІД СТОРІН МНОГОКУТНИКА

Варіант А1

①



Через сторону AD квадрата $ABCD$ проведено площину α . З вершини B на цю площину опущено перпендикуляр BB_1 (див. рисунок).

Знайдіть проекцію діагоналі BD на площину α , якщо $BD = 6\sqrt{2}$ см, $\angle B_1DA = 60^\circ$.

②

Площа правильного трикутника дорівнює $27\sqrt{3}$ см², а відстані від даної точки до сторін трикутника дорівнюють 5 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.

③

Перпендикуляр DD_1 проведений з точки D до площини кута ABC . Точка D_1 лежить на бісектрисі цього кута. Доведіть, що точка D рівновіддалена від сторін кута.

Варіант А2

Знайдіть діагональ квадрата, якщо $B_1A = 2\sqrt{2}$ см, $\angle DB_1A = 45^\circ$.

②

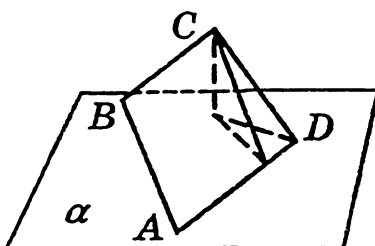
Точка віддалена від кожної зі сторін правильного трикутника на 10 см, а від площини трикутника — на 8 см. Знайдіть площу даного трикутника.

③

Точка D не лежить у площині кута ABC і знаходиться на однаковій відстані від сторін цього кута. DD_1 — перпендикуляр до площини ABC . Доведіть, що точка D_1 лежить на бісектрисі кута ABC .

Варіант Б1

①



Через більшу основу AD рівнобічної трапеції $ABCD$ проведено площину α (див. рисунок).

Знайдіть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 10 і 20 см, сторона BC віддалена від площини α на 12 см, а кут між проекціями висоти і бічної сторони трапеції дорівнює 45° .

②

Точка рівновіддалена від сторін прямокутного трикутника з катетами 9 і 12 см і знаходиться на відстані 4 см від площини трикутника. Знайдіть відстань від даної точки до сторін трикутника.

③

З точки до площини рівнобедреного трикутника з основою 30 см і площею 300 см^2 проведено перпендикуляр завдовжки 5 см, основа якого лежить на основі трикутника. Дана точка знаходиться на однаковій відстані від бічних сторін трикутника. Знайдіть цю відстань.

Варіант В1

①

Через сторону AD ромба $ABCD$ проведено площину α . Знайдіть відстань від прямої BC до площини α , якщо

Варіант Б2

Знайдіть відстань від прямої BC до площини α , якщо бічна сторона і висота трапеції відповідно дорівнюють 13 і 12 см, а кут між їх проекціями на площину α дорівнює 45° .

②

Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно рівні 12 і 15 см. Відстані від даної точки до сторін трикутника дорівнюють 5 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.

③

З точки до площини рівнобедреного трикутника проведено перпендикуляр, основа якого лежить на основі трикутника. Основа і бічна сторона трикутника дорівнюють 30 і 25 см. Дана точка віддалена від кожної з бічних сторін трикутника на 15 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.

Варіант В2

площа ромба дорівнює 20 см^2 , сторона — 5 см , а кут між проєкціями сторони CD і висоти CH ($H \in AD$) дорівнює 45° .

2

З точки, віддаленої від площини квадрата на 36 см , до сторін квадрата проведено рівні перпендикуляри. Інша точка віддалена від цих перпендикулярів і від площини квадрата на 10 см . Знайдіть площу квадрата.

3

Діагональ прямокутника дорівнює 20 см , а його площа — 192 см^2 . З точки поза площиною прямокутника, віддаленої від кожної з його більших сторін на $6\sqrt{5} \text{ см}$, до площини прямокутника проведено перпендикуляр, основа якого лежить на меншій стороні. Знайдіть відстані від даної точки до менших сторін прямокутника.

площа ромба дорівнює 80 см^2 , висота — 8 см , а кут між проєкцією сторони CD і прямою AD дорівнює 45° .

2

Перпендикуляри, проведені з даної точки до сторін правильного трикутника, рівні. Інша точка віддалена від цих перпендикулярів і від площини трикутника на 10 см , а від першої точки — на 26 см . Знайдіть площу трикутника.

3

Діагональ прямокутника дорівнює 20 см . З точки, віддаленої від кожної з менших сторін прямокутника на $8\sqrt{5} \text{ см}$, до площини прямокутника проведено перпендикуляр завдовжки 16 см , основа якого лежить на одній з більших сторін. Знайдіть відстані від даної точки до більших сторін прямокутника.

С-12. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПЛОЩИН

Варіант А1

1

Пряма SA проходить через вершину прямокутника $ABCD$ і перпендикулярна до його сторін AB і AD . Доведіть перпендикулярність площин

SAD і ABC .

2

Площини рівнобедрених трикутників ABD і ABC зі спільною основою AB перпендикулярні.

Знайдіть CD , якщо $AD = \sqrt{31}$ см, $AB = 6$ см, $\angle ACB = 60^\circ$.

3

Дано дві перпендикулярні площини α і β .

Точка A віддалена від площини α на 8 см, а від лінії перетину площин — на 17 см. Знайдіть відстань від точки A до площини β .

Точка A віддалена від лінії перетину цих площин на $8\sqrt{2}$ см і знаходиться на однаковій відстані від α і β . Знайдіть цю відстань.

Варіант Б1

1

Точка S рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$. Доведіть перпендикулярність площин SAC і SBD .

2

Квадрат $ABCD$ і прямокутник AB_1C_1D зі спільною стороною AD лежать у двох перпендикулярних площинах.

Знайдіть площу квадрата, якщо $AB_1 = 8$ см, $CB_1 = 10$ см.

Варіант А2

1

Пряма SO проходить через точку перетину діагоналей ромба $ABCD$ і перпендикулярна до кожної з них. Доведіть перпендикулярність площин SAC і SBD .

Варіант Б2

Знайдіть площу прямокутника, якщо площа квадрата дорівнює 9 см², а $BC_1 = \sqrt{43}$ см.

3

Площини α і β перпендикулярні й перетинаються по прямій c . Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих a і b відповідно.

Знайдіть відстань між прямими a і c , якщо відстань між a і b дорівнює 30 см, а між b і c — 24 см.

Знайдіть відстань між прямими b і c , якщо відстань між a і c дорівнює 12 см, а між a і b — 20 см.

Варіант В1

1

Пряма MD перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$. Доведіть перпендикулярність площин MBC і MDC .

2

Прямокутник $ABCD$ перегнули по діагоналі BD так, що площини ABD і CBD виявилися перпендикулярними. Знайдіть відстань між точками A і C , якщо $AB = 30$ см, $BC = 40$ см.

3

Перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій c . Відрізок AB лежить у площині α і не перетинає площину β . Пряма b лежить у площині β і паралельна c . Точка M — середина відрізка AB . Знайдіть

відстань від точки M до прямої b , якщо точка A віддалена від прямої b на 13 см, а відстані від точок A і B до прямої c рівні 5 і 27 см відповідно.

Варіант В2

1

Пряма DA перпендикулярна до площини трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$). Доведіть перпендикулярність площин DAC і DBC .

2

Прямокутник $ABCD$ перегнули по діагоналі AC так, що площини ABD і ADC виявилися перпендикулярними. Знайдіть відстань між точками D і B , якщо $BD = 25$ см, $AB = 20$ см.

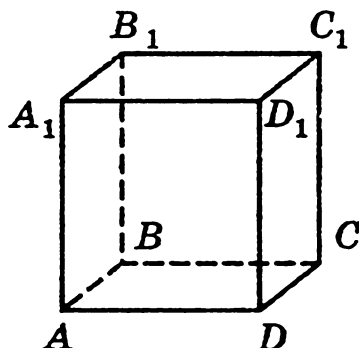
відстань від точки B до прямої c , якщо точки A і M віддалені від прямої b на 13 і 20 см відповідно, а відстань від точки A до прямої c дорівнює 5 см.

С-13*. ВІДСТАНЬ МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ

Варіант А1

Варіант А2

①



Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Побудуйте спільний перпендикуляр мимобіжних прямих

- а) A_1A і CD ;
б) A_1B і C_1D .

- а) C_1C і AB ;
б) AC і B_1D_1 .

②

Через вершину A рівностороннього трикутника ABC проведено пряму l , перпендикулярну до площини трикутника. Периметр трикутника дорівнює $24\sqrt{3}$ м. Знайдіть відстань між:

- а) прямою l і висотою BD ;
б) прямою l і стороною BC .

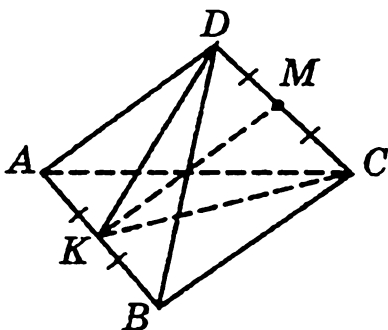
②

Через вершину B квадрата $ABCD$ проведено пряму l , перпендикулярну до площини квадрата. Площа квадрата дорівнює 18 м^2 . Знайдіть відстань між:

- а) прямою l і стороною AD ;
б) прямою l і діагоналлю AC .

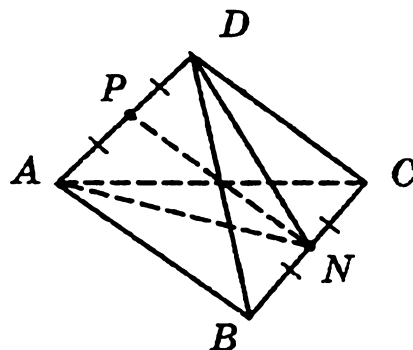
③

Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Відстань між будь-якими двома з даних точок дорівнює a (див. рисунок).



$$AK = KB = DM = MC.$$

Доведіть, що відрізок KM — відстань між AB і CD , і знайдіть його довжину.

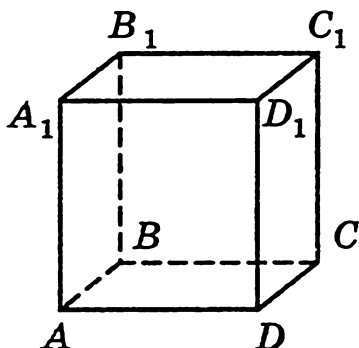


$$AP = PD = BN = NC.$$

Доведіть, що відрізок PN — відстань між AD і BC , і знайдіть його довжину.

Варіант Б1Варіант Б2

①



Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Побудуйте спільний перпендикуляр мимобіжних прямих:

- а) B_1D і C_1C ;
б) AC і B_1D .

- а) A_1C і D_1D ;
б) BD і A_1C .

②

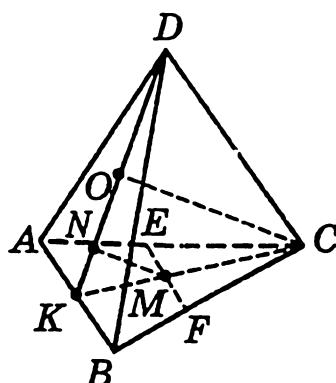
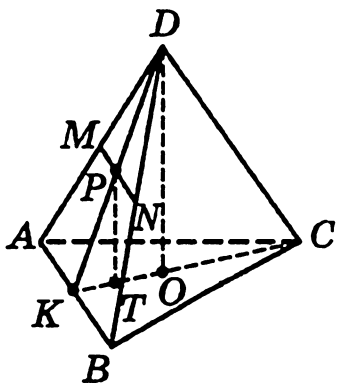
Через середину N катета AB прямокутного трикутника ABC ($\angle B = 90^\circ$) проведено пряму MN , перпендикулярну до площини ABC . Знайдіть відстань від прямої MN до гіпотенузи AC , якщо $AB = 40$ см, $AC = 50$ см.

②

Гіпотенуза AC прямокутного трикутника ABC лежить у площині α , яка віддалена від вершини B на 36 см. Знайдіть відстань між AC і прямою, яка проходить через точку B перпендикулярно до α , якщо $AB = 75$ см, $BC = 100$ см.

③

Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Відстань між будь-якими двома з даних точок дорівнює a (див. рисунок).



DO — перпендикуляр до площини ABC . Точки K, M і N — середини відрізків AB, AD і BD відповідно. $PT \parallel DO$. Доведіть, що відрізок PT — від-

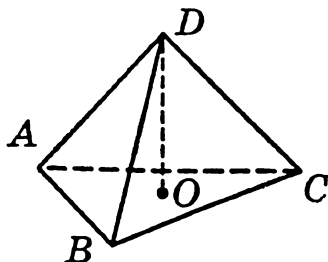
CO — перпендикуляр до площини ADB . Точки E, F і K — середини відрізків AC, BC і AB відповідно. $MN \parallel CO$. Доведіть, що відрізок MN — відстань

стань між MN і CK , і знайдіть його довжину.

між EF і DK , і знайдіть його довжину.

Варіант В1

①



Дано правильний тетраедр $ABCD$ (всі грані — правильні трикутники). Точка O — центр трикутника ABC (див. рисунок).

Побудуйте спільний перпендикуляр мимобіжних прямих:

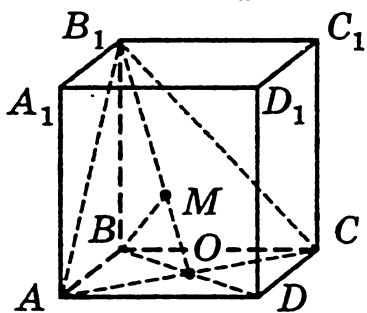
- а) DO і AB ;
б) AD і BC .

②

Точки M і N — середини сторін AB і CD прямокутника $ABCD$. Прямокутник перегнули по прямій MN так, щоб площини MNA і MNC були перпендикулярні. Знайдіть відстань між прямими AC і MN , якщо діагональ прямокутника дорівнює 5 см, а $MN = \sqrt{17}$ см.

③

Дано куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ з ребром a (див. рисунок).

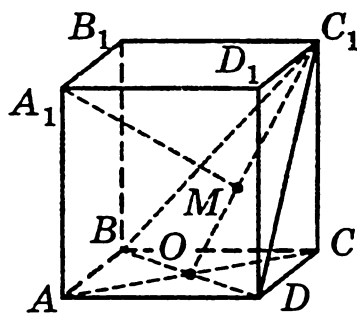


Точка M — центр трикутника AB_1C , точка O — центр квадрата $ABCD$. Доведіть, що відрізок MO — відстань між BM і AC , і знайдіть його довжину.

Варіант В2

②

Точки M і N — середини сторін BC і AD квадрата $ABCD$. Квадрат перегнули по прямій MN так, щоб площини MNB і MND були перпендикулярні. Знайдіть відстань між прямими MN і BD , якщо діагональ квадрата дорівнює $4\sqrt{2}$ см.



Точка M — центр трикутника BC_1D , точка O — центр квадрата $ABCD$. Доведіть, що відрізок MO — відстань між A_1M і BD , і знайдіть його довжину.

**С-14*. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ
І ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ
ПРЯМИХ І ПЛОЩИН**
(домашня самостійна робота)

Варіант 1**Варіант 2****1**

Розв'яжіть задачі на доведення:

а) Доведіть, що

якщо пряма паралельна площині, то відстані від даної прямої до всіх прямих площини, не паралельних до даної, однакові.

відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані від точки перетину одної з прямих з перпендикулярною до неї площиною до проекції другої прямої на цю площину.

б) Доведіть, що

якщо вершини паралелограма не належать даній площині, то суми відстаней від протилежних вершин паралелограма до даної площини рівні.

якщо вершини правильного трикутника не належать даній площині, то відстань від центра трикутника до неї дорівнює середньому арифметичному відстаней від вершин трикутника до цієї площини.

в) З точки A до площини проведено похилі AB і AC та перпендикуляр AD .

Доведіть, що якщо $\angle ABD + \angle ACD = 90^\circ$, то $AD^2 = DB \cdot DC$.

Доведіть, що якщо $\angle BAD + \angle CAD = 90^\circ$, то $DB : DC = AB^2 : AC^2$.

2

Знайдіть геометричне місце

а) прямих, що проходять через дану точку прямої перпендикулярно до цієї прямої;

б) прямих, що проходять через точку поза даною площиною паралельно цій площині;

в) точок, які ділять навпіл відрізки з одним кінцем у даній точці, а іншим — на даній площині, яка не містить цю точку.

а) прямих, що проходять через дану точку поза прямою перпендикулярно до даної прямої;

б) прямих, що перетинають одну з двох мимобіжних прямих і паралельні другій прямій;

в) середин відрізків, кінці яких лежать на кожній з двох даних паралельних площин.

3

Розв'яжіть задачі на побудову:

а) Дано дві мимобіжні прямі й точку, яка не належить їм. Побудуйте пряму, яка проходить через дану точку і перетинає дані прямі.

б) На даному зображенні прямокутної трапеції, до якої можна вписати коло, побудуйте зображення центра кола і точок його дотику до сторін трапеції, якщо гострий кут трапеції дорівнює 45° .

в) Дано дві площини, які перетинаються, і дві точки, кожна з яких лежить в одній з даних площин і не лежить в іншій. Побудуйте площину, яка проходить через дані точки і паралельна лінії перетину даних площин.

а) Дано три попарно мимобіжні прямі. Побудуйте пряму, яка перетинає дві з даних прямих і паралельна до третьої прямої.

б) На даному зображенні рівнобічної трапеції, до якої можна вписати коло, побудуйте зображення центра кола і точок його дотику до сторін трапеції, якщо тупий кут трапеції дорівнює 120° .

в) Дано дві паралельні площини і по одній точці в кожній з них. Побудуйте площину, яка проходить через дані точки і перпендикулярна до даних площин.

4

Розв'яжіть задачі на обчислення:

а) Точка поза площиною паралелограма віддалена від кожної з його вершин на 10 см і від кожної з його сторін — на 8 см. Знайдіть площу паралелограма і відстань від даної точки до його площини.

б) Точка поза площиною правильного трикутника віддалена від кожної з його вершин на $4\sqrt{7}$ см. Периметр трикутника дорівнює 36 см. Знайдіть відстань від сторони трикутника до прямої, яка проходить через протилежну вершину трикутника і дану точку.

а) Точка поза площиною трикутника віддалена від кожної з його вершин на 5 см і від кожної з його сторін — на 4 см. Знайдіть площу трикутника і відстань від даної точки до його площини.

б) Точка поза площиною квадрата віддалена від кожної з його вершин на $6\sqrt{2}$ см. Площа квадрата дорівнює 16 см^2 . Знайдіть відстань від сторони квадрата до прямої, яка проходить через дану точку перпендикулярно до протилежної сторони квадрата.

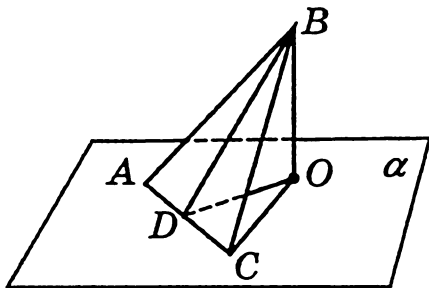
в) З точки до площини прямокутного трикутника з катетами 21 і 28 см на рівних відстанях від катетів проведено перпендикуляр, основа якого лежить на гіпотенузі. З тої ж точки до меншого катета проведено перпендикуляр завдовжки 15 см. Інша точка на першому перпендикулярі рівновіддалена від другого перпендикуляра й від площини трикутника. Знайдіть відстань між даними точками.

в) Катет прямокутного трикутника дорівнює 21 дм, а гіпотенуза — 35 дм. З точки поза площиною трикутника, рівновіддаленої від катетів, до площини трикутника проведено перпендикуляр завдовжки 9 дм з основою на гіпотенузі. Інша точка, що лежить на цьому перпендикулярі, рівновіддалена від першої точки і даного катета. Знайдіть відстань між даними точками.

К-3. ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПЛОЩИН

Варіант А1

①



Площина α проходить через основу AC рівнобедреного трикутника ABC . $BO \perp \alpha$, BD — висота трикутника (див. рисунок).

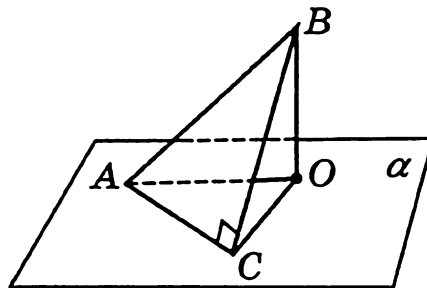
а) Доведіть перпендикулярність прямої AC і площини BDO .

б) Доведіть перпендикулярність площин BCO і α .

в) Знайдіть периметр ABC , якщо $BO = 3$ см, $DO = \sqrt{7}$ см, $CO = 4$ см.

Варіант А2

①



Площина α проходить через катет AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$), $BO \perp \alpha$ (див. рисунок).

а) Доведіть перпендикулярність прямої AC і площини BOC .

б) Доведіть перпендикулярність площин BAO і α .

в) Знайдіть периметр ABC , якщо $AC = 12$ см, $CO = 4$ см, $BO = 3$ см.

②

Точка, віддалена від площини квадрата на 8 см, рівновіддалена від його сторін. Площа квадрата дорівнює 144 см^2 . Знайдіть відстань від даної точки до сторін квадрата.

②

Точка віддалена від кожної зі сторін квадрата на 13 см. Діагональ квадрата дорівнює $10\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань від даної точки до площини квадрата.

③

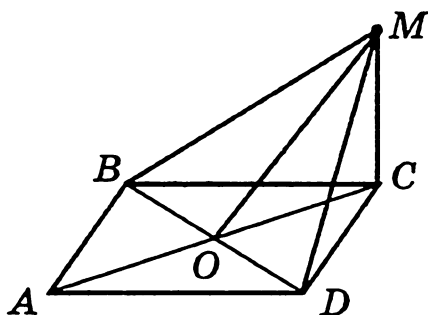
Перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій l . Відрізки OA і OB , які лежать у площинах α і β відповідно, перпендикулярні до прямої l , а їх спільний кінець — точка O — належить прямій l .

Знайдіть довжину відрізка AB , якщо $OA = 20$ см, а $CB : AB = 12 : 13$.

Знайдіть довжини відрізків OA і OB , якщо $AB = 40$ см, а $OA : OB = 3 : 4$.

Варіант Б1Варіант Б2

①



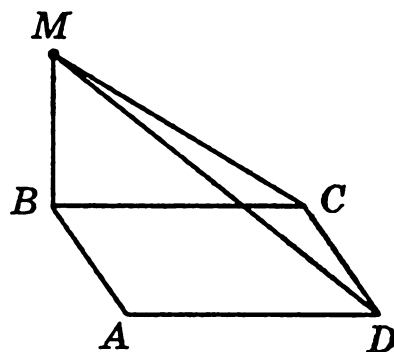
Через вершину C ромба $ABCD$ проведено пряму MC , перпендикулярну до сторін ромба BC і CD . O — точка перетину діагоналей ромба (див. рисунок).

а) Доведіть перпендикулярність прямої BD і площини MOC .

б) Доведіть перпендикулярність площин MBD і MOC .

в) Знайдіть площу ромба, якщо $MB = 10$ см, $MO = 8$ см, $BD : AC = 2 : 3$.

①



Через вершину B прямокутника $ABCD$ проведено пряму MB , перпендикулярну до сторін прямокутника AB і BC (див. рисунок).

а) Доведіть перпендикулярність прямої CD і площини MBC .

б) Доведіть перпендикулярність площин MCD і MBC .

в) Знайдіть площу прямокутника, якщо $MD = 13$ см, $MC = 12$ см, $AD : CD = 8 : 5$.

②

Сторони трикутника дорівнюють 25, 29 і 36 см. Точка поза площиною трикутника віддалена від кожної з його сторін на 17 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.

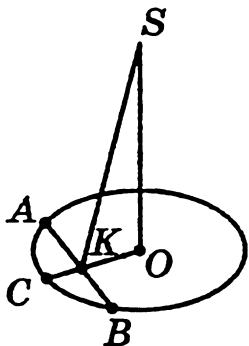
③

Кінці відрізка належать двом перпендикулярним площинам.

Сума відстаней від кінців відрізка до даних площин дорівнює 22 см, а його проекції на площини дорівнюють 20 і 24 см. Знайдіть довжину відрізка.

Варіант В1

①



SO — перпендикуляр до площини кола, який проходить через його центр — точку O . Через середину хорди AB — точку K — проведено радіус OC (див. рисунок).

а) Доведіть перпендикулярність прямої AB і площини SCO .

б) Доведіть перпендикулярність площин SAB і SCO .

в) Знайдіть кут ACB , якщо $SK = 4$ см, $SB = 5$ см, $OC = 6$ см.

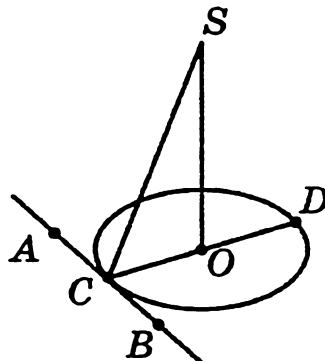
②

З точки до площини прямокутного трикутника з катетами 21

②

Сторони трикутника дорівнюють 13, 14 і 15 см. Точка, рівновіддалена від сторін трикутника, знаходиться на відстані 3 см від площини трикутника. Знайдіть відстань від даної точки до сторін трикутника.

①



SO — перпендикуляр до площини кола, який проходить через його центр — точку O . У площині кола через точку C проведено дотичну AB (див. рисунок).

а) Доведіть перпендикулярність прямої AB і площини SCD .

б) Доведіть перпендикулярність площин SAB і SCD .

в) Знайдіть кут ADC , якщо $SA = 10$ см, $SC = 8$ см, $OC = 3$ см.

②

З точки до площини прямокутного трикутника з катетами 24

і 28 см проведено перпендикуляр завдовжки 9 см. Основа перпендикуляра лежить на гіпотенузі трикутника, а відстані від даної точки до катетів однакові. Знайдіть ці відстані.

і 32 см проведено перпендикуляр, основа якого лежить на більшому катеті. Менший катет і гіпотенуза трикутника віддалені від даної точки на 20 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.

3

Кінці відрізка належать двом перпендикулярним площинам. Відомо, що

проекції відрізка на дані площини рівні. Середина відрізка віддалена від прямої перетину площин на $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстані від кінців відрізка до прямої перетину площин.

відстані від кінців відрізка до прямої перетину площин рівні $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань від середини відрізка до прямої перетину площин.

С-15. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ В ПРОСТОРИ

Варіант А1

1

Дано точки: $A(2;-4;0)$, $B(0;5;0)$,
 $C(0;0;-1)$, $D(-4;0;-2)$, $E(3;4;5)$

Укажіть серед них точки, які лежать

а) на осі z ;

а) на осі y ;

б) в площині xy .

б) в площині xz .

в) Знайдіть відстань

від точки E до площини xz .

від точки A до площини yz .

г) Визначте, чи перетинається з площиною xy

відрізок CE .

відрізок DE .

2

Дано точки

$A(2;-1;0)$ і $B(-4;2;2)$.

$A(-1;4;3)$ і $B(5;-2;0)$.

а) Знайдіть координати середини відрізка AB .

б) Точка B — середина відрізка AC .
Знайдіть координати точки C .

в) Знайдіть довжину відрізка AB .

Варіант А2

③

Дано трикутник ABC з вершинами
в точках

$A(7;3;-2)$, $B(1;3;6)$, $C(0;0;-1)$. $A(2;0;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;4;0)$.

- а) Знайдіть довжину середньої лінії
трикутника, паралельної
стороні AB . сторони BC .
- б) Доведіть, що трикутник ABC —
рівнобедрений, і вкажіть його прямокутний, і вкажіть його
основу. гіпотенузу.

④

Точка C є серединою відрізка AB , при-
чому

точка A лежить у площині yz , точка A лежить на осі z , а
а точка B — на осі x . точка B — у площині $xу$.

Знайдіть координати кінців відрізка і
його довжину, якщо

$C(2;6;3)$.

$C(3;2;6)$.

Варіант Б 1

Варіант Б 2

①

Дано точки $A(1;-2;3)$, $B(-1;2;-3)$,
 $C(-1;-2;-3)$, $D(-1;-2;3)$, $E(4;4;3)$.

Вкажіть серед них точки, які

- а) визначають пряму, пара- а) визначають пряму, паралель-
лельну осі x ; ну осі y ;
- б) лежать нижче площини $xу$. б) лежать вище площини $xу$.
- в) Знайдіть відстань
від точки E до осі абсцис. від точки E до осі ординат.
- г) Визначте, які координати площини
перетинає
відрізок AD . відрізок BC .

②

Дано точки

$A(-2;3;5)$ і $C(3;-1;2)$.

$A(1;2;2)$ і $C(4;-2;-1)$.

а) Точка C — середина відрізка AB .

Знайдіть координати точки B .

б) Знайдіть точку, рівновіддалену від
 A і C , яка лежить на осі

аплікат.

абсцис.

в) Точки A_1 і C_1 — основи перпендикулярів, проведених з точок A і C

до площини yz .

до площини xz .

Знайдіть A_1C_1 .

③

Дано трикутник ABC з вершинами в точках

$A(4;0;-2)$, $B(-16;8;-18)$, $C(2;-4;-6)$. $A(3;5;0)$, $B(3;1;0)$, $C(0;-6;0)$.

а) Знайдіть довжину медіани, проведеної з вершини C .

б) Знайдіть координати точки D , якщо $ABCD$ — паралелограм.

④

Доведіть, що точки

$M(1;7;5)$, $N(-5;4;-7)$, $K(-3;5;-3)$ $M(6;-1;0)$, $N(3;1;-1)$, $K(0;3;-2)$

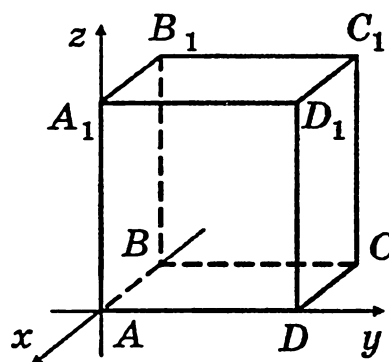
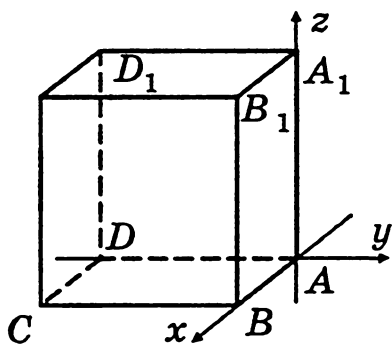
лежать на одній прямій.

Яка з них лежить між двома іншими?

Варіант В1

①

Одна з вершин куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ збігається з початком координат, а три його ребра лежать на координатних осях (див. рисунок).



Ребро куба дорівнює 1.

а) Знайдіть координати точок A_1 , B , D_1 , C_1 .

б) Запишіть рівняння площин $A_1 B_1 C_1$ і $C_1 CD$.

в) Знайдіть довжину діагоналі DB_1 .

г) Вкажіть координати якої-небудь точки E , якщо відрізок $C_1 E$ перетинає

площини xz і yz , але не перетинає площину xy .

площини xy і yz , але не перетинає площину xz .

Варіант В2

②

Дано точки

 $C(-2;4;2)$ і $D(4;0;-2)$. $C(4;1;-1)$ і $D(0;5;5)$.

а) Точки C і D ділять відрізок AB на три рівні частини. Знайдіть координати кінців відрізка AB .

б) Знайдіть цілочисельні координати точки M , яка

лежить у площини xz і віддалена від C і D на 5.

лежить у площини yz і віддалена від C і D на 5.

в) Знайдіть площу трикутника CDM .

③

Дано точки

 $E(1;2;1)$, $F(2;4;-4)$, $K(4;1;-1)$. $E(8;2;-2)$, $F(4;8;-8)$, $K(2;4;2)$.

Ці точки є серединами сторін трикутника ABC . Знайдіть координати вершин трикутника ABC і вкажіть вершину, найближчу

до площини yz .

до площини xz .

④

Складіть рівняння сфери з діаметром MN , якщо

 $M(3;-2;3)$, $N(-1;2;5)$. $M(-3;4;3)$, $N(5;-2;-1)$.

С-16. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР У ПРОСТОРИ (СИМЕТРІЯ, ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ, ПОДІБНІСТЬ)

Варіант А1

1

Дано точки $A(-1;3;2)$ і $B(5;-1;4)$.

Запишіть координати точок, симетричних

точці A

точці B

відносно:

а) початку координат;

б) точки B ;

б) точки A ;

в) площини yz ;

в) площини xu ;

г) осі x .

г) осі z .

2

Паралельне перенесення в просторі за-
дано формулами:

$$x' = x + 2, y' = y - 1, z' = z - 3. \quad x' = x - 4, y' = y + 2, z' = z - 1.$$

а) В яку точку при такому перенесенні переходить точка $A(1;0;-2)$?

б) Яка точка при такому перенесенні переходить в точку $B'(3;4;-5)$?

3

При гомотетії з центром у початку ко-
ординат і коефіцієнтом k трикутник
 ABC переходить у трикутник $A_1B_1C_1$.

а) Знайдіть $\angle C_1$, якщо

$$\angle A = 72^\circ, \angle B_1 = 38^\circ.$$

$$\angle A_1 = 100^\circ, \angle B = 28^\circ.$$

б) Знайдіть координати вершин трикут-
ника $A_1B_1C_1$, якщо

$$k=3, A(0;0;-2), \\ B(1;0;0), C(0;2;0).$$

$$k=2, A(4;0;0), \\ B(0;-3;0), C(0;0;2).$$

Варіант Б1

1

Дано точки

$$A(-2;1;4) \text{ і } B(6;-3;2).$$

$$A(3;-2;8) \text{ і } B(-1;4;0).$$

Запишіть координати точок, симетрич-
них середині відрізка AB відносно:

Варіант Б2

- а) площини xz ;
 б) осі ординат;
 в) точки A ;
 г) прямої AB .

- а) площини yz ;
 б) осі абсцис;
 в) точки B ;
 г) прямої AB .

2

При паралельному перенесенні точка

$$A(-3; -2; 1)$$

$$A(2; -4; 3)$$

переходить в точку

$$B(1; 0; 3).$$

$$B(-3; 1; 8).$$

а) В яку точку при такому перенесенні переходить точка $C(1; -1; 2)$?

б) Яка точка при такому перенесенні переходить у початок координат?

3

З точки S проведено три промені, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 , а паралельну їй площину β — в точках A_2, B_2 і C_2 відповідно.

а) Доведіть подібність трикутників $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$

за двома кутами.

за трьома сторонами.

б) Знайдіть невідомі сторони трикутників, якщо

$$A_1B_1 = 6 \text{ см}, B_1C_1 = 9 \text{ см}, \\ A_2C_2 = 22 \text{ см}, A_2B_2 = 12 \text{ см}.$$

$$B_1C_1 = 3 \text{ см}, A_1C_1 = 5 \text{ см}, \\ A_2C_2 = 15 \text{ см}, A_2B_2 = 18 \text{ см}.$$

Варіант В1

Варіант В2

1

Дано точки

$$A(-4; 3; 1) \text{ і } B(2; -1; 5).$$

$$A(6; -2; 1) \text{ і } B(2; 4; -3).$$

Запишіть координати точок, симетричних точці C — середині відрізка AB — відносно:

- а) точки $K(-2; 1; -3)$;
 б) середини відрізка AC ;
 в) площини $x = 1$;
 г) прямої перетину площин $x = y$ і $z = 0$.

- а) точки $K(2; -1; 3)$;
 б) середини відрізка CB ;
 в) площини $y = 2$;
 г) прямої перетину площин $x = y$ і $z = 0$.

2

Відрізок OA — радіус сфери з центром в точці O , де

$O(1;-1;3)$, $A(-1;3;-1)$.

$O(2;-3;4)$, $A(4;1;0)$.

При паралельному перенесенні центр сфери переходить в точку, діаметрально протилежну до точки A .

а) Складіть рівняння сфери, отриманої в результаті такого перенесення.

б) В яку точку при такому перенесенні переходить середина відрізка AO ?

3

Через точку S , яка лежить між паралельними площинами α і β , проведено три прямі, які перетинають площину α в точках A_1 , B_1 і C_1 , а площину β — в точках A_2 , B_2 і C_2 відповідно.

а) Доведіть подібність трикутників $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$

за трьома сторонами.

за двома сторонами і кутом між ними.

б) Знайдіть сторони трикутника $A_2B_2C_2$, якщо

$A_1B_1 = 5$ см, $A_1C_1 = 8$ см, $\angle A_2 = 60^\circ$, а периметр трикутника $A_2B_2C_2$ дорівнює 60 см.

$B_1C_1 = 7$ см, $A_1B_1 = 8$ см, $\angle B_2 = 120^\circ$, а периметр трикутника $A_2B_2C_2$ дорівнює 84 см.

С-17. КУТ МІЖ ПРЯМОЮ ТА ПЛОЩИНОЮ. КУТ МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ*

Варіант А1

①

З точки S до площини α проведено похилу SA .

Знайдіть довжину похилої і її проекції, якщо точка S віддалена від площини α на 6 см, а похила утворює з площиною кут 30° .

②

Через гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC проведено площину α . Знайдіть кут нахилу катета BC до площини α , якщо $AC = 24$ дм, $AB = 26$ дм, а точка C віддалена від площини α на 5 дм.

③

Через вершину A рівностороннього трикутника ABC проведено площину, паралельну стороні BC . Доведіть, що сторони AB і AC утворюють з цією площиною однакові кути.

④*

Через вершину B ромба $ABCD$ проведено пряму, яка утворює зі стороною BC кут 30° . Знайдіть кут між даною прямою і прямою AD .

Варіант Б1

①

З точки до площини проведено дві похилі.

Знайдіть відстань від даної точки до площини, якщо похилі

Варіант А2

Знайдіть довжину проекції похилої і відстань від точки S до площини α , якщо похила дорівнює 6 см і утворює з площиною кут 60° .

②

Через катет AB прямокутного трикутника ABC ($\angle A = 90^\circ$) проведено площину α . Знайдіть кут нахилу гіпотенузи до площини α , якщо $AC = 6$ дм, $AB = 8$ дм, а точка C віддалена від площини α на 5 дм.

③

Через вершину A квадрата $ABCD$ проведено площину, паралельну діагоналі BD . Доведіть, що сторони AB і AD утворюють з цією площиною однакові кути.

④*

Через вершину A трапеції $ABCD$ з бічними сторонами AB і CD проведено пряму під кутом 45° до сторони AD . Знайдіть кут між цією прямою і прямою BC .

Варіант Б2

Знайдіть відстань між основами похилих, якщо дана точка

утворюють з площиною кути, рівні 30° , між собою — кут 60° , а відстань між основами похилих дорівнює 8 дм.

②

Через вершину B рівнобедреного трикутника ABC проведено площину, паралельну до основи AC . Знайдіть кути нахилу бічних сторін до цієї площини, якщо основа AC дорівнює 12 см і віддалена від даної площини на 5 см, а площа трикутника дорівнює 48 см^2 .

③

Доведіть, що якщо точка поза площиною трикутника рівновіддалена від його вершин, то відрізки, які сполучають цю точку з вершинами трикутника, однаково нахилені до площини трикутника.

④*

Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайдіть кути між прямими

- а) AB і $C_1 D$;
б) AB_1 і BC .

віддалена від площини на $2\sqrt{2}$ дм, а похилі утворюють з площиною кути 45° , а між собою — прямий кут.

②

Через вершину A ромба $ABCD$ проведено площину, паралельну до діагоналі BD . Знайдіть кути нахилу сторін AB і AD до цієї площини, якщо діагональ BD дорівнює 16 см і віддалена від даної площини на 5 см, а площа ромба дорівнює 96 см^2 .

③

Доведіть, що якщо похилі, які з'єднують дану точку з вершинами трикутника, однаково нахилені до площини трикутника, то дана точка рівновіддалена від вершин трикутника.

- а) $A_1 B$ і $C_1 D$;
б) CD і $D_1 A$.

Варіант В1

①

Через сторону AC рівностороннього трикутника ABC проведено площину α . BO — перпендикуляр до площини α .

а) Обґрунтуйте кут між прямою BO і площиною ABC .

- б) Знайдіть площу трикутника ABC , якщо пряма BO утворює з площиною ABC кут 30° , а точка O віддалена від площини ABC на 3 см.

Варіант В2

- б) Знайдіть відстань від точки O до площини ABC , якщо пряма BO утворює з площиною ABC кут 60° , а площа трикутника ABC дорівнює $16\sqrt{3} \text{ см}^2$.

②

Через вершину A ромба $ABCD$ проведено площину, паралельну до діагоналі BD . Знайдіть кути нахилу прямих CB і CD до цієї площини, якщо пряма BD віддалена від даної площини на 4 дм, а периметр ромба дорівнює 32 дм.

③

Через вершину прямого кута проведено промінь, який утворює з його сторонами кути, рівні 60° . Знайдіть кут, який утворює цей промінь з площиною даного кута.

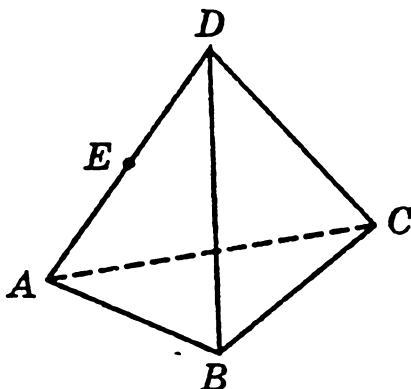
②

Площина проходить через вершину B квадрата $ABCD$ паралельно діагоналі AC . Знайдіть кути нахилу прямих DA і DC до даної площини, якщо пряма AC віддалена від неї на 2 дм, а площа квадрата дорівнює 8 дм^2 .

③

Три промені зі спільним початком попарно утворюють кути, рівні 60° . Знайдіть кут нахилу одного з променів до площини двох інших.

④*



Дано правильний тетраедр $ABCD$
(всі грані — правильні трикутники).
Точка E — середина AD (див. рисунок).
Знайдіть кут між прямими

- а) AC і BD ;
б) AB і CE .

- а) AB і DC ;
б) BE і AC .

С-18. КУТ МІЖ ПЛОЩИНАМИ. ПЛОЩА ОРТОГОНАЛЬНОЇ ПРОЕКЦІЇ МНОГОКУТНИКА

Варіант А1

①

Площини α і β перетинаються по прямій s . Знайдіть кут між α і β , якщо

точка, яка лежить у площині α , віддалена від площини β на $2\sqrt{2}$ м, а від прямої s — на 4 м.

②

Ортогональною проекцією прямокутного трикутника з катетами 12 і 16 см є трикутник. Кут між площинами трикутників дорівнює 60° . Знайдіть площу проекції.

③

Два рівнобедрених трикутники мають спільну основу і не належать одній площині. Основою перпендикуляра, проведеного з вершини першого трикутника до площини другого, є вершина другого трикутника.

Бічна сторона і основа другого трикутника дорівнюють 5 і 6 см відповідно, а кут між площинами трикутників дорівнює 60° . Знайдіть площу першого трикутника.

Варіант Б1

①

Площини α і β перетинаються по прямій s . Пряма d паралельна прямій s . Знайдіть кут між α і β , якщо

пряма d лежить у площині α , і відстань між прямими d і s в два рази більше відстані від прямої d до площини β .

Варіант А2

②

Ортогональною проекцією даного трикутника є правильний трикутник зі стороною $4\sqrt{3}$ см. Кут між площинами трикутників дорівнює 30° . Знайдіть площу даного трикутника.

Бічна сторона і висота першого трикутника дорівнюють 10 і 8 см відповідно, а кут між площинами трикутників дорівнює 60° . Знайдіть площу другого трикутника.

Варіант Б2

дорівнює $\sqrt{2}$.

②

Квадрат зі стороною 8 см і трикутник зі сторонами 13, 14 і 15 см лежать у площини α . Ортогональна проекція квадрата на площину β — паралелограм з площею 32 см^2 . Знайдіть площу ортогональної проекції трикутника на площину β .

③

Два рівнобедрених трикутники мають спільну основу завдовжки 20 см. Кут між площинами трикутників дорівнює 60° , а їх площі рівні 60 і 160 см^2 . Знайдіть відстані між вершинами трикутників.

②

Ромб з периметром 52 см і діагоналлю 10 см і прямокутний трикутник з катетами 6 і 8 см лежать у площині α . Ортогональна проекція трикутника на площину β — трикутник з площею 12 см^2 . Знайдіть площу ортогональної проекції ромба на площину β .

③

Два рівнобедрених трикутники мають спільну основу завдовжки 16 см, а їх площини утворюють кут 60° . Бічна сторона одного трикутника дорівнює 17 см, а іншого — $8\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань між вершинами трикутників.

Скільки розв'язків має задача?

Варіант В1

①

Площини α і β перетинаються по прямій c . Знайдіть кут між α і β , якщо

точка, віддалена від кожної з площин на 3 см, віддалена від прямої c на 6 см.

②

Ортогональною проекцією квадрата, одна зі сторін якого паралельна до площини проекції, є прямокутник зі сторонами 6 і $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть кут між площинами квадрата і прямокутника.

③

Менша основа трапеції, що дорівнює 24 см, є основою рівнобедреного трикутника, площи-

Варіант В2

проекції на площини α і β точки, віддаленої від прямої c на 12 см, віддалені від прямої c на $6\sqrt{3}$ см.

②

Ортогональною проекцією прямокутника зі сторонами 8 і $4\sqrt{3}$ см на площину, паралельну одній з його сторін, є квадрат. Знайдіть кут між площинами прямокутника і квадрата.

③

Основа рівнобедреного трикутника завдовжки 8 см є стороною ромба, площина якого

на якого складає кут 60° з площиною трапеції. Бічна сторона трикутника дорівнює 13 см, а більша основа і площа трапеції — 32 см і 84 см^2 . Знайдіть відстань від вершини трикутника до більшої основи трапеції.

складає кут 60° з площиною трикутника. Площі трикутника і ромба дорівнюють 12 і 40 см^2 відповідно. Знайдіть відстань від вершини трикутника до сторони ромба, паралельної площині трикутника.

Скільки розв'язків має задача?

С-19. ВЕКТОРИ В ПРОСТОРИ. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ В ПРОСТОРИ

Варіант А1

①

Дано точки $A(3; -1; 2)$ і $B(5; 1; 1)$.

а) Знайдіть координати і модуль вектора \overline{AB} .

вектора \overline{BA} .

б) Знайдіть координати точки C , якщо $\overline{AC}(-4; 0; 2)$.

$\overline{BC}(3; -2; 1)$.

в) Точка D лежить на осі y .

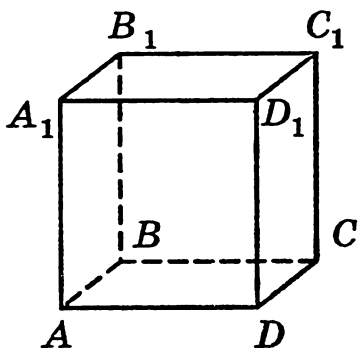
на осі x .

Знайдіть її координати, якщо

$$|\overline{BD}| = \sqrt{26}.$$

$$|\overline{AD}| = \sqrt{5}.$$

②



Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (див. рисунок).

Назвіть:

а) вектор з початком в точці A_1 , рівний вектору \overline{AB} ;

а) вектор з початком в точці D , рівний вектору $\overline{D_1 C_1}$;

б) суму векторів $\overline{A_1 C_1}$ і $\overline{C_1 C}$;

б) суму векторів \overline{AB} і $\overline{BB_1}$;

в) різницю векторів $\overline{BD_1}$ і $\overline{B_1 D_1}$.

в) різницю векторів $\overline{AC_1}$ і $\overline{CC_1}$.

3

Дано вектори $\vec{a}(-2; 3; 1)$ і $\vec{b}(4; -1; 2)$.

а) Знайдіть вектор

$2\vec{a} - \vec{b}.$

$\vec{a} + 3\vec{b}.$

б) При якому значенні y і z вектор $\vec{c}(8; y; z)$ і вектор \vec{a} колінеарні?і вектор \vec{b} колінеарні?

в) Визначте, чи збігаються в цьому випадку

напрямки векторів \vec{a} і \vec{c} .напрямки векторів \vec{b} і \vec{c} .г) Знайдіть координати вектора \vec{d} , якщовектори \vec{b} і \vec{d} співнаправлені і вектори \vec{a} і \vec{d} протилежно
і $|\vec{d}| = 2|\vec{b}|$.направлені і $|\vec{d}| = 3|\vec{a}|$.

4

Дано вектор $\vec{m}(-6; 4; 12)$.Знайдіть вектор \vec{n} , якийспівнаправлений з \vec{m} і має протилежно направлений з \vec{m}
модуль 7. і має модуль 28.Варіант Б1Варіант Б2

1

Дано точки $A(-1; -3; 2)$, $B(5; -1; -1)$,
 $C(3; 0; 2)$.

а) Знайдіть координати і модуль

вектора \vec{BA} .вектора \vec{CA} .б) Знайдіть координати точки D , якщо

$\vec{AD} = \vec{BC}.$

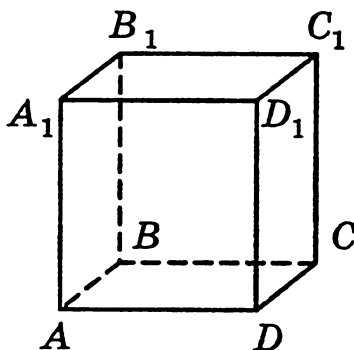
$\vec{AB} = \vec{CD}.$

в) Знайдіть координати точки F ,яка лежить на осі z , якщояка лежить на осі y , якщо

$|\vec{AF}| = |\vec{BC}|.$

$|\vec{CF}| = |\vec{AB}|.$

2



Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (див. рисунок).

Знайдіть:

- а) вектор з початком в точці C_1 , рівній вектору $\overline{B_1 A}$; а) вектор з кінцем в точці D , рівній вектору $\overline{B_1 C}$;
 б) суму векторів $\overline{AB}, \overline{AD}$ і $\overline{AA_1}$; б) суму векторів $\overline{CD}, \overline{CB}$ і $\overline{CC_1}$;
 в) різницю векторів $\overline{B_1 C}$ і \overline{AD} . в) різницю векторів $\overline{AC_1}$ і $\overline{DD_1}$.

3

Дано вектори $\overline{a}(4; -8; 2)$ і $\overline{b}(-6; 9; 3)$.

а) Знайдіть вектор

$$2\overline{a} - \frac{1}{3}\overline{b}.$$

$$2\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{a}.$$

- б) Знайдіть значення x і y , при яких вектори \overline{b} і $\overline{c} + \overline{d}$ колінеарні, якщо $\overline{c}(x; 2; 1), \overline{d}(-1; y; 5)$.
 вектори \overline{a} і $\overline{c} - \overline{d}$ колінеарні, якщо $\overline{c}(-1; y; -6), \overline{d}(x; 3; -2)$.

в) Порівняйте напрямки і довжини векторів

$$\overline{b} \text{ і } \overline{c} + \overline{d}.$$

$$\overline{a} \text{ і } \overline{c} - \overline{d}.$$

г) Знайдіть вектор \overline{e} , який задовольняє рівності

$$4\overline{e} - 2\overline{a} + \overline{b} = 0.$$

$$2\overline{e} - 3\overline{a} - 2\overline{b} = 0.$$

4

Не обчислюючи довжин відрізків, визначте, чи лежать на одній прямій точки

$$M(6; -1; 0), N(3; 1; -1), K(0; 3; -2).$$

$$M(1; 7; 5), N(-5; 4; -7), K(2; 8; 6).$$

Варіант В1

Варіант В2

1

Дано точки

$$A(-1; 2; 0) \text{ і } B(3; 6; -2).$$

$$A(3; 0; -1) \text{ і } B(1; -4; 3).$$

а) Знайдіть координати точки O , яка задовольняє рівності

$$\overline{AO} = \overline{OB}.$$

$$\overline{BO} = \overline{OA}.$$

б) Знайдіть координати і модуль вектора \overline{AO} .

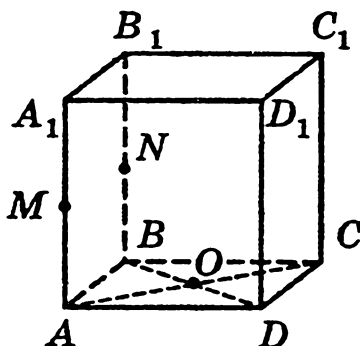
вектора \overline{BO} .

в) $ABCD$ — паралелограм. Знайдіть координати точок C і D , якщо

точка C лежить на осі z , а точка D — в площині xy .

точка C лежить у площині xz , а точка D — на осі y .

②



Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

O — точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$. M і N — середини відрізків AA_1 і BB_1 (див. рисунок).

Побудуйте:

а) вектор з початком в точці A_1 , рівний вектору \overline{MO} ;

а) вектор з початком в точці D , рівний вектору \overline{ON} ;

б) суму векторів \overline{AN} , $\overline{MD_1}$ і $\overline{B_1B}$;

б) суму векторів \overline{BD} , \overline{CN} і $\overline{MB_1}$;

в) різницю векторів $\frac{1}{2}\overline{DD_1}$ і $\overline{A_1C_1}$.

в) різницю векторів $2\overline{AM}$ і \overline{DN} .

③

Дано вектори

$\overline{a}(-4; 0; 6)$, $\overline{b}(9; -3; -3)$, $\overline{c}(1; -1; 3)$.

а) Знайдіть

$$\left| 2\overline{a} - \frac{1}{3}\overline{b} - \overline{c} \right|.$$

$$\left| \frac{1}{2}\overline{a} - \overline{b} + 3\overline{c} \right|.$$

б) Знайдіть вектор \overline{d} , паралельний площині xz , якщо вектори $\overline{a} + \overline{b}$ і $\overline{c} - \overline{d}$ колінеарні.

паралельний площині yz , якщо вектори $\overline{a} - \overline{b}$ і $\overline{c} + \overline{d}$ колінеарні.

в) Порівняйте напрямки і довжини векторів

$$\vec{a} + \vec{b} \text{ і } \vec{c} - \vec{d}.$$

$$\vec{a} - \vec{b} \text{ і } \vec{c} + \vec{d}.$$

г) Знайдіть вектор \vec{e} , якщо

$$3\vec{e} - 0,5\vec{a} = 4\vec{c} + \vec{e}.$$

$$2\vec{e} + \frac{1}{3}\vec{b} = 3\vec{c} - \vec{e}.$$

4

Дано точки

$$M(1; y; 5), N(x; 8; 6), K(-5; 4; 7). \quad M(0; 3; -2), N(x; 1; -1), K(6; y; 0).$$

Знайдіть x і y , якщо відомо, що дані точки лежать на одній прямій.

С-20. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ У ПРОСТОРИ

Варіант А1

Варіант А2

1

Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо:

а) $\vec{a}(2; -1; 4), \vec{b}(3; 2; -1)$;

а) $\vec{a}(-2; 3; 1), \vec{b}(-1; -1; 4)$;

б) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \cos(\widehat{a, b}) = \frac{1}{6}$.

б) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5, \cos(\widehat{a, b}) = 0,1$.

2

Знайдіть значення m , при якому вектори \vec{a} і \vec{b} перпендикулярні, якщо

$$\vec{a}(2; -4; m), \vec{b}(3; -1; 5).$$

$$\vec{a}(3; 2; -1), \vec{b}(2; m; -2).$$

3

Дано точки $A(3; -2; 1), B(-2; 1; 3), C(1; 3; -2)$. Знайдіть кут між векторами

$$\vec{BA} \text{ і } \vec{BC}.$$

$$\vec{AB} \text{ і } \vec{AC}.$$

4

Відомо, що \vec{a} і \vec{b} — одиничні взаємно перпендикулярні вектори. Знайдіть

$$(\vec{a} + 2\vec{b})(4\vec{a} - \vec{b}).$$

$$(\vec{a} - 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}).$$

5

Дано трикутник ABC з вершинами $A(2;2;2)$, $B(2;2;0)$, $C(2;0;2)$. $A(6;-4;2)$, $B(3;2;3)$, $C(3;-5;-1)$.Доведіть, що даний трикутник —
прямокутний, і назвіть його прями́й кут.Варіант Б1Варіант Б2

1

Знайдіть скалярний добуток векторів

а) \vec{a} і \vec{b} , якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, а) \vec{a} і \vec{b} , якщо $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 8$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$; $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$;б) \vec{AB} і \vec{BC} , якщо $A(2;-1;0)$, б) \vec{AC} і \vec{CB} , якщо $A(3;4;-1)$,
 $B(-3;2;4)$, $C(0;1;5)$. $B(2;0;1)$, $C(-1;-1;0)$.

2

Дано вектори $\vec{a}(1;2;t)$ і $\vec{b}(-2;-1;2t)$.Знайдіть значення t , при якихвектори \vec{a} і $\vec{a} - \vec{b}$ перпендику- вектори \vec{a} і $\vec{b} - \vec{a}$ перпендику-
лярні. лярні.

3

Дані точки $A(3;-2;1)$, $B(-2;1;3)$,
 $C(1;3;-2)$.Знайдіть кут BAC .Знайдіть кут CAB .

4

Знайдіть $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

5

Дано точки $A(1;2;0)$, $B(1;0;2)$, $C(1;3;5)$,
 $D(4;2;0)$. Доведіть, щопряма AD перпендикулярна площині ABC . пряма BC перпендикулярна площині ABD .

Варіант В1

①

Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо:

а) $\vec{a}(2;-1;-2)$, $|\vec{b}| = 8$,

$(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$;

б) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 6$.

а) $|\vec{a}| = 4$, $\vec{b}(5;1;-1)$,

$(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$;

б) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 4$.

②

Дано вектори $\vec{a}(2;-2;4)$ і $\vec{b}(-1;1;2)$.

Знайдіть значення λ , при яких вектор $\vec{a} + \lambda\vec{b}$

перпендикулярний до вектора \vec{a} .

перпендикулярний до вектора \vec{b} .

③

Трикутник ABC має вершини в точках $A(3;-2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(1;3;-2)$. Знайдіть зовнішній кут трикутника

при вершині C .

при вершині A .

④

Знайдіть кут між одиничними векторами \vec{a} і \vec{b} , якщо

вектори $0,4\vec{a} - 2\vec{b}$ і $3\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні.

вектори $\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{a} - 0,2\vec{b}$ перпендикулярні.

⑤

Знайдіть площу

трикутника ABC , якщо $A(5;3;-2)$, $B(4;-1;2)$, $C(1;3;-2)$.

паралелограма $ABCD$, якщо $A(-1;2;-6)$, $B(0;4;4)$, $C(-2;3;2)$, $D(-3;1;4)$.

**С-21*. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ В ПРОСТОРИ.
РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ
(домашня самостійна робота)**

Варіант 1**①**

Визначте, на які відрізки

площина xz ділить відрізок AB , якщо $A(-1;4;3)$, $B(2;-2;9)$.

площина yz ділить відрізок AB , якщо $A(-6;3;-1)$, $B(2;-5;3)$.

②

Відрізок AE розділений точками B , C і D на чотири рівні частини. Знайдіть невідомі координати точок, якщо

$A(-3;2;5)$, $D(6;-1;-4)$.

$B(-4;1;6)$, $E(5;-2;0)$.

③

Запишіть рівняння сфери з центром в точці $O(5;12;9)$, якщо сфера дотикається до

а) площини yz ;
б) осі аплікату.

а) площини xu ;
б) осі абсцис.

④

Знайдіть центр і радіус кола, по якому сфера $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$ перетинається

з площиною $x = -3$.

з площиною $y = -5$.

⑤

Розкладіть вектор

$\vec{n}(1; -8; 2)$

$\vec{n}(-5; 8; 9)$

а) по одиничних векторах

$\vec{e}_1(1; 0; 0)$, $\vec{e}_2(0; 1; 0)$, $\vec{e}_3(0; 0; 1)$;

б) по векторах

$\vec{a}(4; -3; -5)$, $\vec{b}(1; 3; -2)$, $\vec{c}(-1; 1; 3)$.

⑥

Відомо, що

$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$.

$|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$.

Варіант 2

Обчисліть:

а) кут між векторами \vec{a} і \vec{b} ;

б) $|2\vec{a} - \vec{b}|$.

б) $|\vec{a} - 3\vec{b}|$.

7

Знайдіть кути, які утворює

вектор $\vec{a}(1; -1; \sqrt{2})$

вектор $\vec{a}(\sqrt{2}; 1; -1)$

з координатними променями Ox , Oy і Oz .

8

Використовуючи властивості векторів, доведіть для будь-яких чисел x_1, x_2, x_3 і y_1, y_2, y_3

нерівність Коші-Буняковського

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

нерівність Мінковського

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + (x_3 + y_3)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

9

Складіть рівняння площини, яка:

а) проходить через

вісь абсцис і точку $M(3; 1; -2)$;

вісь ординат і точку $M(-1; 2; 3)$;

б) проходить через

точки $K(2; -5; 1)$ і $N(-1; 2; -5)$ і паралельна осі ординат;

точки $K(1; 3; -4)$ і $N(0; 1; 5)$ і паралельна осі аплікат;

в) паралельна площині

$2x - y - 3z + 7 = 0$ і проходить через точку $B(2; 1; -1)$;

$x + 4y - 2z - 5 = 0$ і проходить через точку $B(-1; 2; -3)$;

г) перпендикулярна до вектора \overline{AB} і проходить

через точку A , якщо $A(2; 3; -4)$, $B(-1; 2; 2)$.

через точку B , якщо $A(-2; 1; 3)$, $B(1; -2; 4)$.

10

Дано вектор $\vec{a}(6; -12; t)$ і площину α , яка задана рівнянням

$2x - 4y + 6z - 3 = 0$.

$-3x + 6y - 2z - 5 = 0$.

Визначте, при якому значенні t вектор

\vec{a} і площина α

а) перпендикулярні;

б) паралельні.

⑪

Площину β задано рівнянням

$$5x + y - 3z - 15 = 0.$$

$$4x - 3y + 2z - 12 = 0.$$

Знайдіть відрізки, які відтинає площина β на осях координат, і побудуйте лінії перетину площини β з координатними площинами.

⑫

Знайдіть відстань від початку координат до площини

$$6x - 2y + 3z + 49 = 0$$

$$x - 2y + 2z - 9 = 0$$

і точку, симетричну початку координат відносно даної площини.

С-22*. КУТИ МІЖ ПРЯМИМИ І ПЛОЩИНАМИ

(домашня самостійна робота)

Варіант 1

Варіант 2

①

Похила утворює з площиною кут α . В даній площині через основу похилої проведено пряму, яка утворює

з похилою кут β . Знайдіть кут, який утворює ця пряма з проекцією похилої.

з проекцією похилої кут β . Знайдіть кут між похилою і даною прямою.

②

Точка S віддалена від кожної з вершин квадрата $ABCD$ на відстань, що дорівнює стороні квадрата. Знайдіть кут між площинами:

а) SAB і SBC ;а) SAB і SCD ;б) SAB і ABC .б) SCD і BCD .

③

Трикутник ABC ортогонально спроектовано на площину α , після чого отриману проекцію ортогонально спроектовано на площину ABC . В результаті отримано трикутник $A_1B_1C_1$.

Знайдіть кут між площинами ABC і α , якщо площа трикутника $A_1B_1C_1$ складає

75 % площі трикутника ABC . 25 % площі трикутника ABC .

④

Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Відрізки AC і BD перетинаються в точці O . Знайдіть кут між прямими

A_1D і C_1O .

A_1O і B_1C .

⑤

Площина γ має з площиною α спільні точки A і C , а з паралельною α площиною β — спільні точки B і D .

Доведіть, що якщо відрізки AB і CD рівні, то кут між прямими AB і CD не залежить від розміщення точок на даних площинах.

Доведіть, що якщо відрізки AD і BC утворюють з будь-якою з даних площин рівні кути, то кут між прямими AD і BC не залежить від розміщення даних точок на даних площинах.

⑥

Рівнобедрені прямокутні трикутники ABC і ADC мають спільну гіпотенузу AC завдовжки 4 см. Ортогональною проекцією просторового чотирикутника $ABCD$ на площину α є рівнобедрений трикутник $A_1D_1C_1$, в якому $A_1C_1 = 4$ см, $A_1D_1 = D_1C_1 = \sqrt{6}$ см. Знайдіть кут між площинами даних трикутників. Скільки розв'язків має задача?

⑥

Рівносторонні трикутники ABC і ADC мають спільну сторону AC завдовжки 4 см. Ортогональною проекцією просторового чотирикутника $ABCD$ на площину a є рівнобедрений трикутник $A_1B_1C_1$, в якому $A_1C_1 = 4$ см, $A_1B_1 = B_1C_1 = \sqrt{7}$ см. Знайдіть кут між площинами даних трикутників. Скільки розв'язків має задача?

К-4. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ В ПРОСТОРИ

Варіант А1

Варіант А2

①

Дано трикутник ABC з вершинами

$A(11; -2; -9)$, $B(2; 6; -4)$,
 $C(8; -6; -8)$.

$A(11; -2; -9)$, $B(2; 6; -4)$,
 $C(14; 2; -10)$.

- а) Знайдіть координати середини відрізка BC .
- б) Знайдіть координати і модуль вектора \overline{BC} .
- в) Знайдіть вектор $\overline{AB} + \overline{BC}$.
- г) Доведіть перпендикулярність векторів \overline{AB} і \overline{AC} .

②

Дано вектор $\overline{a}(2; 1; -2)$.

а) Відомо, що $\overline{a} = \overline{EF}$.

Знайдіть координати

точки E , якщо $F(4; -1; -2)$.

точки F , якщо $E(2; 0; 3)$.

б) Знайдіть значення m і n , при яких вектори \overline{a} і \overline{b} колінеарні, якщо

$\overline{b}(-4; m; n)$.

$\overline{b}(m; n; -4)$.

в) Знайдіть координати і модуль вектора \overline{c} , якщо

$\overline{c} = 2\overline{a}$.

$\overline{c} = -3\overline{a}$.

③

Дано вектори

$\overline{a}(-3; 0; 4)$ і $\overline{b}(1; -2; 2)$.

$\overline{a}(-2; -2; 1)$ і $\overline{b}(0; -4; 3)$.

а) Знайдіть вектор

$\overline{c} = \frac{1}{2}\overline{a} - 3\overline{b}$.

$\overline{c} = 4\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b}$.

б) Знайдіть $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} - \overline{b})$.

в) Знайдіть косинус кута між векторами \overline{a} і \overline{b} .

④

Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, і знайдіть центр його симетрії, якщо

$A(-2; -4; 1), B(-5; -6; -1),$
 $C(4; 10; 3), D(7; 12; 5).$

$A(-1; 4; 3), B(-3; 6; -5),$
 $C(3; 0; -5), D(5; -2; 3).$

Варіант Б1**Варіант Б2****1**

Дано точки $A(3; -1; 2)$ і $B(2; 1; -4)$.

а) Знайдіть координати точки D , якщо
 A — середина відрізка BD . B — середина відрізка AD .

б) Порівняйте модулі векторів \overline{AC} і
 \overline{BC} , якщо

$C(1; 5; -2).$

$C(-4; 3; 2).$

в) Знайдіть вектор

$$\frac{1}{2}(\overline{BA} + \overline{BC}).$$

$$\frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{AB}).$$

г) На осі x знайдіть точку M таку, що
 трикутник ABM — прямокутний
 з гіпотенузою AM . з гіпотенузою BM .

2

Дано вектор $\vec{a}(4; 2; -4)$.

а) Відомо, що

$$\vec{a} = 2\overline{AB}, A(1; 2; -3).$$

$$\vec{a} = -\frac{1}{2}\overline{AB}, B(3; -2; 1).$$

Знайдіть координати

точки B .

точки A .

б) Знайдіть координати вектора \vec{c} , який
 протилежно напрямлений з співнаправлений з вектором
 вектором \vec{a} , якщо $|\vec{c}| = 3$. \vec{a} , якщо $|\vec{c}| = 12$.

в) Знайдіть модуль вектора \vec{b} , якщо

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6, (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60^\circ.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12\sqrt{3}, (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 30^\circ.$$

3

Дано вектори

$$\vec{a}(1; -1; 2) \text{ і } \vec{b}(6; 0; 4).$$

$$\vec{a}(-4; 2; -8) \text{ і } \vec{b}(-1; 1; 2).$$

а) Знайдіть

$$\left| 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \right|.$$

$$\left| \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} \right|.$$

б) Знайдіть $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} - 3\bar{b})$

в) Порівняйте кут між векторами \bar{a} і \bar{b} з прямим кутом.

④

Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник, і знайдіть точку перетину осей його симетрії, якщо

$A(4; -4; 3)$, $B(1; 2; 4)$,
 $C(-2; 1; 1)$, $D(1; -5; 0)$.

$A(-1; 5; -4)$, $B(3; 2; 4)$,
 $C(6; -2; 1)$, $D(2; 1; -7)$.

Варіант В1

Варіант В2

①

Дано точки $A(-3; 2; 1)$ і $B(5; -2; 7)$.

а) Знайдіть на відрізку AB точку M таку, що

$$AM : MB = 3 : 1.$$

$$AM : MB = 1 : 3.$$

б) Знайдіть координати точки C , якщо

$$|\overline{AC}| = |\overline{BC}| \text{ і точка } C \text{ лежить}$$

на осі абсцис.

на осі ординат.

в) Знайдіть вершину D трикутника ABD , якщо

середина сторони AD лежить на осі z , а середина сторони BD — в площині xy .

середина сторони AD лежить в площині yz , а середина сторони BD — на осі x .

г) Знайдіть вектор

$$\frac{1}{2}(\overline{DA} - \overline{DB}).$$

$$\frac{1}{2}(\overline{DB} - \overline{DA}).$$

②

Дано вектор $\bar{a}(-1; 2; 2)$.

а) Знайдіть координати точок A і B , якщо

$\overline{AB} = 2\bar{a}$, і середина відрізка AB — точка $O(0; -1; 3)$.

$\overline{AB} = -2\bar{a}$, і середина відрізка AB — точка $O(-2; 1; 0)$.

б) Знайдіть координати вектора \bar{b} , колінеарного до вектора \bar{a} , якщо

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = -18.$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 27.$$

в) Знайдіть кут між векторами \bar{a} і \bar{c} , якщо

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = -3\sqrt{3}, |\bar{c}| = 2.$$

$$\bar{a} \cdot \bar{c} = -6, |\bar{c}| = 4.$$

③

Дано вектори $\bar{a}(2; -2; 1)$ і $\bar{b}(8; 4; 1)$.

а) Знайдіть вектор \bar{c} , якщо

$$2\bar{c} + 3\bar{a} - 5\bar{b} = 0.$$

$$5\bar{a} - 2\bar{b} + 3\bar{c} = 0.$$

б) Знайдіть

$$(3\bar{a} - \bar{b})^2.$$

$$(\bar{a} - 2\bar{b})^2.$$

в) Знайдіть площу

паралелограма,

трикутника,

побудованого на векторах

$$\bar{a} \text{ і } 2\bar{b}.$$

$$2\bar{a} \text{ і } \bar{b}.$$

④

Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ —

рівнобічна трапеція, якщо

$$A(6; -4; 2), B(1; -1; 4),$$

$$C(-1; 4; 1), D(2; 6; -4).$$

прямокутна трапеція, якщо

$$A(10; -6; 4), B(14; -4; 5),$$

$$C(17; -8; 1), D(16; -14; -4).$$

К-5. КУТ МІЖ ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ. КУТ МІЖ ПЛОЩИНАМИ

Варіант А1

①

Через вершину A до площини квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр MA .

Кут між прямою MC і площиною квадрата дорівнює 45° , а $MA = 4\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу квадрата.

Діагональ квадрата дорівнює $2\sqrt{2}$ см, а пряма MB нахилена до площини квадрата під кутом 45° . Знайдіть відстань від точки M до площини квадрата.

②

Площини α і β перетинаються по прямій s . Через точку M , яка лежить на прямій s , в даних площинах проведено

Варіант А2

відрізки AM і BM , перпендикулярні до прямої s .

Знайдіть AM , якщо $AB = BM = 2$ дм, а кут між площинами α і β дорівнює 60° .

3

Гіпотенуза AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC лежить у площині α . Кут між площинами ABC і α дорівнює 45° , а ортогональна проекція трикутника ABC на площину α має площу $16\sqrt{2}$ см². Знайдіть відстань від точки C до площини α .

Відрізки AM і AB рівні. Знайдіть їх довжини, якщо $BM = 4$ дм, а кут між площинами α і β дорівнює 60° .

3

Сторона AC рівностороннього трикутника ABC лежить у площині α , а вершина B віддалена від цієї площини на 3 см. Кут між площинами ABC і α дорівнює 30° . Знайдіть площу ортогональної проекції трикутника ABC на площину α .

Варіант Б1

1

З точки, віддаленої від даної площини на 6 см, до площини проведено дві похилі. Знайдіть відстань між основами похилих, якщо

похилі утворюють з площиною кут 45° і 60° , а між собою — прямий кут.

2

Площини α і β перетинаються по прямій s . Через точку M , яка лежить на прямій s , у площині α проведено відрізок MA .

Знайдіть його довжину, якщо точка A віддалена від площини β на $\sqrt{2}$ см, кут між відрізком MA і прямою s дорівнює 45° , а кут між даними площинами дорівнює 30° .

3

Сторона AD квадрата $ABCD$ лежить у площині α , а площина квадрата складає з площиною

Варіант Б2

похилі утворюють з площиною кут 30° і 45° , а кут між їх проекціями — прямий.

Знайдіть відстань від точки A до прямої s , якщо кут між даними площинами дорівнює 30° , а відрізок MA має довжину $8\sqrt{2}$ см і складає з площиною β кут 45° .

3

Сторона AD прямокутника $ABCD$ лежить у площині α , яка складає з площиною пря-

щиною α кут 60° . Знайдіть відстань від прямої BC до площини α , якщо ортогональна проекція квадрата на площину α має площу 18 м^2 .

мокутника кут 60° . Пряма BC віддалена від площини α на $4\sqrt{3}$ дм. Знайдіть площу даного прямокутника, якщо його ортогональна проекція на площину α — квадрат.

Варіант В1

①

З точки до площини проведено дві похилі, які утворюють з даною площиною кути, один з яких удвічі більше за інший. Знайдіть відстань від даної точки до площини, якщо

довжини похилих дорівнюють 6 і $2\sqrt{3}$ см.

②

Ортогональною проекцією ромба з діагоналями 5 і 10 дм на площину, яка містить одну з його вершин, є квадрат. Знайдіть кут між площинами ромба і квадрата.

③

Площини α і β перетинаються по прямій s під кутом 45° . Через точку M , яка лежить на прямій s , в площинах α і β проведено два промені.

Знайдіть кут між цими променями, якщо один з них перпендикулярний до прямої s , а інший утворює з нею кут 45° , якщо шуканий кут — гострий.

Варіант В2

проекції похилих на цю площину дорівнюють $\sqrt{3}$ і $3\sqrt{3}$ см.

②

Ортогональною проекцією квадрата на площину, яка містить одну з його вершин, є ромб з діагоналями $2\sqrt{2}$ і $4\sqrt{2}$ дм. Знайдіть кут між площинами ромба і квадрата.

Кут між цими променями дорівнює 30° . Один з променів перпендикулярний до прямої s . Знайдіть кут між прямою s і другим променем.

К-6. РІЧНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА ЗА 10 КЛАС

Варіант А1

①

Точки A , B , C і D не лежать в одній площині. Доведіть, що

пряма, яка проходить через середини відрізків DA і DB , паралельна площині ABC .

②

З точки до площини проведено дві похилі.

Одна з похилих дорівнює 10 см і має проекцію завдовжки 8 см. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з даною площиною кут 30° .

③

SC — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle B = 90^\circ$). Знайдіть відстань від точки S до прямої AB , якщо $AC = 13$ см, $AB = 5$ см, $SC = 16$ см.

④

Площини α і β перетинаються по прямій c . У площині α проведено пряму a , перпендикулярну до прямої c . Доведіть, що кут між площинами α і β дорівнює куту нахилу прямої a до площини β .

Варіант Б1

①

Прямокутник $ABCD$ і трикутник ABM не лежать в одній площині. Точки E і F — сере-

Варіант А2

пряма, яка проходить через середини відрізків AB і AC , паралельна площині DBC .

Одна з похилих дорівнює 16 см і утворює з даною площиною кут 30° . Знайдіть довжину другої похилої, якщо її проекція на дану площину дорівнює 6 см.

③

SA — перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$. Знайдіть його довжину, якщо $AB = 5$ см, $BD = 13$ см, а точка S віддалена від прямої CD на 15 см.

④

Пряма l лежить у площині α . Пряма b не лежить у площині α і перетинається під прямим кутом з прямою l . Через прямі b і l проведено площину β . Доведіть, що кут між прямою b і площиною α дорівнює куту між площинами α і β .

Варіант Б2

①

Точка M не лежить у площині ромба $ABCD$. Точки E і F — середини відрізків MB і MC .

дини відрізків AM і BM . Визначте вид чотирикутника $DEFC$.

Визначте вид чотирикутника $Aefd$.

②

З точки до площини проведено дві похилі, які утворюють з даною площиною кути 30° і 45° . Знайдіть відстань між основами похилих, якщо

більша похила дорівнює $2\sqrt{6}$ см, а кут між похилими — прямий.

проекція меншої похилої дорівнює 3 см, а кут між проекціями похилих — прямий.

③

Точка віддалена від кожної з вершин правильного трикутника на 10 см, а від кожної з його сторін — на $\sqrt{73}$ см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.

③

Точка віддалена від кожної з вершин квадрата на $\sqrt{41}$ см, а від кожної з його сторін — на 5 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини квадрата.

④

Пряма MA перпендикулярна до сторони AB і діагоналі AC ромба $ABCD$. Знайдіть кут між площинами MAB і MAD , якщо діагональ ромба BD дорівнює його стороні.

④

Пряма MB перпендикулярна до сторони AB і висоти BK ромба $ABCD$. Знайдіть кут між площинами MAB і MBC , якщо точка K — середина сторони AD .

Варіант В1

Варіант В2

①

Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть паралельність площин

AB_1D_1 і BDC_1 .

AD_1C і A_1C_1B .

②

З точки до площини проведено дві похилі.

Одна з них дорівнює 6 см і утворює з даною площиною кут 60° , а друга має довжину $2\sqrt{13}$ см. Знайдіть відстань між основами похилих, якщо кут між їх проекціями дорівнює 120° .

Одна з них має проекцію $3\sqrt{2}$ см і нахилена до даної площини під кутом 45° . Проекція другої похилої дорівнює $\sqrt{46}$ см. Знайдіть відстань між основами похилих, якщо кут між похилими дорівнює 60° .

3

Точка M рівновіддалена від сторін рівностороннього трикутника ABC .

Знайдіть кут між площинами MAV і ABC , якщо пряма MA нахилена до площини ABC під кутом α .

4

Через центр O кола, вписаного в рівнобедрений прямокутний трикутник ABC ($\angle B = 90^\circ$), проведено пряму MO , яка не лежить у площині ABC і перпендикулярна до катетів трикутника. Знайдіть кут між площинами AMO і CMO .

Знайдіть кут нахилу прямої MC до площини ABC , якщо кут між площинами MBC і ABC дорівнює α .

4

Через вершину A трикутника ABC проведено пряму MA , яка не лежить у площині ABC і перпендикулярна до сторони BC і медіани AK . Знайдіть кут між площинами MAV і MAC , якщо $BC = 2AK$.

Роботи

за 11-й клас

С-23. ДВОГРАННИЙ КУТ. ТРИГРАННИЙ І МНОГОГРАННИЙ КУТИ

Варіант А1

Варіант А2

①

Двогранний кут дорівнює 30° . Точка, яка належить одній з граней цього кута, віддалена від ребра кута на 12 см. Знайдіть відстань від даної точки до другої грані.

①

Двогранний кут дорівнює 45° . Точка, яка належить одній з граней цього кута, віддалена від другої грані на $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань від даної точки до ребра двогранного кута.

②

Відрізок AB лежить в одній з граней двогранного кута, причому точка B лежить на ребрі кута. Знайдіть величину двогранного кута, якщо

$AB = 7$ см, проекція AB на ребро кута дорівнює $\sqrt{17}$ см, а точка A віддалена від другої грані на 4 см.

точка A віддалена від ребра кута на 4 см, $AB = 7$ см, а його проекція на другу грань дорівнює $3\sqrt{5}$ см.

③

Визначте, чи можуть плоскі кути тригранного кута дорівнювати

100° , 120° і 135° .

60° , 20° і 30° .

Відповідь поясніть.

Варіант Б1

Варіант Б2

①

Площина γ , паралельна ребру двогранного кута, який дорівнює 60° , перетинає його грані по прямих, віддалених від ребра кута на 3 і 8 см. Знайдіть відстань між цими прямими.

①

Площина γ перетинає грані двогранного кута, який дорівнює 60° , по паралельних прямих, відстань між якими дорівнює 7 см. Одна з прямих віддалена від ребра кута на 3 см. Знайдіть відстань від ребра кута до другої прямої.

②

Точки A і B лежать на одній грані двогранного кута. Знайдіть величину цього кута, якщо

точки A і B віддалені від його ребра на $4\sqrt{2}$ і $6\sqrt{2}$ см, а сума відстаней від даних точок до другої грані дорівнює 10 см.

точки A і B віддалені від другої грані на 6 і 8 см, а точка B віддалена від ребра кута на 4 см дальше, ніж точка A .

③

В яких межах може змінюватися величина плоского кута тригранного кута, якщо два інших його плоских кути дорівнюють

100° і 150° ?

60° і 90° ?

Варіант В 1

Варіант В 2

①

Всередині двогранного кута проведено пряму, паралельну його ребру. Знайдіть відстань між ребром кута і даною прямою, якщо

двогранний кут дорівнює 60° , а відстані від даної прямої до граней кута дорівнюють 22 і 4 см.

двогранний кут дорівнює 30° , а відстані від даної прямої до граней кута дорівнюють 4 і $6\sqrt{3}$ см.

②

Відрізки AB і AC лежать у різних гранях двогранного кута. Знайдіть величину кута, якщо

$AB = 5$ см, $AC = 4\sqrt{5}$ см, $BC = 7$ см, а проекцією кожного з відрізків AB і AC на ребро двогранного кута є відрізок AD завдовжки 4 см.

$AB = \sqrt{61}$ см, $AC = 10$ см, $BC = 7$ см, а проекцією точок B і C на ребро двогранного кута є точка D , віддалена від точки A на 6 см.

③

Два плоских кути тригранного кута дорівнюють 60° , а їх спільне ребро утворює з площиною третього кута кут 45° . Знайдіть величину третього плоского кута.

③

Знайдіть кут нахилу ребра тригранного кута до площини протилежного плоского кута, якщо цей плоский кут дорівнює 90° , а два інших плоских кути — 60° .

**С-24*. МНОГОГРАННІ КУТИ.
ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ЗАЛЕЖНОСТІ
ДЛЯ ДВОГРАННОГО
І ТРИГРАННОГО КУТА
(домашня самостійна робота)**

Варіант 1**Варіант 2****①**

Дано двогранний гострий кут α . З точки на ребрі даного кута в кожній з його граней проведено по променю. Відомо, що

один з променів перпендикулярний до ребра кута, а інший утворює з ребром кут β .

обидва промені утворюють з ребром кута, рівні β , а кут між променями — гострий.

Знайдіть кут між даними променями.

②

Плоскі кути тригранного кута дорівнюють α , β і γ , а протилежні їм двогранні кути — A , B і C .

Доведіть, що

а) існує тригранний кут з плоскими кутами $\pi - A$, $\pi - B$ і $\pi - C$ і двогранними кутами $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ і $\pi - \gamma$ (додатковий тригранний кут);

б) $A + B + C > \pi$;

в) $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A$

(1-а теорема косинусів для тригранного кута).

③

З точки на ребрі прямого двогранного кута у кожній з його граней проведено по променю. Дані промені утворюють з ребром кута α і β , а між собою — кут γ . Доведіть, що якщо кути α , β і γ — гострі, то $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta$.

$$\text{а) } \frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$$

(теорема синусів для тригранного кута);

б) $A + B - C < \pi$;

в) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos \alpha$

(2-а теорема косинусів для тригранного кута).

③

В одній з граней двогранного кута величиною α проведена пряма, яка утворює з ребром кута кут β , а з другою гранню — кут γ . Доведіть, що якщо кути α , β і γ — гострі, то $\sin \gamma = \sin \alpha \cdot \sin \beta$.

④

Плоскі кути тригранного кута дорівнюють 60° , 60° і 90° . Доведіть, що

площина, перпендикулярна до грані прямого кута, відтинає на ребрах тригранного кута рівні відрізки.

якщо площина відтинає на ребрах кута рівні відрізки, то вона перпендикулярна до грані прямого кута.

⑤

Плоскі кути тригранного кута дорівнюють

90° , 90° і 135° .

90° , 90° і 60° .

Точка всередині кута віддалена від його граней відповідно

на 8, $7\sqrt{2}$ і 24 см.

на 10, 13 і 12 см.

Знайдіть відстань від даної точки до вершини тригранного кута.

С-25. ПРИЗМА. ПЕРЕРІЗИ ПРИЗМИ

Варіант А1

①

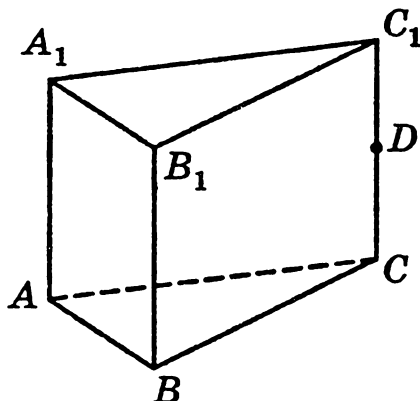
Визначте, скільки сторін має многокутник, який лежить в основі призми, якщо у цієї призми

13 граней.

9 граней.

②

Дано трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Точка D лежить на ребрі CC_1 (див. рисунок).



а) Побудуйте точку перетину

Варіант А2

прямої B_1D з площиною ABC . прямої AD з площиною $A_1B_1C_1$.

б) Побудуйте переріз призми, який проходить через

середини ребер AB і BC паралельно бічному ребру BB_1 .

середини ребер A_1B_1 і A_1C_1 паралельно бічній грані BCC_1 .

3

Побудуйте переріз куба $ABCA_1B_1C_1D_1$, який проходить через

ребро B_1C_1 і середину ребра AB .

ребро A_1A і середину ребра BC .

Визначте вид побудованого перерізу і знайдіть його площу, якщо ребро куба дорівнює 2 см.

4

Чи може переріз трикутної призми бути

а) рівнобедреним трикутником?

а) шестикутником?

б) квадратом?

б) трапецією?

Відповідь обґрунтуйте.

Варіант Б1

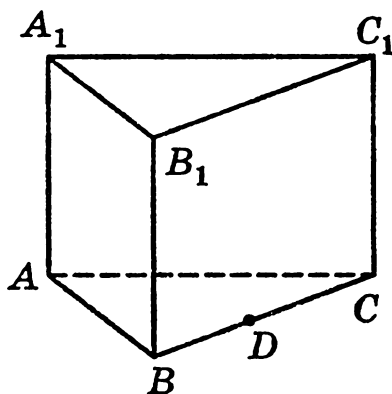
1

Визначте, скільки сторін має многокутник, який лежить в основі призми, якщо у цієї призми

18 ребер.

15 ребер.

2



Дано трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Точка D лежить на ребрі BC (див. рисунок).

а) Побудуйте точку перетину

прямої B_1D з площиною ACC_1 .

прямої C_1D з площиною A_1AB .

Варіант Б2

б) Побудуйте переріз призми, який проходить

через середини ребер A_1C_1 і B_1C_1 паралельно прямій BC_1 .

через середини ребер AB і AC паралельно прямій AB_1 .

③

Побудуйте переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, який проходить через

вершину B_1 і середини ребер AA_1 і CC_1 .

вершину C_1 і середини ребер BB_1 і DD_1 .

Визначте вид побудованого перерізу і знайдіть його площу, якщо ребро куба дорівнює a .

④

Чи може переріз куба бути

а) трапецією?

а) правильним трикутником?

б) п'ятикутником?

б) шестикутником?

Відповідь обґрунтуйте.

Варіант В 1

Варіант В 2

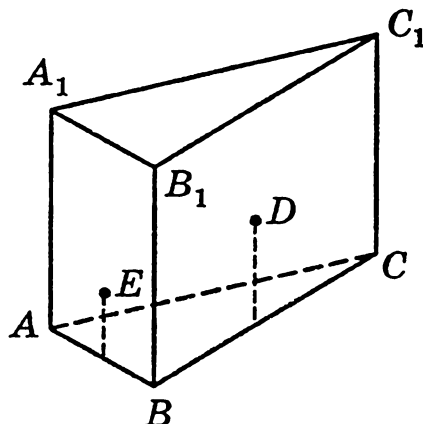
①

Визначте, скільки сторін має многокутник, який лежить в основі призми, якщо у цієї призми

28 діагоналей.

40 діагоналей.

②



Дано трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Точки D і E лежать на гранях C_1CB і A_1AB відповідно (див. рисунок).

а) Побудуйте точку перетину

прямої C_1E з площиною ABC .

прямої A_1D з площиною ABC .

б) Побудуйте переріз, який проходить через точку D і середину ребра A_1C_1 паралельно медіані трикутника ABC , проведеної до сторони AB .

точку E і середину ребра A_1C_1 паралельно медіані трикутника ABC , проведеної до сторони BC .

3

Побудуйте переріз куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, який проходить через середини ребер $A_1 B_1$, AD і $C_1 C$.

AA_1 , $B_1 C_1$ і CD .

Вкажіть вид побудованого перерізу (без доведення) і знайдіть його площу, якщо ребро куба дорівнює a .

4

Чи можливо побудувати переріз куба, який має форму правильного трикутника і не проходить через діагоналі його граней?

який має форму квадрата і не паралельний граням куба?

Відповідь обґрунтуйте.

С-26. ПРЯМА ПРИЗМА. ПРАВИЛЬНА ПРИЗМА

Варіант А1

Варіант А2

1

Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетами 6 і 8 см. Діагональ бічної грані, яка містить гіпотенузу трикутника, дорівнює 26 см.

Знайдіть:

- висоту призми;
- бічну поверхню призми;
- повну поверхню призми.

2

Бічна поверхня прямої призми дорівнює 96 дм^2 . Знайдіть бічне ребро призми, якщо її основа — ромб з гострим кутом 60° і меншою діагоналлю 6 дм.

1

Основа прямої призми — прямокутний трикутник з гіпотенузою 20 см і катетом 16 см. Діагональ бічної грані, яка містить другий катет трикутника, дорівнює 13 см.

2

Бічна поверхня прямої призми дорівнює 96 дм^2 . Знайдіть висоту призми, якщо її основа — ромб з висотою 4 дм і гострим кутом 30° .

3

Дано правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Знайдіть площу перерізу,

який проходить через ребро AC і вершину B_1 , якщо сторона основи призми дорівнює a , а площина перерізу утворює з площиною ABC кут α .

який проходить через ребро AB і середину бічного ребра CC_1 , якщо висота призми дорівнює $2h$, а площина перерізу утворює з площиною ABC кут β .

Варіант Б1

1

Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник, у якому висота, проведена до основи, дорівнює 8 см. Діагональ бічної грані, яка містить бічну сторону трикутника, дорівнює $10\sqrt{2}$ см і утворює з площиною основи кут 45° .

Знайдіть:

- а) бічне ребро призми;
- б) бічну поверхню призми;
- в) повну поверхню призми.

2

Основа прямої призми — ромб з гострим кутом 30° . Бічна поверхня призми дорівнює 96 дм^2 , а повна поверхня — 132 дм^2 . Знайдіть висоту призми.

3

В правильній чотирикутній призмі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через вершину D_1 і діагональ основи AC проведено переріз з площею S , який утворює з площиною основи кут α . Знайдіть бічну поверхню призми.

Варіант В1

1

В основі прямої призми лежить ромб з гострим кутом α і біль-

Варіант Б2

1

Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник, у якому бісектриса кута при вершині дорівнює 12 см. Діагональ бічної грані, яка містить основу трикутника, дорівнює $10\sqrt{2}$ см і утворює з бічним ребром призми кут 45° .

2

Основа прямої призми — ромб з висотою 2 дм. Бічна поверхня призми дорівнює 96 дм^2 , а повна поверхня — 128 дм^2 . Знайдіть висоту призми.

3

В правильній чотирикутній призмі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через середину ребра CC_1 і діагональ основи BD проведено переріз з площею Q , який утворює з площиною основи кут β . Знайдіть бічну поверхню призми.

Варіант В2

1

В основі прямої призми лежить ромб з тупим кутом β і меншою

пою діагоналлю l . Менша діагональ призми утворює з площиною основи кут β .

Знайдіть:

а) відстань між площинами основ призми;

б) бічну поверхню призми.

② Повна поверхня правильної трикутної призми дорівнює $20\sqrt{3}$ дм². Висота призми дорівнює $\sqrt{3}$ дм. Знайдіть площу бічної грані призми.

③ Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом при вершині α . Через основу цього трикутника і середину бічної сторони другої основи призми проведено переріз під кутом β до площини основи призми. Знайдіть площу перерізу.

діагоналлю d . Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут α .

② Повна поверхня правильної трикутної призми дорівнює $14\sqrt{3}$ дм². Висота призми дорівнює $2\sqrt{3}$ дм. Знайдіть діагональ бічної грані призми.

③ Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при основі α . Через середню лінію, паралельну основі цього трикутника, і вершину кута α другої основи призми проведено переріз під кутом β до площини основи призми. Знайдіть площу перерізу.

С-27. ПОХИЛА ПРИЗМА

Варіант А1

① Бічне ребро похилої призми дорівнює 10 см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть висоту призми.

② Переріз, перпендикулярний до бічних ребер похилої чотирикутної призми, — ромб зі стороною 5 см. Знайдіть бічну поверхню призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

③ Основа похилої призми — рівнобедрений трикутник зі сторонами 5, 5 і 6 см. Бічні грані, які містять бічні сторони трикутника, — ромби з гострими кутами 30° , а третя бічна грань — прямокутник. Знайдіть повну поверхню призми.

Варіант Б1

① В основі похилої призми лежить правильний трикутник зі стороною $4\sqrt{3}$ см. Одна з вершин верхньої основи призми проектується в центр нижньої основи. Знайдіть бічне ребро призми, якщо її висота дорівнює 3 см.

② В похилій трикутній призмі дві бічні грані взаємно перпендикулярні і мають площі 24 і 32 см².

Варіант А2

① Висота похилої призми дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть бічне ребро призми, якщо воно утворює з площиною основи кут 60° .

② Відстані між бічними ребрами похилої чотирикутної призми дорівнюють 2, 3, 4 і 5 см. Знайдіть бічне ребро призми, якщо її бічна поверхня дорівнює 70 см².

③ Основа похилої призми — рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см. Бічна грань, яка містить гіпотенузу трикутника, — квадрат, а протилежне до неї бічне ребро утворює з катетами нижньої основи кути 45° . Знайдіть повну поверхню призми.

Варіант Б2

① В основі похилої призми лежить правильний трикутник зі стороною $4\sqrt{3}$ см. Одна з вершин верхньої основи призми проектується в середину протилежної сторони нижньої основи. Знайдіть висоту призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.

② В похилій трикутній призмі дві бічні грані перетинаються під кутом 60° і мають рівні

Знайдіть бічну поверхню призми, якщо її бічне ребро дорівнює 8 см.

3 Основа похилої призми — квадрат зі стороною a . Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом α . Висота призми дорівнює h . Знайдіть повну поверхню призми.

Варіант В1

1

Основа похилої призми — правильний трикутник. квадрат.

Відомо, що одна з вершин верхньої основи призми рівновіддалена від вершин нижньої основи. Доведіть, що якщо α — кут нахилу бічного ребра до площини основи, а β — кут нахилу до площини основи бічної грані, яка містить дану вершину призми, то

$$\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

2 В похилій трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ бічна грань AA_1C_1C — прямокутник, причому $AC = 8$ см, $AA_1 = 5$ см. З точки A проведено перпендикуляр AD до ребра BB_1 . Відомо, що $AD = 3$ см, $\angle DAC = 60^\circ$. Знайдіть бічну поверхню призми.

3 В похилій чотирикутній призмі всі ребра дорівнюють a . Основа призми — квадрат. Знайдіть повну поверхню призми, якщо бічне ребро, яке утворює рівні кути з суміжними з ним сторонами основи, утворює з площиною основи кут 45° .

площі 24 см². Знайдіть бічну поверхню призми.

3 Основа похилої призми — прямокутник зі сторонами a і b . Бічні грані призми, які містять сторони основи b , є квадратами і утворюють з площиною основи кути β . Знайдіть повну поверхню призми.

Варіант В2

2 В похилій трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ бічна грань ABB_1A_1 — прямокутник. З точок A і B проведено перпендикуляри до ребра CC_1 , які дорівнюють 5 і 8 см і утворюють між собою кут 60° . $CC_1 = 4$ см. Знайдіть бічну поверхню призми.

3 В похилій чотирикутній призмі всі бічні грані — ромби з стороною a і гострим кутом 60° . Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45° . Знайдіть повну поверхню призми.

С-28. ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

Варіант А1

① Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 і 3 см, а діагональ — 7 см. Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.

② Основа прямого паралелепіпеда — паралелограм зі сторонами 5 і 8 см і гострим кутом 30° . Повна поверхня паралелепіпеда дорівнює 170 дм^2 . Знайдіть його висоту.

③ Площа діагонального перерізу прямокутного паралелепіпеда дорівнює $8\sqrt{5} \text{ см}^2$, а бічне ребро — 4 см. Знайдіть довжину діагоналі паралелепіпеда.

Варіант Б1

① Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 7 см, а діагоналі двох його бічних граней дорівнюють $3\sqrt{5}$ і $2\sqrt{10}$ см. Знайдіть повну поверхню паралелепіпеда.

② Основа прямого паралелепіпеда — ромб з гострим кутом 30° . Бічне ребро дорівнює 5 дм, а повна поверхня паралелепіпеда — 96 дм^2 . Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.

Варіант А2

① Сторона основи і висота прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 і 1 см, а діагональ — 3 см. Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.

② В основі прямого паралелепіпеда лежить ромб з периметром 16 дм і тупим кутом 150° . Повна поверхня паралелепіпеда дорівнює 96 дм^2 . Знайдіть його висоту.

③ Площа діагонального перерізу прямокутного паралелепіпеда дорівнює $6\sqrt{5} \text{ см}^2$, а діагональ основи — $3\sqrt{5}$ см. Знайдіть довжину діагоналі паралелепіпеда.

Варіант Б2

① Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 6 см, діагональ його основи — $2\sqrt{5}$ см, а діагональ однієї з бічних граней — $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть повну поверхню паралелепіпеда.

② Основа прямого паралелепіпеда — ромб, одна з діагоналей якого дорівнює його стороні. Бічне ребро дорівнює $2\sqrt{3}$ дм, а повна поверхня паралелепіпеда — $48\sqrt{3} \text{ дм}^2$. Знайдіть площу основи паралелепіпеда.

③

Основа прямого паралелепіпеда — ромб з площею 24 см^2 . Площі діагональних перерізів дорівнюють 30 і 40 см^2 . Знайдіть повну поверхню паралелепіпеда.

Варіант В1

①

Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 7 , 8 і 9 см . Знайдіть діагональ паралелепіпеда.

②

Основа прямого паралелепіпеда — ромб з гострим кутом α . Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює l і утворює з бічною гранню кут β . Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.

③

Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з двома його ребрами, які виходять з одної вершини, кути, рівні

60° і 45° .

③

Основа прямого паралелепіпеда — паралелограм з гострим кутом 30° і площею 24 см^2 . Площі бічних граней дорівнюють 60 і 80 см^2 . Знайдіть висоту паралелепіпеда.

Варіант В2

①

Площа діагонального перерізу прямокутного паралелепіпеда дорівнює 25 см^2 , а діагональ паралелепіпеда — $5\sqrt{2} \text{ см}$. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

②

Основа прямого паралелепіпеда — ромб з більшою діагоналлю d і тупим кутом β . Менша діагональ паралелепіпеда утворює з бічною гранню кут α . Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.

60° і 60° .

Знайдіть кут між даною діагоналлю і третім ребром, яке виходить з тої ж вершини.

С-29*. ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗМИ (домашня самостійна робота)

Варіант 1

① Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з його гранями кути α , β і γ . Доведіть, що

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1.$$

② Переріз призми площиною, яка перетинає всі її бічні ребра, — паралелограм. Доведіть, що дана призма — паралелепіпед.

③ В правильній чотирикутній призмі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ переріз $BC_1 D$ утворює з бічним ребром кут 45° . Доведіть, що площа цього перерізу у 4 рази менше бічної поверхні призми.

④ Ребро куба дорівнює a . Знайдіть відстань між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней.

⑤

Використовуючи метод розгортки многогранника, знайдіть на одиничному кубі

найкоротшу відстань по поверхні між двома протилежними вершинами.

⑥ В прямій трикутній призмі площа основи дорівнює 84 см^2 , а площі бічних граней — 26, 28 і 30 см^2 . Знайдіть висоту призми.

Варіант 2

① Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з його ребрами кути α , β і γ . Доведіть, що

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

② Доведіть, що переріз паралелепіпеда площиною не може бути правильним п'ятикутником. Чи може він бути правильним шестикутником?

③ В правильній чотирикутній призмі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ переріз $AB_1 C$ і бічна грань рівновеликі. Знайдіть кут між площиною цього перерізу і бічним ребром призми.

④ Діагональ куба дорівнює d . Знайдіть відстань між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней.

відстань від середини ребра до найбільш віддаленої від неї точки поверхні куба.

⑥ В прямій трикутній призмі площі бічних граней дорівнюють 52, 56 і 60 см^2 . Бічне ребро призми віддалене від паралельної бічній грані, яка містить середню сторону основи, на 12 см. Знайдіть висоту призми.

К-7. ДВОГРАННИЙ КУТ. ПРИЗМА

Варіант А1

①

Відрізок AB завдовжки 12 см лежить в одній з граней двогранного кута і перпендикулярний до ребра кута, причому точка A лежить на ребрі двогранного кута. Знайдіть

довжину проекції відрізка AB на другу грань, якщо двогранний кут дорівнює 60° .

②

Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетом 12 см і гіпотенузою 13 см. Знайдіть повну поверхню призми, якщо бічна грань, яка містить невідомий катет основи, є квадратом.

③

В основі прямого паралелепіпеда лежить квадрат. Діагональ паралелепіпеда дорівнює d і утворює з площиною бічної грані кут α . Знайдіть:

- а) бічну поверхню паралелепіпеда;
- б) площу діагонального перерізу.

Варіант Б1

①

Сторона AD квадрата $ABCD$, який лежить в одній з граней двогранного кута, лежить на ребрі кута. Знайдіть

відстань від прямої BC до другої грані кута, якщо площа квадрата дорівнює 36 см^2 , а двогранний кут дорівнює 30° .

②

Діагональ бічної грані правильної трикутної призми нахи-

Варіант А2

відстань від точки B до другої грані, якщо двогранний кут дорівнює 30° .

②

Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник, в якому висота, проведена до основи, дорівнює 8 см. Висота призми дорівнює 12 см. Знайдіть повну поверхню призми, якщо бічна грань, яка містить основу трикутника, — квадрат.

③

В правильній чотирикутній призмі діагональ бічної грані дорівнює d . Діагональ призми утворює з площиною бічної грані кут α . Знайдіть:

- а) бічну поверхню призми;
- б) площу діагонального перерізу.

Варіант Б2

довжину проекції сторони CD на другу грань, якщо периметр квадрата дорівнює 24 см, а двогранний кут дорівнює 60° .

②

Діагональ бічної грані правильної трикутної призми нахи-

лена до площини основи під кутом α , а площа цієї грані дорівнює Q . Знайдіть повну поверхню призми.

③

Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 15 і 20 см, а діагональ — $5\sqrt{26}$ см. Знайдіть:

- а) бічну поверхню паралелепіпеда;
- б) площу перерізу, проведеного через діагональ основи і протилежну вершину другої основи.

Варіант В 1

①

Рівнобедрений трикутник ABC лежить в одній з граней двогранного кута, причому його основа AC лежить на ребрі кута. Знайдіть

проекції бічних сторін трикутника на другу грань, якщо $AC = 6$ см, $AB = BC = \sqrt{73}$ см, а двогранний кут дорівнює 60° .

②

Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом при основі α . Переріз, проведений через бічну сторону основи призми і протилежну вершину другої основи, утворює з площиною основи кут β . Знайдіть повну поверхню призми.

③

Основа похилого паралелепіпеда — квадрат зі стороною a . Одна з вершин другої основи проектується в центр цього квадрата. Висота паралелепіпеда дорівнює h . Знайдіть:

- а) площу діагонального перерізу;
- б) бічну поверхню паралелепіпеда.

лена до площини основи під кутом α . Площа основи призми дорівнює S . Знайдіть повну поверхню призми.

③

Сторона основи і висота прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 15 і 10 см, а бічна поверхня — 700 см². Знайдіть:

- а) площу основи паралелепіпеда;
- б) площу перерізу, проведеного через діагональ основи і середіну протилежного бічного ребра.

Варіант В 2

бічну сторону трикутника ABC , якщо її проекція на другу грань дорівнює $\sqrt{17}$ см, $AC = 6$ см, а двогранний кут дорівнює 45° .

②

Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з кутом при вершині α і основою a . Переріз, який проходить через дану сторону трикутника і протилежну вершину другої основи, утворює з площиною основи кут φ . Знайдіть повну поверхню призми.

③

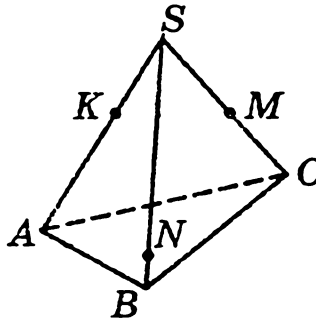
Основа похилого паралелепіпеда — квадрат зі стороною a , всі бічні грані — ромби. Одна з вершин верхньої основи рівновіддалена від вершин нижньої основи. Знайдіть:

- а) площу діагонального перерізу;
- б) бічну поверхню паралелепіпеда.

С-30. ПІРАМІДА. ПЕРЕРІЗИ ПІРАМІДИ

Варіант А1Варіант А2

①

Дано трикутну піраміду $SABC$. Побудуйте:

- а) точку перетину прямої KN і площини ABC ;
 б) лінію перетину площин CBK і SAB .

- а) точку перетину прямої MN і площини ABC ;
 б) лінію перетину площин ANC і SBC .

②

В трикутній піраміді $SABC$ з основою ABC всі ребра дорівнюють a . Побудуйте переріз піраміди,

який проходить через ребро AC і середину ребра SB .

який проходить через вершину A і середини ребер SB і SC .

Визначте вид побудованого перерізу і знайдіть його площу.

③

Основа чотирикутної піраміди $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Побудуйте переріз піраміди,

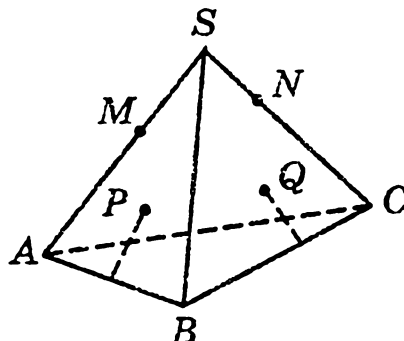
який проходить через середини ребер SA і SB паралельно бічній грані SCD .

який проходить через середини ребер SB і SC паралельно бічній грані SAD .

Визначте вид побудованого перерізу.

Варіант Б1Варіант Б2

①

Дано трикутну піраміду $SABC$.

Точки P і Q лежать на бічних гранях SAB і SBC відповідно. Побудуйте:

- а) точку перетину прямої NP і площини ABC ;
б) лінію перетину площин ABQ і SAC .

- а) точку перетину прямої MQ і площини ABC ;
б) лінію перетину площин CBP і SAC .

②

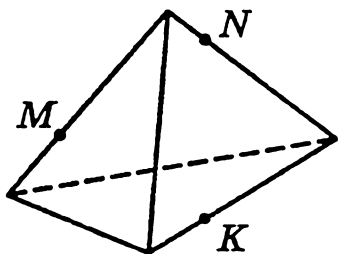
Основа чотирикутної піраміди $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Всі ребра піраміди дорівнюють a . Побудуйте переріз піраміди,

який проходить через діагональ основи AC паралельно ребру SB .

який проходить через точку B і середину ребра SA паралельно ребру SC .

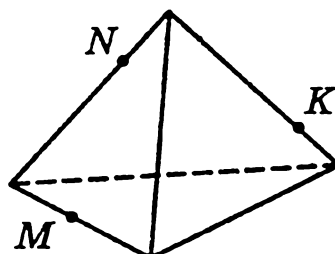
Визначте вид побудованого перерізу і знайдіть його площу.

③



Побудуйте переріз даної трикутної піраміди площиною MNK . При якому взаємному розміщенні точок M і N такий переріз буде трапецією з основою MN ?

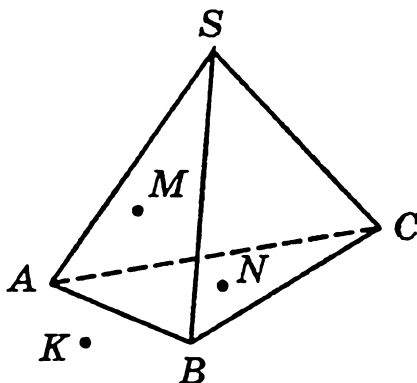
③



Побудуйте переріз даної трикутної піраміди площиною MNK . При якому взаємному розміщенні точок N і K такий переріз буде трапецією з основою NK ?

Варіант В1

①



Дано трикутну піраміду $SABC$. Точки K , M і N лежать у площинах ABC , SAB і SBC відповідно. Побудуйте:

- а) точку перетину прямої KN і площини SAB ;

- а) точку перетину прямої KM і площини SAC ;

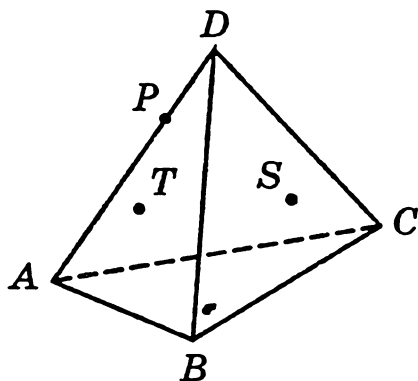
Варіант В2

б) лінію перетину площин ANC і BMC .

②

Основа піраміди $SABCD$ — квадрат $ABCD$. Всі ребра піраміди дорівнюють a . Побудуйте переріз піраміди, який проходить через середини ребер SA і SB перпендикулярно до площини основи. Визначте вид побудованого перерізу і знайдіть його площу.

③



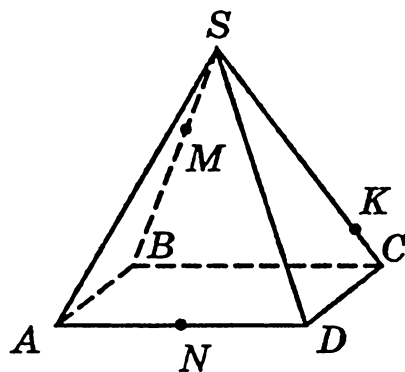
В трикутній піраміді $DABC$ точки T і S лежать на гранях ADB і BDC відповідно. Побудуйте переріз піраміди площиною PTS . Чи може такий переріз бути паралелограмом?

б) лінію перетину площин AMC і BNA .

②

Всі грані трикутної піраміди $SABC$ — рівносторонні трикутники зі стороною a . Побудуйте переріз піраміди, який проходить через середини ребер SA і SB перпендикулярно до площини ABC . Визначте вид побудованого перерізу і знайдіть його площу.

③



Побудуйте переріз даної чотирикутної піраміди $SABCD$ площиною MNK (M , N і K — довільні точки на ребрах SB , AD і SC). Чи може такий переріз перетинати площину ABC по прямій, паралельній MK ?

С-31. ПРАВИЛЬНА ПІРАМІДА. ЗРІЗАНА ПІРАМІДА

Варіант А1

①

В правильній чотирикутній піраміді апофема дорівнює 4 см, а бічне ребро — 5 см. Знайдіть:

- а) сторону основи піраміді;
- б) висоту піраміді;
- в) повну поверхню піраміді.

②

В правильній трикутній піраміді бічна поверхня дорівнює 27 дм^2 , а периметр основи — 18 дм. Знайдіть апофему і плоский кут при вершині піраміді.

③

Сторони основи правильної трикутної зрізаної піраміді дорівнюють 4 і 8 см, а бічне ребро утворює зі стороною більшої основи кут 60° . Знайдіть бічну поверхню зрізаної піраміді. У скільки разів вона менше від бічної поверхні повної піраміді, з якої отримано дану зрізану піраміді?

Варіант Б1

①

В правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює d і нахилене до площини основи під кутом α . Знайдіть:

- а) висоту піраміді;
- б) апофему піраміді;
- в) бічну поверхню піраміді.

②

В правильній чотирикутній піраміді бічна поверхня дорів-

Варіант А2

①

В правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює 6 см, а апофема — 4 см. Знайдіть:

- а) бічне ребро піраміді;
- б) висоту піраміді;
- в) повну поверхню піраміді.

②

В правильній трикутній піраміді повна поверхня дорівнює $16\sqrt{3} \text{ дм}^2$, а площа основи — $4\sqrt{3} \text{ дм}^2$. Знайдіть бічне ребро і плоский кут при вершині піраміді.

③

Сторона меншої основи правильної трикутної зрізаної піраміді дорівнює 2 см, а бічне ребро піраміді завдовжки $\sqrt{2}$ см утворює зі стороною більшої основи кут 45° . Знайдіть бічну поверхню зрізаної піраміді. Яку частину вона складає від бічної поверхні повної піраміді, з якої отримано дану зрізану піраміді?

Варіант Б2

①

В правильній трикутній піраміді апофема дорівнює l , а бічна грань нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть:

- а) висоту піраміді;
- б) бічне ребро піраміді;
- в) бічну поверхню піраміді.

②

В правильній чотирикутній піраміді площа основи дорівнює

нює $16\sqrt{3}$ см², а плоский кут при вершині — 60° . Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди.

3 Сторони основи правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 2 і 6 см, а бічна грань утворює з площиною більшої основи кут 60° . Знайдіть бічну поверхню даної піраміди і висоту повної піраміди, з якої отримано дану зрізану піраміду.

Варіант В1

1 В правильній трикутній піраміді висота дорівнює h , а плоский кут при вершині — α . Знайдіть:

- апофему піраміди;
- бічну поверхню піраміди.

2 Діагональний переріз правильної чотирикутної піраміди — прямокутний трикутник з площею S . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

3 Площа одної з основ зрізаної піраміди у 4 рази більше площі другої основи. Бічна поверхня піраміди дорівнює 36 см², а всі двогранні кути при більшій основі піраміди дорівнюють 60° . Знайдіть повну поверхню піраміди.

32 см², а площа діагонального перерізу дорівнює 16 см². Знайдіть плоский кут при вершині піраміди.

3 Сторони основи правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 2 і 8 см, а бічне ребро піраміди утворює з площиною більшої основи кут 45° . Знайдіть висоту даної піраміди і бічну поверхню повної піраміди, з якої отримано дану зрізану піраміду.

Варіант В2

1 В правильній трикутній піраміді апофема дорівнює l , а бічне ребро утворює з площиною основи кут β . Знайдіть:

- сторону основи піраміди;
- бічну поверхню піраміди.

2 Найменший осьовий переріз правильної чотирикутної піраміди — правильний трикутник з площею Q . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

3 Різниця площ основ зрізаної піраміди дорівнює 18 см². Всі двогранні кути при меншій основі піраміди дорівнюють 120° . Знайдіть повну поверхню піраміди, якщо її менша основа у 3 рази менше бічної поверхні.

С-32. ПІРАМІДИ, В ЯКИХ ОСНОВА ВИСОТИ Є ЦЕНТРОМ ОПИСАНОГО АБО ВПИСАНОГО КОЛА ОСНОВИ ПІРАМІДИ

Варіант А1

1

Основа піраміди $SABCD$ — прямокутник $ABCD$ зі сторонами 6 і 8 см. Все бічні ребра піраміди дорівнюють 13 см.

а) Опишіть побудову висоти піраміди SO .

б) Доведіть рівність відрізків AO , BO , CO і DO .

в) Обґрунтуйте положення точки O у прямокутнику $ABCD$ і знайдіть довжину висоти SO .

2

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при вершині α . Висоти всіх бічних граней піраміди утворюють з висотою піраміди кути, що дорівнюють β .

а) Опишіть побудову висоти піраміди, висот бічних граней та їх проєкцій на площину основи. Обґрунтуйте двогранні кути при основі піраміди.

б) Обґрунтуйте положення основи висоти піраміди в даному рівнобедреному трикутнику.

в) Знайдіть висоту піраміди.

Варіант Б1

1

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з бічною сторо-

Варіант А2

1

Основа піраміди $SABCD$ — прямокутник $ABCD$ зі сторонами 12 і 16 см. Висота піраміди SO дорівнює 24 см і утворює однакові кути з усіма бічними ребрами.

а) Доведіть рівність трикутників ASO , BSO , CSO і DSO .

б) Обґрунтуйте положення точки O у прямокутнику $ABCD$.

в) Обґрунтуйте рівність бічних ребер піраміди і знайдіть їх довжину.

2

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з кутом при основі α і радіусом вписаного кола r . Все двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β .

Варіант Б2

1

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою a і ку-

ною b і кутом при основі α . Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β .

а) Обґрунтуйте положення основи висоти піраміди в даному рівнобедреному трикутнику.

б) Визначте, при яких значеннях α висота піраміди буде знаходитися поза пірамідою.

в) Знайдіть висоту піраміди.

2

Основа піраміди — ромб з більшою діагоналлю d і гострим кутом α . Всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ .

а) Обґрунтуйте дані двогранні кути і положення основи висоти піраміди у ромбі.

б) Знайдіть висоту піраміди.

в) Двома способами — шляхом обчислення площ бічних граней і за допомогою теореми про ортогональну проекцію многокутника — знайдіть бічну поверхню піраміди. Порівняйте отримані результати.

том при вершині α . Всі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кути, рівні β .

а) Обґрунтуйте положення основи висоти піраміди в даному рівнобедреному трикутнику.

б) Визначте, при яких значеннях α висота піраміди буде знаходитися всередині неї.

в) Знайдіть висоту піраміди.

2

Основа піраміди — ромб з меншою діагоналлю l і тупим кутом β . Всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють γ .

Варіант В1

1

Основа піраміди — трикутник з кутами α і β . Точка висоти піраміди, віддалена від площини основи на відстань d , рівновіддалена від кінців бічного ребра. Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом γ .

а) Обґрунтуйте положення основи висоти піраміди.

б) За яких умов висота піраміди лежить всередині піраміди?

Варіант В2

1

Основа піраміди — трикутник з кутами α і β . Точка висоти піраміди, віддалена від вершини на відстань b , рівновіддалена від бічного ребра і площини основи. Всі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кути, рівні γ .

а) Обґрунтуйте положення основи висоти піраміди.
б) За яких умов висота піраміди лежить поза пірамідою?

в) Знайдіть висоту піраміди.

г) Знайдіть площу основи піраміди.

②

В основі піраміди лежить рівнобічна трапеція з гострим кутом α . Висота піраміди дорівнює H , а всі двогранні кути при основі дорівнюють β .

а) Обґрунтуйте положення основи висоти піраміди.

б) Знайдіть висоту трапеції, яка лежить в основі піраміди.

в) Не обчислюючи площ бічних граней, знайдіть бічну поверхню піраміди.

②

В основі піраміди лежить прямокутна трапеція з гострим кутом α . Висота піраміди дорівнює H , а всі двогранні кути при основі дорівнюють β .

С-33. ПІРАМІДИ, В ЯКИХ ОДНА АБО ДВІ БІЧНІ ГРАНІ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ДО ПЛОЩИНИ ОСНОВИ

Варіант А1

①

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом при вершині α . Бічні грані піраміди, які містять сторони даного кута, перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань нахилена до неї під кутом β .

а) Обґрунтуйте положення висоти піраміди.

б) Обґрунтуйте кут β .

в) Знайдіть площу третьої бічної грані.

г) Знайдіть бічну поверхню піраміди.

②

Основа піраміди — правильний трикутник зі стороною a . Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна

Варіант А2

①

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при основі α . Бічні грані піраміди, які містять бічні сторони трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань нахилена до неї під кутом β .

②

Основа піраміди — правильний трикутник. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна

перпендикулярна до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом β .

до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом β . Висота піраміди дорівнює H .

а) З вершини піраміди в площині грані, перпендикулярної до основи, проведіть перпендикуляр до ребра основи і обґрунтуйте, чому він буде висотою піраміди.

б) Обґрунтуйте кути нахилу, які дорівнюють β .

в) Доведіть, що основа висоти піраміди рівновіддалена від двох сторін правильного трикутника, і обґрунтуйте положення основи висоти на стороні правильного трикутника.

г) Знайдіть бічну поверхню піраміди.

Варіант Б1

①

Основа піраміди — квадрат зі стороною a . Дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом β .

а) Обґрунтуйте положення висоти піраміди.

б) Обґрунтуйте кути, які дорівнюють β .

в) Доведіть, що бічні грані піраміди попарно рівні.

г) Знайдіть бічну поверхню піраміди.

②

Основа піраміди — прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α . Бічна грань, яка містить катет, протилежний до даного кута, перпендикулярна до площини основи, а дві інші грані нахилені до неї під кутом β .

а) Обґрунтуйте положення висоти піраміди.

б) Обґрунтуйте положення основи висоти піраміди.

в) Знайдіть висоту піраміди.

г) Знайдіть бічну поверхню піраміди.

Варіант Б2

①

Основа піраміди — квадрат. Дві бічні грані, які містять сусідні сторони квадрата, перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом β . Висота піраміди дорівнює H .

②

Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетом a і протилежним кутом α . Бічна грань, яка містить даний катет, перпендикулярна до площини основи, а дві інші грані нахилені до неї під кутом β .

Варіант В1**①**

Основа піраміди — ромб з тупим кутом α . Дві бічні грані, які містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом β . Висота піраміди дорівнює H .

а) Обґрунтуйте положення висоти піраміди.

б) Обґрунтуйте кути, які дорівнюють β .

в) Знайдіть бічну поверхню піраміди.

②

Основа піраміди — прямокутна трапеція з гострим кутом α і прилеглою до нього бічною стороною a . Бічна грань, яка містить більшу основу трапеції, перпендикулярна до площини основи, а три інші грані нахилені до неї під кутом β .

а) Обґрунтуйте положення висоти піраміди.

б) Обґрунтуйте положення основи висоти піраміди.

в) Знайдіть площу основи піраміди.

г) Знайдіть бічну поверхню піраміди.

Варіант В2**①**

Основа піраміди — ромб зі стороною a і гострим кутом α . Дві бічні грані, які містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом β .

②

Основа піраміди — рівнобічна трапеція з більшою основою a і гострим кутом α . Бічна грань, яка містить більшу основу трапеції, перпендикулярна до площини основи, а три інші грані нахилені до неї під кутом β .

С-34. ПІРАМІДИ, В ЯКИХ ЗАДАНО ВІДСТАНІ МІЖ ТОЧКАМИ І ЕЛЕМЕНТАМИ ПІРАМІДИ

Варіант А1

1

В правильній трикутній піраміді бічне ребро нахилене до площини основи під кутом α . Відстань від середини висоти піраміди до середини бічного ребра дорівнює d .

а) Знайдіть висоту піраміди.

б) Знайдіть площу основи піраміди.

2

В правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α . Відстань від середини висоти піраміди до її апофеми дорівнює l . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

Варіант Б1

1

В правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α . Відстань від основи висоти піраміди до середини апофеми дорівнює l . Знайдіть повну поверхню піраміди.

2

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β . Бісектриса цього кута перетинає висоту піраміди

Варіант А2

1

В правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює з висотою кут α . Відстань від середини висоти піраміди до середини бічного ребра дорівнює d .

а) Знайдіть бічне ребро піраміди.

б) Знайдіть площу основи піраміди.

2

В правильній трикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α . Відстань від основи висоти піраміди до її апофеми дорівнює l . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

Варіант Б2

1

В правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює β . Відстань від основи висоти піраміди до середини бічного ребра дорівнює l . Знайдіть повну поверхню піраміди.

2

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Всі бічні ребра утворюють з висотою піраміди кути, рівні β . Перпендикуляр, проведений через середину бічного

у точці, віддаленій від бічного ребра на відстань d .

- а) Знайдіть висоту піраміди.
б) Знайдіть площу основи піраміди.

Варіант В1

① Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з кутом при основі α . Всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β . Відрізок, що з'єднує точки перетину медіан бічних граней, що містять бічні сторони трикутника, дорівнює m . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

② Основа піраміди — прямокутний трикутник з гострим кутом α . Бічні грані піраміди, які містять катети трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань нахилена до неї під кутом β . Відстань від основи висоти піраміди до цієї грані дорівнює l . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

ребра, перетинає висоту піраміди в точці, що знаходиться на відстані d від вершини основи.

- а) Знайдіть висоту піраміди.
б) Знайдіть площу основи піраміди.

Варіант В2

① Основа піраміди — прямокутний трикутник з гострим кутом α . Всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β . Відрізок, що з'єднує точки перетину медіан бічних граней, що містять сторони кута α , дорівнює m . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

② Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з кутом при вершині α . Бічні грані піраміди, які містять бічні сторони трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань нахилена до неї під кутом β . Відстань від основи висоти піраміди до цієї грані дорівнює l . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

С-35. ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ

Варіант А1

① Знайдіть висоту правильного тетраедра з ребром a .

② Знайдіть суму плоских кутів додекаедра, які мають спільну вершину.

③ Повна поверхня октаедра дорівнює $8\sqrt{3}$ см². Знайдіть довжину ребра октаедра.

④ В кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ центр верхнього основи O з'єднаний з вершинами A, B, C і D нижнього основи. Доведіть, що $OABCD$ — правильна чотирикутна піраміда.

Варіант Б1

① Ребро октаедра дорівнює a . Знайдіть відстань між двома протилежними вершинами октаедра.

② Знайдіть кут між діагоналями бічних граней куба, які виходять з одної вершини.

③ Повна поверхня правильного тетраедра з ребром a рівновелика повній поверхні ікосаедра. Знайдіть ребро ікосаедра.

④ В кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ відрізки $AB_1, B_1 D_1$ і $D_1 A$ — діагоналі граней. Доведіть, що

Варіант А2

① Знайдіть площу грані куба з діагоналлю d .

② Знайдіть суму плоских кутів октаедра, які мають спільну вершину.

③ Ребро ікосаедра дорівнює 2 см. Знайдіть повну поверхню ікосаедра.

④ Точки A_1, B_1 і C_1 — середини бічних ребер правильного тетраедра, точка O — центр його основи. Доведіть, що $OA_1 B_1 C_1$ — правильний тетраедр.

Варіант Б2

① Ребро октаедра дорівнює a . Знайдіть відстань від вершини октаедра до площини, яка містить чотири сусідні з нею вершини.

② Відрізок сполучає середини двох мимобіжних ребер правильного тетраедра. Який кут він утворює з кожним з них?

③ Повна поверхня октаедра з ребром a рівновелика повній поверхні правильного тетраедра. Знайдіть ребро тетраедра.

$A_1B_1D_1A$ — правильна трикутна піраміда, і знайдіть її висоту.

CB_1D_1A — правильний тетраедр, і знайдіть його повну поверхню.

Варіант В 1

①

Знайдіть суму плоских кутів при всіх вершинах

додекаедра.

②

Знайдіть двогранні кути

октаедра.

③

Діагональ куба дорівнює d . Знайдіть площі перерізів куба площинами його симетрії.

④

Доведіть, що висоти правильного тетраедра точкою перетину діляться у відношенні 3 : 1, починаючи від вершин.

Варіант В 2

ікосаедра.

правильного тетраедра.

③

Ребро октаедра дорівнює a . Знайдіть площі перерізів октаедра площинами його симетрії.

④

Точка O_1 — середина висоти SO правильного тетраедра $SABC$. Доведіть, що плоскі кути тригранного кута O_1ABC — прямі.

С-36*. ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ПРО ПІРАМІДИ (домашня самостійна робота)

Варіант 1

①

Основа піраміди — правильний трикутник. Всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом α . Обґрунтуйте положення висоти піраміди у випадку, коли піраміда не є правильною.

Як треба змінити в умові означення кута α , щоб висота піраміди знаходилась всередині неї?

②

Використовуючи метод розгортки многогранника, доведіть, що

Варіант 2

①

Основа піраміди — прямокутний трикутник. Всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом α . Обґрунтуйте положення висоти піраміди у випадку, коли основа висоти не лежить на перетині бісектрис даного трикутника.

якщо суми плоских кутів при всіх вершинах трикутної піраміди дорівнюють 180° , то всі грані піраміди — рівні трикутники.

③

Бічна грань і діагональний переріз правильної чотирикутної піраміди рівновеликі. Знайдіть двогранний кут при основі піраміди.

④

Яку найбільшу повну поверхню може мати трикутна піраміда, в якій п'ять ребер дорівнюють a ?

⑤

Знайдіть площу перерізу

правильної трикутної

правильної чотирикутної

піраміди, який проходить через середину її висоти паралельно бічній грані, якщо площа бічної грані дорівнює Q .

⑥

Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 і 12 см. Відстань від вершини меншої основи до протилежної сторони більшої основи піраміди дорівнює 9 см. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

якщо суми плоских кутів при всіх вершинах трикутної піраміди дорівнюють 180° , то мимобіжні ребра піраміди попарно рівні.

③

Двогранний кут при основі правильної чотирикутної піраміди дорівнює 45° . Знайдіть двогранний кут між суміжними бічними гранями.

④

Яку найбільшу бічну поверхню може мати трикутна піраміда, в якій всі бічні ребра дорівнюють a ?

⑥

Периметри основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 18 і 36 см. Відстань від вершини більшої основи до протилежної сторони меншої основи піраміди дорівнює $2\sqrt{19}$ см. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

К-8. ПІРАМІДА. ПОВЕРХНЯ ПІРАМІДИ

Варіант А1

① Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а апофема утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть:

- а) висоту піраміди;
б) бічну поверхню піраміди.

② Основа піраміди — правильний трикутник. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а третя — нахилена до неї під кутом α . Висота піраміди дорівнює H . Знайдіть повну поверхню піраміди.

③ Бічні ребра трикутної піраміди взаємно перпендикулярні і рівні. Бічна поверхня піраміди дорівнює S . Знайдіть площу основи піраміди.

Варіант Б1

① В правильній трикутній піраміді бічна грань нахилена до площини основи під кутом α . Відстань від основи висоти піраміди до її апофеми дорівнює l . Знайдіть:

- а) апофему піраміди;
б) бічну поверхню піраміди.

② Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетами 6 і 8 см. Всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60° .

Варіант А2

① Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а її апофема утворює з висотою кут 45° . Знайдіть:

- а) площу основи піраміди;
б) бічну поверхню піраміди.

② Основа піраміди — правильний трикутник зі стороною a . Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а третя — нахилена до неї під кутом α . Знайдіть повну поверхню піраміди.

③ Бічні ребра трикутної піраміди рівні, а плоскі кути при її вершині — прямі. Площа основи піраміди дорівнює Q . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

Варіант Б2

① Двогранний кут при основі правильній трикутної піраміди дорівнює β . Відрізок, що з'єднує середину висоти піраміди з серединою апофеми, дорівнює m . Знайдіть:

- а) апофему піраміди;
б) бічну поверхню піраміди.

② Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з бічною стороною 5 см і основою 6 см. Всі двогранні кути при основі пі-

Знайдіть повну поверхню піраміди.

③

Основа піраміди — квадрат з периметром 16 см. Дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи. Площа меншого діагонального перерізу піраміди вдвічі менше площі основи. Знайдіть площу більшого діагонального перерізу.

Варіант В1

①

В правильній трикутній піраміді відрізок, що сполучає основу висоти піраміди з серединою апофеми, дорівнює m і утворює з площиною основи кут α . Знайдіть повну поверхню піраміди.

②

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з кутом при основі α і радіусом вписаного кола r . Дві нерівні бічні грані перпендикулярні до площини основи, а третя грань нахилена до неї під кутом β . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

③

Площа основи піраміди дорівнює 72 дм^2 . Два перерізи, паралельні до основи піраміди, мають площі 32 і 50 дм^2 і віддалені один від одного на 2 см. Знайдіть висоту піраміди.

раміди дорівнюють 60° . Знайдіть повну поверхню піраміди.

③

Основа піраміди — квадрат з периметром $8\sqrt{2}$ см. Дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи. Площа більшого діагонального перерізу дорівнює $4\sqrt{2} \text{ см}^2$. Знайдіть площу меншого діагонального перерізу.

Варіант В2

①

В правильній трикутній піраміді відрізок, що сполучає основу висоти піраміди з серединою апофеми, дорівнює m і утворює з висотою піраміди кут β . Знайдіть повну поверхню піраміди.

②

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з кутом при вершині α і радіусом описаного кола R . Дві нерівні бічні грані перпендикулярні до площини основи, а третя грань нахилена до неї під кутом β . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

③

Площа основи піраміди дорівнює 108 дм^2 , а її висота — 24 дм. Перерізи піраміди, паралельні до площини основи, мають площі 48 і 75 дм^2 . Знайдіть відстань між площинами перерізів.

С-37. ЦИЛІНДР. ПЕРЕРІЗИ ЦИЛІНДРА

Варіант А1

①

Довжина кола основи циліндра дорівнює 8π см, а діагональ осьового перерізу — 17 см. Знайдіть твірну циліндра.

②

Паралельно до осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу 60° . Радіус циліндра дорівнює 6 см. Знайдіть площу отриманого перерізу, якщо висота циліндра дорівнює 5 см.

③

Розгорткою бічної поверхні циліндра є квадрат з площею 100π см². Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

Варіант Б1

①

Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, дорівнює 6 см і утворює з площиною нижньої основи кут 60° . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

②

Паралельно до осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу α . Кут між діагоналлю отриманого перерізу і твірною циліндра дорівнює β . Знайдіть площу перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює R .

Варіант А2

①

Площа основи циліндра дорівнює 25π см², а довжина твірної — 24 см. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра.

②

Паралельно до осі циліндра на відстані 2 см від неї проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу 90° . Знайдіть площу отриманого перерізу, якщо висота циліндра дорівнює 6 см.

③

Бічну поверхню рівностороннього циліндра (осьовий переріз — квадрат) з висотою 4 см розрізали по твірній. Знайдіть площу отриманої розгортки.

Варіант Б2

①

Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з серединою радіуса нижньої основи, дорівнює 12 см і утворює з віссю циліндра кут 30° . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

②

Паралельно до осі циліндра проведено площину, яка перетинає нижню основу по хорді, що стягує дугу α . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи з кінцем цієї хорди, дорівнює l і утворює з площиною основи кут β . Знайдіть площу перерізу.

3

Через твірну циліндра проведено два взаємно перпендикулярних перерізи, площі яких — 10 і 24 см^2 . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

Варіант В1

1

Відрізок, що сполучає точки кіл верхньої та нижньої основ циліндра, дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 60° . Пряма, на якій лежить даний відрізок, віддалена від осі циліндра на 4 см . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

2

Паралельно до осі циліндра проведено переріз, що перетинає основу по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α , а з центра іншої основи — під кутом β . Висота циліндра дорівнює H . Знайдіть площу перерізу.

3

Два перерізи, паралельні до осі циліндра, перетинаються всередині нього. Один з перерізів ділиться прямою перетину на рівні по площі частини. Знайдіть площу цього перерізу, якщо другий переріз прямою перетину ділиться на прямокутники з площею 4 і 16 см^2 .

3

Осьовий переріз циліндра має площу 15 см^2 . Через одну з твірних цього перерізу проведено ще один переріз циліндра з площею 9 см^2 . Знайдіть площу перерізу, який проходить через інші твірні даних перерізів.

Варіант В2

1

Відрізок, що сполучає точки кіл верхньої та нижньої основ циліндра, лежить на прямій, яка віддалена від осі циліндра на 2 см і утворює з площиною основи кут 60° . Проекція даного відрізка на площину основи дорівнює $4\sqrt{3} \text{ см}$. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

2

Паралельно до осі циліндра проведено переріз, що перетинає основу по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α , а з центра іншої основи — під кутом β . Діагональ перерізу дорівнює d . Знайдіть його площу.

3

Два перерізи, паралельні до осі циліндра, перетинаються всередині нього. Один з перерізів ділиться прямою перетину на два рівних прямокутники з площею 6 см^2 . Знайдіть площу другого перерізу, якщо пряма перетину ділить його площу у відношенні $1 : 4$.

С-38. ГЕОМЕТРИЧНА КОМБІНАЦІЯ «ЦИЛІНДР — ПРИЗМА»

Варіант А1

1

В основі прямого паралелепіпеда
лежить

ромб.

прямокутник.

Чи може даний паралелепіпед бути

а) вписаним у циліндр?

б) описаним навколо циліндра?

Відповіді поясніть.

2

Навколо циліндра з радіусом R і висотою H описано правильну трикутну призму. Знайдіть бічну поверхню призми.

3

Основа прямої призми — прямокутник зі сторонами 6 і 8 см. Діагональ призми утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, описаного навколо призми.

Варіант А2

2

В циліндр з радіусом R і висотою H вписано правильну трикутну призму. Знайдіть бічну поверхню призми.

3

Основа прямої призми — квадрат з діагоналлю $4\sqrt{2}$ см. Повна поверхня призми дорівнює 112 см^2 . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, вписаного в дану призму.

Варіант Б1

1

Основа прямої призми — чотирикутник
 $ABCD$, у якому

$$\angle A = 108^\circ, \angle B = 65^\circ,$$

$$\angle C = 72^\circ, \angle D = 115^\circ.$$

$$AB = 12 \text{ см}, BC = 6 \text{ см},$$

$$CD = 8 \text{ см}, AD = 10 \text{ см}.$$

Чи може дана призма бути

вписаною в циліндр?

описаною навколо циліндра?

Відповідь поясніть.

2

В циліндр з радіусом 5 см і площею осьового перерізу 40 см^2 вписано трикутну призму. Основа призми — прямокутний

2

В циліндр з висотою 5 см і площею осьового перерізу 65 см^2 вписано трикутну призму, основа якої — прямокут-

трикутник, катети якого відносяться як 3 : 4. Знайдіть повну поверхню призми.

③

Основа прямої призми — ромб з меншою діагоналлю d і тупим кутом β . Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, вписаного в призму.

ний трикутник з різницею катетів 7 см. Знайдіть повну поверхню призми.

③

Основа прямої призми — ромб з більшою діагоналлю d і гострим кутом α . Менша діагональ призми утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, вписаного в призму.

Варіант В1

①

Основа прямої призми — трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$), в якій

$$AD = 8 \text{ см}, BC = 2 \text{ см}.$$

$$AB = 10 \text{ см}, BC = 4 \text{ см}.$$

Знайдіть невідомі сторони трапеції, якщо дана призма є вписаною в циліндр і описаною навколо циліндра.

②

Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з кутом при вершині α . Діагональ бічної грані, яка містить бічну сторону трикутника, утворює з площиною основи кут β . Знайдіть бічну поверхню призми, якщо радіус циліндра, описаного навколо неї, дорівнює R .

③

Основа прямої призми — ромб з площею 300 см^2 . Бічна поверхня призми дорівнює 500 см^2 , а площа осьового перерізу вписаного циліндра — 60 см^2 . Знайдіть площу основи цього циліндра.

Варіант В2

②

Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з кутом при основі α . Діагональ бічної грані, яка містить основу трикутника, утворює з площиною основи кут β . Знайдіть бічну поверхню призми, якщо радіус циліндра, описаного навколо неї, дорівнює R .

③

Основа прямої призми — ромб. Площі основи призми і її діагональних перерізів відповідно дорівнюють 600 , 300 і 400 см^2 . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, вписаного в призму.

С-39. КОНУС. ПЕРЕРІЗИ КОНУСА

Варіант А1

1

Радіус основи конуса дорівнює 8 см, а його твірна — 10 см. Знайдіть:

- а) висоту конуса;
б) площу осьового перерізу конуса.

2

Хорда основи конуса дорівнює 6 см і стягує дугу 90° . Висота конуса дорівнює 4 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через вершину конуса і дану хорду.

3

Площі основ зрізаного конуса — π і 16π см². Твірна конуса дорівнює 5 см. Знайдіть площу осьового перерізу.

Варіант Б1

1

Відстань від центра основи конуса до його твірної дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а кут при вершині осьового перерізу — 120° . Знайдіть:

- а) висоту конуса;
б) площу осьового перерізу.

2

Через вершину конуса з радіусом основи R проведено площину, яка перетинає основу по хорді, яку видно з центра ос-

Варіант А2

1

Твірна конуса дорівнює 13 см, а його висота — 12 см. Знайдіть:

- а) радіус основи конуса;
б) площу осьового перерізу конуса.

2

Радіус основи конуса дорівнює 4 см, а його висота — $2\sqrt{6}$ см. Через вершину конуса проведено переріз, який перетинає основу конуса по хорді, що стягує дугу 60° . Знайдіть площу перерізу.

3

Довжина кола більшої основи зрізаного конуса — 16π см. Твірна і висота конуса дорівнюють 10 і 8 см відповідно. Знайдіть площу осьового перерізу.

Варіант Б2

1

Відстань від центра основи конуса до середини твірної дорівнює 4 см, а кут нахилу твірної до площини основи — 60° . Знайдіть:

- а) висоту конуса;
б) площу осьового перерізу.

2

Переріз конуса, що проходить через його вершину, утворює з площиною основи кут β і відтинає від кола основи дугу α .

нови під кутом α , а з вершини конуса — під кутом β . Знайдіть площу отриманого перерізу.

3

Твірна зрізаного конуса дорівнює 6 см і нахилена до площини основи під кутом 60° . Діагональ осьового перерізу ділить цей кут навпіл. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

Варіант В1

1

Периметр осьового перерізу конуса дорівнює P , а кут при його вершині — α . Знайдіть:

- а) висоту конуса;
- б) площу осьового перерізу.

2

Через вершину конуса проведено переріз під кутом γ до площини основи конуса. Відстань від центра основи конуса до площини перерізу дорівнює d . Знайдіть площу даного перерізу, якщо він відтинає від кола основи дугу α .

3

Площа меншої основи зрізаного конуса дорівнює 9π см². Відрізок, що сполучає центр більшої основи з точкою кола меншої основи, дорівнює 5 см і паралельний одній з твірних. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

Висота конуса дорівнює H . Знайдіть площу перерізу.

3

Висота зрізаного конуса дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Діагональ осьового перерізу конуса утворює з площиною основи кут 30° і перпендикулярна до твірної. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

Варіант В2

1

Периметр осьового перерізу конуса дорівнює P , а твірна нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть:

- а) висоту конуса;
- б) площу осьового перерізу.

2

Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , проведено переріз, який складає з площиною основи конуса кут γ . Відстань від середини висоти конуса до площини перерізу дорівнює l . Знайдіть площу перерізу.

3

Твірна зрізаного конуса дорівнює 5 см, а довжина кола більшої основи — 12π см. Відрізок, що з'єднує центр більшої основи з точкою кола меншої основи, паралельний одній з твірних. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

С-40. ГЕОМЕТРИЧНА КОМБІНАЦІЯ «КОНУС—ПІРАМІДА»

Варіант А1

1

Основа піраміди — довільний трикутник. Висота піраміди проходить через точку перетину серединних перпендикулярів до сторін даного трикутника. Знайдіть точку перетину бісектрис даного трикутника.

Визначте, чи може дана піраміда бути:

- а) вписаною в конус;
- б) описаною навколо конуса.

Відповідь поясніть.

2

В конус з радіусом основи R і висотою H вписано правильну трикутну піраміду. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

3

Основа піраміди — ромб з площею 30 см^2 і периметром 20 см . Висоти всіх бічних граней піраміди нахилені до площини її основи під кутом 45° . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в піраміду.

Варіант А2

2

Навколо конуса з радіусом основи R і висотою H описано правильну трикутну піраміду. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

3

Основа піраміди — прямокутник, менша сторона якого дорівнює 6 см , а кут між діагоналями — 60° . Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 45° . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо піраміди.

Варіант Б1

1

Основа піраміди — довільний трикутник. Відомо, що

всі бічні ребра піраміди утворюють однакові кути з площиною основи.

всі двогранні кути при основі піраміди рівні.

Визначте, чи може дана піраміда бути:

- а) вписаною в конус;
- б) описаною навколо конуса.

Відповідь поясніть.

Варіант Б2

②

Висота конуса дорівнює H , а кут при вершині його осьового перерізу — α . Знайдіть бічну поверхню правильної чотирикутної піраміди, вписаної в даний конус.

③

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом при вершині α . Всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, вписаного в піраміду.

②

Твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть бічну поверхню правильної чотирикутної піраміди, описаної навколо конуса.

③

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при основі α . Всі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кути, рівні β . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо піраміди.

Варіант В1

①

Основа піраміди — довільний трикутник. Визначте, яким вимогам мають задовольняти

довжини бічних ребер і висот бічних граней піраміди

кути нахилу бічних ребер до площини основи і двогранні кути при основі піраміди

для того, щоб дана піраміда була:

- а) вписаною в конус;
- б) описаною навколо конуса.

②

В правильну чотирикутну піраміду вписано конус. Бічна поверхня піраміди дорівнює S . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо він є прямокутним трикутником.

③

Навколо піраміди, основа якої — прямокутний трикутник, описано конус з твірною, яка дорівнює l і складає з площиною основи кут α . Знайдіть бічну поверхню піраміди, якщо два менших плоских кути тригранного кута при її вершині дорівнюють β і γ .

②

В правильну чотирикутну піраміду вписано конус, осьовий переріз якого — правильний трикутник. Знайдіть площу цього перерізу, якщо бічна поверхня піраміди дорівнює S .

③

Основа піраміди — прямокутний трикутник. Навколо піраміди описано конус, осьовий переріз якого має площу S , а кут при його вершині дорівнює α . Знайдіть бічну поверхню піраміди, якщо плоскі кути при її вершині, протилежні до катетів основи, дорівнюють β .

Варіант В2

С-41. КУЛЯ. ПЕРЕРІЗИ КУЛІ. ДОТИК КУЛІ ДО ПЛОЩИНИ І ПРЯМОЇ

Варіант А1

① Радіус кулі дорівнює 6 см. Через кінець радіуса під кутом 60° до нього проведено площину. Знайдіть площу отриманого перерізу кулі.

② Сторони квадрата дотикаються до поверхні кулі радіуса 10 см. Відстань від центра кулі до площини квадрата дорівнює 8 см. Знайдіть площу квадрата.

③ Через точку A , яка лежить на сфері діаметром 24 см, до сфери проведено дотичну площину. В цій площині обрано точку B . Знайдіть довжину відрізка AB , якщо найкоротша відстань від точки B до точки сфери дорівнює 1 см.

Варіант Б1

① На відстані $2\sqrt{3}$ см від центра кулі проведено переріз кулі, площа якого в 4 рази менша за площу великого круга. Знайдіть радіус кулі.

② Вершини рівнобедреного трикутника з основою 12 см і кутом при основі 75° лежать на сфері, радіус якої дорівнює 13 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника.

Варіант А2

① Через точку сфери радіуса $4\sqrt{2}$ см проведено площину під кутом 45° до радіуса сфери з кінцем у даній точці. Знайдіть довжину кола отриманого перерізу.

② Вершини квадрата лежать на поверхні кулі радіуса 3 см. Відстань від центра кулі до площини квадрата дорівнює $\sqrt{7}$ см. Знайдіть площу квадрата.

③ Через точку A , яка лежить на сфері діаметром 24 см, до сфери проведено дотичну площину. В цій площині обрано точку B . Знайдіть довжину відрізка AB , якщо найбільша відстань від точки B до точки сфери дорівнює 25 см.

Варіант Б2

① На відстані $2\sqrt{2}$ см від центра кулі проведено переріз, довжина кола якого в 3 рази менше довжини великого кола. Знайдіть площу перерізу.

② Сторони прямокутного трикутника з катетами 12 і 16 см дотикаються до сфери, радіус якої дорівнює 5 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника.

3

Дві перпендикулярні площини дотикаються до сфери з діаметром 8 см. Знайдіть відстань від центра сфери до прямої перетину площин.

Варіант В1

1

Радіус кулі дорівнює $\sqrt{6}$ см. Через кінці трьох взаємно перпендикулярних радіусів проведено переріз кулі. Знайдіть площу перерізу.

2

Сторони рівнобічної трапеції дотикаються до сфери, діаметр якої дорівнює 10 см. Основи трапеції дорівнюють 2 і 18 см, а кут при основі — 45° . Знайдіть відстань від центра сфери до площини трапеції.

3

Дві сфери з радіусами 15 і 20 см перетинаються по колу, довжина якого дорівнює 24π см. Спільна дотична площина дотикається до даних сфер у точках A і B . Знайдіть довжину відрізка AB , якщо

центр одної сфери лежить всередині іншої.

3

Дві площини, які перетинаються під кутом 60° , дотикаються до сфери. Відстань між точками дотику дорівнює 12 см. Знайдіть відстань від центра сфери до прямої перетину площин.

Варіант В2

1

Радіус кулі дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Через кінці трьох радіусів, будь-які два з яких перетинаються під кутом 60° , проведено переріз кулі. Знайдіть площу перерізу.

2

Вершини рівнобічної трапеції лежать на сфері, діаметр якої дорівнює 26 см. Діагональ і бічна сторона трапеції взаємно перпендикулярні і дорівнюють 8 і 6 см відповідно. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трапеції.

центр одної сфери не лежить всередині іншої.

С-42*. ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ ПРО ТІЛА ОБЕРТАННЯ (домашня самотійна робота)

Варіант 1

1

Дано циліндр з висотою $\sqrt{2}$ см і радіусом 1 см. Дві вершини правильного трикутника лежать на колі нижньої основи циліндра, а третя вершина — на колі верхньої основи. Знайдіть сторону трикутника.

2

Дано циліндр з радіусом основи R .

Його кладуть у щілину шириною d так, що вісь циліндра паралельна краям щілини. Визначте, на скільки циліндр заглибиться у щілину, якщо $d < 2R$.

3

Через твірну циліндра проведено осьовий переріз і переріз, паралельний до осі циліндра. Кут між площинами даних перерізів дорівнює α ($0 < \alpha < 90^\circ$).

Знайдіть площу осьового перерізу, якщо другий переріз має площу Q .

4

Висота конуса дорівнює H , а кут при вершині осьового перерізу дорівнює 2α ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$). Знайдіть площу найбільшого перерізу конуса, який проходить через його вершину.

5

Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює α . Розгортка бічної поверхні конуса — круговий сектор з центральним кутом β .

Виразіть α через β .

Варіант 2

1

Дано циліндр з висотою $\sqrt{14}$ см і радіусом 3 см. Дві вершини квадрата лежать на колі нижньої основи циліндра, а дві інші — на колі верхньої основи. Знайдіть площу квадрата.

Його кладуть у жолоб, який має у перерізі форму рівностороннього трикутника зі стороною d , так, що стінки жолоба паралельні до осі циліндра. Визначте, при яких значеннях d циліндр повністю зануриться в жолоб.

4

Радіус конуса дорівнює R , а його твірна нахилена до площини основи під кутом α ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$). Знайдіть площу найбільшого перерізу конуса, який проходить через його вершину.

Виразіть β через α .

6

Конус котиться по площини, обертаючись навколо своєї нерухомої вершини.

Твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть довжину лінії, яку описує при обертанні середина висоти конуса.

7

Центри основ зрізаного конуса — точки O_1 і O_2 . Відрізки, які сполучають середину O_1O_2 з кінцями твірної конуса, взаємно перпендикулярні і дорівнюють 15 і 20 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо в даний конус можна вписати кулю.

8

Діаметр кулі розділений трьома точками на відрізки у відношенні 1 : 4 : 3 : 2. Знайдіть відношення площ перерізів, проведених через ці точки перпендикулярно до даного діаметра.

9

Сфера радіуса 2 см перетинається площиною. Радіус перерізу дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайдіть довжину найкоротшого шляху по поверхні сфери між двома діаметрально протилежними точками перерізу.

10

Два взаємно перпендикулярних перерізи кулі мають площі 400π і 289π см². Спільна хорда цих перерізів дорівнює 16 см. Знайдіть радіус кулі.

Радіус конуса дорівнює R , а кут при вершині осьового перерізу — α . Знайдіть довжину лінії, яку описує при обертанні центр основи конуса.

7

Центри основ зрізаного конуса — точки O_1 і O_2 . Перпендикуляр, проведений з середини відрізка O_1O_2 до твірної конуса, дорівнює 12 см і ділить її на відрізки 9 і 16 см. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо в даний конус можна вписати кулю.

8

Діаметр кулі розділений трьома точками на відрізки у відношенні 2 : 5 : 4 : 3. Знайдіть відношення площ перерізів, проведених через ці точки перпендикулярно до даного діаметра.

9

Сфера радіуса 4 см перетинається площиною на відстані 2 см від центра. Знайдіть довжину найкоротшого шляху по поверхні сфери між кінцями діаметра перерізу.

10

Два взаємно перпендикулярних перерізи кулі перетинають її поверхню по колах, довжини яких дорівнюють 68π і 80π см. Радіус кулі дорівнює 50 см. Знайдіть довжину спільної хорди даних перерізів.

К-9. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Варіант А1

①

Радіус кулі дорівнює 17 см. Знайдіть площу перерізу кулі, віддаленого від її центра на 15 см.

②

Діаметр основи циліндра дорівнює 10 см. На відстані 3 см від осі циліндра проведено переріз, паралельний до осі, який має форму квадрата. Знайдіть:

- а) площу даного перерізу;
- б) площу осьового перерізу.

③

Висота конуса дорівнює H і складає з твірною конуса кут α . Знайдіть:

- а) площу перерізу, проведеного через середину висоти конуса паралельно до площини основи;
- б) площу перерізу, проведеного через дві твірні, кут між якими дорівнює β .

Варіант Б1

①

На поверхні кулі обрано точки A і B так, що $AB = 40$ см, а відстань від центра кулі до прямої AB дорівнює 15 см. Знайдіть площу перерізу кулі, проведеного через точки A і B на відстані 7 см від центра кулі.

Варіант А2

①

Радіус сфери дорівнює 15 см. Знайдіть довжину кола перерізу, віддаленого від центра сфери на 12 см.

②

Радіус основи циліндра, осьовий переріз якого — квадрат, дорівнює 10 см. На відстані 8 см від осі циліндра проведено переріз, паралельний до осі. Знайдіть:

- а) площу осьового перерізу;
- б) площу даного перерізу.

③

Хорда основи конуса дорівнює a і видна з центра основи під кутом α . Знайдіть:

- а) площу перерізу, проведеного через середину висоти конуса паралельно до площини основи;
- б) площу перерізу, проведеного через дану хорду і вершину конуса, якщо твірна, яка проходить через кінець хорди, складає з хордою кут β .

Варіант Б2

①

На поверхні кулі обрано точки A і B так, що $AB = 40$ см, а відстань від центра кулі до прямої AB дорівнює 15 см. Через точки A і B проведено переріз, площа якого дорівнює 576π см². Знайдіть відстань від центра кулі до площини перерізу.

2

Площина, паралельна до осі циліндра, перетинає основу циліндра по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α . Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β . Радіус циліндра дорівнює R . Знайдіть:

- а) площу даного перерізу;
- б) площу осьового перерізу.

3

Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює β , проведено переріз конуса з площею S . Кут між твірною і висотою конуса дорівнює α . Знайдіть:

- а) площу осьового перерізу конуса;
- б) площу осьового перерізу зрізаного конуса, отриманого перерізом даного конуса площиною, яка проходить через середину його висоти.

Варіант В1

1

В кулі проведено два взаємно перпендикулярних перерізи. Один з них проходить через центр кулі і має площу 36π см². В цьому перерізі спільна хорда даних перерізів стягує кут 120° . Знайдіть площу другого перерізу.

2

Площина, паралельна до осі циліндра, перетинає його основу по хорді, яка стягує кут α . Площа осьового перерізу циліндра дорівнює S . Знайдіть площу утвореного перерізу.

2

Площина, паралельна до осі циліндра, перетинає основу циліндра по хорді, яка складає з діагоналлю даного перерізу кут β . Радіус основи циліндра, проведений в один з кінців хорди, утворює з площиною перерізу кут α . Висота циліндра дорівнює H . Знайдіть:

- а) площу даного перерізу;
- б) площу осьового перерізу.

3

Переріз конуса, проведений через його вершину, має площу S і перетинає основу по хорді. Твірна конуса, через яку проходить переріз, складає з даною хордою кут α , а з площиною основи — кут β . Знайдіть:

- а) площу осьового перерізу конуса;
- б) площу осьового перерізу зрізаного конуса, отриманого перерізом даного конуса площиною, яка проходить через середину його висоти.

Варіант В2

1

В кулі проведено два взаємно перпендикулярних перерізи. Їх спільна хорда дорівнює 8 см і для одного з перерізів є діаметром, а у другому стягує кут 90° . Знайдіть радіус кулі.

2

Переріз циліндра, паралельний до його осі, має площу Q і перетинає основу циліндра по хорді, яка стягує дугу α . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

③

Точка висоти конуса, яка знаходиться на відстані d від площини основи, рівновіддалена від кінців твірної. Відрізок, що сполучає цю точку з точкою кола основи, утворює з площиною основи кут α . Через дану точку висоти конуса проведено переріз, паралельний до площини основи. Знайдіть площу осьового перерізу утвореного зрізаного конуса.

③

Точка висоти конуса рівновіддалена від твірної і площини основи. Відрізок, що сполучає цю точку з точкою кола основи, дорівнює d і утворює з площиною основи кут α . Через дану точку висоти конуса проведено переріз, паралельний до площини основи. Знайдіть площу осьового перерізу утвореного зрізаного конуса.

C-43. ОБ'ЄМ ПАРАЛЕЛЕПЕДА

Варіант А1

①

Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 4 і 5 см, а діагональ більшої бічної грані дорівнює 13 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

②

Основа прямого паралелепіпеда — ромб з периметром 20 см і діагоналлю 8 см. Висота паралелепіпеда дорівнює меншій діагоналі його основи. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

③

Основа паралелепіпеда — прямокутник з діагоналлю 8 см і кутом між діагоналями 60° . Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 10 см і утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Варіант А2

①

Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 і 8 см, а діагональ меншої бічної грані дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

②

Основа прямого паралелепіпеда — ромб з периметром 40 см і діагоналлю 12 см. Висота паралелепіпеда дорівнює більшій діагоналі його основи. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

③

Основа паралелепіпеда — квадрат з діагоналлю $8\sqrt{2}$ см. Одна зі сторін нижньої основи є проекцією бічного ребра паралелепіпеда, яке складає з площиною основи кут 45° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Варіант Б1

① Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 6 см і утворює з бічними гранями кути 30° і 45° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

② Основа прямого паралелепіпеда — ромб з більшою діагоналлю d . Більша діагональ паралелепіпеда утворює кут α з бічним ребром, а менша — кут β з площиною основи. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

③ Основа паралелепіпеда — квадрат з площею 32 см^2 , а всі бічні грані — ромби. Одна з вершин верхньої основи паралелепіпеда проектується у центр нижньої основи. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Варіант В1

① Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6, 10 і 15 см^2 . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

② Основа прямого паралелепіпеда — паралелограм зі сторонами 15 і 25 см і діагоналлю 20 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його менший діагональний переріз — квадрат.

Варіант Б2

① Діагональ бічної грані прямокутного паралелепіпеда дорівнює $5\sqrt{2}$ см. Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною цієї грані кут 45° , а з площиною основи — 30° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

② Основа прямого паралелепіпеда — ромб. Більша діагональ паралелепіпеда дорівнює d і утворює з бічним ребром кут α , а менша — нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

③ Основа паралелепіпеда — квадрат з діагоналлю $5\sqrt{2}$ см, а бічне ребро дорівнює 13 см. Одна з вершин верхньої основи проектується на площину нижньої основи у протилежну до неї вершину бічної грані. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Варіант В2

① Периметри трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 10, 14 і 16 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

② Основа прямого паралелепіпеда — паралелограм зі сторонами 13 і 14 см і діагоналлю 15 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його переріз, який проходить через бічне ребро і меншу висоту основи — квадрат.

③

Всі грані паралелепіпеда — ромби зі стороною a . Гострий кут основи дорівнює α , а бічне ребро, яке виходить з вершини цього кута, утворює з суміжними сторонами основи кути, рівні β . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

③

Основа паралелепіпеда — квадрат, всі бічні грані — ромби. Дві суміжні бічні грані нахилені до площини основи паралелепіпеда під кутом β . Висота паралелепіпеда дорівнює H . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

С-44. ОБ'ЄМ ПРИЗМИ

Варіант А1

①

Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з основою 8 см і периметром 18 см. Знайдіть об'єм призми, якщо дві її бічні грані — квадрати.

②

Бічне ребро прямої призми дорівнює 10 см, а її об'єм — 300 см^3 . Основа призми — прямокутний трикутник з катетом 12 см. Знайдіть бічну поверхню призми.

③

Основа похилої призми — правильний трикутник зі стороною a . Одна з бічних граней призми перпендикулярна до площини основи і є ромбом з гострим кутом α . Знайдіть об'єм призми.

Варіант Б1

①

Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом при

Варіант А2

①

Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з бічною стороною 5 см і периметром 18 см. Знайдіть об'єм призми, якщо одна її бічна грань — квадрат.

②

Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетами 6 і 8 см. Об'єм призми дорівнює 240 см^3 . Знайдіть бічну поверхню призми.

③

Основа похилої призми — рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою a . Бічна грань призми, яка містить гіпотенузу основи, — ромб з гострим кутом α . Знайдіть об'єм призми, якщо площина ромба перпендикулярна до площини основи.

Варіант Б2

①

Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при вершині α .

основі α . Діагональ бічної грані, яка містить основу трикутника, утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм призми.

②

Бічне ребро прямої призми дорівнює 10 см, а її об'єм — 200 см^3 . Основа призми — рівнобічна трапеція з основами 2 і 8 см. Знайдіть повну поверхню призми.

③

Основа призми — прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см і гострим кутом 30° . Бічна грань, яка містить катет, протилежний до даного кута, є квадратом і нахилена до площини основи під кутом 45° . Знайдіть об'єм призми.

Варіант В 1

①

Більша діагональ правильної шестикутної призми дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, вершини якої є вершинами основи даної шестикутної призми, взятими через одну.

②

Основа прямої призми — прямокутний трикутник з гіпотенузою 25 см. Бічне ребро призми дорівнює 10 см, а її об'єм — 1500 см^3 . Знайдіть бічну поверхню призми.

③

Основа похилої призми — рівнобедрений трикутник з основою a . Бічні грані призми, які містять

Діагональ бічної грані, яка містить бічну сторону трикутника, утворює з площиною основи кут β . Знайдіть об'єм призми.

②

Бічне ребро прямої призми дорівнює 5 см, а її об'єм — 60 см^3 . Основа призми — прямокутна трапеція з бічними сторонами 3 і 5 см. Знайдіть повну поверхню призми.

③

Основа призми — прямокутний трикутник з гострим кутом 60° . Бічна грань, яка містить катет, прилеглий до даного кута, є квадратом з площею 36 см^2 і утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм призми.

Варіант В 2

①

Менша діагональ правильної шестикутної призми дорівнює $4\sqrt{3}$ см і утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, вершини якої є серединами сторін основи даної шестикутної призми, взятими через одну.

②

Основа прямої призми — прямокутний трикутник з висотою 12 см. Бічне ребро призми дорівнює 5 см, а її об'єм — 750 см^3 . Знайдіть бічну поверхню призми.

③

Основа похилої призми — рівнобедрений трикутник. Бічні грані призми, які містять бічні

бічні сторони трикутника, перетинаються під кутом β . Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює l .

сторони цього трикутника, перетинаються під кутом α , а їх спільне бічне ребро дорівнює l і віддалене від кінців основи трикутника на відстань b . Знайдіть об'єм призми.

С-45. ОБ'ЄМ ПІРАМІДИ

Варіант А1

① Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 3 см. Бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм піраміди.

② Основа піраміди — прямокутник з меншою стороною 5 см і кутом між діагоналями 60° . Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть об'єм піраміди.

③ Об'єм трикутної піраміди дорівнює V . Знайдіть об'єм піраміди, висота якої збігається з висотою даної піраміди, а вершини основи — середини сторін трикутника, який лежить в основі даної піраміди.

Варіант Б1

① Двогранний кут при основі правильної чотирикутної піраміди дорівнює α . Знайдіть об'єм піраміди, якщо відстань від основи висоти до середини апофеми дорівнює d .

Варіант А2

① Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а двогранний кут при основі піраміди — 60° . Знайдіть об'єм піраміди.

② Основа піраміди — прямокутник з більшою стороною $6\sqrt{3}$ см і кутом між діагоналями 120° . Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм піраміди.

③ Об'єм піраміди дорівнює V . На висоті піраміди обрано точку, яка ділить висоту у відношенні $2:1$, починаючи від основи. Знайдіть об'єм піраміди, основа якої збігається з основою даної піраміди, а вершиною є обрана точка.

Варіант Б2

① Двогранний кут при основі правильної чотирикутної піраміди дорівнює α . Знайдіть об'єм піраміди, якщо відрізок, що сполучає середину висоти з серединою бічного ребра, дорівнює d .

②

Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетом 5 см і протилежним до нього кутом 30° . Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 45° . Знайдіть об'єм піраміди.

③

Об'єм трикутної піраміди $SABC$ з основою ABC дорівнює V . Точка S_1 — середина висоти піраміди, BM — медіана трикутника ABC . Знайдіть об'єм піраміди S_1ABM .

Варіант В1

①

Двогранний кут при основі правильної трикутної піраміди дорівнює α . Знайдіть об'єм піраміди, якщо відстань від вершини її основи до протилежної бічної грані дорівнює l .

②

Основа піраміди — рівнобічна трапеція з гострим кутом 60° . Діагональ трапеції дорівнює $4\sqrt{3}$ см і перпендикулярна до бічної сторони. Всі бічні ребра піраміди мають довжину 5 см. Знайдіть її об'єм.

③

Об'єм трикутної піраміди $SABC$ з основою ABC дорівнює V . S_1 — точка висоти піраміди SO , причому $SS_1 : S_1O = 2 : 3$. M — точка відрізка AB , причому $AM : MB = 3 : 1$. Знайдіть об'єм піраміди S_1AMC .

②

Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетом $4\sqrt{3}$ см і прилеглим до нього кутом 60° . Всі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кути, рівні 45° . Знайдіть об'єм піраміди.

③

Об'єм трикутної піраміди $SABC$ з основою ABC і висотою SO дорівнює V . Точка S — середина відрізка OS_1 . MN — середня лінія трикутника ABC , $MN \parallel AB$. Знайдіть об'єм піраміди S_1MNC .

Варіант В2

①

Двогранний кут при основі правильної трикутної піраміди дорівнює α . Знайдіть об'єм піраміди, якщо відстань від середини її висоти до бічної грані дорівнює l .

②

Основа піраміди — рівнобічна трапеція з більшою основою 16 см. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони і утворює з даною основою кут 30° . Всі бічні ребра піраміди дорівнюють 10 см. Знайдіть об'єм піраміди.

③

Дано трикутну піраміду $SABC$ з основою ABC . S_1 — точка висоти піраміди SO , причому $SS_1 : S_1O = 1 : 2$. M — точка відрізка AB , причому $AM : MB = 2 : 3$. Об'єм піраміди S_1CMB дорівнює V . Знайдіть об'єм піраміди $SABC$.

С-46. ОБ'ЄМ ПІРАМІДИ-2. РІВНОВЕЛИКІ ТІЛА

Варіант А1

1

Основа піраміди — трикутник зі сторонами 13, 14 і 15 см. Всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 45° . Знайдіть об'єм піраміди.

2

Основа піраміди — квадрат зі стороною a . Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом α . Знайдіть об'єм піраміди.

3

Ребро куба дорівнює a . Знайдіть висоту правильної трикутної піраміди зі стороною основи a , якщо об'єм піраміди дорівнює об'єму куба.

Варіант Б1

1

Основа піраміди — ромб з периметром 40 см і площею 60 см^2 . Всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60° . Знайдіть об'єм піраміди.

2

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при вершині α . Бічна грань піраміди, яка містить основу трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші

Варіант А2

1

Основа піраміди — трикутник зі сторонами 5, 12 і 13 см. Висоти бічних граней піраміди утворюють з висотою піраміди кути 45° . Знайдіть об'єм піраміди.

2

Основа піраміди — квадрат. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом α . Висота піраміди дорівнює H . Знайдіть об'єм піраміди.

3

Ребро куба дорівнює h . Знайдіть сторону основи правильної чотирикутної піраміди з висотою h , якщо об'єм піраміди дорівнює об'єму куба.

Варіант Б2

1

Основа піраміди — ромб з діагоналями 30 і 40 см. Висоти всіх бічних граней піраміди утворюють з висотою піраміди кути 30° . Знайдіть об'єм піраміди.

2

Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим до нього гострим кутом α . Бічна грань піраміди, яка містить другий катет, перпендикулярна до площини осно-

грані нахилені до неї під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди.

③

Правильний тетраедр з ребром a і правильна чотирикутна піраміда з висотою $a\sqrt{2}$ мають рівні об'єми. Знайдіть сторону основи чотирикутної піраміди.

Варіант В1

①

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом при основі α . Бічні грані піраміди, які містять бічні сторони трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань нахилена до неї під кутом β і віддалена від основи висоти піраміди на відстань d . Знайдіть об'єм піраміди.

②

Основа піраміди — квадрат зі стороною a . Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві суміжні з нею бічні грані нахилені до площини основи під кутом α .

а) Знайдіть об'єм піраміди.

б) Визначте, при якому значенні α об'єм даної піраміди буде дорівнювати об'єму правильної трикутної піраміди, у якій бічні ребра взаємно перпендикулярні і дорівнюють a .

ви, а дві інші грані нахилені до неї під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди.

③

Правильний тетраедр з ребром a і правильна трикутна піраміда з висотою $a\sqrt{6}$ мають рівні об'єми. Знайдіть сторону основи правильної трикутної піраміди.

Варіант В2

①

Основа піраміди — прямокутний трикутник з гострим кутом α . Бічні грані, які містять гіпотенузу трикутника і катет, протилежний до даного кута, перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань нахилена до неї під кутом β і віддалена від основи висоти піраміди на відстань d . Знайдіть об'єм піраміди.

②

Основа піраміди — квадрат. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві суміжні з нею бічні грані нахилені до площини основи під кутом α . Висота піраміди дорівнює H .

а) Знайдіть об'єм піраміди.

б) Визначте, при якому значенні α об'єм даної піраміди буде дорівнювати об'єму правильної трикутної піраміди, у якій бічні ребра взаємно перпендикулярні і дорівнюють $2H$.

С-47. ОБ'ЄМ ЗРІЗАНОЇ ПІРАМІДИ. ОБ'ЄМИ ПОДІБНИХ ТІЛ

Варіант А1

① Як зміниться об'єм піраміди, якщо довжини всіх її ребер збільшити в 3 рази?

② Знайдіть об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, висота якої дорівнює 6 см, а діагоналі основ — $2\sqrt{2}$ і $4\sqrt{2}$ см.

③ Площі основ двох подібних пірамід дорівнюють 20 і 45 см^2 . Знайдіть відношення об'ємів пірамід.

Варіант Б1

① Ребро куба дорівнює діагоналі іншого куба. Знайдіть відношення їх об'ємів.

② В правильній зрізаній трикутній піраміді сторони основи дорівнюють 2 і 4 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм піраміди.

③ Через середину висоти піраміди, об'єм якої дорівнює V , проведено площину, паралельну до площини основи піраміди. Знайдіть об'єм утвореної зрізаної піраміди.

Варіант А2

① Як зміниться об'єм піраміди, якщо довжини всіх її ребер зменшити в 2 рази?

② Знайдіть об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, висота якої дорівнює 3 см, а радіуси кіл, описаних навколо основ, — $\sqrt{2}$ і $2\sqrt{2}$ см.

③ Об'єми двох подібних пірамід дорівнюють 40 і 135 см^3 . Знайдіть відношення площ основ цих пірамід.

Варіант Б2

① Ребро куба дорівнює діагоналі грані іншого куба. Знайдіть відношення їх об'ємів.

② В правильній зрізаній трикутній піраміді сторона меншої основи дорівнює 3 см, а бічне ребро, яке дорівнює 4 см, утворює з висотою кут 60° . Знайдіть об'єм піраміди.

③ Через середину висоти піраміди проведено площину, перпендикулярну до висоти. Вона відтинає піраміду, подібну до даної, з об'ємом V . Знайдіть об'єм утвореної при цьому зрізаної піраміди.

Варіант В1

① Ребро правильного тетраедра дорівнює висоті іншого правильного тетраедра. Знайдіть відношення їх об'ємів.

② Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 2 і 4 см, а один з кутів бічної грані — 120° . Знайдіть об'єм піраміди.

③ Висоту піраміди, об'єм якої дорівнює V , розділено на три рівні частини, і через точки поділу проведено площини, паралельні до основи піраміди. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди, розміщеної між цими площинами.

Варіант В2

① Ребро правильного тетраедра дорівнює апофемі іншого правильного тетраедра. Знайдіть відношення їх об'ємів.

② Площі основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють $9\sqrt{3}$ і $36\sqrt{3}$ см², а площа бічної поверхні — $27\sqrt{7}$ см². Знайдіть об'єм піраміди.

③ Дві площини, паралельні до площини основи піраміди, ділять її висоту на три рівні частини. Об'єм найбільшої з утворених зрізаних пірамід дорівнює V . Знайдіть об'єм даної піраміди.

**С-48*. ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ
ПРО ОБ'ЄМИ МНОГОГРАННИКІВ
(домашня самотійна робота)**

① Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 15, 20 і $\sqrt{337}$ см. Знайдіть його об'єм.

② Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 6 і 10 см, а площі діагональних перерізів — 40 і $20\sqrt{13}$ см². Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

① Відстані від центра прямокутного паралелепіпеда до його ребер дорівнюють $\sqrt{13}$, $2\sqrt{5}$ і 5 см. Знайдіть його об'єм.

② Площі бічних граней прямого паралелепіпеда дорівнюють 60 і 100 см², а діагоналі основи — 8 і $4\sqrt{13}$ см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

3

Периметри двох граней правильної трикутної призми дорівнюють 30 і 48 см. Знайдіть об'єм призми.

4

Об'єм правильної шестикутної призми дорівнює кубу довжини меншої діагоналі основи. Знайдіть кут, який більша діагональ призми утворює з бічним ребром.

5

Знайдіть геометричне місце вершин пірамід з даним об'ємом, які мають спільну основу.

6

Основа піраміди — прямокутний трикутник, а всі її бічні ребра утворюють однакові кути з висотою піраміди. Периметри бічних граней піраміди дорівнюють 32, 34 і 36 см. Знайдіть об'єм піраміди.

7

Бічні ребра трикутної піраміди дорівнюють a , b і c і попарно перпендикулярні. Знайдіть об'єм піраміди.

8

Основа піраміди — трикутник ABC , у якому $BC = a$, $\angle B = \alpha$. Бічна грань піраміди, яка містить сторону AB , перпендикулярна до площини основи і має площу S . Знайдіть об'єм піраміди.

3

Площі двох граней правильної трикутної призми дорівнюють $4\sqrt{3}$ і $16\sqrt{3}$ см². Знайдіть об'єм призми.

4

Основа призми — квадрат. Добуток довжин ребер одного з тригранних кутів вдвічі більше за об'єм призми. Знайдіть кут нахилу бічного ребра до площини основи.

5

Доведіть, що сума відстаней від внутрішньої точки правильного тетраедра до всіх його граней — стала величина.

6

Основа піраміди — прямокутний трикутник з периметром 24 см. Всі двогранні кути при основі дорівнюють 60° . Площі двох менших бічних граней піраміди дорівнюють 12 і 16 см². Знайдіть об'єм піраміди.

7

Площа одної з бічних граней трикутної піраміди дорівнює S . Бічне ребро, яке не належить цій грані, перпендикулярне до неї і дорівнює a . Знайдіть об'єм піраміди.

8

Дві бічні грані трикутної піраміди взаємно перпендикулярні і мають площі P і Q , а їх спільне ребро дорівнює b . Знайдіть об'єм піраміди.

К-10. ОБ'ЄМИ МНОГОГРАННИКІВ

Варіант А1

1 Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетами 3 і 4 см. Діагональ бічної грані, яка містить гіпотенузу трикутника, дорівнює 13 см. Знайдіть об'єм призми.

2 Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює l і утворює з площиною основи піраміди кут α . Знайдіть об'єм піраміди.

3 Основа піраміди — прямокутник з кутом між діагоналями 120° . Всі бічні ребра піраміди дорівнюють $3\sqrt{2}$ см і нахилені до площини основи під кутом 45° . Знайдіть об'єм піраміди.

Варіант Б1

1 Основа прямого паралелепіпеда — ромб з периметром 40 см. Одна з діагоналей ромба дорівнює 12 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо його більша діагональ дорівнює 20 см.

2 В правильній трикутній піраміді бічні ребра нахилені до площини основи під кутом α . Відстань від середини висоти піраміди до бічного ребра дорівнює d . Знайдіть об'єм піраміди.

Варіант А2

1 Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник, у якому бічна сторона дорівнює 5 см, а висота, проведена до основи, — 4 см. Діагональ бічної грані, яка містить основу трикутника, дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм призми.

2 Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює l і нахилене до площини основи піраміди під кутом α . Знайдіть об'єм піраміди.

3 Основа піраміди — ромб з більшою діагоналлю 12 см і гострим кутом 60° . Всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 45° . Знайдіть об'єм піраміди.

Варіант Б2

1 Основа прямого паралелепіпеда — ромб з периметром 40 см. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 9 см, а одна з його діагоналей — 15 см. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

2 В правильній трикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α . Знайдіть об'єм піраміди, якщо відстань від середини її висоти до апофеми дорівнює d .

3

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом при основі β . Всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють α . Знайдіть об'єм піраміди.

Варіант В1**1**

Основа прямого паралелепіпеда — ромб, діагоналі якого відносяться як $5 : 9$. Діагоналі паралелепіпеда дорівнюють 26 і 30 см. Знайдіть його об'єм.

2

Бічні грані правильної трикутної піраміди утворюють з її висотою кути, рівні α . Знайдіть об'єм піраміди, якщо відстань від середини її апофеми до висоти дорівнює m .

3

Основа піраміди — прямокутний трикутник з гострим кутом α . Дві бічні грані, які містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а третя — нахилена до неї під кутом β і має площу S . Знайдіть об'єм піраміди.

3

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом при вершині β . Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом α . Знайдіть об'єм піраміди.

Варіант В2**1**

Основа прямого паралелепіпеда — ромб з діагоналями 10 і 18 см. Діагоналі паралелепіпеда відносяться як $13 : 15$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

2

Бічні грані правильної трикутної піраміди утворюють з її висотою кути, рівні α . Відстань від основи висоти піраміди до середини її апофеми дорівнює m . Знайдіть об'єм піраміди.

3

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з кутом при вершині α . Дві бічні грані, які містять сторони цього кута, перпендикулярні до площини основи, а третя — нахилена до неї під кутом β і має площу S . Знайдіть об'єм піраміди.

С-49. ОБ'ЄМ ЦИЛІНДРА**Варіант А1****1**

Висота циліндра дорівнює 5 см, а діагональ осьового перерізу — 13 см. Знайдіть об'єм циліндра.

Варіант А2**1**

Радіус циліндра дорівнює 4 см, а діагональ осьового перерізу — 10 см. Знайдіть об'єм циліндра.

2

Хорда основи циліндра дорівнює 16 см і віддалена від центра цієї основи на 6 см. Відрізок, що сполучає центр іншої основи циліндра з кінцем даної хорди, утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть об'єм циліндра.

3

Об'єм циліндра дорівнює V , а його радіус — R . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

Варіант Б1**1**

Площа основи циліндра дорівнює 36π см². Діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи циліндра кут 60° . Знайдіть об'єм циліндра.

2

Переріз, паралельний до осі циліндра, перетинає його основу по хорді, яка дорівнює a і стягує кут α . Діагональ перерізу складає з твірною циліндра кут β . Знайдіть об'єм циліндра.

3

Об'єм циліндра дорівнює V , а площа його основи — S . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

Варіант В1**1**

Периметр осьового перерізу циліндра дорівнює P . Діагональ перерізу утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм циліндра.

2

Хорда основи циліндра дорівнює 12 см і віддалена від центра цієї основи на 8 см. Відрізок, що сполучає центр іншої основи циліндра з серединою даної хорди, утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть об'єм циліндра.

3

Об'єм циліндра дорівнює V , а його висота — H . Знайдіть площу осьового перерізу циліндра.

Варіант Б2**1**

Довжина кола основи циліндра дорівнює 12π см. Діагональ осьового перерізу утворює з площиною основи циліндра кут 30° . Знайдіть об'єм циліндра.

2

Паралельно до осі циліндра проведено площину, яка перетинає основу циліндра по хорді, що стягує кут α . Діагональ отриманого перерізу дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм циліндра.

3

Об'єм циліндра дорівнює V , а площа осьового перерізу — S . Знайдіть площу основи циліндра.

Варіант В2**1**

Площа осьового перерізу циліндра дорівнює S . Кут між діагоналлю перерізу і твірною циліндра дорівнює α . Знайдіть об'єм циліндра.

②

Переріз, паралельний до осі циліндра, перетинає його основу по хорді, яка стягує кут α . Діагональ перерізу дорівнює d , а кут між діагоналями, протилежний до даної хорди, дорівнює β . Знайдіть об'єм циліндра.

③

Об'єм циліндра дорівнює V . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з віссю циліндра кут β . Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, описаної навколо циліндра.

②

Переріз, паралельний до осі циліндра, перетинає його основу по хорді, яка стягує кут α . Висота циліндра дорівнює H , а кут між діагоналями перерізу, протилежний до твірної циліндра, дорівнює β . Знайдіть об'єм циліндра.

③

Об'єм циліндра дорівнює V . Діагональ осьового перерізу циліндра нахилена до площини його основи під кутом α . Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, вписаної в циліндр.

С-50. ОБ'ЄМ КОНУСА. ОБ'ЄМ ЗРІЗАНОГО КОНУСА

Варіант А1

①

Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює 15 см, а діаметр його основи — 18 см.

②

Твірна конуса нахилена до площини його основи під кутом α . Відстань від центра основи конуса до його твірної дорівнює d . Знайдіть об'єм конуса.

③

В зрізаному конусі радіус меншої основи дорівнює 2 см. Висота конуса дорівнює 3 см, а його твірна складає з площиною більшої основи кут 45° . Знайдіть об'єм конуса.

Варіант А2

①

Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює 17 см, а висота — 15 см.

②

Кут між твірною і висотою конуса дорівнює α . Відстань від середини висоти конуса до його твірної дорівнює d . Знайдіть об'єм конуса.

③

Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 2 і 5 см. Один з кутів осьового перерізу конуса дорівнює 135° . Знайдіть об'єм конуса.

Варіант Б1

① Осьовий переріз конуса — прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см. Знайдіть об'єм конуса.

② Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , проведено переріз, який має площу S . Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна нахилена до площини основи під кутом β .

③ Радіуси основ зрізаного конуса відносяться як 3 : 7, а кут між висотою і твірною дорівнює 45° . Знайдіть об'єм конуса, якщо його висота дорівнює 4 см.

Варіант В1

① Знайдіть об'єм конуса, у якому твірна нахилена до площини основи під кутом α , а периметр осьового перерізу дорівнює P .

② Площина, яка проходить через вершину конуса, утворює з площиною основи конуса кут β . Хорда, по якій дана площина перетинає основу конуса, стягує кут α . Знайдіть об'єм конуса, якщо відстань від його вершини до даної хорди дорівнює l .

Варіант Б2

① Осьовий переріз конуса — рівнобедрений трикутник, один з кутів якого дорівнює 120° . Знайдіть об'єм конуса, якщо його висота дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

② Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , проведено переріз, який має площу S . Знайдіть об'єм конуса, якщо кут між твірною і висотою дорівнює β .

③ Радіуси основ зрізаного конуса відносяться як 1 : 3, а його твірна дорівнює 4 см і нахилена до площини основи під кутом 30° . Знайдіть об'єм конуса.

Варіант В2

① Знайдіть об'єм конуса, якщо його осьовий переріз — трикутник з периметром P і тупим кутом α .

② Хорда основи конуса видна з центра основи під кутом α , а з вершини конуса — під кутом β . Знайдіть об'єм конуса, якщо відстань від центра його основи до середини твірної дорівнює d .

③

Твірна зрізаного конуса дорівнює 4 см і нахилена до площини основи під кутом 60° . Діагональ осьового перерізу ділить цей кут навпіл. Знайдіть об'єм конуса.

③

Діагональ осьового перерізу зрізаного конуса перпендикулярна до його твірної і ділить навпіл кут при основі перерізу. Знайдіть об'єм конуса, якщо радіус більшої основи дорівнює 4 см.

С-51. ОБ'ЄМ КУЛІ ТА ЇЇ ЧАСТИН

Варіант А1

①

Площа перерізу кулі, який проходить через її центр (великого круга), дорівнює 9π см². Знайдіть об'єм кулі.

②

На відстані 4 см від центра кулі проведено переріз, довжина кола якого дорівнює 6π см. Знайдіть об'єм кулі.

③

Знайдіть об'єм кульового сегмента, якщо радіус кулі дорівнює 8 см, а висота сегмента — 3 см.

Варіант Б1

①

На поверхні кулі обрано точки A і B , причому $AB = 3\sqrt{2}$ см. Радіус кулі, проведений до точки A , утворює з хордою AB кут 45° . Знайдіть об'єм кулі.

②

В кулі, об'єм якої дорівнює 288π см³, проведено переріз. Відрізок, що сполучає центр

Варіант А2

①

Довжина кола перерізу, який проходить через центр кулі (великого кола), дорівнює 8π см. Знайдіть об'єм кулі.

②

Переріз кулі, віддалений від її центра на 3 см, має площу 16π см². Знайдіть об'єм кулі.

③

Знайдіть об'єм кульового сектора, якщо радіус кулі дорівнює 6 см, а висота сектора — 2 см.

Варіант Б2

①

На поверхні кулі обрано точки A і B , причому $AB = 6$ см. Кут між відрізками, які сполучають центр кулі з точками A і B , дорівнює 60° . Знайдіть об'єм кулі.

②

Об'єм кулі дорівнює $\frac{32}{3}\pi$ см³. Перпендикуляр, проведений з

кулі з точкою кола даного перерізу, утворює з площиною перерізу кут 60° . Знайдіть площу перерізу.

3

Радіус кулі дорівнює R . Знайдіть об'єм кульового сектора, якщо дуга у його осьовому перерізі дорівнює 90° .

Варіант В1

1

На поверхні кулі з центром у точці O обрано точки A , B і C так, що $OABC$ — правильний тетраедр. Знайдіть об'єм кулі, якщо точка B віддалена від площини OAC на $\sqrt{6}$ см.

2

Куля з об'ємом V дотикається до всіх сторін рівнобедреного трикутника з бічною стороною b і кутом при основі α . Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

3

Радіуси основ кульового поясу дорівнюють 3 і 4 см, а висота поясу — 5 см. Знайдіть об'єм поясу, якщо площини його основ

лежать по різні боки від центра кулі.

центра до площини перерізу кулі, утворює кут 45° з радіусом, проведеним у точку кола перерізу. Знайдіть площу перерізу.

3

Радіус кулі дорівнює R . Знайдіть об'єм кульового сегмента, якщо його діаметр дорівнює радіусу кулі.

Варіант В2

1

На дотичній площині до кулі з центром O обрано точки A , B і C так, що $OABC$ — правильний тетраедр з ребром $\sqrt{6}$ см. Знайдіть об'єм кулі.

2

Вершини прямокутного трикутника з катетом a і прилеглим до нього гострим кутом α лежать на поверхні кулі, об'єм якої дорівнює V . Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

лежать по один бік від центра кулі.

С-52. ПЛОЩА БІЧНОЇ ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРА

Варіант А1

① Осьовий переріз циліндра — квадрат з периметром 16 см. Знайдіть повну поверхню циліндра.

② Переріз циліндра, паралельний до його осі, має площу 18 см^2 і відтинає від кола основи дугу в 60° . Знайдіть бічну поверхню циліндра, якщо його твірна дорівнює 3 см.

③ Бічна поверхня циліндра дорівнює S , а висота — H . Знайдіть об'єм циліндра.

Варіант Б1

① Хорда основи циліндра дорівнює 32 см і віддалена від центрів його основ на 12 і 13 см. Знайдіть повну поверхню циліндра.

② Переріз циліндра, паралельний до його осі, відтинає чверть дуги кола основи. Діагональ цього перерізу дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть бічну поверхню циліндра.

③ Бічна поверхня циліндра складає половину його повної поверхні. Знайдіть об'єм циліндра, якщо діагональ осьового перерізу дорівнює $2\sqrt{5}$ см.

Варіант А2

① Осьовий переріз циліндра — квадрат з площею 36 см^2 . Знайдіть повну поверхню циліндра.

② Переріз, паралельний до осі циліндра, перетинає його основу по хорді завдовжки $4\sqrt{2}$ см, яка стягує дугу 90° . Площу перерізу дорівнює $24\sqrt{2} \text{ см}^2$. Знайдіть бічну поверхню циліндра.

③ Бічна поверхня циліндра дорівнює S , а радіус — R . Знайдіть об'єм циліндра.

Варіант Б2

① Кінці хорди нижньої основи циліндра віддалені від центра верхньої основи на 20 см, а сама хорда віддалена від центрів основ на 9 і 15 см. Знайдіть повну поверхню циліндра.

② Переріз циліндра, паралельний до його осі і віддалений від неї на відстань d , відтинає третину дуги кола основи. Діагональ перерізу утворює з висотою циліндра кут α . Знайдіть бічну поверхню циліндра.

③ Площа бічної поверхні циліндра дорівнює площі його основи. Знайдіть об'єм циліндра, якщо діагональ осьового перерізу дорівнює $4\sqrt{5}$ см.

Варіант В1

1 Хорда нижньої основи циліндра дорівнює висоті циліндра і віддалена від його осі на $2\sqrt{7}$ см. Знайдіть повну поверхню циліндра, якщо відстані від центра верхньої основи до кінців хорди дорівнюють $4\sqrt{13}$ см.

2 Переріз циліндра, перпендикулярний до площини його основи, має площу S і відтинає від кола основи дугу α . Знайдіть бічну поверхню циліндра.

3 Розгортка бічної поверхні циліндра — прямокутник з площею S , діагональ якого утворює з одною зі сторін кут α . Знайдіть об'єм циліндра. Скільки розв'язків має задача?

Варіант В2

1 Хорда нижньої основи циліндра віддалена від центра верхньої основи на відстань, що дорівнює радіусу циліндра. Відстань від даної хорди до осі циліндра дорівнює 3 см, а від центра верхньої основи до кінців хорди — $\sqrt{41}$ см. Знайдіть повну поверхню циліндра.

2 В циліндрі з бічною поверхнею S перпендикулярно до площини основи проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу α . Знайдіть площу перерізу.

3 Розгортка бічної поверхні циліндра — прямокутник з площею S і кутом між діагоналями α . Знайдіть об'єм циліндра. Скільки розв'язків має задача?

С-53. ПЛОЩА БІЧНОЇ ПОВЕРХНІ КОНУСА І ЗРІЗАНОГО КОНУСА

Варіант А1

① Твірна конуса дорівнює 8 см і нахилена до площини основи під кутом 30° . Знайдіть повну поверхню конуса.

② Бічна поверхня конуса дорівнює S , а радіус основи — R . Знайдіть довжину хорди основи, яку видно з вершини конуса під кутом α .

③ Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 і 6 см. Знайдіть бічну поверхню конуса, якщо його висота дорівнює 4 см.

Варіант Б1

① Висота конуса відноситься до діаметру його основи як $3 : 8$, а твірна має довжину 10 см. Знайдіть повну поверхню конуса.

② Повна поверхня конуса дорівнює 24π см². Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює 5 см.

③ Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r ($R > r$). Твірна конуса складає з його висотою кут α . Знайдіть повну поверхню конуса.

Варіант А2

① Висота конуса дорівнює 3 см і складає з твірною кут 60° . Знайдіть повну поверхню конуса.

② Бічна поверхня конуса дорівнює S , а твірна — l . Знайдіть довжину хорди основи, яку видно з центра основи під кутом α .

③ Радіус більшої основи зрізаного конуса дорівнює 7 см, а його висота і твірна дорівнюють 3 і 5 см відповідно. Знайдіть бічну поверхню конуса.

Варіант Б2

① Твірна конуса відноситься до його діаметру як $13 : 10$, а висота конуса дорівнює 24 см. Знайдіть повну поверхню конуса.

② Бічна поверхня конуса більше площі його основи на 4π см². Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює 5 см, а висота менша від радіуса основи.

③ Твірна зрізаного конуса нахилена до площини більшої основи під кутом α . Знайдіть повну поверхню конуса, якщо радіуси його основ — R і r ($R > r$).

Варіант В1**①**

Твірна конуса дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть повну поверхню конуса, якщо на його поверхні можна виділити три взаємно перпендикулярні твірні.

②

Бічна поверхня конуса дорівнює S . Знайдіть площу перерізу конуса, що перетинає його основу по хорді, яку видно з центра основи конуса під кутом α , а з вершини конуса — під кутом β .

③

Розгортка бічної поверхні конуса — сектор з центральним кутом 120° . Знайдіть об'єм конуса, якщо периметр його осевого перерізу дорівнює 16 см.

Варіант В2**①**

Радіус конуса дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть повну поверхню конуса, якщо на його поверхні можна виділити три взаємно перпендикулярні твірні.

②

Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть площу перерізу конуса, що проходить через дві твірні, кут між якими дорівнює β , якщо бічна поверхня конуса дорівнює S .

③

Розгортка бічної поверхні конуса — півколо. Площа осевого перерізу конуса дорівнює $9\sqrt{3}$ см². Знайдіть об'єм конуса.

С-54. ПЛОЩА СФЕРИ ТА ЇЇ ЧАСТИН**Варіант А1****①**

Об'єм кулі дорівнює 36π см³. Знайдіть площу її поверхні.

②

На відстані 12 дм від центра сфери проведено переріз, що перетинає сферу по колу, довжина якого дорівнює 10π дм. Знайдіть площу сфери.

③

Діаметр сфери дорівнює 8 см. Площина, перпендикулярна до діаметра, ділить його у відношенні 1 : 3. Знайдіть площу меншого з утворених сферичних сегментів.

Варіант А2**①**

Знайдіть площу поверхні кулі, об'єм якої дорівнює 144π см³.

②

Переріз кулі має площу 64π дм² і віддалений від центра кулі на 6 дм. Знайдіть площу поверхні кулі.

③

Радіус сфери дорівнює 3 см. Площина, перпендикулярна до діаметра сфери, ділить цей діаметр у відношенні 2 : 1. Знайдіть площу більшого з утворених сферичних сегментів.

Варіант Б1

①

Вершини рівностороннього трикутника з периметром $9\sqrt{3}$ дм лежать на поверхні сфери, а площина трикутника проходить через її центр. Знайдіть площу сфери.

②

Площі поверхонь двох куль відносяться як $9 : 16$. Знайдіть відношення їх об'ємів.

③

На відстані 6 см від центра кулі проведено переріз з площею 64π см². Знайдіть площу більшого з утворених сферичних сегментів.

Варіант В1

①

OA і OB — взаємно перпендикулярні радіуси сфери. Знайдіть площу сфери, якщо найкоротша відстань по поверхні між точками A і B дорівнює 2π дм.

②

Переріз розділив сферу радіуса 6 см на частини, площі яких відносяться як $1 : 2$. Знайдіть площу перерізу.

③

Радіус кулі дорівнює 3 см. Яка частина поверхні кулі освітлюється точковим джерелом світла, віддаленим від центра кулі на 5 см?

Варіант Б2

①

Сторони рівностороннього трикутника з площею $12\sqrt{3}$ дм² дотикаються до сфери, а площина трикутника проходить через її центр. Знайдіть площу сфери.

②

Об'єми двох куль відносяться як $8 : 27$. Знайдіть відношення площ їх поверхонь.

③

На відстані 8 см від центра сфери проведено площину, яка перетинає сферу по колу завдовжки 30π см. Знайдіть площу меншого з утворених сферичних сегментів.

Варіант В2

①

На поверхні сфери з центром O обрано точки A і B так, що трикутник AOB — рівносторонній. Найкоротша відстань по поверхні сфери між точками A і B дорівнює π дм. Знайдіть площу сфери.

②

Переріз розділив сферу на частини, площі яких дорівнюють 24π і 12π см². Знайдіть площу перерізу.

③

Радіус кулі дорівнює 6 см. На якій відстані від поверхні кулі знаходиться точкове джерело світла, яке освітлює третину поверхні кулі?

С-55. ОБЕРТАННЯ ПЛОСКИХ ФІГУР

Варіант А1

① Прямокутник з периметром 16 см і площею 15 см^2 обертається навколо більшої сторони. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

② Рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом при основі α обертається навколо основи. Знайдіть об'єм тіла обертання.

③ Прямокутна трапеція з основами 2 і 5 см і меншою бічною стороною 4 см обертається навколо більшої основи. Знайдіть повну поверхню тіла обертання.

Варіант Б1

① Прямокутний трикутник з гіпотенузою c і гострим кутом α обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть площу поверхні і об'єм тіла обертання.

② Трикутник зі сторонами 13, 14 і 15 см обертається навколо середньої сторони. Знайдіть об'єм тіла обертання.

③ Ромб зі стороною a і гострим кутом α обертається навколо одної з сторін. Знайдіть повну поверхню тіла обертання.

Варіант А2

① Прямокутник з діагоналлю 10 см, сторони якого відносяться як 3 : 4, обертається навколо меншої сторони. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

② Рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при вершині β обертається навколо основи. Знайдіть об'єм тіла обертання.

③ Рівнобічна трапеція з основами 4 і 10 см і висотою 4 см обертається навколо більшої основи. Знайдіть повну поверхню тіла обертання.

Варіант Б2

① Прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим гострим кутом α обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть площу поверхні і об'єм тіла обертання.

② Трикутник зі сторонами 11, 25 і 30 см обертається навколо меншої сторони. Знайдіть об'єм тіла обертання.

③ Прямокутна трапеція з основами a і b ($a < b$) і гострим кутом α обертається навколо меншої основи. Знайдіть повну поверхню тіла обертання.

Варіант В1**①**

Паралелограм, площа якого дорівнює 18 см^2 , обертається навколо сторони, яка дорівнює 6 см . Знайдіть об'єм тіла обертання.

②

Рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом при основі α обертається навколо прямої, яка лежить у площині трикутника і проходить через вершину кута α перпендикулярно до бічної сторони трикутника. Знайдіть площу поверхні і об'єм тіла обертання.

③

Круговий сектор з центральним кутом 60° обертається навколо радіуса R , який утворює цей кут. Знайдіть повну поверхню тіла обертання.

Варіант В2**①**

Ромб з площею 18 см^2 і гострим кутом 30° обертається навколо сторони. Знайдіть об'єм тіла обертання.

②

Рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при вершині β обертається навколо прямої, яка проходить через вершину кута при основі перпендикулярно до основи трикутника і лежить у площині трикутника. Знайдіть площу поверхні і об'єм тіла обертання.

③

Круговий сектор радіуса R з довжиною дуги $\frac{\pi R}{2}$ обертається навколо радіуса, який утворює його центральний кут. Знайдіть повну поверхню тіла обертання.

**С-56*. ДОДАТКОВІ ЗАДАЧІ
ПРО ОБ'ЄМИ ТА ПОВЕРХНІ
ТІЛ ОБЕРТАННЯ
(домашня самотійна робота)**

Варіант 1

1 Через твірну циліндра проведе-
но два взаємно перпендикуляр-
ні перерізи, площі яких дорів-
нюють 16 і 30 см². Знайдіть
бічну поверхню циліндра.

2 Два циліндри мають рівні
об'єми. Довжини висот даних
циліндрів відносяться як 4 : 9.
Знайдіть відношення площ біч-
них поверхонь даних циліндрів.

3 Визначте найбільший об'єм,
який може мати конус з твір-
ної, яка дорівнює l .

4

З круга вирізано сектор з центральним
кутом α . З обох частин круга як з розгор-
ток бічної поверхні згорнуто конуси.
Знайдіть відношення об'ємів цих
конусів, якщо

$$\alpha = 90^\circ.$$

5 Дві кулі радіуса R розміщені
так, що центр одної з них ле-
жить на поверхні другої.
Знайдіть об'єм спільної части-
ни даних куль.

Варіант 2

1 Через твірну циліндра проведе-
но два перерізи, які мають рівні
площі $4\sqrt{3}$ см². Кут між пло-
щинами перерізів дорівнює
60°. Знайдіть бічну поверхню
циліндра.

2 Два циліндри, радіуси яких
відносяться як 2 : 3, мають рі-
вні об'єми. Знайдіть відношен-
ня площ бічних поверхонь да-
них циліндрів.

3 Визначте найбільший об'єм,
який може мати циліндр з діа-
гоналлю осевого перерізу d .

$$\alpha = 120^\circ.$$

5 Дві кулі радіуса R розміщені
так, що центр одної з них ле-
жить на поверхні другої. Знай-
діть площу поверхні утвореного
тіла.

К-11. ОБ'ЄМИ ТА ПОВЕРХНІ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

Варіант А1

①

На відстані 4 см від центра кулі проведено переріз, діаметр якого дорівнює $4\sqrt{5}$ см. Знайдіть площу поверхні і об'єм кулі.

②

Хорда нижньої основи циліндра дорівнює a і видна з центра цієї основи під кутом α . Знайдіть об'єм циліндра, якщо відрізок, що сполучає центр верхньої основи з одним з кінців даної хорди, утворює з площиною основи кут β .

③

Прямокутний трикутник з катетом 3 см і протилежним до нього кутом 30° обертається навколо даного катета. Знайдіть повну поверхню тіла обертання.

Варіант Б1

①

Через кінець радіуса кулі під кутом 60° до радіуса проведено переріз кулі, який має площу 16π см². Знайдіть площу поверхні і об'єм кулі.

②

Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , проведено переріз, що перетинає основу конуса по хорді завдовжки a . Знайдіть об'єм конуса, якщо кут між його твірною і висотою дорівнює β .

Варіант А2

①

Діаметр перерізу, віддаленого від центра кулі на $\sqrt{5}$ см, дорівнює 4 см. Знайдіть площу поверхні і об'єм кулі.

②

Хорда нижньої основи циліндра дорівнює a і видна з центра цієї основи під кутом α . Знайдіть бічну поверхню циліндра, якщо відрізок, що сполучає центр верхньої основи з серединою даної хорди, утворює з площиною основи кут β .

③

Прямокутний трикутник з катетом $2\sqrt{3}$ см і прилеглим до нього кутом 60° обертається навколо другого катета. Знайдіть об'єм тіла обертання.

Варіант Б2

①

Через кінець радіуса кулі проведено переріз, який складає з даним радіусом кут 45° . Даний переріз перетинає поверхню кулі по колу завдовжки $8\sqrt{2}\pi$ см. Знайдіть площу поверхні і об'єм кулі.

②

Твірна конуса нахилена до площини його основи під кутом β . Хорда основи конуса завдовжки a видна з його вершини під кутом α . Знайдіть повну поверхню конуса.

③

Прямокутна трапеція з основами a і b ($a < b$) і гострим кутом α обертається навколо більшої основи. Знайдіть площу поверхні тіла обертання.

Варіант В1

①

З точки A , яка лежить на поверхні кулі, проведено три рівні хорди AB , AC і AD . Всі хорди мають довжину 3 см, а кут між будь-якими двома хордами дорівнює 60° . Знайдіть площу поверхні і об'єм кулі, якщо площина BCD віддалена від центра кулі на 1 см.

②

Точка висоти конуса, віддалена від площини основи на відстань a , рівновіддалена від кінців твірної. Відрізок, що сполучає цю точку з точкою кола основи, нахилений до площини основи під кутом β . Знайдіть бічну поверхню конуса.

③

Трикутник зі стороною c і прилеглими до неї кутами α і β обертається навколо осі, яка проходить через вершину третього кута паралельно до даної сторони. Знайдіть об'єм тіла обертання.

③

Рівнобічна трапеція з основами a і b ($a < b$) і гострим кутом α обертається навколо більшої основи. Знайдіть об'єм тіла обертання.

Варіант В2

①

В кулі кожна з трьох взаємно перпендикулярних хорд AB , AC і AD має довжину $3\sqrt{2}$ см. Відстань від центра кулі до площини BCD дорівнює 2 см. Знайдіть площу поверхні і об'єм кулі.

②

Точка висоти конуса, віддалена на відстань b від точок кола основи, рівновіддалена від площини основи і бічної поверхні конуса. Відрізок, що сполучає цю точку з точкою кола основи, нахилений до площини основи під кутом α . Знайдіть бічну поверхню конуса.

③

Трикутник зі стороною a обертається навколо прямої, яка проходить паралельно до даної сторони через вершину протилежного до неї кута трикутника. Знайдіть об'єм тіла обертання, якщо дві інші сторони трикутника утворюють з віссю обертання кути α і β .

С-57. ГЕОМЕТРИЧНА КОМБІНАЦІЯ «КУЛЯ—ЦИЛІНДР»

Варіант А1

① В циліндр вписано кулю радіуса R . Знайдіть об'єм циліндра.

② Навколо циліндра описано кулю. Відрізок, що сполучає центр цієї кулі з точкою кола основи циліндра, утворює з площиною основи циліндра кут 45° . Знайдіть об'єм кулі, якщо радіус циліндра дорівнює $3\sqrt{2}$ см.

③

В циліндр вписано кулю, і навколо нього описано кулю.

Об'єм вписаної кулі дорівнює 36π дм³. Знайдіть площу поверхні описаної кулі.

Варіант Б1

① В циліндр вписано кулю. Знайдіть об'єм циліндра, якщо периметр його осевого перерізу дорівнює P .

② Навколо циліндра описано кулю. Площа основи циліндра дорівнює 9π см². Кут між відрізками, проведеними з центра кулі до кінців твірної циліндра, дорівнює 120° . Знайдіть площу поверхні кулі.

③ Знайдіть відношення об'ємів кулі, вписаної у циліндр, і кулі, описаної навколо того ж циліндра.

Варіант А2

① В циліндр радіуса R вписано кулю. Знайдіть бічну поверхню циліндра.

② Навколо циліндра з висотою 6 см описано кулю. Відрізок, що сполучає центр цієї кулі з точкою кола основи циліндра, утворює з віссю циліндра кут 60° . Знайдіть площу поверхні кулі.

Площа поверхні вписаної кулі дорівнює 72π дм². Знайдіть об'єм описаної кулі.

Варіант Б2

① В циліндр, осевий переріз якого має площу S , вписано кулю. Знайдіть повну поверхню циліндра.

② Навколо циліндра описано кулю. Довжина кола основи циліндра дорівнює 6π см. Кут між відрізками, які сполучають центр кулі з кінцями діаметра основи циліндра, дорівнює 60° . Знайдіть об'єм кулі.

③ Знайдіть відношення площ вписаної і описаної сфери для циліндра.

Варіант В1

① В циліндр вписано кулю, а в цю кулю вписано ще один циліндр, подібний до даного. Знайдіть відношення об'ємів циліндрів.

② Навколо циліндра, осьовий переріз якого має площу $36\sqrt{3}$ см², описано кулю. Хорда кулі, що сполучає точку кола основи циліндра з найближчою точкою перетину осі циліндра і поверхні кулі, утворює з площиною основи циліндра кут 30° . Знайдіть об'єм кулі.

③

В циліндр вписано кулю, і навколо нього описано кулю.

Радіус вписаної кулі дорівнює r . Знайдіть об'єм частини описаної кулі, яка знаходиться поза циліндром.

Варіант В2

① В циліндр вписано кулю, а в цю кулю вписано ще один циліндр, подібний до даного. Знайдіть відношення повних поверхонь циліндрів.

② Навколо циліндра, осьовий переріз якого має периметр 24 см, описано сферу. Хорда кулі, проведена з точки кола основи циліндра до найближчої точки перетину осі циліндра зі сферою, утворює з віссю циліндра кут 45° . Знайдіть площу сфери.

Радіус описаної кулі дорівнює R . Знайдіть об'єм частини циліндра, яка знаходиться поза вписаною кулею.

С-58. ГЕОМЕТРИЧНА КОМБІНАЦІЯ «КУЛЯ—КОНУС»

Варіант А1

① Твірна конуса дорівнює $6\sqrt{3}$ см і нахилена до площини основи конуса під кутом 60° . Знайдіть об'єм кулі, вписаної в конус.

② Радіус кулі, описаної навколо конуса, дорівнює R . Знайдіть бічну поверхню конуса, якщо кут між його твірною і висотою дорівнює α .

Варіант А2

① Радіус основи конуса дорівнює 3 см, а кут при вершині осьового перерізу — 60° . Знайдіть площу сфери, вписаної в конус.

② Твірна конуса складає з його висотою кут α . Центр кулі, описаної навколо конуса, знаходиться на відстані d від твірної конуса. Знайдіть об'єм конуса.

Варіант Б1**①**

Осьовий переріз конуса — прямокутний трикутник з площею 4 см^2 . Знайдіть площу сфери, описаної навколо конуса.

②

Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α . Відстань від центра вписаної кулі до твірної дорівнює d . Знайдіть об'єм конуса.

Варіант В1**①**

В конус вписано кулю. Відношення площ повних поверхонь конуса і кулі дорівнює 2. Знайдіть відношення їх об'ємів.

②

Хорда основи конуса, яка дорівнює a , видна з вершини конуса під кутом β . Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює α . Знайдіть площу сфери, описаної навколо конуса.

Варіант Б2**①**

Осьовий переріз конуса — рівнобедрений трикутник з кутом при вершині 120° . Твірна конуса дорівнює 6 см. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо конуса.

②

Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α . В конус вписано кулю, радіус якої дорівнює r . Знайдіть повну поверхню конуса.

Варіант В2**①**

В конус вписано кулю. Відношення об'ємів конуса і кулі дорівнює 2. Знайдіть відношення площ повних поверхонь конуса і кулі.

②

Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α . Хорда основи, віддалена від вершини конуса на відстань d , видна з вершини конуса під кутом β . Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо конуса.

С-59. ГЕОМЕТРИЧНА КОМБІНАЦІЯ «КУЛЯ—ПРИЗМА»

Варіант А1

①

В правильну чотирикутну призму вписано кулю, радіус якої дорівнює 4 см. Знайдіть об'єм призми.

②

В правильній трикутній призмі периметр основи дорівнює 18 см. Діагональ бічної грані призми утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу сфери, описаної навколо призми.

③

Навколо сфери описано куб, і в неї вписано куб. Знайдіть відношення повних поверхонь цих кубів.

Варіант Б1

①

В правильну трикутну призму вписано кулю, об'єм якої дорівнює 36π см³. Знайдіть повну поверхню призми.

②

Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетом a і прилеглим до нього гострим кутом α . Діагональ бічної грані, яка містить гіпотенузу трикутника, утворює з площиною основи призми кут β . Знайдіть площу сфери, описаної навколо призми.

③

Навколо куба описано кулю радіуса R . Знайдіть об'єм частини кулі, яка знаходиться поза кубом.

Варіант А2

①

В правильну чотирикутну призму з висотою 8 см вписано кулю. Знайдіть повну поверхню призми.

②

Діагональ бічної грані правильної трикутної призми дорівнює 12 см і утворює з бічним ребром призми кут 60° . Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо призми.

③

Навколо куба описано сферу, і в нього вписано сферу. Знайдіть відношення площ цих сфер.

Варіант Б2

①

В правильну трикутну призму вписано сферу, площа якої дорівнює 36π см². Знайдіть об'єм призми.

②

Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетом a і протилежним до нього кутом α . Діагональ бічної грані, яка містить даний катет, утворює з бічним ребром призми кут β . Знайдіть площу сфери, описаної навколо призми.

③

В куб з ребром a вписано сферу. Знайдіть об'єм частини куба, яка знаходиться поза сферою.

Варіант В1

①

Основа прямого паралелепіпеда — ромб з гострим кутом α . В паралелепіпед вписано сферу радіуса R . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

②

Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом при вершині α . Відрізок, що сполучає центр описаної сфери з вершиною призми, утворює з площиною основи кут β . Знайдіть площу сфери.

③

Основи правильної трикутної призми, вписаної у кулю, ділять діаметр, перпендикулярний до основ, у відношенні $1 : 2 : 1$. Знайдіть відношення об'ємів призми і кулі.

Варіант В2

①

Основа прямого паралелепіпеда — ромб з гострим кутом α . Висота паралелепіпеда дорівнює H . Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо у нього можна вписати кулю.

②

Основа прямої призми — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при основі α . Відрізок, що сполучає центр описаної кулі з вершиною призми, утворює з бічним ребром призми кут β . Знайдіть об'єм кулі.

③

Основи правильної чотирикутної призми, вписаної у сферу, ділять діаметр, перпендикулярний до основ, на три рівні частини. Знайдіть відношення площ поверхонь призми і сфери.

С-60. ГЕОМЕТРИЧНА КОМБІНАЦІЯ «КУЛЯ—ПІРАМІДА»

Варіант А1

①

Діагональний переріз правильної чотирикутної піраміди — рівносторонній трикутник. Навколо піраміди описано кулю радіуса $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть об'єм піраміди.

②

Двогранний кут при основі правильної трикутної піраміди до-

Варіант А2

①

Діагональний переріз правильної чотирикутної піраміди — прямокутний трикутник. Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо неї, дорівнює 4 см.

②

Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює $6\sqrt{3}$ см і

рівнює 60° . Висота піраміди дорівнює 9 см. Знайдіть об'єм кулі, вписаної у піраміду.

Варіант Б1

① В правильній трикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α . В піраміду вписано кулю радіуса r . Знайдіть об'єм піраміди.

② Основа піраміди — прямокутник з діагоналлю d . Всі бічні ребра нахилені до площини основи піраміди під кутом α . Знайдіть площу сфери, описаної навколо піраміди.

Варіант В1

① В правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Знайдіть об'єм піраміди, якщо радіус кулі, описаної навколо неї, дорівнює R .

② Основа піраміди — рівнобічна трапеція з основами a і b . Всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β . Знайдіть площу сфери, вписаної в піраміду.

утворює з висотою піраміди кут 30° . Знайдіть площу сфери, вписаної в піраміду.

Варіант Б2

① В правильній трикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює α . В піраміду вписано кулю радіуса r . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

② Основа піраміди — прямокутник. Всі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою, яка дорівнює H , кути, рівні α . Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо піраміди.

Варіант В2

① В правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α . Знайдіть бічну поверхню піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в неї, дорівнює r .

② Основа піраміди — рівнобічна трапеція з меншою основою a . Діагональ трапеції є бісектрисою її гострого кута, який дорівнює α . Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо піраміди.

К-12. РІЧНА КОНТРОЛЬНА РОБОТА ЗА 11 КЛАС

Варіант А1

①

Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 5 см, а діагональ бічної грані — 13 см. Знайдіть бічну поверхню і об'єм призми.

②

Площа бічної поверхні конуса дорівнює 20π см², а його твірна має довжину 5 см. Знайдіть об'єм конуса.

③

В правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює l , а плоский кут при вершині — α . Знайдіть бічну поверхню і об'єм піраміди.

Варіант Б1

①

Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетом 3 см і прилеглим до нього кутом 60° . Діагональ бічної грані, яка містить гіпотенузу трикутника, дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм призми.

②

Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 13 см, а площа перерізу — 60 см². Знайдіть повну поверхню і об'єм циліндра, якщо його радіус більше висоти.

Варіант А2

①

Бічне ребро правильної чотирикутної призми дорівнює 6 см, а діагональ бічної грані — 10 см. Знайдіть бічну поверхню і об'єм призми.

②

Об'єм конуса дорівнює 16π см³, а його висота має довжину 3 см. Знайдіть бічну поверхню конуса.

③

В правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює l і утворює з площиною основи кут α . Знайдіть об'єм і бічну поверхню піраміди.

Варіант Б2

①

Основа прямої призми — прямокутний трикутник з гіпотенузою 10 см і гострим кутом 30° . Діагональ бічної грані, яка містить катет, протилежний до даного кута, дорівнює 13 см. Знайдіть об'єм призми.

②

Твірна конуса дорівнює 5 см, а площа його осьового перерізу — 12 см². Знайдіть повну поверхню і об'єм конуса, якщо його радіус менше висоти.

③

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при основі α . Всі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кути, рівні β . Знайдіть об'єм піраміди.

③

Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом при вершині α . Всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β . Знайдіть бічну поверхню піраміди.

Варіант В1

①

Основа прямого паралелепіпеда — ромб з більшою діагоналлю $4\sqrt{3}$ см і гострим кутом 60° . Менша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 60° . Знайдіть повну поверхню паралелепіпеда.

②

Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть об'єм конуса, якщо його бічна поверхня дорівнює S .

③

Основа піраміди — прямокутний трикутник з гострим кутом α . Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β . Знайдіть об'єм піраміди, якщо відстань від основи її висоти до бічного ребра дорівнює m .

Варіант В2

①

Основа прямого паралелепіпеда — ромб з площею $32\sqrt{3}$ см² і гострим кутом 60° . Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

②

Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює β . Знайдіть бічну поверхню конуса, якщо його об'єм дорівнює V .

③

Основа піраміди — прямокутний трикутник з гострим кутом α . Відстань від основи висоти піраміди до вершини цього кута дорівнює b . Всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють β . Знайдіть об'єм піраміди.

Відповіді до робіт за 10-й клас*

| К-1 | A1 | A2 | Б1 | Б2 | В1 | В2 |
|-----|------|-------|------|-------|-------|-------|
| 1а) | так | ні | так | так | так | ні |
| 1б) | ні | так | ні | ні | ні | так |
| 1в) | так | ні | так | так | так | так |
| 3 | 4 см | 12 см | 9 см | 15 см | 35 см | 30 см |

| К-2 | A1 | A2 | Б1 | Б2 |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 5 см | 16 см | 9 см | 24 см |
| 2 | — | — | — | — |
| 3 | 12 см | 26 см | 60 см | 65 см |
| 4 | — | — | — | — |

| К-2 | В1 | В2 |
|-----|--|--|
| 1 | $2\sqrt{6}$ см | 4 см |
| 2 | перпендикулярно | перпендикулярно |
| 3 | 1152 см^2 | $432\sqrt{3} \text{ см}^2$ |
| 4 | площина, яка проходить через дану пряму перпендикулярно до даної площини | площина, яка проходить через дану точку перпендикулярно до даної площини |

| К-3 | A1 | A2 | Б1 | Б2 | В1 | В2 |
|-----|-------|--------------|--------------------|-------------------|-------------|------------|
| 1в) | 16 см | 30 см | 108 см^2 | 40 см^2 | 150° | 45° |
| 2 | 10 см | 12 см | 15 см | 5 см | 15 см | 16 см |
| 3 | 52 см | 24 см, 32 см | 25 см | 25 см | 4 см | 2 см |

* У задачах, де відповідь має декілька різних варіантів запису або існує декілька можливих рівних відповідей, наводиться один з варіантів.

| K-4 | A1 | A2 | B1 |
|-----|---|---|-------------------------------------|
| 1a) | (5;0;-6) | (8;4;-7) | D(4;-3;8) |
| 1б) | $\overline{BC}(6;-12;-4), \overline{BC} = 14$ | $\overline{BC}(12;-4;-6), \overline{BC} = 14$ | $ \overline{AC} > \overline{BC} $ |
| 1в) | $\overline{AC}(-3;-4;1)$ | $\overline{AC}(3;4;-1)$ | (0;1;4) |
| 1г) | — | — | M(-24;0;0) |
| 2a) | E(2;-2;0) | F(4;1;1) | B(3;3;-5) |
| 2б) | $m=-2, n=4$ | $m=4, n=2$ | $\bar{c}(-2;-1;2)$ |
| 2в) | $\bar{c}(4;2;-4), \bar{c} = 6$ | $\bar{c}(-6;-3;6), \bar{c} = 9$ | 2 |
| 3a) | $\bar{c}(-4,5;6;-4)$ | $\bar{c}\left(-8;-9\frac{1}{3};5\right)$ | 5 |
| 3б) | 16 | -16 | -178 |
| 3в) | $\frac{1}{3}$ | $\frac{11}{5}$ | $(\widehat{ab}) < 90^\circ$ |
| 4 | (1;3;2) | (1;2;-1) | (1;-1,5;2) |

| K-4 | B2 | B1 | B2 |
|-----|-------------------------------------|----------------------|------------------------|
| 1a) | D(1;3;-10) | M(3;-1;5,5) | M(-1;1;2,5) |
| 1б) | $ \overline{AC} < \overline{BC} $ | C(4;0;0) | C(0;-8;0) |
| 1в) | (-4;3;-3) | D(-5;-2;-1) | D(3;2;-7) |
| 1г) | M(17;0;0) | (-4;2;-3) | (4;-2;3) |
| 2a) | A(11;2;-7) | A(1;-3;1); B(-1;1;5) | A(-3;3;2); B(-1;-1;-2) |
| 2б) | $\bar{c}(8;4;-8)$ | $\bar{b}(2;-4;-4)$ | $\bar{b}(-3;6;6)$ |
| 2в) | 4 | 150° | 120° |
| 3a) | 5 | $\bar{c}(17;13;1)$ | $\bar{c}(-2;6;-1)$ |
| 3б) | 86 | 108 | 297 |
| 3в) | $(\widehat{ab}) > 90^\circ$ | $36\sqrt{2}$ | $18\sqrt{2}$ |
| 4 | (2,5;1,5;-1,5) | — | — |

| К-5 | A1 | A2 | Б1 | Б2 | В1 | В2 |
|-----|--------------------|--------------------|-----------------|--------------------|------|------|
| 1 | 16 см ² | 2 см | $2\sqrt{30}$ см | 12 см | 3 см | 3 см |
| 2 | 2 дм | 4 дм | 4 см | 16 см | 60° | 60° |
| 3 | 4 см | 18 см ² | $3\sqrt{3}$ м | 32 дм ² | 30° | 45° |

| К-6 | A1 | A2 | Б1 | Б2 | В1 | В2 |
|-----|-------|-------|----------|----------|------------------------------------|---|
| 1 | — | — | трапеція | трапеція | — | — |
| 2 | 12 см | 10 см | 6 см | 6 см | 7 см | $2\sqrt{13}$ см |
| 3 | 20 см | 9 см | 8 см | 3 см | $\arctg(2\operatorname{tg}\alpha)$ | $\arctg\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$ |
| 4 | — | — | 60° | 120° | 135° | 90° |

| С-14* | Варіант 1 | Варіант 2 |
|-------|--|--|
| 2а) | площина, яка перпендикулярна до даної прямої | площина, яка перпендикулярна до даної прямої |
| 2б) | площина, паралельна даним | площина, яка проходить через першу пряму паралельно другій |
| 2в) | площина, паралельна даним | площина, паралельна даним |
| 4а) | 144 см ² , $4\sqrt{7}$ см | $9\sqrt{3}$ см ² , $\sqrt{13}$ см |
| 4б) | $12\sqrt{\frac{3}{7}}$ см | $\frac{16}{\sqrt{17}}$ см |
| 4в) | 5 см | 12,5 см |

| С-21* | Варіант 1 | Варіант 2 |
|-------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1 | 6 і 3 | 9 і 3 |
| 2 | $B(0;1;2); C(3;0;-1); E(9;-2;-7)$ | $A(-7;2;8); C(-1;0;4); D(2;-1;2)$ |
| 3а) | $(x-5)^2 + (y-12)^2 + (z-9)^2 = 25$ | $(x-5)^2 + (y-12)^2 + (z-9)^2 = 81$ |
| 3б) | $(x-5)^2 + (y-12)^2 + (z-9)^2 = 169$ | $(x-5)^2 + (y-12)^2 + (z-9)^2 = 225$ |
| 4 | $(-3;-2;3), R=3$ | $(1;-5;3), R=4$ |

| C-21* | Варіант 1 | Варіант 2 |
|-------|---|---|
| 5а) | $\bar{n} = \bar{e}_1 - 8\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$ | $\bar{n} = -5\bar{e}_1 + 8\bar{e}_2 + 9\bar{e}_3$ |
| 5б) | $\bar{n} = \bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}$ | $\bar{n} = -\bar{a} + \bar{b} + 2\bar{c}$ |
| 6а) | 60° | 180° |
| 6б) | $\sqrt{13}$ | 7 |
| 7 | 60°; 120°; 45° | 45°; 60°; 120° |
| 9а) | $2y+z=0$ | $3x+z=0$ |
| 9б) | $2x-z-3=0$ | $2x-y+1=0$ |
| 9в) | $2x-y-3z-6=0$ | $x+4y-2z-13=0$ |
| 9г) | $3x+y-6z-33=0$ | $3x-3y+z-13=0$ |
| 10а) | 18 | 4 |
| 10б) | -10 | -45 |
| 11 | 3; 15; 5; $5x+y=15$; $y-3z=15$; $5x-3z=15$ | 3; 4; 6; $4x-3y=12$; $-3y+2z=12$; $4x+2z=12$ |
| 12 | 7; (-12; 4; -6) | 3; (2; -4; 4) |

| C-22* | Варіант 1 | Варіант 2 |
|-------|--|---------------------------------|
| 1 | $\arccos\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)$ | $\arccos(\cos\alpha \cos\beta)$ |
| 2а) | $\pi - \arccos\frac{1}{3}$ | $\arccos\frac{1}{3}$ |
| 2б) | $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| 3 | 30° | 60° |
| 4 | $\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}$ | 30° |
| 5 | 45° або 135° | 30° або 150° |

Відповіді до робіт за 11-й клас

| К-7 | A 1 | A 2 | Б 1 | Б 2 |
|-----|---|--|---|----------------------------------|
| 1 | 6 см | 6 см | 3 см | 3 см |
| 2 | 210 см ² | 480 см ² | $3Q + \frac{\sqrt{3}Q}{2\text{tg}\alpha}$ | $2S + 4\sqrt{3}S\text{tg}\alpha$ |
| 3а) | $4d^2 \sin \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}$ | $4d^2 \text{tg}\alpha \sqrt{1 - \text{tg}^2 \alpha}$ | 350 см ² | 300 см ² |
| 3б) | $d^2 \sin \alpha \sqrt{2 \cos 2\alpha}$ | $d^2 \text{tg}\alpha \sqrt{2 - 2\text{tg}^2 \alpha}$ | 162,5 см ² | 162,5 см ² |

| К-7 | Б 1 | Б 2 |
|-----|--|--|
| 1 | 5 см | 5 см |
| 2 | $b^2 \sin 2\alpha (1 + 2\text{tg}\beta (1 + \cos \alpha))$ | $\frac{a^2}{2} \text{ctg} \frac{\alpha}{2} \left(\text{tg}\varphi + \frac{\text{tg}\varphi}{\sin \frac{\alpha}{2}} + 1 \right)$ |
| 3а) | $\sqrt{2}ah$ | a^2 |
| 3б) | $2a\sqrt{4h^2 + a^2}$ | $2\sqrt{3}a^2$ |

| К-8 | A 1 | A 2 | Б 1 | Б 2 |
|-----|--------------------|------------------------------|---|------------------------------------|
| 1а) | $2\sqrt{3}$ см | 64 см ² | $\frac{2l}{\sin 2\alpha}$ | $\frac{2m}{\cos \beta}$ |
| 1б) | 32 см ² | $64\sqrt{2}$ см ² | $\frac{6\sqrt{3}l^2}{\sin \alpha \sin 2\alpha}$ | $\frac{12\sqrt{3}m^2}{\cos \beta}$ |

| К-8 | A 1 | A 2 | Б 1 | Б 2 |
|-----|---|---|-----------------------------|--------------------|
| 2 | $\frac{H^2 \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{3}} \cdot \left(2 + \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right)$ | $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \times \left(1 + 2 \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$ | 72 см ² | 36 см ² |
| 3 | $\frac{S}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{3}Q$ | $8\sqrt{2}$ см ² | 4 см ² |

| К-8 | Б 1 | Б 2 |
|-----|---|---|
| 1а) | $12\sqrt{3}m^2 \cos^2 \alpha \times (1 + \cos \alpha)$ | $12\sqrt{3}m^2 \sin^2 \beta \cdot (1 + \sin \beta)$ |
| 1б) | — | — |
| 2 | $r^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\sin \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} \right)$ | $\frac{2R^2 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \beta} \times \left(1 + \sin \beta \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} + 1 \right) \right)$ |
| 3 | 12 см | 4 см |

| К-9 | A 1 | A 2 | Б 1 |
|-----|--|--|--|
| 1 | 64π см ² | 18π см | 576π см ² |
| 2а) | 64 см ² | 400 см ² | $4R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ |
| 2б) | 80 см ² | 240 см ² | $4R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ |
| 3а) | $\frac{\pi H^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4}$ | $\frac{\pi a^2}{16 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ | $\frac{S \sin 2\alpha}{\sin \beta}$ |
| 3б) | $\frac{H^2 \sin \beta}{2 \cos^2 \alpha}$ | $\frac{a^2 \operatorname{tg} \beta}{4}$ | $\frac{3S \sin 2\alpha}{4 \sin \beta}$ |

| K-9 | B 2 | B 1 | B 2 |
|------------|---|---|--|
| 1 | 7 см | $27\pi \text{ см}^2$ | $4\sqrt{2} \text{ см}$ |
| 2a) | $H^2 \text{ctg}\beta$ | $S \sin \frac{\alpha}{2}$ | $\frac{Q}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ |
| 2б) | $\frac{H^2 \text{ctg}\beta}{\cos \alpha}$ | — | — |
| 3a) | $\frac{S \sin 2\beta}{\sin 2\alpha}$ | $d^2 \left(\text{ctg} \frac{\alpha}{2} - \frac{\text{tg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha} \right)$ | $\frac{d^2}{2} (\sin 2\alpha + \text{tg}\alpha)$ |
| 3б) | $\frac{3S \sin 2\beta}{4 \sin 2\alpha}$ | — | — |

| K-10 | A 1 | A 2 | B 1 |
|-------------|---|--------------------------------------|--|
| 1 | 72 см^3 | 96 см^3 | 1152 см^3 |
| 2 | $\frac{4}{3} l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$ | $\frac{2}{3} l^3 \cos^2 \sin \alpha$ | $\frac{2\sqrt{3}d^3}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}$ |
| 3 | $9\sqrt{3} \text{ см}^3$ | $24\sqrt{3} \text{ см}^3$ | $\frac{1}{6} b^3 \sin 2\beta \cos \beta \cdot \text{tg} \frac{\beta}{2} \text{tg}\alpha$ |

| K-10 | B 2 | B 1 | B 2 |
|-------------|--|--|--|
| 1 | 864 см^3 | 2160 см^3 | 2160 см^3 |
| 2 | $\frac{8\sqrt{3}d^3}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}$ | $8\sqrt{3}m^3 \text{ctg}\alpha$ | $8\sqrt{3}m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$ |
| 3 | $\frac{1}{6} b^3 \text{tg}\alpha \sin \frac{\beta}{2}$ | $\frac{1}{3} S \sin \beta \cdot \sqrt{2S \text{ctg}\alpha \cos \beta}$ | $\frac{1}{3} S \sin \beta \times$ $\times \sqrt{3S \cos \beta \text{ctg} \frac{\alpha}{2}}$ |

| К-11 | А 1 | А 2 | Б 1 |
|------|---|---|---|
| 1 | $144\pi \text{ см}^2, 288\pi \text{ см}^3$ | $36\pi \text{ см}^2, 36\pi \text{ см}^3$ | $256\pi \text{ см}^2, \frac{2048}{3}\pi \text{ см}^3$ |
| 2 | $\frac{\pi a^3 \operatorname{tg} \beta}{8 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}$ | $\frac{\pi a^3 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ | $\frac{\pi a^3 \sin^2 \beta \cos \beta}{24 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}$ |
| 3 | $9\sqrt{3}\pi(2 + \sqrt{3}) \text{ см}^2$ | $24\pi \text{ см}^3$ | $\pi(b-a) \operatorname{tg} \alpha \times$ $\times \left((b-a) \operatorname{tg} \alpha + 2a + \frac{b-a}{\cos \alpha} \right)$ |

| К-11 | Б 2 | В 1 | В 2 |
|------|---|---|---|
| 1 | $256\pi \text{ см}^2, \frac{2048}{3}\pi \text{ см}^3$ | $16\pi \text{ см}^2, \frac{32}{3}\pi \text{ см}^3$ | $64\pi \text{ см}^2, \frac{256}{3}\pi \text{ см}^3$ |
| 2 | $\frac{\pi a^3 \cos \beta}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} (1 + \cos \beta)$ | $\frac{\pi a^2 \operatorname{ctg}^2 \beta}{\cos \left(45^\circ + \frac{\beta}{2} \right)}$ | $\frac{\pi b^2 \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha}$ |
| 3 | $\pi(b-a) \operatorname{tg} \alpha \times$ $\times \left(a + \frac{b-a}{2 \cos \alpha} \right)$ | $\frac{2\pi c^3 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}{3(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2}$ | $\frac{2\pi a^3 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}{3(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)^2}$ |

| К-12 | А 1 | А 2 | Б 1 |
|------|---|---|---|
| 1 | $240\pi \text{ см}^2, 300\pi \text{ см}^3$ | $192\pi \text{ см}^2, 384\pi \text{ см}^3$ | $36\sqrt{3} \text{ см}^3$ |
| 2 | $16\pi \text{ см}^3$ | $20\pi \text{ см}^2$ | $132\pi \text{ см}^2, 180\pi \text{ см}^3$ |
| 3 | $1,5l^2 \sin \alpha;$ $\frac{l^3}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{4} l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha;$ $\frac{3\sqrt{3}l^2 \cos \alpha}{4} \times$ $\times \sqrt{4 - 3 \cos^2 \alpha}$ | $\frac{a^3 \operatorname{ctg} \beta}{48 \cos^2 \alpha}$ |

| К-12 | Б 2 | В 1 | В 2 |
|------|--|--|---|
| 1 | $150\sqrt{3} \text{ см}^3$ | $80\sqrt{3} \text{ см}^2$ | $256\sqrt{3} \text{ см}^2$ |
| 2 | $24\pi \text{ см}^2, 12\pi \text{ см}^3$ | $\frac{\sin \alpha}{3} \sqrt{\frac{\cos \alpha}{\pi}}$ | $\frac{\pi}{\sin \frac{\beta}{2}} \left(\frac{3V}{\pi \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}$ |
| 3 | $\frac{b^2 \sin \alpha}{2 \cos \beta}$ | $\frac{m^3 \sin 2\alpha}{3 \sin^2 \beta \cos \beta}$ | $\frac{1}{6} b^3 (1 + \sin \alpha) \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha$ |

| С-24* | Варіант 1 | Варіант 2 |
|-------|-----------------------------------|--|
| 1 | $\arccos(\cos \alpha \sin \beta)$ | $2 \arccos\left(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta\right)$ |
| 5 | 26 см | 26 см |

| С-29* | Варіант 1 | Варіант 2 |
|-------|----------------------|-----------------------|
| 3 | — | 45° |
| 4 | $\frac{a}{\sqrt{3}}$ | $d/3$ |
| 5 | $\sqrt{5}$ | $\frac{\sqrt{17}}{2}$ |
| 6 | 2 см | 4 см |

| С-36* | Варіант 1 | Варіант 2 |
|-------|---|-------------------|
| 3 | 45° | 120° |
| 4 | $a^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ | $\frac{3a^2}{2}$ |
| 5 | $\frac{25Q}{36}$ | $\frac{15Q}{16}$ |
| 6 | 162 см^2 | 54 см^2 |

| C-42* | Варіант 1 | Варіант 2 |
|--------------|----------------------------------|--|
| 1 | $\sqrt{3}$ см або 2 см | 25 см ² або 14 см ² |
| 2 | $R - \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}}$ | $d > 2\sqrt{3}R$ |
| 3 | $\frac{Q}{\cos \alpha}$ | $S \cos \alpha$ |
| 4 | $\frac{H^2}{2 \cos^2 \alpha}$ | $\frac{R^2}{2 \cos^2 \alpha}$ |
| 5 | $2 \arcsin \frac{\beta}{2\pi}$ | $2\pi \sin \frac{\alpha}{2}$ |
| 6 | $\pi l \sin^2 \alpha$ | $\frac{2\pi R \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ |
| 7 | 600 см ² | 600 см ² |
| 8 | 9 : 25 : 16 | 24 : 49 : 33 |
| 9 | $\frac{4\pi}{3}$ см | $\frac{8\pi}{3}$ см |
| 10 | 25 см | 32 см |

| C-48* | Варіант 1 | Варіант 2 |
|--------------|---|---|
| 1 | 1728 см ³ | 192 см ³ |
| 2 | 240 см ³ | 480 см ³ |
| 3 | $350\sqrt{3}$ см ³ | 48 см ³ або 24 см ³ |
| 4 | 45° | 30° |
| 5 | Дві площини, паралельні площині основи і рівновіддалені від неї | — |
| 6 | 96 см ³ | $16\sqrt{3}$ см ³ |
| 7 | $\frac{abc}{6}$ | $\frac{aS}{3}$ |

| C-48* | Варіант 1 | Варіант 2 |
|--------------|----------------------------|------------------|
| 8 | $\frac{1}{3}S \sin \alpha$ | $\frac{2PQ}{3b}$ |

| C-56* | Варіант 1 | Варіант 2 |
|--------------|------------------------------|-----------------------------|
| 1 | $34\pi \text{ см}^3$ | $8\pi \text{ см}^2$ |
| 2 | 2:3 | 3:2 |
| 3 | $\frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$ | $\frac{\pi d^3}{6\sqrt{3}}$ |
| 4 | $\sqrt{15} : 9\sqrt{7}$ | $1 : \sqrt{10}$ |
| 5 | $\frac{5\pi R^3}{12}$ | $6\pi R^2$ |

Література

1. *А. В. Погорелов.* Геометрия 7–11. М., 1992.
2. *Л. С. Атанасян и др.* Геометрия 10–11. М., 1992.
3. *И. Ф. Шарыгин.* Геометрия 10–11. М., 1999.
4. *Л. М. Лоповок.* Сборник задач по геометрии для 10–11 классов. К., 1993.
5. *Л. М. Лоповок.* Факультативные занятия по геометрии для 7–11 классов. К., 1990.
6. *О. Н. Цубербиллер.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., 1955.

Зміст

| Роботи | Погорелов 7-11 | Погорелов 10-11 | стор. |
|---|-------------------|--------------------|----------|
| Роботи за 10-й клас | | | 4 |
| С-1. Аксиоми стереометрії | § 15 | § 1 | 4 |
| С-2. Найпростіші наслідки аксіом стереометрії | § 15 | § 1 | 6 |
| С-3. Застосування аксіом стереометрії та їх наслідків у задачах на доведення | § 15 | § 1 | 9 |
| С-4. Паралельні прямі в просторі. Ознака паралельності прямих | п. 136, 137 | п. 7, 8 | 11 |
| С-5. Паралельність прямої і площини. Ознака паралельності площин | п. 138, 139 | п. 9, 10 | 14 |
| С-6. Властивості паралельних площин. Зображення просторових фігур на площині | п. 140–142 | п. 11–13 | 16 |
| С-7*. Початкові поняття стереометрії (домашня самостійна робота) | § 15, 16 | § 1, 2 | 19 |
| К-1. Аксиоми стереометрії. Паралельність прямих і площин | § 15, 16 | § 1, 2 | 20 |
| С-8. Перпендикулярність прямих у просторі. Перпендикулярність прямої та площини | п. 143–146 | п. 14–17 | 23 |
| С-9. Перпендикуляр і похила. Властивості точки, рівновіддаленої від вершин многокутника | п. 147 | п. 18 | 25 |
| К-2. Перпендикулярність прямої та площини | п. 143–147 | п. 14–18 | 28 |
| С-10. Теорема про три перпендикуляри | п. 148 | п. 19 | 30 |

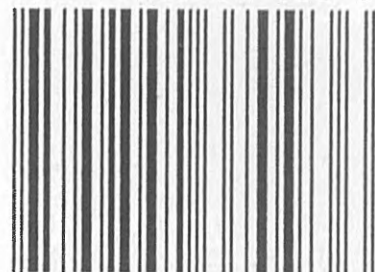
| | | | |
|--|-------------|-----------|----|
| С-11. Застосування теореми про три перпендикуляри. Властивості точки, рівновіддаленої від сторін многокутника | п. 148 | п. 19 | 32 |
| С-12. Перпендикулярність площин | п. 149 | п. 20 | 35 |
| С-13*. Відстань між мимобіжними прямими | п. 150 | п. 21 | 37 |
| С-14*. Паралельність і перпендикулярність прямих і площин (домашня самостійна робота) | § 17 | § 3 | 40 |
| К-3. Теорема про три перпендикуляри. Перпендикулярність площин | § 17 | § 3 | 42 |
| С-15. Декартові координати в просторі | п. 152–154 | п. 23–25 | 45 |
| С-16. Перетворення фігур у просторі (симетрія, паралельне перенесення, подібність) | п. 155–159 | п. 26–30 | 49 |
| С-17. Кут між прямою та площиною. Кут між мимобіжними прямими* | п. 160, 161 | п. 31, 32 | 52 |
| С-18. Кут між площинами. Площа ортогональної проекції многокутника | п. 162, 163 | п. 33, 34 | 55 |
| С-19. Вектори в просторі. Дії над векторами в просторі | п. 164, 165 | п. 35, 36 | 57 |
| С-20. Скалярний добуток векторів у просторі | п. 165 | п. 36 | 61 |
| С-21*. Координати і вектори в просторі. Рівняння площини (домашня самостійна робота) | § 18 | § 4 | 64 |
| С-22*. Кути між прямими і площинами | § 18 | § 4 | 66 |
| К-4. Декартові координати і вектори в просторі | § 18 | § 4 | 68 |
| К-5. Кут між прямою і площиною. Кут між площинами | § 18 | § 4 | 71 |
| К-6. Річна контрольна робота за 10 клас | – | – | 74 |

| | | | |
|---|-------------|-----------|-----------|
| Роботи за 11-й клас | | | 77 |
| С-23. Двогранний кут. Тригранний і многогранний кути | п. 166, 167 | п. 37, 38 | 77 |
| С-24*. Многогранні кути. Тригонометричні залежності для двогранного і тригранного кута (домашня самостійна робота) | п. 167 | п. 38 | 79 |
| С-25. Призма. Перерізи призми | п. 169, 170 | п. 40, 41 | 80 |
| С-26. Пряма призма. Правильна призма | п. 171 | п. 42 | 83 |
| С-27. Похила призма | п. 169 | п. 40 | 86 |
| С-28. Паралелепіпед | п. 172–175 | п. 43–46 | 88 |
| С-29*. Додаткові задачі про призми (домашня самостійна робота) | п. 169–175 | п. 40–46 | 90 |
| К-7. Двогранний кут. Призма | п. 166–175 | п. 40–46 | 91 |
| С-30. Піраміда. Перерізи піраміди | п. 176, 177 | п. 47, 48 | 93 |
| С-31. Правильна піраміда. Зрізана піраміда | п. 176–179 | п. 47–50 | 96 |
| С-32. Піраміди, в яких основа висоти є центром описаного або вписаного кола основи піраміди | п. 176–179 | п. 47–50 | 98 |
| С-33. Піраміди, в яких одна або дві бічні грані перпендикулярні до площини основи | п. 176–179 | п. 47–50 | 100 |
| С-34. Піраміди, в яких задано відстані між точками і елементами піраміди | п. 176–179 | п. 47–50 | 103 |
| С-35. Правильні многогранники | п. 180 | п. 51 | 105 |
| С-36*. Додаткові задачі про піраміди (домашня самостійна робота) | п. 176–180 | п. 47–51 | 106 |
| К-8. Піраміда. Поверхня піраміди | п. 176–180 | п. 47–51 | 108 |
| С-37. Циліндр. Перерізи циліндра | п. 181, 182 | п. 52, 53 | 110 |
| С-38. Геометрична комбінація «циліндр — призма» | п. 183 | п. 54 | 112 |

| | | | |
|--|-------------|-----------|-----|
| С-39. Конус. Перерізи конуса | п. 184, 185 | п. 55, 56 | 114 |
| С-40. Геометрична комбінація «конус—піраміда» | п. 186 | п. 57 | 116 |
| С-41. Куля. Перерізи кулі. Дотик кулі до площини і прямої | п. 187–191 | п. 58–62 | 118 |
| С-42*. Додаткові задачі про тіла обертання (домашня самостійна робота) | § 20 | § 6 | 120 |
| К-9. Тіла обертання | § 20 | § 6 | 122 |
| С-43. Об'єм паралелепіпеда | п. 195, 196 | п. 66, 67 | 124 |
| С-44. Об'єм призми | п. 197, 198 | п. 68, 69 | 126 |
| С-45. Об'єм піраміди | п. 199 | п. 70 | 128 |
| С-46. Об'єм піраміди-2. Рівновеликі тіла | п. 199 | п. 70 | 130 |
| С-47. Об'єм зрізаної піраміди. Об'єми по- дібних тіл | п. 202, 204 | п. 71, 72 | 132 |
| С-48*. Додаткові задачі про об'єми многогранників (домашня самостійна робота) | § 21 | § 7 | 133 |
| К-10. Об'єми многогранників | § 21 | § 7 | 135 |
| С-49. Об'єм циліндра | п. 202 | п. 73 | 136 |
| С-50. Об'єм конуса. Об'єм зрізаного конуса | п. 203, 204 | п. 74, 75 | 138 |
| С-51. Об'єм кулі та її частин | п. 206, 207 | п. 77, 78 | 140 |
| С-52. Площа бічної поверхні циліндра | п. 208 | п. 79 | 142 |
| С-53. Площа бічної поверхні конуса і зрізаного конуса | п. 209 | п. 80 | 144 |
| С-54. Площа сфери та її частин | п. 210 | п. 81 | 145 |
| С-55. Обертання плоских фігур | § 22 | § 8 | 147 |
| С-56*. Додаткові задачі про об'єми та поверхні тіл обертання (домашня самостійна робота) | § 22 | § 8 | 149 |

| | | | |
|---|------|-----|-----|
| К-11. Об'єми та поверхні тіл обертання | § 22 | § 8 | 150 |
| С-57. Геометрична комбінація «куля—циліндр» | — | — | 152 |
| С-58. Геометрична комбінація «куля—конус» | — | — | 153 |
| С-59. Геометрична комбінація «куля—призма» | — | — | 155 |
| С-60. Геометрична комбінація «куля—піраміда» | — | — | 156 |
| К-12. Річна контрольна робота за 11 клас | — | — | 158 |
| Відповіді до робіт за 10-й клас | | | 160 |
| Відповіді до робіт за 11-й клас | | | 164 |
| Література | | | 171 |

ISBN 5-89237-093-3



9 785892 370936