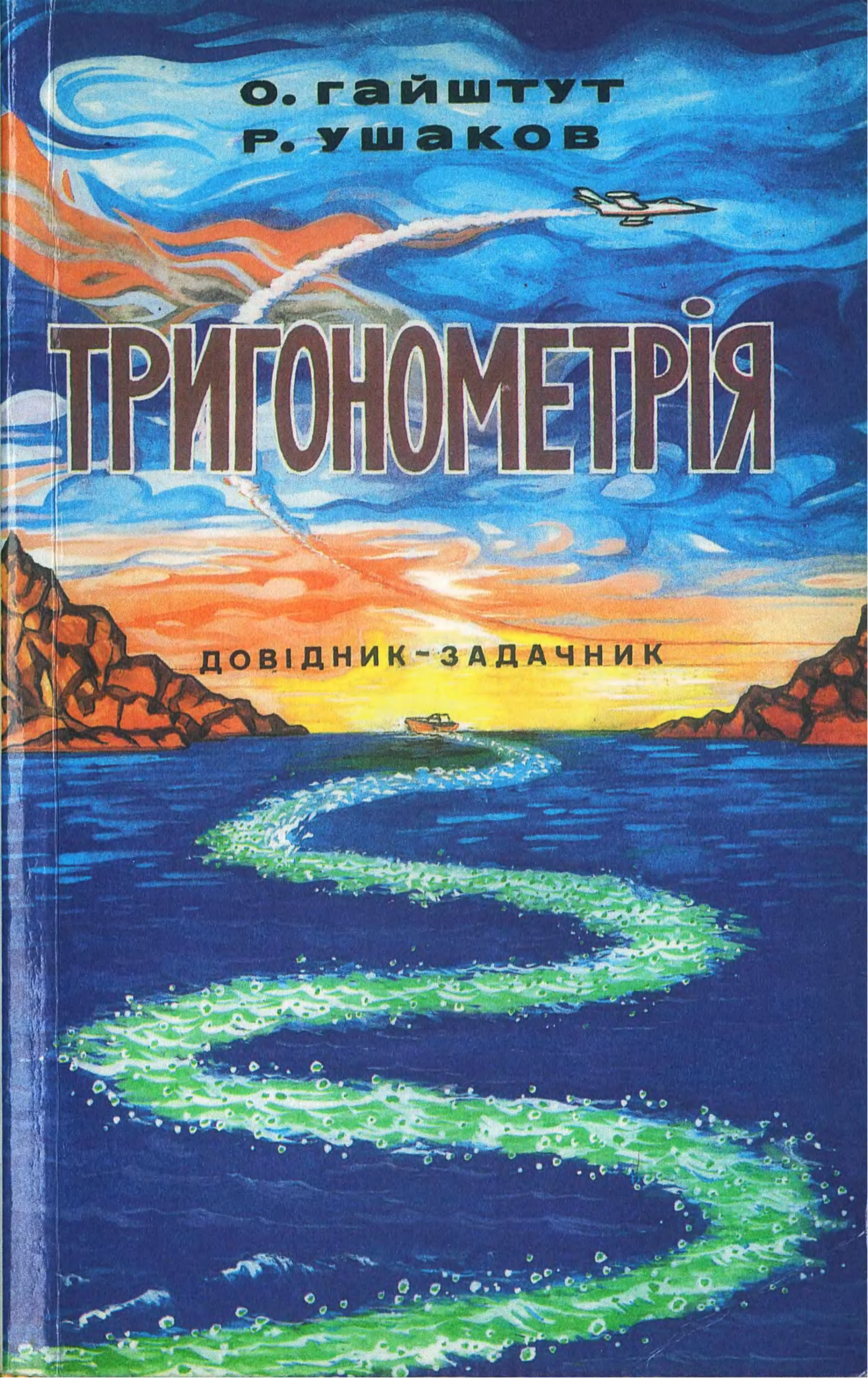
О. Гайштут
Р. Ушаков

ТРИГОНОМЕТРІЯ

ДОВІДНИК-ЗАДАЧНИК



Творча спілка вчителів України
Асоціація вчителів математики

О.Г. Гайштут, Р.П. Ушаков

ТРИГОНОМЕТРІЯ

Довідник-задачник

Київ
«Магістр-S»
1997

ББК 22.151.Оя721
Г14

Гайштут О.Г., Ушаков Р.П.
Тригонометрія. Довідник-задачник. — К.: «Магістр-S», 1997. — 256 с.: 14 іл.
ISBN 966-557-033-1

Посібник містить завдання для самостійної роботи учнів. Завдання згруповані за методами розв'язування. На початку кожного параграфа даються стислі теоретичні відомості. До кожного параграфа наведені відповіді і стислі вказівки.

Для вчителів математики, учнів старшого шкільного віку.

ББК 22.151.Оя721

Рецензенти: К.К. Мартинчук, канд. фіз.-мат. наук, вчителька СШ № 173 м. Києва,
Л.П. Висоцька, зав. кафедрою математики ліцею № 157.

ISBN 966-557-033-1

Від авторів

Тригонометрія є сильною зброєю при розв'язуванні геометричних задач і в багатьох випадках допомагає алгебрі. Недарма в минулі часи шкільна математика складалась з трьох елементів: алгебри, геометрії і тригонометрії.

Математичні ідеї, що використовуються при розв'язуванні задач, досить різноманітні. Але при розв'язуванні більшості задач кожного розділу шкільного курсу тригонометрії використовуються основні провідні ідеї, на базі яких створюються ті чи інші способи і методи розв'язування задач певного вигляду.

При розв'язуванні задач виділяються головні ідеї, прийоми розв'язування основних задач певного вигляду. Роз'яснення способів розв'язування задач сприяє математичному розвитку учнів, допомагає свідомому і глибокому засвоєнню теорії, створює міцну базу для розв'язування різноманітних складних задач.

Відсутність навичок у виконанні перетворень найпростішим шляхом і, навпаки, наявність громіздких і стомливих перетворень є однією з головних причин перевантаження учнів, тому значна увага в книзі приділяється раціональному виконанню тригонометричних перетворень.

Даний збірник досить повний. Він містить всі види вправ з тригонометрії. Збірник складається з двох глав:

1. Перетворення тригонометричних виразів.
2. Розв'язування тригонометричних рівнянь, систем рівнянь і нерівностей.

Кожний параграф починається з невеликої теоретичної частини і аналізу характерних вправ. Далі даються вправи для самостоятійного розв'язування з відповідями і вказівками.

Автори звертають увагу читача на те, що при розв'язуванні рівнянь і систем рівнянь форма запису неоднозначна. Одна і та сама відповідь, отримана при розв'язуванні рівняння, може бути записана по-різному.

Приклад різних записів однієї й тієї ж відповіді:

а) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad n \in Z;$

б) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z;$

в) $\begin{cases} x=\frac{\pi f}{4}, \quad f \in Z, \\ x \neq \frac{\pi l}{2}, \quad l \in Z. \end{cases}$

Про те, як перевірити ідентичність цих відповідей, читач прочитає на сторінках 101, 102.

Задачі розташовані в порядку зростання складності і розраховані на широке коло читачів: від учнів 8-11 класів загальноосвітньої школи до учнів гімназій і ліцеїв, вчителів та викладачів техникумів, шкіл, підготовчих відділень вузів.

По суті книга є практикумом розв'язування задач з тригонометрії. Тому вона надасть суттєву допомогу вчителям в самоосвіті, а також в навчанні учнів.

Тригонометрія. Довідковий матеріал

Основні тригонометричні співвідношення

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\qquad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

$\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\qquad \alpha \neq \pi n,\ n \in Z.$

$\text{tg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\alpha = 1$, $\qquad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} n,\ n \in Z.$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

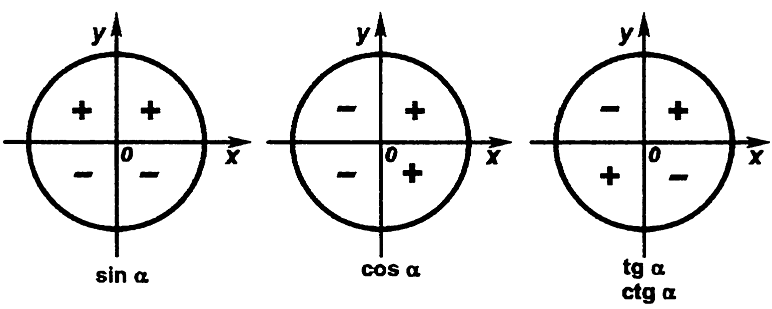
$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\qquad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

$\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$, $\qquad \alpha \neq \pi n,\ n \in Z.$

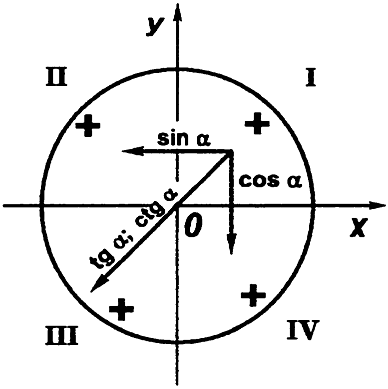
$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$, $\qquad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

$1 + \text{ctg}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha$, $\qquad \alpha \neq \pi n,\ n \in Z.$

Знаки тригонометричних функцій по чвертям



Мал. 1



Мал. 2

Значення тригонометричних функцій $0°,\ 90°,\ 180°,\ 270°,\ 360°,\ 30°,\ 45°,\ 60°$

Функ-ція	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$	$30°$	$45°$	$60°$
sin	0	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	1	0	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	0	не сущ.	0	не сущ.	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	не сущ.	0	не сущ.	0	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Парність тригонометричних функцій

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha;$

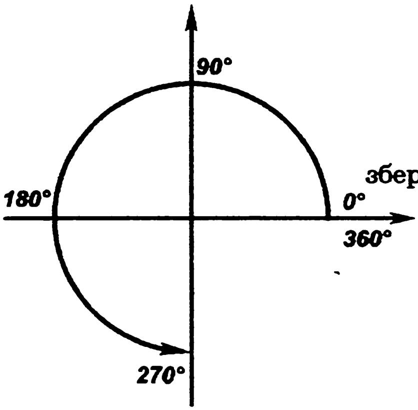
$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha.$

Формули зведення

Функції кутів $(90^\circ \pm \alpha)$, $(180^\circ \pm \alpha)$, $(270^\circ \pm \alpha)$, $(360^\circ \pm \alpha)$

I правило

Визначити чверть та знак функції



II правило

0°, 180°, 360° — 90°, 270°

функція

зберігається — змінюється

Приклади

1. $\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$

(III чверть, синус від'ємний; 270°, sin змінюється на cos)

2. $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

(III чверть, тангенс додатний; 180°, функція tg зберігається)

Функції суми аргументів

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};$$

$$\mathrm{tg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};$$

$$\mathrm{ctg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta};$$

$$\mathrm{ctg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta+1}{\mathrm{ctg}\,\beta-\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Функції кратних аргументів

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha-1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha};$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\,3\alpha=\frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}^3\,\alpha}{1-3\,\mathrm{tg}^2\,\alpha};$$

$$\mathrm{ctg}\,3\alpha=\frac{3\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha-1}{\mathrm{ctg}^3\,\alpha-3\,\mathrm{ctg}\,\alpha};$$

$$\sin 3\alpha=4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha);$$

$$\cos 3\alpha=4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha);$$

$$\mathrm{tg}\,3\alpha=\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,(60^\circ-\alpha)\,\mathrm{tg}\,(60^\circ+\alpha);$$

$$\mathrm{ctg}\,3\alpha=\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,(60^\circ-\alpha)\,\mathrm{ctg}\,(60^\circ+\alpha).$$

Перетворення добутку тригонометричних функцій в суму

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta));$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

Перетворення алгебраїчної суми тригонометричних функцій в добуток

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi),$$

$$\text{де}\ \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Тригонометричні функції половинного кута

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}; \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Універсальні підстановки

$$\sin\alpha = \frac{2z}{1+z^2}; \qquad \cos\alpha = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2z}{1-z^2}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-z^2}{2z}, \text{ где } z = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Періоди тригонометричних функцій

$$T(\sin x) = 2\pi, \qquad T(\cos x) = 2\pi,$$

$$T(\operatorname{tg} x) = \pi, \qquad T(\operatorname{ctg} x) = \pi.$$

Обернені тригонометричні функції

$$\sin(\arcsin m) = m \qquad (|m| \le 1);$$

$$\cos(\arcsin m) = \sqrt{1-m^2} \qquad (|m| \le 1);$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin m) = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \qquad (|m| < 1);$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin m) = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m} \qquad (m \in [-1;\ 0) \cup (0;\ 1]).$$

$$\cos(\arccos m) = m \qquad (|m| \le 1);$$

$$\sin(\arccos m) = \sqrt{1 - m^2} \qquad (|m| \le 1);$$

$$\operatorname{tg}(\arccos m) = \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m} \qquad (m \in [-1; 0) \cup (0; 1]);$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos m) = \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \qquad (|m| < 1).$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} m) = m;$$

$$\sin(\operatorname{arctg} m) = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arctg} m) = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}};$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} m) = \frac{1}{m} \qquad (m \ne 0).$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} m) = m;$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} m) = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} m) = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} m) = \frac{1}{m};$$

$$\arcsin m + \arccos m = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad -1 \le m \le 1;$$

$$\operatorname{arctg} m + \operatorname{arcctg} m = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad m \in R;$$

$$\arcsin(\sin m) = m \qquad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \le m \le \frac{\pi}{2};$$

$$\arccos(\cos m) = m \qquad \text{при} \quad 0 \le m \le \pi;$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} m) = m \qquad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} < m < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} m) = m \quad \text{при} \quad 0 < m < \pi;$$

$$\arcsin(-m) = -\arcsin m;$$

$$\arccos(-m) = \pi - \arccos m;$$

$$\mathrm{arctg}(-m) = -\mathrm{arctg}\, m;$$

$$\mathrm{arcctg}(-m) = \pi - \mathrm{arcctg}\, m.$$

Найпростіші тригонометричні рівняння

1) $\sin x = a,\ \ x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ \ k \in Z,\ \ |a| \le 1;$
2) $\cos x = a,\ \ x = \pm \arccos a + 2k\pi,\ \ k \in Z,\ \ |a| \le 1;$
3) $\mathrm{tg}\, x = a,\ \ x = \mathrm{arctg}\, a + k\pi,\ \ k \in Z,\ \ a \in R;$
4) $\mathrm{ctg}\, x = a,\ \ x = \mathrm{arcctg}\, a + k\pi,\ \ k \in Z,\ \ a \in R.$

Найпростіші тригонометричні нерівності

1) $\sin x > a$.

   При $a \ge 1$ немає розв'язків;
   при $-1 \le a < 1$
   $2\pi k + \arcsin a < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ \ k \in Z;$
   при $a < -1$ $x \in R$.

2) $\sin x < a$.

   При $a > 1$ $x \in R$;
   при $a \in (-1;\ 1]$
   $-\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k;$
   при $a \in (-\infty;\ -1]$ $x \in \varnothing$.

3) $\cos x > a$.

   При $a \ge 1$ $x \in \varnothing$;
   при $a \in [-1;\ 1)$
   $2\pi k - \arccos a < x < 2\pi k + \arccos a;$
   при $a \in (-\infty;\ -1)$ $x \in R$.

4) $\cos x < a$.

При $a \in (1;\ \infty)$ $x \in R$;

при $a \in (-1;\ 1]$

$2\pi k + \arccos a < x < 2\pi k + 2\pi - \arccos a$;

при $a \in (-\infty;\ -1]$ $x \in \varnothing$.

5) $\operatorname{tg} x < a$.

$\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k + \operatorname{arctg} a$ при $a \in R$.

6) $\operatorname{tg} x > a$.

$\pi k + \operatorname{arctg} a < x < \pi k + \frac{\pi}{2}$ при $a \in R$.

7) $\operatorname{ctg} x < a$.

$\pi k + \operatorname{arcctg} a < x < \pi k + \pi$ при $a \in R$.

8) $\operatorname{ctg} x > a$.

$\pi k < x < \pi k + \operatorname{arcctg} a$ при $a \in R$

(всюди $k \in Z$).

Похідні тригонометричних функцій

1) $\sin' x = \cos x$;

2) $\cos' x = -\sin x$;

3) $\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$;

4) $\operatorname{ctg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x$;

5) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$;

6) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$;

7) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$;

8) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Інтеграл від тригонометричних функцій

1) $\int \cos x\,dx = \sin x + c;$

2) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c;$

3) $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + c;$

4) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + c.$

Тригонометричні функції кутів трикутника

$$\sin(A+B) = \sin C, \quad \cos(A+B) = -\cos C,$$

$$\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}, \quad \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}.$$

Метричні співвідношення в трикутнику

Теорема синусів. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

Теорема косинусів. $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = 2R^2\sin A\sin B\sin C.$$

ГЛАВА I.

Перетворення виразів з тригонометричними функціями

§1. Спрощення виразів

Вміння перетворювати до найпростішого вигляду той чи інший тригонометричний вираз відіграє основну роль в задачах тригонометрії.

В завданнях даного параграфу використовуються тригонометричні співвідношення:

1. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ для будь-якого $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;
2. $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ для будь-якого $\alpha \neq \pi n$;
3. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ для будь-якого $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} n$;
4. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;
5. $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$ для будь-якого $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$;
6. $\operatorname{cosec} \alpha = \dfrac{1}{\sin \alpha}$ для будь-якого $\alpha \neq \pi n$;
7. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$ для будь-якого $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$;
8. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$ для будь-якого $\alpha \neq \pi n$.

Але треба зазначити, що в результаті перетворювань можна одержати вираз, область визначення якого не співпадає з областю визначення вихідного виразу.

Тому бажано визначити, на якій множині проведені перетворення мають сенс. Але, враховуючи, що тут учні зустрічаються з перетвореннями вперше, можна таке дослідження не проводити.

Приклад 1.1. Спростити вираз $\dfrac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$.

Розв'язання.

$$\frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = \frac{1 - \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta} =$$

$$= \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} =$$

$$= \sec^2\alpha - \sec^2\beta = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha - 1 - \mathrm{tg}^2\beta = \mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\beta.$$

Відповідь: $\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\beta$.

Приклад 1.2. Спростити вираз

$$\sqrt{\frac{2}{1+\cos\alpha} + \frac{2}{1-\cos\alpha}}$$

при $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

Розв'язання. $\sqrt{\frac{2}{1+\cos\alpha} + \frac{2}{1-\cos\alpha}} =$

$$= \sqrt{\frac{2(1-\cos\alpha) + 2(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{4}{\sin^2\alpha}} = \frac{2}{|\sin\alpha|}.$$

При $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ $\sin\alpha < 0$, тому

$$\frac{2}{|\sin\alpha|} = -\frac{2}{\sin\alpha}.$$

Відповідь: $-\frac{2}{\sin\alpha}$.

Приклад 1.3. Спростити вираз

$$\left(1 - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right).$$

Розв'язання. $\left(1 - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) =$

$$= (1 - \sec^2\alpha)(1 - \mathrm{cosec}^2\alpha) = (-\mathrm{tg}^2\alpha)(-\mathrm{ctg}^2\alpha) = 1.$$

Відзначимо, що вихідний вираз визначений при $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq 90^\circ n$.

Відповідь: 1 при $\alpha \neq 90^\circ n$, $n \in Z$.

Приклад 1.4. Спростити вираз

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$$

при $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

Розв'язання. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} =$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}} + \sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}} + \sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \frac{|1+\sin\alpha|}{|\cos\alpha|} + \frac{|1-\sin\alpha|}{|\cos\alpha|}.$$

Враховуючи, що $1+\sin\alpha \ge 0$ і $1-\sin\alpha \ge 0$, маємо:

$$\frac{|1+\sin\alpha|}{|\cos\alpha|} + \frac{|1-\sin\alpha|}{|\cos\alpha|} = \frac{1+\sin\alpha+1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|} = \frac{2}{|\cos\alpha|}.$$

При $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ $\cos\alpha < 0$, тому

$$\frac{2}{|\cos\alpha|} = -\frac{2}{\cos\alpha}.$$

Відповідь: $-\dfrac{2}{\cos\alpha}$.

Вправи

Спростити вирази:

1.5. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.

1.6. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

1.7. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha}$.

1.8. $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha} + \dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}$.

1.9. $\dfrac{2\sin^2\alpha - 1}{1-2\cos^2\alpha}$.

1.10. $\dfrac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

1.11. $1 - \dfrac{\sin^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha} - \dfrac{\cos^2\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

1.12. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$.

1.13. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha$.

1.14. $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha + \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

1.15. $\dfrac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}$.

1.16. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$.

1.17. $\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$.

1.18. $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

1.19. $(\operatorname{ctg}\alpha + 1)^2 + (\operatorname{ctg}\alpha - 1)^2$.

1.20. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

при $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Доведення тотожностей

На практиці часто потрібно доводити тотожність різних тригонометричних виразів. Такі доведення пов'язані з виконанням тотожних алгебраїчних перетворювань та використанням тригонометричних формул.

Приклад 1.21. Довести тотожність

$$\frac{\operatorname{ctg}5\alpha - \operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{ctg}2\alpha - \operatorname{tg}5\alpha} = \frac{\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}5\alpha}.$$

Розв'язання. $\dfrac{\operatorname{ctg}5\alpha - \operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{ctg}2\alpha - \operatorname{tg}5\alpha} =$

$$= \left(\frac{1}{\operatorname{tg}5\alpha} - \operatorname{tg}2\alpha\right) : \left(\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha} - \operatorname{tg}5\alpha\right) =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 5\alpha}{\operatorname{tg} 5\alpha} : \frac{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 5\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 5\alpha},$$

що й вимагалося довести.

Приклад 1.22. Довести тотожність

$$\frac{2\cos^2 x + \sin^2 x - 3}{2\sin^2 x + \cos^2 x - 3} = \frac{2\operatorname{tg}^2 x + 1}{2 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

Розв'язання. $$\frac{2\cos^2 x + \sin^2 x - 3}{2\sin^2 x + \cos^2 x - 3} =$$

$$= \frac{2\cos^2 x + \sin^2 x - 3(\sin^2 x + \cos^2 x)}{2\sin^2 x + \cos^2 x - 3(\sin^2 x + \cos^2 x)} =$$

$$= \frac{-2\sin^2 x - \cos^2 x}{-2\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\sin^2 x + \cos^2 x}{2\cos^2 x + \sin^2 x}.$$

Розділивши почленно чисельник і знаменник на $\cos^2 x$, маємо:

$$\frac{2\sin^2 x + \cos^2 x}{2\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{2\operatorname{tg}^2 x + 1}{2 + \operatorname{tg}^2 x},$$

що й вимагалося довести. Доведена тотожність справедлива при $\cos x \neq 0$, тобто при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Приклад 1.23. Довести тотожність

$$3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1.$$

Розв'язання. Розкладаючи $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$ на множники (як суму кубів), знаходимо

$$3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) =$$

$$= 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) -$$

$$- 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) =$$

$$= 3\sin^4 \alpha + 3\cos^4 \alpha - 2\sin^4 \alpha +$$

$$+ 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 2\cos^4 \alpha =$$

$$= \sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha =$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1,$$

що й вимагалося довести.

Вправи

Довести тотожності:

1.24. $(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha)\cos^2\alpha = 1.$

1.25. $(1 - \cos^2\alpha)(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha) = \mathrm{tg}^2\,\alpha.$

1.26. $\dfrac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha = \cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$

1.27. $\dfrac{1 - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}.$

1.28. $\dfrac{5\cos\alpha - 4}{3 - 5\sin\alpha} = \dfrac{3 + 5\sin\alpha}{4 + 5\cos\alpha}.$

1.29. $\dfrac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha - \cos^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\,\alpha - \sin^2\alpha} = \mathrm{ctg}^6\,\alpha.$

1.30. $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{1 - \sin\alpha\cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha.$

1.31. $\dfrac{\sin\alpha}{1 + \mathrm{ctg}\,\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha}.$

1.32. $\dfrac{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}{1 + \sin\alpha\cos\alpha} = \sin\alpha - \cos\alpha.$

1.33. $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}\,\alpha + 1}.$

1.34. $\dfrac{\cos\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \sec\alpha} = \sin\alpha.$

1.35. $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha} = \sin^2\alpha.$

1.36. $\dfrac{\mathrm{ctg}\,\alpha + 1}{\mathrm{tg}\,\alpha + 1} = \mathrm{ctg}\,\alpha.$

1.37. $\dfrac{\mathrm{tg}\,2\alpha + \mathrm{ctg}\,3\beta}{\mathrm{ctg}\,2\alpha + \mathrm{tg}\,3\beta} = \dfrac{\mathrm{tg}\,2\alpha}{\mathrm{tg}\,3\beta}.$

1.38. $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha - 1} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha - 1} = 1.$

1.39. $\dfrac{2\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha + 3}{2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha + 3} = \operatorname{ctg}^2\alpha.$

1.40. $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha = (1 + \cos\alpha)(1 + \operatorname{tg}\alpha).$

1.41. $(1 + \sin\alpha)(1 + \cos\alpha) =$

$= (\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha).$

1.42. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$

1.43. $\sin^3\alpha(1 + \operatorname{ctg}\alpha) + \cos^3\alpha(1 + \operatorname{tg}\alpha) =$

$= \sin\alpha + \cos\alpha.$

1.44. $\operatorname{ctg}\alpha - \sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$

1.45. $2 + \dfrac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha.$

1.46. $\dfrac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha} - \dfrac{(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha} = 1.$

1.47. $\cos\alpha(\operatorname{cosec}\alpha - \sec\alpha) +$

$+ \sin\alpha(\sec\alpha + \operatorname{cosec}\alpha) = \sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha.$

1.48. $\sin\alpha(2\operatorname{cosec}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(\operatorname{cosec}\alpha - 2\operatorname{ctg}\alpha) =$

$= 2\sin\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha.$

1.49. $1 + \dfrac{\cos\alpha\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \cos\alpha} = \sec\alpha.$

1.50. $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$

$= 1 + 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha.$

1.51. $(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1)^3 + 27\sin^6\alpha\cos^6\alpha = 0.$

1.52. $(\sin\alpha + \operatorname{cosec}\alpha)^2 + (\cos\alpha + \sec\alpha)^2 -$

$- (\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) = 7.$

1.53. $\operatorname{tg}^3\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha - \operatorname{cosec}\alpha\sec\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha\sec^2\alpha =$

$= \operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha.$

Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

Приклад 1.54. $\operatorname{ctg}\alpha = 4$, $180° < \alpha < 270°$. Знайти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$.

Розв'язання. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \dfrac{1}{4}$.

Враховуючи, що $180° < \alpha < 270°$, маємо:

$$\operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = -\sqrt{1 + 16} = -\sqrt{17};$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{17}};$$

$$\cos\alpha = \sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 4 = -\frac{4}{\sqrt{17}};$$

$$\sec\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{4}.$$

Приклад 1.55. $\dfrac{2}{3\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha}$ виразити через $\operatorname{tg}\alpha$.

Розв'язання. $\dfrac{2}{3\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha} = \dfrac{2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{3\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha}$.

Розділивши почленно чисельник і знаменник одержаного дробу на $\cos^2\alpha$, маємо:

$$\frac{2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha} = \frac{2 + 2\operatorname{tg}^2\alpha}{3 - 4\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Вправи

1.56. Знаючи, що $\sin\alpha = m$, знайти $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$.

1.57. Знаючи, що $\sec\alpha = p$, знайти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$.

1.58. За даним значенням одної з тригонометричних функцій та інтервалу, в якому знаходиться α, знайдіть значення інших функцій:

а) $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

б) $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $1{,}5\,\pi < \alpha < 2\pi$;

в) $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\dfrac{35}{12}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

г) $\mathrm{tg}\,\alpha = -3$, $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

1.59. $\dfrac{a}{b\cos^2\alpha - c\sin^2\alpha}$ виразити через $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

1.60. Обчислити $\dfrac{a\sin\alpha + b\cos\alpha}{c\sin\alpha - d\cos\alpha}$, якщо

а) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$; *б*) $\mathrm{ctg}\,\alpha = -3$.

1.61. $3\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha$ виразити через

а) $\sin\alpha$; *б*) $\cos\alpha$.

1.62. $\dfrac{a\,\mathrm{ctg}\,\alpha + b\,\mathrm{tg}\,\alpha}{c\,\mathrm{ctg}\,\alpha - d\,\mathrm{tg}\,\alpha}$ виразити через

а) $\mathrm{tg}\,\alpha$; *б*) $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Різні задачі

Приклад 1.63. $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = A$. Знайти

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha + \sec\alpha\,\mathrm{cosec}\,\alpha + \mathrm{ctg}^2\,\alpha.$$

Розв'язання. $A^2 = (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha)^2 = \mathrm{tg}^2\alpha + 2 + \mathrm{ctg}^2\alpha$, звідки $\mathrm{tg}^2\,\alpha + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = A^2 - 2$.

Далі маємо: $A = \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

$$= \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \sec\alpha\,\mathrm{cosec}\,\alpha.$$

Отже, $\mathrm{tg}^2\,\alpha + \sec\alpha\,\mathrm{cosec}\,\alpha + \mathrm{ctg}^2\,\alpha =$

$$= (\mathrm{tg}^2\,\alpha + \mathrm{ctg}^2\,\alpha) + \sec\alpha\,\mathrm{cosec}\,\alpha = A^2 - 2 + A.$$

Відповідь: $A^2 + A - 2$.

Приклад 1.64. $\sin\alpha + \cos\alpha = m$. Знайти

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha.$$

Розв'язання. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha =$

$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) =$$

$$= \sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha =$$

$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

Далі маємо:

$$m^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha =$$

$$= 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

звідки $\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{m^2 - 1}{2}$.

Тепер одержуємо: $1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$

$$= 1 - 3\left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \frac{1 + 6m^2 - 3m^4}{4}.$$

Відповідь: $\dfrac{1 + 6m^2 - 3m^4}{4}$.

Приклад 1.65. Вилучити кут α з системи рівностей

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = m, \\ \sin\alpha\cos\alpha = n. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2 = m + 2, \\ \sin\alpha\cos\alpha = n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = m + 2, \\ \sin^2\alpha\cos^2\alpha = n^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = m + 2, \\ \sin^2\alpha\cos^2\alpha = n^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = m + 2, \\ \sin^2\alpha\cos^2\alpha = n^2; \end{cases}$$

звідки $\dfrac{1}{n^2} = m + 2$.

Одержана рівність $m = \frac{1}{n^2} - 2$ є необхідною умовою для того, щоб вихідна система рівнянь мала розв'язки відносно α.

Приклад 1.66. Довести, що

$$\left|\frac{\sec\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + 1} + \frac{\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + 1}\right| > \frac{1}{2}.$$

Розв'язання. $\left|\frac{\sec\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + 1} + \frac{\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + 1}\right| =$

$$= \left|\frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1\right)} + \frac{1 - \sin^2\alpha}{\sin\alpha\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 1\right)}\right| =$$

$$= \left|\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}\right| = \frac{1}{|\sin\alpha + \cos\alpha|}.$$

Таким чином, слід довести, що

$$\frac{1}{|\sin\alpha + \cos\alpha|} > \frac{1}{2} \text{ або } |\sin\alpha + \cos\alpha| < 2.$$

Враховуючи, що $|a|^2 = a^2$, маємо:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 < 4, \ 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha < 4,$$

$$\sin\alpha\cos\alpha < 1{,}5,$$

що очевидно.

Приклад 1.67. Відомо, що

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1)$$

і

$$\frac{\sin^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\alpha}{b^2} = \frac{1}{x^2 + y^2}. \qquad (2)$$

Довести, що $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Розв'язання. З рівності (1) маємо:

$$(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 = x^2 + y^2,$$

$$x^2 \sin^2 \alpha - 2xy \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \cos^2 \alpha = x^2 + y^2,$$

$$x^2 (1 - \sin^2 \alpha) + 2xy \sin \alpha \cos \alpha + y^2 (1 - \cos^2 \alpha) = 0,$$

$$x^2 \cos^2 \alpha + 2xy \sin \alpha \cos \alpha + y^2 \sin^2 \alpha = 0,$$

$(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 = 0$, $x \cos \alpha = - y \sin \alpha$, звідки

$$x^2 \cos^2 \alpha = y^2 \sin^2 \alpha. \qquad (*)$$

Помноживши обидві частини рівності (2) спочатку на x^2, а потім на y^2 і додавши одержані рівності, маємо:

$$\frac{x^2 \sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{x^2 \cos^2 \alpha}{b^2} + \frac{y^2 \sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{y^2 \cos^2 \alpha}{b^2} = 1.$$

З одержаної рівності, використовуючи рівність (*), маємо:

$$\frac{x^2 \sin^2 \alpha}{a^2} + \frac{y^2 \sin^2 \alpha}{b^2} + \frac{x^2 \cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{y^2 \cos^2 \alpha}{b^2} = 1,$$

або $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, що й вимагалося довести.

Вправи

1.68. Відомо, що $\sin \alpha + \cos \alpha = p$. Знайти:

а) $\sin \alpha \cos \alpha$; *в*) $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$;

б) $\sin \alpha - \cos \alpha$; *г*) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

1.69. Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = p$. Знайти:

а) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$; *в*) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$;

б) $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha$; *г*) $\operatorname{tg}^3 \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha$.

1.70. Відомо, що

$$(1 - \sin \alpha)(1 - \sin \beta)(1 - \sin \gamma) =$$
$$= (1 + \sin \alpha)(1 + \sin \beta)(1 + \sin \gamma).$$

Довести, що

$$|\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma| = (1 + \sin \alpha)(1 + \sin \beta)(1 + \sin \gamma).$$

1.71. $x = r (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma)$,

$$y = r(\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta),$$

$$z = r\sin\beta\sin\gamma.$$

Довести, що $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Вилучити α з систем рівнянь:

1.72. $\begin{cases}\sin\alpha + \cos\alpha = m,\\ \sin\alpha - \cos\alpha = n.\end{cases}$

1.73. $\begin{cases}\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = m,\\ \mathrm{tg}^2\,\alpha + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = n.\end{cases}$

1.74. $\begin{cases}\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = n,\\ \sin\alpha + \cos\alpha = m.\end{cases}$

1.75. $\begin{cases}\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = n,\\ \sin\alpha + \cos\alpha = m.\end{cases}$

1.76. $\begin{cases}\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = p,\\ \sin\alpha + \cos\alpha = m.\end{cases}$

1.77. $\begin{cases}\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = l,\\ \sin\alpha + \cos\alpha = m.\end{cases}$

1.78. $\begin{cases}\mathrm{tg}^3\,\alpha + \mathrm{ctg}^3\,\alpha = n,\\ \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = m.\end{cases}$

1.79. $\begin{cases}\mathrm{tg}^3\,\alpha - \mathrm{ctg}^3\,\alpha = n,\\ \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = m.\end{cases}$

1.80. $\begin{cases}\mathrm{tg}^4\,\alpha + \mathrm{ctg}^4\,\alpha = x,\\ \mathrm{tg}^2\,\alpha + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = y.\end{cases}$

1.81. $\begin{cases}5\,\mathrm{cosec}\,\alpha = x,\\ 4\,\mathrm{ctg}\,\alpha = y.\end{cases}$

1.82. $\begin{cases}\mathrm{cosec}\,\alpha - \sin\alpha = x,\\ \sec\alpha - \cos\alpha = y.\end{cases}$

Вилучити α і β з систем рівнянь:

1.83. $\begin{cases} x \sin^2 \alpha + y \cos^2 \alpha = 1, \\ y \sin^2 \beta + x \cos^2 \beta = 1, \\ x \operatorname{tg} \alpha = y \operatorname{tg} \beta. \end{cases}$

1.84. $\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \beta = a, \\ x \sin \beta - y \cos \alpha = b, \\ (x^2 + y^2)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta) = 2ab. \end{cases}$

Задачі підвищеної складності

1.85. Відомо, що $\sin^3 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0$. Знайти $\sin \alpha (1 + \cos \alpha)$, якщо $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Розв'язання. З умови маємо:

$$\sin^3 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 - \sin \alpha, \tag{1}$$

$$\sin^2 \alpha (1 + \sin \alpha) = 1 - \sin \alpha.$$

Помножуючи обидві частини рівності на $1 + \sin \alpha$, одержимо $\sin^2 \alpha (1 + \sin \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$.

При $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ будемо мати

$$\sin \alpha (1 + \sin \alpha) = \cos \alpha \quad \text{або} \quad \sin \alpha + \sin^2 \alpha = \cos \alpha.$$

Тоді $1 + \sin \alpha + \sin^2 \alpha = 1 + \cos \alpha$,

$$\sin \alpha (1 + \sin \alpha + \sin^2 \alpha) = \sin \alpha (1 + \cos \alpha),$$

$$\sin \alpha + \sin^2 \alpha + \sin^3 \alpha = \sin \alpha (1 + \cos \alpha).$$

Використовуючи рівність (1), одержимо

$$1 = \sin \alpha (1 + \cos \alpha).$$

Відповідь: 1.

1.86. Відомо, що $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{n}{\sqrt{m^2 - n^2}}$, де $0 < n < m$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Довести, що

$$\cos \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) - \operatorname{cosec} \alpha = \frac{m}{n}.$$

Розв'язання.

$$\cos\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\sin\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha)-\operatorname{cosec}\alpha=$$

$$=\cos\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}(1+\operatorname{ctg}\alpha)-\frac{1}{\sin\alpha}=$$

$$=\cos\alpha\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}(1+\operatorname{ctg}\alpha)-\frac{1}{\sin\alpha}=$$

$$=(1+\operatorname{ctg}\alpha)\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1+\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Виражаючи $\frac{1}{\cos\alpha}$ через $\operatorname{ctg}\alpha$, одержимо:

$$\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}=\sqrt{1+\frac{n^2}{m^2-n^2}}:\frac{n}{\sqrt{m^2-n^2}}=\frac{m}{n},$$

що й вимагалося довести.

1.87. $A_1=\sin\alpha_1$, $A_2=\cos\alpha_1\sin\alpha_2$,

$$A_3=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_3\,,\ \ldots\,,$$

$$A_{n-1}=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3\ldots\cos\alpha_{n-2}\sin\alpha_{n-1},$$

$$A_n=\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cdot\ldots\cdot\cos\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-1}.$$

Довести, що $A_1^2+A_2^2+A_3^2+\ldots+A_n^2=1$.

Розв'язання. $A_n^2+A_{n-1}^2=\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\ldots\cos^2\alpha_{n-2}$,

$$A_n^2+A_{n-1}^2+A_{n-2}^2=\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\ldots\cos^2\alpha_{n-3},$$

$$A_n^2+A_{n-1}^2+\ldots+A_2^2=\cos^2\alpha_1,$$

і, нарешті, $A_n^2+A_{n-1}^2+\ldots+A_1^2=\cos^2\alpha_1+\sin^2\alpha_1=1$, що й вимагалося довести.

1.88. Відомо, що $\cos^3\alpha+\cos^2\alpha+\cos\alpha=1$. **Знайти** $\cos\alpha\,(1+\sin\alpha)$, якщо $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

Розв'язання.

$$\cos^2\alpha\,(\cos\alpha + 1) = 1 - \cos\alpha, \qquad (1)$$

$$\cos^2\alpha\,(1 + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha,$$

$$\cos\alpha\,(1 + \cos\alpha) = \sin\alpha,$$

звідки $1 + \sin\alpha = 1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha$,

$$(1 + \sin\alpha)\cos\alpha = \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha.$$

Використовуючи рівність (1), одержимо

$$(1 + \sin\alpha)\cos\alpha = 1.$$

Відповідь: 1.

1.89. Відомо, що

$$\cos\alpha + \sin\beta = t, \text{ а } \cos^2\alpha + \sin^2\beta = t^2.$$

Довести, що $\cos^n\alpha + \sin^n\alpha = t^n$.

Розв'язання. $t^2 = (\cos\alpha + \sin\beta)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\beta$, звідки $2\cos\alpha\sin\beta = 0$. Можливі два випадки:

1) $\cos\alpha = 0$. Тоді з умови випливає, що $\sin\beta = t$ і $\cos^n\alpha + \sin^n\alpha = 0 + t^n = t^n$, що й вимагалося довести.

2) $\sin\beta = 0$. Тоді з умови випливає, що $\cos\alpha = t$ і $\cos^n\alpha + \sin^n\beta = t^n + 0 = t^n$, що й вимагалося довести.

1.90. Довести нерівність

$$\frac{a + b - |a - b|}{2} \le a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha \le \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$

Розв'язання. 1. $a \ge b$. Дана подвійна нерівність набуває вигляду:

$$b \le a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha \le a.$$

Розглянемо нерівність

$$b \le a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha, \qquad (*)$$

звідки $b - b\cos^2\alpha \le a\sin^2\alpha$, $b\sin^2\alpha \le a\sin^2\alpha$, що справедливо, а оскільки кожна з одержаних нерівностей рівносильна вихідній, отже, справедлива й нерівність (*).

Розглянемо нерівність

$$a \sin^2 \alpha + b \cos^2 \alpha \le a, \qquad (**)$$

звідки $b \cos^2 \alpha \le a - a \sin^2 \alpha$, $b \cos^2 \alpha \le a \cos^2 \alpha$, що справедливо, а оскільки кожна з одержаних нерівностей рівносильна вихідній, отже, справедлива й нерівність (**).

2. $a < b$. Дана подвійна нерівність набуде вигляду:

$$a \le a \sin^2 \alpha + b \cos^2 \alpha \le b,$$

і доводиться аналогічно випадку 1.

1.91. Довести нерівність

$$|a \sin \alpha + b \cos \alpha| \le \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Розв'язання. $|a \sin \alpha + b \cos \alpha| \le \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$(a \sin \alpha + b \cos \alpha)^2 \le a^2 + b^2,$$

$$a^2 \sin^2 \alpha + 2ab \sin \alpha \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha \le a^2 + b^2,$$

$$2ab \sin \alpha \cos \alpha \le a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha,$$

$$(a \cos \alpha - b \sin \alpha)^2 \ge 0,$$

що справедливо.

1.92. Довести нерівність $\sin \alpha \cos \alpha \le \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Запишемо ліву частину нерівності у вигляді $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{2}$. Як було доведено в 1.91,

$$|\sin \alpha + \cos \alpha| = |1 \cdot \sin \alpha + 1 \cdot \cos \alpha| \le \sqrt{2}.$$

Тому $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{2} \le \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$, що й вимагалось довести.

1.93. Довести нерівність

$$\operatorname{tg} \alpha + (1 + \operatorname{tg} \alpha) \sec \alpha < 2 \sec^2 \alpha,$$

де $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Вихідна нерівність рівносильна кожній з таких:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) \cdot \frac{1}{\cos \alpha} < \frac{2}{\cos^2 \alpha},$$

$$\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha < 2. \qquad (*)$$

Оскільки $\sin \alpha \cos \alpha \le \frac{1}{2}$, а $\cos \alpha + \sin \alpha \le \sqrt{2}$, то

$$\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha + \sin \alpha \le \frac{1}{2} + \sqrt{2}.$$

Залишається відзначити, що $\frac{1}{2} + \sqrt{2} < 2$, тому нерівність (*) справедлива.

1.94. Довести нерівність

$$4 \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha + \sec \alpha) < 5 \sec^3 \alpha,$$

де $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Вихідна нерівність рівносильна кожній з таких:

$$4 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}\right) < \frac{5}{\cos^3 \alpha},$$

$$4 (\sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) < 5,$$

$$\sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha + 1) < \frac{5}{4}. \qquad (*)$$

Оскільки $\sin \alpha \cos \alpha \le \frac{1}{2}$, а $\sin \alpha + \cos \alpha + 1 \le \sqrt{2} + 1$, то $\sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha + 1) \le \frac{1}{2} (\sqrt{2} + 1)$.

Оскільки $\frac{\sqrt{2} + 1}{2} < \frac{5}{4}$, то нерівність (*) справедлива.

1.95. Довести нерівність

$$\sin^3 \alpha\ (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha\ (1 + \operatorname{tg} \alpha) < 2,$$

де $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Вихідна нерівність рівносильна кожній з таких:

$$\sin^3 \alpha \cdot \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} + \cos^3 \alpha \cdot \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} < 2,$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)\ (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) < 2,$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha < 2,$$

що справедливо.

1.96. Довести нерівність

$$(1 + \sin \alpha + \cos \alpha)(1 - \sin \alpha + \cos \alpha) \times$$
$$\times (1 + \sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha - 1) \le 1.$$

Розв'язання. Вихідна нерівність рівносильна кожній з таких нерівностей:

$$[(1 + \cos \alpha)^2 - \sin^2 \alpha]\ [\sin^2 \alpha - (1 - \cos \alpha)^2] \le 1,$$

$$(1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \times$$
$$\times (\sin^2 \alpha - 1 + 2 \cos \alpha - \cos^2 \alpha) \le 1,$$

$$(2 \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha)\ (2 \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha) \le 1,$$

$$2 \cos \alpha\ (1 + \cos \alpha) \cdot 2 \cos \alpha\ (1 - \cos \alpha) \le 1,$$

$$4 \cos^2 \alpha\ (1 - \cos^2 \alpha) \le 1,$$

звідки $\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \le \frac{1}{4}$.

Враховуючи нерівність, доведену в 1.92, впевнюємось, що одержана нерівність справедлива.

1.97. Довести подвійну нерівність

$$1 \le 2\ (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \le 4\ (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha).$$

Розв'язання. *а*) Розглянемо нерівність

$$1 \le 2\ (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha), \qquad (*)$$

$$\frac{1}{2} \le (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha,$$

$$2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \le \frac{1}{2}, \quad \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \le \frac{1}{4}.$$

Використовуючи нерівність, доведену в 1.92, впевнюємось, що одержана нерівність справедлива, а оскільки одержана нерівність рівносильна вихідній, то справедлива й нерівність (*).

б) Розглянемо нерівність

$$2 (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \le 4 (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha), \qquad (**)$$

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \le$$

$$\le 2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) (\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha),$$

$$1-2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \le 2 \sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha\, cosa^2 \alpha + 2 \cos^4 \alpha,$$

$$1 \le 2 (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha),$$

що було доведено в пункті *а*).

Як і в попередньому випадку, кожна нерівність даного пункту рівносильна вихідній, отже, справедлива й нерівність (**).

§2. Парність тригонометричних функцій. Формули зведення

Функція $y = f(x)$ називається ***парною****, якщо разом з кожним значенням змінної x з області визначення f значення $-x$ також входить в область визначення цієї функції і при цьому виконується рівність: $f(x) = f(-x)$.*

Функція $y = f(x)$ називається ***непарною****, якщо разом з кожним значенням змінної x з області визначення f значення $-x$ також входить в область визначення цієї функції і при цьому виконується рівність: $f(-x) = -f(x)$.*

З шести тригонометричних функцій косинус і секанс — парні, решта — непарні, тобто

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha,\ \sec(-\alpha) = \sec\alpha,$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha.$$

Але не слід думати, що кожна функція є парною або непарною. Більшість функцій не відносяться ні до одного з цих видів функцій.

Приклад 2.1. Дослідити функцію

$$f(x) = \sin(\cos x)$$

на парність.

Розв'язання. $f(-x) = \sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x)$,

$$f(-x) = f(x).$$

Відповідь: Функція парна.

Приклад 2.2. Дослідити функцію

$$f(x) = 2^{1 + \sin x} - 2^{1 - \sin x}$$

на парність.

Розв'язання. $f(-x) = 2^{1 + \sin(-x)} - 2^{1 - \sin(-x)} =$

$$= 2^{1 - \sin x} - 2^{1 + \sin x} = -(2^{1 + \sin x} - 2^{1 - \sin x}).$$

$$f(-x) = -f(x).$$

Відповідь: Функція непарна.

Приклад 2.3. Дослідити функцію $f(x) = 2^{\cos x} + (x - 2)$ на парність.

Розв'язання. $f(-x) = 2^{\cos(-x)} + (-x - 2) = 2^{\cos x} - x - 2.$

Відповідь: Функція не є ні парною,
ні непарною.

З означення парних і непарних функцій випливає, що графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а непарної — відносно центру O (початку системи координат).

Властивість парності або непарності пов'язана з областю задання функції. Так, наприклад, функція $y = x^2$, задана на відрізку $[-1;\ 2]$, не є парною на ньому (хоча б тому, що цей відрізок не симетричний відносно початку координат). Але ця функція парна на частині цього відрізку, наприклад, на відрізку $[-1;\ 1]$.

Приклад 2.4. Не виконуючи ніяких перетворень, показати, що співвідношення

$$\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = 2 \operatorname{tg} \alpha$$

не є тотожністю.

Розв'язання. В лівій частині рівності знаходиться парна функція, в правій — непарна.

Вправи

Визначити, які з наведених функцій є парними, які — непарними, а які не є ні парними, ні непарними.

2.5. $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$

2.6. $y = |\sin x \cos x|.$

2.7. $y = |\sin x - \cos x|.$

2.8. $y = \ln \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}.$

2.9. $y = \ln \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}.$

2.10. $y = \ln \dfrac{\cos x - \sin x + 2}{\cos x + \sin x + 2}$.

2.11. $y = \cos(\sin x)$.

2.12. $y = \mathrm{tg}(\mathrm{ctg}\, x)$.

2.13. $y = \dfrac{1}{\cos x}$.

2.14. $y = \dfrac{\cos x}{x + \mathrm{tg}\, x}$.

Формули зведення

***Формулами зведення** називаються формули, що виражають тригонометричні функції від аргументів* $-\alpha$, $\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ *через функції від аргумента* α, *де* α *— довільне (допустиме) значення аргумента.*

При застосуванні формул зведення можна користуватися правилом:

Якщо кут тригонометричної функції, що зводиться, має вигляд $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$, то назва функції, що зводиться, не змінюється; якщо аргумент функції, що зводиться, має вигляд $\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то назва функції, що зводиться, змінюється: синус переходить в косинус і навпаки; тангенс переходить в котангенс і навпаки.

Знак в правій частині формули зведення пишеться в залежності від того, який знак має функція, що зводиться, в даній чверті.

Приклад 2.15. Дану тригонометричну функцію звести до найменьшого додатного аргументу: $\cos 432^\circ$.

Розв'язання. $\cos 432^\circ = \cos(360^\circ + 72^\circ) = \cos 72^\circ =$

$$= \cos(90^\circ - 18^\circ) = \sin 18^\circ.$$

Приклад 2.16. Довести, що

$$\sin(\pi n + \alpha) = \begin{cases} \sin\alpha & \text{при } n = 2k, \\ -\sin\alpha & \text{при } n = 2k + 1, \quad k \in Z. \end{cases}$$

Розв'язання. При $n = 2k$

$$\sin(\pi n + \alpha) = \sin(2\pi k + \alpha) = \sin\alpha.$$

При $n = 2k + 1$

$$\sin(\pi n + \alpha) = \sin)\pi(2k + 1) + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha.$$

Приклад 2.17. Обчислити

$$\mathrm{tg}\,40^\circ \cdot \mathrm{tg}\,41^\circ \cdot \mathrm{tg}\,39^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}\,50^\circ.$$

Розв'язання. $\mathrm{tg}\,40^\circ \cdot \mathrm{tg}\,50^\circ =$

$$= \mathrm{tg}\,40^\circ \cdot \mathrm{tg}\,(90^\circ - 40^\circ) = \mathrm{tg}\,40^\circ \cdot \mathrm{ctg}\,40^\circ = 1.$$

Аналогічно $\mathrm{tg}\,41^\circ \cdot \mathrm{tg}\,49^\circ =$

$$= \mathrm{tg}\,41^\circ \cdot \mathrm{tg}\,(90^\circ - 41^\circ) = \mathrm{tg}\,41^\circ \cdot \mathrm{ctg}\,41^\circ = 1.$$

Тому $\mathrm{tg}\,40^\circ \cdot \mathrm{tg}\,41^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}\,45^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}\,50^\circ = 1.$

Відповідь: 1.

Приклад 2.18. A, B, C — кути трикутника. Довести, що $\sin(B + C) = \sin A$.

Розв'язання. За умовою $A + B + C = 180^\circ$, звідки $A = 180^\circ - (B + C)$. Тоді

$$\sin A = \sin(180^\circ - (B + C)) = \sin(B + C),$$

що й вимагалося довести.

Приклад 2.19. Чи існує таке число z, для якого $\sin(270^\circ + z) = -\frac{1}{4}$, а $\sin(180^\circ - z) = \frac{1}{3}$?

Розв'язання. Використовуючи формули зведення, запишемо умови у вигляді $\cos z = \frac{1}{4}$, а $\sin z = \frac{1}{3}$, але тоді $\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{25}{144}$, але цього не може бути.

Відповідь: Таке число не існує.

Приклад 2.20. При якому значенні параметра p вираз $y = \sin^6(\alpha - 2\pi) + \sin^6\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) +$

$$+ p\left(\sin^4(\pi - \alpha) + \sin^4\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)$$

не залежить від x?

Розв'язання. Після перетворень одержимо

$$y = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + p\,(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha).$$

Піднесемо до квадрату, а потім до кубу тотожність $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Будемо мати:

$$\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1,$$

$$\sin^6 x + 3 \sin^4 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cos^4 x + \cos^6 x = 1.$$

З першого рівняння знаходимо:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x.$$

З другого рівняння знаходимо:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x\,(\sin^2 x + \cos^2 x) =$$

$$= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x.$$

Таким чином, даний вираз можна записати так:

$$y = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x + p\,(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) =$$

$$= 1 + p - (3 + 2p) \sin^2 x \cos^2 x.$$

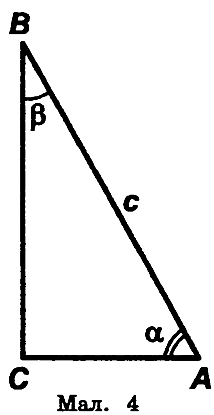
Помічаємо, що при $3 + 2p = 0$, тобто $p = -\frac{3}{2}$, будемо мати: $y = 1 + p = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$, отже, даний вираз не залежить від x при $p = -\frac{3}{2}$.

Приклад 2.21. Визначити площу прямокутного трикутника, якщо відома гіпотенуза c і сума синусів гострих кутів: $\sin \alpha + \sin \beta = q$.

Розв'язання. Нехай ABC — даний прямокутний трикутник (мал. 4). Його площа S виразиться так: $S = \frac{1}{2} BC \cdot AC =$

$$= \frac{1}{2} c \sin \alpha \cdot c \cos \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} c^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$



Мал. 4

Для визначення добутку $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ використовуємо дану рівність $\sin\alpha + \sin\beta = q$ і, враховуючи, що $\beta = 90^\circ - \alpha$ і $\sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$, перепишемо цю рівність так: $\sin\alpha + \cos\alpha = q$.

Піднесемо обидві частини одержаної рівності до квадрату: $\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = q^2$. Звідси знаходимо: $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{q^2-1}{2}$.

Таким чином, $S = \dfrac{1}{4}c^2(q^2-1)$. Задача має розв'язки, якщо $q > 1$.

Відповідь: $S = \dfrac{1}{4}c^2(q^2-1)$, якщо $q > 1$.

Вправи

Дану тригонометричну функцію звести до найменшого додатного аргумента $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2.22. $\sin 547^\circ$.

2.23. $\operatorname{ctg} 1924^\circ$.

2.24. $\operatorname{tg}(-1354^\circ)$.

2.25. $\sin(-934^\circ)$.

2.26. $\operatorname{ctg}(-3984^\circ)$.

2.27. $\cos(-1412^\circ)$.

2.28. $\operatorname{tg} 815^\circ$.

2.29. $\sin(\alpha - 3\pi)$.

2.30. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{4} - \alpha\right)$.

2.31. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4} + \alpha\right)$.

2.32. $\sin\left(\dfrac{5\pi}{3} - \alpha\right)$.

2.33. $\cos\left(\alpha - \dfrac{4\pi}{3}\right)$.

Спростити вирази:

2.34. $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha)$.

2.35. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi + \alpha) + \operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{ctg}(2\pi - \alpha)$.

2.36. $\sin\alpha - \sin(\alpha - 90^\circ) - \sin(\alpha - 180^\circ) - \sin(\alpha - 270^\circ) - \sin(\alpha - 360^\circ).$

2.37. $\cos(\alpha + 45^\circ) + \cos(\alpha + 135^\circ) - \cos(\alpha + 225^\circ) + \cos(\alpha + 315^\circ).$

2.38. $\sin(90^\circ + \alpha)\cdot\sin(180^\circ - \alpha)\times(\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha) + \mathrm{tg}(270^\circ - \alpha)).$

2.39. $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin^2(\alpha - \pi)\sin^2(\alpha + \pi) - \cos^2(\alpha + \pi)\cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right).$

2.40. $\sin 20^\circ\cos 70^\circ + \sin^2 110^\circ\cos^2 250^\circ + \sin^2 290^\circ\cos^2 340^\circ.$

2.41. $(\sin 75^\circ + \sin 100^\circ)(\sin 260^\circ - \sin 285^\circ) + (\sin 165^\circ + \sin 190^\circ)(\cos 75^\circ - \cos 100^\circ).$

2.42. $1 - \sin(x - 2\pi)\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \mathrm{tg}(\pi - x)\,\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 2\cos^2(\pi + x).$

2.43. $\sin^2(\pi - x) + \mathrm{tg}^2(\pi - x)\,\mathrm{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos(x - 2\pi).$

Довести тотожності:

2.44. $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$

2.45. $\cos(45^\circ \pm \alpha) = \sin(45^\circ \mp \alpha).$

2.46. $\sin(\alpha - \pi)\,\mathrm{tg}(\alpha + \pi) + \sec(\alpha - 2\pi) = \cos\alpha.$

2.47. $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(2\pi - x)\right)^2 = 2.$

2.48. $\dfrac{\sin(\pi - x)\cos(x - 2\pi)\sin(2\pi - x)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{ctg}(\pi - x)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)} = \sin^2 x.$

2.49. $\sin(2\pi - \alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\alpha - \pi) - \sin(\alpha - \pi) = \sin\alpha.$

2.50. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \beta\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi}{3} + \beta\right)\cos\left(\dfrac{5\pi}{3} + \beta\right) + \operatorname{tg}(\pi + \beta)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - \beta\right) = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - \beta\right).$

2.51. $\operatorname{tg}^2(\pi - x)\operatorname{ctg}^2(x - \pi) + \sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = 2.$

2.52. $\dfrac{\sin^2(1{,}5\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha - 2\pi)} + \dfrac{\sin^2(-\alpha)}{\operatorname{ctg}^2(\alpha - 1{,}5\pi)} = 1.$

2.53. $\sin 405^\circ \cos 675^\circ + \operatorname{tg} 562^\circ \operatorname{tg} 788^\circ + \sec 660^\circ \sec 1200^\circ = -2{,}5.$

2.54. $\cos(\pi k + \alpha) = \begin{cases} \cos\alpha \text{ при } k = 2n, \\ -\cos x \text{ при } k = 2n - 1. \end{cases}$

2.55. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi k}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha \text{ при } k = 2n, \\ -\operatorname{ctg}\alpha \text{ при } k = 2n - 1. \end{cases}$

2.56. $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi k}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} \operatorname{ctg}\alpha \text{ при } k = 2n, \\ -\operatorname{tg}\alpha \text{ при } k = 2n - 1. \end{cases}$

2.57. $\sum\limits_{k=0}^{n} \sin(\alpha + \pi k) = \begin{cases} \sin\alpha \text{ при } n = 2m + 1, \\ 0 \text{ при } n = 2m. \end{cases}$

2.58. $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(\alpha + \pi k) = \begin{cases} \cos\alpha \text{ при } n = 2m + 1, \\ 0 \text{ при } n = 2m. \end{cases}$

Обчислити:

2.59. $\sin 540^\circ + \cos 240^\circ + \operatorname{tg} 3810^\circ - \operatorname{tg} 540^\circ.$

2.60. $\sin\frac{7\pi}{6} + \cos\frac{22\pi}{3} - \operatorname{ctg} 2{,}5\pi + \operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$.

2.61. $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \ldots + \cos 160^\circ + {}$
$+ \cos 180^\circ$.

2.62. $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \ldots + \operatorname{tg} 160^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ$.

2.63. $\sin 0^\circ + \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \ldots + \sin 359^\circ + \sin 360^\circ$.

2.64. $\operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ + \ldots + \operatorname{ctg} 165^\circ$.

2.65. $\operatorname{ctg} 40^\circ \cdot \operatorname{ctg} 41^\circ \cdot \operatorname{ctg} 42^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{ctg} 50^\circ$.

2.66. $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 31^\circ \cdot \operatorname{tg} 32^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$.

2.67. $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \lg \operatorname{tg} 3^\circ + \ldots + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$.

2.68. Відомо, що α, β, γ — величини кутів трикутника. Довести рівності:

а) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$;

б) $\sin\alpha = -\sin(2\alpha+\beta+\gamma)$;

в) $\sin\alpha = -\cos\left(\frac{3\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)$;

г) $\cos\beta = \sin\frac{\alpha+\gamma+3\beta}{2}$.

2.69. Чи існує таке число z, для якого $\cos(90^\circ - z) = \sqrt{\frac{1}{3}}$, а $\cos(180^\circ - z) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$?

2.70. Знайти $\sin(\alpha - 270^\circ)$, якщо $\sin(360^\circ - \alpha) = \frac{2}{3}$ при $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

2.71. Знайти $\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha)$, якщо $\cos(90^\circ + \alpha) = \frac{2}{3}$ при $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

2.72. Знайти $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$, якщо $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -2$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

2.73. Знайти $\operatorname{tg}(\alpha - \pi)$, якщо $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = 2$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

§3. Формули додавання

Основні формули

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \mp \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\beta \pm \mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

Приклад 3.1. Довести рівність

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Розв'язання. Нехай

$$\vec{a}\,(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\quad \vec{b}\,(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

(зрозуміло, що $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$). Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $|\alpha - \beta|$. Тому

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{1 \cdot 1} =$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

що й вимагалося довести.

Приклад 3.2. Виразити $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ через тригонометричні функції кутів α, β, γ.

Розв'язання. $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(\alpha + (\beta + \gamma)) =$

$$= \sin\alpha\cos(\beta + \gamma) + \cos\alpha\sin(\beta + \gamma) =$$

$$= \sin\alpha(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma) +$$

$$+ \cos\alpha(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma) =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma +$$

$$+ \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$$

Відповідь: $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$

Приклад 3.3. Вилучити α з системи рівностей

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha + x) = m, \\ \operatorname{tg}(y - \alpha) = n. \end{cases}$$

Розв'язання. $\operatorname{tg}(x + y) = \operatorname{tg}[(\alpha + x) + (y - \alpha)] =$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\alpha + x) + \operatorname{tg}(y - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha + x)\operatorname{tg}(y - \alpha)} = \frac{m + n}{1 - mn}.$$

Відповідь: $\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{m + n}{1 - mn}$.

Приклад 3.4. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{3}{7}$; α і β — гострі додатні кути. Довести, що $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} =$

$$= \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{7}}{1 - \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}} = \frac{29}{35} : \frac{29}{35} = 1.$$

Звідси випливає, що $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$ $\left(\text{оскільки } 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \text{ і } 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Приклад 3.5. Довести, що величина виразу $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)\cdot\operatorname{tg}\beta}$ не залежить від β.

Розв'язання. $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)\cdot\operatorname{tg}\beta} =$

$$= \frac{\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)\operatorname{tg}\beta} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\beta}{(1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\right)\operatorname{tg}\beta} =$$

$$= \frac{\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta\,(\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha)}{\text{tg}\,\beta\,(\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta)} = -\,\text{tg}\,\alpha,$$

що й вимагалося довести.

Приклад 3.6. α і β — гострі додатні кути. Довести, що $\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$.

Розв'язання. $\sin\alpha\cos\beta < \sin\alpha$, $\cos\alpha\sin\beta < \sin\beta$. Додавши почленно ці нерівності, одержимо, що вимагалося.

Приклад 3.7. α і β — гострі додатні кути, причому $\sin\alpha = u$, $\sin(\alpha + \beta) = v$. Знайти $\sin\beta$.

Розв'язання. $\sin\beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha] =$

$$= \sin(\alpha + \beta)\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta)\sin\alpha =$$

$$= v \cdot \sqrt{1 - u^2} - \sqrt{1 - v^2} \cdot u.$$

Відповідь: $v \cdot \sqrt{1 - u^2} - u \cdot \sqrt{1 - v^2}$.

Приклад 3.8. Довести тотожність

$$\text{tg}\,(x + y) - \text{tg}\,x - \text{tg}\,y = \text{tg}\,(x + y)\,\text{tg}\,x\,\text{tg}\,y.$$

Розв'язання. $\text{tg}\,(x + y) = \dfrac{\text{tg}\,x + \text{tg}\,y}{1 - \text{tg}\,x\,\text{tg}\,y}$,

$$\text{tg}\,(x + y)\,(1 - \text{tg}\,x\,\text{tg}\,y) = \text{tg}\,x + \text{tg}\,y,$$

$$\text{tg}\,(x + y) - \text{tg}\,(x + y)\,\text{tg}\,x\,\text{tg}\,y = \text{tg}\,x + \text{tg}\,y,$$

звідки

$$\text{tg}\,(x + y) - \text{tg}\,x - \text{tg}\,y = \text{tg}\,(x + y)\,\text{tg}\,x\,\text{tg}\,y,$$

що й вимагалося довести.

Приклад 3.9. Тангенси трьох гострих кутів відповідно дорівнюють $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{8}$. Довести, що перший кут дорівнює сумі двох інших.

Розв'язання. Нехай $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$, $\text{tg}\,\beta = \frac{1}{5}$, $\text{tg}\,\gamma = \frac{1}{8}$. Тоді

$$\text{tg}\,(\beta + \gamma) = \frac{\text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\gamma}{1 - \text{tg}\,\beta\,\text{tg}\,\gamma} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{1}{3} = \text{tg}\,\alpha.$$

Оскільки кути α, β, γ — гострі, то з рівності $\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \operatorname{tg}\alpha$ випливає, що $\beta + \gamma = \alpha$, що й вимагалося довести.

Приклад 3.10. Знайти $\sin(60° - \alpha)$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ і $180° < \alpha < 270°$.

Розв'язання.

$$\sin(60° - \alpha) = \sin 60° \cos\alpha - \cos 60° \sin\alpha =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha. \qquad (*)$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = -\frac{4}{5},$$

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}.$$

Підставляючи одержані значення в рівність (*), одержимо

$$\sin(60° - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}.$$

Відповідь: $\frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$.

Приклад 3.11. Дано $\sin(\alpha + \beta) = a$, $\sin(\alpha + \gamma) = b$, причому кожне з додатних чисел α, β і γ менше, ніж $\frac{\pi}{4}$. Знайти $\sin(\beta - \gamma)$.

Розв'язання. Зауважимо, що $\beta - \gamma = (\alpha + \beta) - (\alpha + \gamma)$. Тому

$$\sin(\beta - \gamma) = \sin[(\alpha + \beta) - (\alpha + \gamma)] =$$

$$= \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \gamma) - \cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha + \gamma). \qquad (*)$$

$0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ за умовою. Тому $\cos(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - a^2}$, $\cos(\alpha + \gamma) = \sqrt{1 - b^2}$.

Підставляючи знайдені значення в рівність (*), одержимо

$$\sin(\beta - \gamma) = a\sqrt{1 - b^2} - \sqrt{1 - a^2} \cdot b.$$

Відповідь: $a\sqrt{1 - b^2} - b\sqrt{1 - a^2}$.

Вправи

Обчислити:

3.12. $\sin 12^\circ \cos 18^\circ + \cos 12^\circ \sin 18^\circ$.

3.13. $\sin 65^\circ \cos 55^\circ + \cos 65^\circ \sin 55^\circ$.

3.14. $\dfrac{\cos 10^\circ \cos 20^\circ - \sin 20^\circ \sin 10^\circ}{\sin 11^\circ \cos 19^\circ + \cos 11^\circ \sin 19^\circ}$.

3.15. $\dfrac{\operatorname{ctg} 80^\circ + \operatorname{ctg} 40^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ}$.

3.16. $\dfrac{\operatorname{ctg} 40^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ - 1}{\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ}$.

Спростити вирази:

3.17. $\dfrac{\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{15} + \sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{7\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{15} + \cos\frac{7\pi}{30}\sin\frac{4\pi}{15}}$.

3.18. $\dfrac{\cos 18^\circ \cos 28^\circ + \cos 108^\circ \sin 208^\circ}{\sin 34^\circ \sin 146^\circ + \sin 236^\circ \sin 304^\circ}$.

3.19. $\dfrac{\sin(\alpha + \beta) - \sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha - \beta) + \sin\beta\cos\alpha}$.

3.20. $\dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha\sin\beta}$.

3.21. $\dfrac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}$.

3.22. $\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

3.23. $\sin 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha - \cos 2\alpha.$

3.24. $\sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos 2\alpha.$

3.25. $\sin 20^\circ + 2 \sin 40^\circ - \sin 100^\circ.$

3.26. $\cos 10^\circ - 2 \cos 50^\circ - \cos 70^\circ.$

Довести тотожності:

3.27. $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta.$

3.28. $\cos^2 \alpha - \cos(60^\circ + \alpha) \cos(60^\circ - \alpha) = \dfrac{3}{4}.$

3.29. $\dfrac{1}{2} \sin^2 \alpha + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \dfrac{1}{2} \cos^2 \alpha.$

3.30. $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha.$

3.31. $1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = \sec 2\alpha.$

3.32. $\dfrac{\sin(\alpha - \beta) + 2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$

3.33. $\dfrac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45^\circ + \alpha)}{2 \sin(45^\circ + \alpha) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$

3.34. $\dfrac{\sin \alpha + 2 \sin(60^\circ - \alpha)}{2 \cos(30^\circ - \alpha) - \sqrt{3} \cos \alpha} = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha.$

3.35. $\dfrac{1 - \operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)} = \operatorname{ctg} \alpha.$

3.36. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}.$

3.37. $\sin(\alpha + \beta) - \sin \alpha \cos^3 \beta - \cos \alpha \sin^3 \beta =$
$= \sin \beta \cos \beta \cos(\alpha - \beta).$

3.38. $\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin^3 \beta - \cos \alpha \cos^3 \beta =$
$= \sin \beta \cos \beta \sin(\alpha + \beta).$

3.39. α, β, γ — додатні гострі кути, причому $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{12}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{3}$. Довести, що $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$.

3.40. α і β — гострі додатні кути, причому $\operatorname{tg}\alpha = 1\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{4}$. Знайти $\alpha - \beta$.

3.41. α і β — гострі додатні кути. Знайти $\alpha + \beta$, якщо:

а) $\operatorname{tg}\alpha = 5$, $\operatorname{tg}\beta = 1{,}5$; *б*) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{9}$.

3.42. Довести рівність

$$\sin\alpha\sin(\beta - \gamma) + \sin\beta\sin(\gamma - \alpha) + \sin\gamma\sin(\alpha - \beta) = 0.$$

3.43. α і β — гострі додатні кути, причому $\cos\alpha = a$, $\cos(\alpha + \beta) = b$. Знайти $\cos\beta$.

3.44. Тангенси трьох гострих кутів відповідно дорівнюють $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{8}{9}$. Довести, що сума перших двох кутів на 45° перевищує третій кут.

§4. Функції подвоєного і половинного аргумента

Основні формули

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha},$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Приклад 4.1. Спростити вираз

$$1 - 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

Розв'язання. $1 - 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha =$

$= 1 - 2 \cdot 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - (1 - \cos 4\alpha) = \cos 4\alpha.$

Відповідь: $\cos 4\alpha$.

Приклад 4.2. Спростити вираз $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

Розв'язання. $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \dfrac{1 - \dfrac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \dfrac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} =$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos 2\alpha.$$

Відповідь: $\cos 2\alpha$.

Зауважимо, що перетворювання мають силу при $\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

Приклад 4.3. Довести тотожність

$$\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Розв'язання. $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} =$

$$= \frac{2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha,$$

що й вимагалось довести.

Приклад 4.4. Довести тотожність

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} + 2.$$

Розв'язання. Перепишемо рівність у вигляді

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = 2.$$

Доведемо її справедливість:

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin 3\alpha\cos\alpha - \cos 3\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2,$$

що й вимагалось довести.

Рівність справедлива при $\sin\alpha\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z$.

Приклад 4.5. Довести тотожність

$$\frac{1-4\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha-1}=\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{tg}3\alpha.$$

Розв'язання. $\operatorname{ctg}\alpha\ \operatorname{tg}3\alpha=\dfrac{\cos\alpha\sin(\alpha+2\alpha)}{\sin\alpha\cos(\alpha+2\alpha)}=$

$$=\frac{\cos\alpha(\sin\alpha\cos2\alpha+\cos\alpha\sin2\alpha)}{\sin\alpha(\cos\alpha\cos2\alpha-\sin\alpha\sin2\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos\alpha(\sin\alpha\cos2\alpha+2\cos^2\alpha\sin\alpha)}{\sin\alpha(\cos\alpha\cos2\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha(\cos2\alpha+2\cos^2\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha(\cos2\alpha-2\sin^2\alpha)}=\frac{\cos2\alpha+2\cos^2\alpha}{\cos2\alpha-2\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos^2\alpha-1+2\cos^2\alpha}{1-2\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha}=\frac{4\cos^2\alpha-1}{1-4\sin^2\alpha}=\frac{1-4\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha-1},$$

що й вимагалось довести.

Приклад 4.6. Спростити вираз $\dfrac{1-\sin2\alpha}{1+\sin2\alpha}$.

Розв'язання. $\dfrac{1-\sin2\alpha}{1+\sin2\alpha}=\dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=$

$$=\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

Відповідь: $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Приклад 4.7. Спростити вираз

$$\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)+\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta).$$

Розв'язання.

$$\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)+\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)=$$

$$=\sin^2\alpha-\sin\alpha\sin\beta+\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta=$$

$$= 1 - \cos(\alpha - \beta) = 2\sin^2\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Відповідь: $2\sin^2\frac{\alpha - \beta}{2}$.

Приклад 4.8. Перевірити рівність

$$\sin 18^\circ \sin 54^\circ = \frac{1}{4}.$$

Розв'язання. $\sin 18^\circ \sin 54^\circ = \sin 18^\circ \cos 36^\circ =$

$$= \frac{4\sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{\cos 18^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{1}{4},$$

що й вимагалось довести.

Вправи

Спростити вирази:

4.9. $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin 2\alpha$.

4.10. $\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}$.

4.11. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha}$.

4.12. $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$.

4.13. $2\sin 40^\circ \sin 50^\circ$.

4.14. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

4.15. $(\operatorname{tg} 2\alpha + \sec 2\alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

4.16. $\dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}\alpha} - \dfrac{1}{1 - \operatorname{ctg}\alpha}$.

4.17. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) - 1}$.

Обчислити без допомоги таблиць:

4.18. $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$.

4.19. $\cos^2 15^\circ - \cos^2 75^\circ$.

4.20. $\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$.

4.21. $1 - 2 \sin^2 75^\circ$.

4.22. $2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$.

Довести тотожності:

4.23. $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

4.24. $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

4.25. $\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$.

4.26. $\dfrac{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha} = \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\alpha}{2}$.

4.27. $4 \sin^4 \alpha + \sin^2 2\alpha = 4 \sin^2 \alpha$.

4.28. $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = 4$.

4.29. $\operatorname{tg} 55^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ = 2 \operatorname{tg} 20^\circ$.

4.30. $\operatorname{ctg} \alpha - \sin 2\alpha = \cos 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha$.

4.31. $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$.

4.32. $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha$.

4.33. $8 \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \operatorname{ctg} 10^\circ$.

4.34. $16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = 1$.

4.35. $\dfrac{\cos 20^\circ}{(\operatorname{ctg}^2 10^\circ - \operatorname{tg}^2 10^\circ) \sin^2 20^\circ} = \dfrac{1}{4}$.

4.36. $\dfrac{2 \sin^2 \frac{\pi}{10} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{5} - 1}{\sin \frac{\pi}{30}} = 2$.

4.37. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}{1 - \sin(2\alpha - \pi)} = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{4} + \alpha\right).$

Спростити:

4.38. $\dfrac{\cos 40^\circ}{1 + \sin 40^\circ}.$

4.39. $\operatorname{tg}\alpha\,(1 + \cos 2\alpha).$

4.40. $\dfrac{1 - \sin(30^\circ + 2\alpha)}{\cos(30^\circ + 2\alpha)}.$

4.41. $2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) + \sin 2\alpha.$

4.42. $\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos 2\alpha}} - \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1 + \cos 2\alpha}}$ при $0^\circ < \alpha < 90^\circ.$

4.43. $\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\alpha}}$ при $0 \le \alpha \le \pi.$

4.44. $\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\alpha}}$ при $0 \le \alpha \le \pi.$

§5. Перетворення добутку тригонометричних функцій в суму і перетворення суми тригонометричних функцій в добуток

Основні формули

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta),$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta),$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta),$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\beta-\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Подати у вигляді суми такі добутки.

Приклад 5.1. $\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma$.

Розв'язання. $\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\gamma =$

$$= \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))\sin\gamma =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)\sin\gamma =$$

$$= \frac{1}{4}(\cos(\alpha + \beta - \gamma) - \cos(\alpha + \beta + \gamma)) +$$

$$+ \frac{1}{4}(\cos(\alpha - \beta - \gamma) - \cos(\alpha - \beta + \gamma)).$$

Відповідь: $= \frac{1}{4}(\cos(\alpha + \beta - \gamma) - \cos(\alpha + \beta + \gamma)) +$

$$+ \frac{1}{4}(\cos(\alpha - \beta - \gamma) - \cos(\alpha - \beta + \gamma)).$$

Приклад 5.2. $\cos\alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha)$.

Розв'язання. $\cos\alpha \cdot \cos(60^\circ - \alpha) \cdot \cos(60^\circ + \alpha) =$

$$= \frac{1}{2}\cos\alpha\,(\cos 120^\circ + \cos 2\alpha) = \frac{1}{2}\cos\alpha\left(-\frac{1}{2} + \cos 2\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(-\cos\alpha + 2\cos\alpha\cos 2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{4}(-\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos\alpha) = \frac{\cos 3\alpha}{4}.$$

Відповідь: $\frac{1}{4}\cos 3\alpha$.

Приклад 5.3. Довести тотожність

$$1 - 2\cos 4\alpha + 2\cos 8\alpha - 2\cos 12\alpha = -\frac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Розв'язання. $1 - 2\cos 4\alpha + 2\cos 8\alpha - 2\cos 12\alpha =$

$$= \frac{1}{\cos 2\alpha}(\cos 2\alpha - 2\cos 2\alpha\cos 4\alpha + 2\cos 2\alpha\cos 8\alpha -$$

$$- 2\cos 2\alpha\cos 12\alpha) = \frac{1}{\cos 2\alpha}(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \cos 2\alpha +$$

$$+ \cos 10\alpha + \cos 6\alpha - \cos 14\alpha - \cos 10\alpha) = -\frac{\cos 14\alpha}{\cos 2\alpha},$$

що й вимагалось довести.

Приклад 5.4. Довести тотожність

$$\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha =$$

$$= 8\cos 8\alpha \cdot \cos^3\alpha.$$

Розв'язання.

$$\cos 11\alpha + 3\cos 9\alpha + 3\cos 7\alpha + \cos 5\alpha =$$

$$= (\cos 11\alpha + \cos 5\alpha) + 3(\cos 9\alpha + \cos 7\alpha) =$$

$$= 2\cos 8\alpha \cos 3\alpha + 6\cos 8\alpha \cos \alpha =$$

$$= 2\cos 8\alpha (\cos 3\alpha + 3\cos \alpha) =$$

$$= 2\cos 8\alpha ((\cos 3\alpha + \cos \alpha) + 2\cos \alpha) =$$

$$= 2\cos 8\alpha (2\cos 2\alpha \cos \alpha + 2\cos \alpha) =$$

$$= 4\cos 8\alpha \cos \alpha (\cos 2\alpha + 1) = 8\cos 8\alpha \cos^3 \alpha,$$

що й вимагалось довести.

Приклад 5.5. Довести тотожність

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

Розв'язання. $\sin \alpha + \cos \alpha = \sin \alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right),$$

що й вимагалось довести.

Приклад 5.6. Спростити вираз

$$1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha.$$

Розв'язання. $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha =$

$$= (1 + \operatorname{tg} \alpha) + \cos \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) = (1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \cos \alpha) =$$

$$= \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \alpha\right) \cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

Відповідь: $\dfrac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$.

Вправи

Подати у вигляді суми такі добутки:

5.7. $\cos 25^\circ \cdot \cos 10^\circ$.

5.8. $\sin 10^\circ \cdot \sin 8^\circ \cdot \sin 6^\circ$.

5.9. $\sin\alpha \sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha)$.

5.10. $4\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 3\alpha \cdot \sin 4\alpha$.

Перетворити в добуток:

5.11. $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\alpha$.

5.12. $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha - 1$.

5.13. $\sin\alpha - \cos\alpha$.

5.14. $1 + 2\cos\alpha$.

5.15. $1 - 2\sin\alpha$.

5.16. $\sqrt{3} + 2\cos\alpha$.

5.17. $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$.

5.18. $1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$.

5.19. $\dfrac{\cos 35^\circ - \sin 25^\circ}{\cos 35^\circ + \sin 25^\circ}$.

5.20. $\operatorname{tg} 48^\circ + \operatorname{ctg} 68^\circ$.

5.21. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)$.

5.22. $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.

5.23. $\sin\alpha + \cos 2\alpha + \sin 3\alpha + \cos 4\alpha$.

5.24. $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$.

5.25. $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha + \beta + \gamma)}$.

Довести тотожності:

5.26. $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 2\dfrac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{\cos 2\beta + \cos 2\alpha}$.

5.27. $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

5.28. $(\sin(x+y)-\sin(x-y))\cos y = \cos x \sin 2y.$

5.29. $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-1} = \operatorname{ctg}(45^\circ-\alpha).$

5.30. $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha =$

$$= 4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

5.31. $\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha = 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\dfrac{3\alpha}{2}.$

5.32. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha.$

5.33. $\sin 10^\circ+\sin 50^\circ-\sin 70^\circ = 0.$

5.34. $\operatorname{tg} 30^\circ+\operatorname{tg} 40^\circ+\operatorname{tg} 50^\circ+\operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{8}{\sqrt{3}}\cos 20^\circ.$

5.35. $\dfrac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha+\operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha+\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{ctg} 4\alpha.$

5.36. $\dfrac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{cosec}^2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{cosec}\alpha.$

5.37. $1+2\cos 2\alpha+2\cos 4\alpha+2\cos 6\alpha = \dfrac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}.$

5.38. $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - 4\sin 70^\circ = 2.$

5.39. $4\cos 20^\circ = \sqrt{3}\operatorname{ctg} 20^\circ - 1.$

§6. Функції кратних аргументів і їх використання в перетворенні тригонометричних виразів

Приклад 6.1. Довести справедливість формули

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

Розв'язання. $\sin 3\alpha = \sin (\alpha + 2\alpha) =$

$$= \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha =$$

$$= \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha =$$

$$= \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) =$$

$$= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

що й вимагалось довести.

Приклад 6.2. Довести справедливість формули

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Розв'язання. $\cos 3\alpha = \cos (\alpha + 2\alpha) =$

$$= \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha =$$

$$= \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha =$$

$$= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 (1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha =$$

$$= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

що й вимагалось довести.

Приклад 6.3. Вивести рекурентну формулу

$$\cos (n + 1) \alpha = 2 \cos \alpha \cos n\alpha - \cos (n - 1) \alpha$$

і, використовуючи її, знайти косинуси кратних кутів $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$.

Розв'язання. $\cos (n + 1) \alpha = \cos (n\alpha + \alpha) =$

$$= \cos n\alpha \cos \alpha - \sin n\alpha \sin \alpha =$$

$$= (\cos n\alpha \cos \alpha + \cos n\alpha \cos \alpha) -$$

$$- (\cos n\alpha \cos \alpha + \sin n\alpha \sin \alpha) =$$

$$= 2 \cos \alpha \cos n\alpha - \cos (n - 1) \alpha.$$

Отже, $\cos (n + 1) \alpha = 2 \cos \alpha \cos n\alpha - \cos (n - 1) \alpha.$

При $n = 1$ маємо $\mathbf{\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1}$.

При $n = 2$ маємо $\cos 3\alpha = 2\cos\alpha \cos 2\alpha - \cos\alpha =$

$$= 2\cos\alpha\,(2\cos^2\alpha - 1) - \cos\alpha =$$

$$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

$$\mathbf{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.}$$

При $n = 3$ маємо $\cos 4\alpha = 2\cos\alpha\cos 3\alpha - \cos 2\alpha =$

$$= 2\cos\alpha\,(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) - (2\cos^2\alpha - 1) =$$

$$= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$$

$$\mathbf{\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.}$$

Приклад 6.4. Вивести рекурентну формулу

$$\mathbf{\sin (n + 1)\alpha = 2\sin\alpha\cos n\alpha + \sin (n - 1)\alpha}$$

і, використовуючи її, знайти синуси кратних кутів $\sin 2\alpha$, $\sin 3\alpha$.

Розв'язання. $\sin (n + 1)\alpha = \sin (n\alpha + \alpha) =$

$$= \sin n\alpha\cos\alpha + \cos n\alpha\sin\alpha =$$

$$= (\sin n\alpha\cos\alpha - \cos n\alpha\sin\alpha) +$$

$$+ (\cos n\alpha\sin\alpha + \cos n\alpha\sin\alpha) =$$

$$= \sin (n\alpha - \alpha) + 2\cos n\alpha\sin\alpha.$$

Отже, $\sin (n + 1)\alpha = 2\sin\alpha\cos n\alpha + \sin (n - 1)\alpha$.

При $n = 1$ маємо $\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$.

При $n = 2$ маємо $\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos 2\alpha + \sin\alpha =$

$$= 2\sin\alpha\,(1 - 2\sin^2\alpha) + \sin\alpha =$$

$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

$$\mathbf{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.}$$

Приклад 6.5. Довести тотожність

$$\frac{8\cos^4\alpha - 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 3\cos\alpha + 1}{8\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1} =$$

$$= -\operatorname{tg}\frac{7\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Розв'язання.

$$\frac{8\cos^4\alpha - 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 3\cos\alpha + 1}{8\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1} =$$

$$= \frac{(8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1) - (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)}{(8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1) + (4\cos^3\alpha + 3\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{\cos 4\alpha - \cos 3\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{-\sin\dfrac{7\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{7\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}} = -\operatorname{tg}\frac{7\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

що й вимагалось довести.

Приклад 6.6. Доведіть, що $\cos^2\dfrac{2\pi}{9}$ є коренем рівняння $64x^3 - 96x^2 + 36x - 1 = 0$.

Розв'язання. Перевіримо, чи є $x = \cos^2\dfrac{2\pi}{9}$ коренем даного рівняння:

$$64\left(\cos^2\frac{2\pi}{9}\right)^3 - 96\left(\cos^2\frac{2\pi}{9}\right)^2 + 36\cos^2\frac{2\pi}{9} - 1 =$$

$$= 64\cos^6\frac{2\pi}{9} - 96\cos^4\frac{2\pi}{9} + 36\cos^2\frac{2\pi}{9} - 1 =$$

$$= 4\left(16\cos^6\frac{2\pi}{9} - 24\cos^4\frac{2\pi}{9} + 9\cos^2\frac{2\pi}{9}\right) - 1 =$$

$$= 4\left(4\cos^3\frac{2\pi}{9} - 3\cos\frac{2\pi}{9}\right)^2 - 1 = 4\cos^2\frac{2\pi}{3} - 1 =$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Приклад 6.7. Обчислити без допомоги таблиць $\sin 18^\circ$ і $\cos 18^\circ$.

Розв'язання. $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$,

$$\sin(2\cdot 18^\circ) = \cos(3\cdot 18^\circ), \text{ звідки}$$

$$2\sin 18^\circ\cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ,$$

$$2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3,$$

$$2\sin 18^\circ = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3,$$

$$4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0.$$

Враховуючи, що $\sin 18^\circ > 0$, будемо мати:

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1-\sin^2 18^\circ} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16-6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Відповідь: $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Приклад 6.8. Довести формули:

а) $4\sin\alpha\,\mathbf{sin}\,(60^\circ-\alpha)\,\mathbf{sin}\,(60^\circ+\alpha) = \mathbf{sin}\,3\alpha$;

б) $4\cos\alpha\,\mathbf{cos}\,(60^\circ-\alpha)\,\mathbf{cos}\,(60^\circ+\alpha) = \mathbf{cos}\,3\alpha$;

в) $\mathbf{tg}\,\alpha\,\mathbf{tg}\,(60^\circ-\alpha)\,\mathbf{tg}\,(60^\circ+\alpha) = \mathbf{tg}\,3\alpha$;

г) $\mathbf{ctg}\,\alpha\,\mathbf{ctg}\,(60^\circ-\alpha)\,\mathbf{ctg}\,(60^\circ+\alpha) = \mathbf{ctg}\,3\alpha$.

Розв'язання. *а*) $4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha) =$

$$= 2\sin\alpha(\cos 2\alpha - \cos 120^\circ) = 2\sin\alpha\left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\alpha\cos 2\alpha + \sin\alpha = \sin(\alpha+2\alpha) + \sin(\alpha-2\alpha) +$$

$$+ \sin\alpha = \sin 3\alpha - \sin\alpha + \sin\alpha = \sin 3\alpha,$$

що й вимагалось довести.

в) $\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} =$

$$= \frac{4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)}{4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)} =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha),$$

що й вимагалось довести.

Приклад 6.9. Обчислити без допомоги таблиць

$$\sqrt{3}\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ.$$

Розв'язання. $\sqrt{3}\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ =$

$$= \sqrt{3}\ \mathrm{tg}\ 10^\circ\ \mathrm{tg}\ (60^\circ - 10^\circ)\ \mathrm{tg}\ (60^\circ + 10^\circ) =$$

$$= \sqrt{3}\ \mathrm{tg}\ 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1.$$

Відповідь: 1.

Приклад 6.10. Перевірити рівність

$$\sin 84^\circ \sin 24^\circ \sin 48^\circ \sin 12^\circ = \frac{1}{16}.$$

Розв'язання. $\sin 84^\circ \sin 24^\circ \sin 48^\circ \sin 12^\circ =$

$$= \frac{4 \sin 24^\circ \sin (60^\circ - 24^\circ) \sin (60^\circ + 24^\circ)}{4 \sin 36^\circ} \times$$

$$\times \frac{4 \sin 12^\circ \sin (60^\circ - 12^\circ) \sin (60^\circ + 12^\circ)}{4 \sin 72^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 72^\circ}{4 \sin 36^\circ} \cdot \frac{\sin 36^\circ}{4 \sin 72^\circ} = \frac{1}{16},$$

що й вимагалось довести.

Приклад 6.11. Довести формули:

а) $\sin^3 \alpha = \dfrac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$;

б) $\cos^3 \alpha = \dfrac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$.

Розв'язання. Використовуючи функції потроєних аргументів

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha,$$

одержимо шукані формули.

Приклад 6.12. Довести тотожність

$$\sin^3 \alpha + \sin^3 (120^\circ + \alpha) + \sin^3 (240^\circ + \alpha) = -\frac{3}{4} \sin 3\alpha.$$

Розв'язання. $\sin^3\alpha + \sin^3(120^\circ + \alpha) + \sin^3(240^\circ + \alpha) =$

$$= \sin^3 \alpha + \sin^3 (180^\circ - (60^\circ - \alpha)) + \sin^3 (180^\circ + (60^\circ + \alpha)) =$$

$$= \sin^3 \alpha + \sin^3 (60^\circ - \alpha) - \sin^3 (60^\circ + \alpha).$$

Використовуючи формули, доведені в попередньому прикладі, одержимо

$$\sin^3\alpha + \sin^3(60^\circ - \alpha) - \sin^3(60^\circ + \alpha) =$$

$$= \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha + 3\sin(60^\circ - \alpha) - \sin(180^\circ - 3\alpha)}{4} -$$

$$- \frac{3\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(180^\circ + 3\alpha)}{4} =$$

$$= \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha + 3\sin(60^\circ - \alpha) - \sin 3\alpha}{4} -$$

$$- \frac{3\sin(60^\circ + \alpha) + \sin 3\alpha}{4} =$$

$$= \frac{3\sin\alpha - 3\sin 3\alpha + 3\sin(60^\circ - \alpha) - 3\sin(60^\circ + \alpha)}{4} =$$

$$= \frac{3}{4}((\sin\alpha - \sin 3\alpha) + (\sin(60^\circ - \alpha) - \sin(60^\circ + \alpha)) =$$

$$= \frac{3}{4}(2\sin(-\alpha)\cos 2\alpha + 2\sin(-\alpha)\cos 60^\circ) =$$

$$= -\frac{3}{4}\sin\alpha \cdot 4\cos(30^\circ + \alpha)\cos(30^\circ - \alpha) =$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot 4\sin\alpha\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha) = -\frac{3}{4}\sin 3\alpha,$$

що й вимагалось довести.

Вправи

Довести тотожності:

6.13. $8\cos^4\alpha - 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 3\cos\alpha + 1 =$

$$= -2\sin\frac{7\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

6.14. $8\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1 =$

$$= 2\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

6.15. Доведіть, що $\sin 10^\circ$ є коренем рівняння $8x^3 - 6x + 1 = 0$.

6.16. Довести, що $\text{tg}^2\, 36^\circ\, \text{tg}^2\, 72^\circ = 5$.

6.17. Показати, що величина виразу

$$\cos^2\beta + \cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha + \beta)$$

не залежить від величини β.

6.18. Довести справедливість рівності

$$\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta=1.$$

Перевірити рівності:

6.19. $\operatorname{ctg} 10^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ$.

6.20. $\sin^2 70^\circ \sin^2 50^\circ \sin^2 10^\circ = \frac{1}{64}$.

6.21. $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$.

6.22. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$.

6.23. $\dfrac{0{,}25-\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ}{\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ}=1$.

6.24. $\cos 70^\circ + 8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2\cos^2 35^\circ$.

6.25. $\operatorname{tg} 20^\circ \cos^{-1} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \cos^{-1} 40^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \cos^{-1} 60^\circ \times$

$\times \operatorname{tg} 80^\circ \cos^{-1} 80^\circ = 48$.

6.26. $\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \times$

$\times \sin 70^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{256}$.

6.27. $\cos 50^\circ + 8\cos 200^\circ \cos 220^\circ \cos 80^\circ = 2\sin^2 65^\circ$.

6.28. $\operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{tg} 66^\circ \operatorname{tg} 78^\circ = 1$.

Довести тотожності:

6.29. $4\sin\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)=$

$=\cos 6\alpha$.

6.30. $\operatorname{ctg}(30^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(150^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)=$

$=\operatorname{tg} 3\alpha$.

Обчислити:

6.31. $\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ \cos 45^\circ$.

6.32. $\cos 260^\circ \sin 130^\circ \cos 160^\circ$.

Перетворити в добуток:

6.33. $\sin^3 20^\circ + \cos^3 10^\circ$.

6.34. $4\sin^3\alpha\cos 3\alpha + 4\cos^3\alpha\sin 3\alpha$.

Спростити вирази:

6.35. $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}$.

6.36. $\mathrm{ctg}\,(30^\circ-\alpha)\,\mathrm{ctg}\,(150^\circ-\alpha)\,\mathrm{ctg}\,(270^\circ+\alpha)$.

Задачі підвищеної складності

6.37. Довести нерівність без допомоги таблиць:

$$\sin 32^\circ < \mathrm{tg}\, 30^\circ.$$

Розв'язання. Вихідна нерівність рівносильна кожній з таких:

$$\sin 32^\circ < \frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin^2 32^\circ < \frac{1}{3},\ 1-\cos 64^\circ < \frac{2}{3},$$

звідки $\cos 64^\circ > \frac{1}{3}$, $\cos^2 64^\circ > \frac{1}{9}$, $1+\cos 128^\circ > \frac{2}{9}$, $1-\sin 38^\circ > \frac{2}{9}$, $\sin 38^\circ < \frac{7}{9}$, що справедливо, оскільки справедлива нерівність $\sin 38^\circ < \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{7}{9}$, отже, справедлива й вихідна нерівність.

6.38. Довести нерівність без допомоги таблиць:

$$\mathrm{tg}\, 26^\circ < \frac{1}{2} < \mathrm{tg}\, 27^\circ.$$

Розв'язання. Запишемо цю нерівність у вигляді

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\, 26^\circ < \frac{1}{2}, \\ \mathrm{tg}\, 27^\circ > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

а) Вихідна нерівність $\mathrm{tg}\, 26^\circ < \frac{1}{2}$ рівносильна кожній з таких нерівностей:

$$2\sin 26^\circ < \cos 26^\circ,\ 4\sin^2 26^\circ < \cos^2 26^\circ,$$

$$4\sin^2 26^\circ < 1-\sin^2 26^\circ,\ \sin^2 26^\circ < \frac{1}{5},\ \frac{1-\cos 52^\circ}{2} < \frac{1}{5},$$

звідки $\cos 52^\circ > \frac{3}{5}$, $\cos^2 52^\circ > \frac{9}{25}$, $1+\cos 104^\circ > \frac{18}{25}$, $1-\sin 14^\circ > \frac{18}{25}$, $\sin 14^\circ < \frac{7}{25}$.

Остання нерівність справедлива, оскільки справедливий ланцюжок нерівностей

$$\sin 14^\circ < \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} < \frac{7}{25} \quad \text{(перевірте!)}.$$

б) Вихідна нерівність $\operatorname{tg} 27^\circ > \frac{1}{2}$ рівносильна кожній з таких нерівностей:

$$2 \sin 27^\circ > \cos 27^\circ, \ 4 \sin^2 27^\circ > \cos^2 27^\circ,$$

$$4 \sin^2 27^\circ > 1 - \sin^2 27^\circ, \ \sin^2 27^\circ > \frac{1}{5},$$

$$1 - \cos 54^\circ > \frac{2}{5}, \ \cos 54^\circ < \frac{3}{5}, \ \sin 36^\circ < \frac{3}{5},$$

$$\sin^2 36^\circ < \frac{9}{25}, \ 1 - \cos 72^\circ < \frac{18}{25}, \ 1 - \sin 18^\circ < \frac{18}{25},$$

$$\sin 18^\circ > \frac{7}{25}, \ \frac{\sqrt{5}-1}{4} > \frac{7}{25},$$

що перевіряється безпосередньо.

6.39. Довести, що $\cos 2^\circ$ — число ірраціональне.

Розв'язання. Будемо доводити від супротивного. Припустимо, що $\cos 2^\circ = r$, де r будемо вважати раціональним числом. Тоді, використовуючи формулу потроєного аргумента, одержимо, що $\cos 6^\circ = \cos 2^\circ (4 \cos^2 2^\circ - 3)$ також число раціональне і аналогічно $\cos 18^\circ = = \cos 6^\circ (4 \cos^2 6^\circ - 3)$ — також число раціональне.

Прийшли до протиріччя, оскільки $\cos 18^\circ = = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$ — число ірраціональне.

6.40. Довести, що $\cos 1^\circ$ — число ірраціональне.

Розв'язання. $\cos 2^\circ = 2 \cos^2 1^\circ - 1$. Якщо $\cos 1^\circ$ — число раціональне, то і $\cos 2^\circ$ — число раціональне, і ми прийшли до протиріччя (див. 6.39).

§7. Тотожні перетворення тригонометричних виразів

Докладніше познайомимось зі способом перетворення тригонометричних виразів — введенням допоміжного аргумента. Цей спосіб полягає в тому, що деякі числа розглядаються як значення тригонометричних функцій допоміжного аргумента φ. З найпростішими прийомами на перетворення за допомогою введення допоміжного аргумента ми познайомились в § 5.

При розв'язанні деяких задач і зокрема при дослідженні гармонічних процесів доводиться мати справу з перетворенням в добуток суми вигляду $a \sin \alpha + b \cos \alpha$.

Приклад 7.1. Перетворити в добуток

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha.$$

Розв'язання. $a \sin \alpha + b \cos \alpha =$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \alpha \right).$$

Оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$, то існує кут φ такий, що $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$. Значить, $a \sin \alpha + b \cos \alpha =$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \, (\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi) =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} \sin (\alpha + \varphi), \text{ де}$$

$$\begin{cases} \sin \varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \cos \varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Приклад 7.2. Перетворити в добуток

$$\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}\ .$$

Розв'язання. $\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha} =$

$$=\sqrt{a^2\sin^2\alpha\left(1+\frac{b^2\cos^2\alpha}{a^2\sin^2\alpha}\right)} = a\,|\sin\alpha|\cdot\sqrt{1+\left(\frac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha}\right)^2}\ .$$

Нехай $\dfrac{b\cos\alpha}{a\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\varphi$. Тоді

$$\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha} = a\,|\sin\alpha|\,\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi} = a\left|\frac{\sin\alpha}{\sin\varphi}\right|,$$

де $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{b}{a}\operatorname{ctg}\alpha$.

Приклад 7.3. Використовуючи допоміжний кут, перетворити в добуток $\sqrt{7+\sqrt5}+\sqrt{7-\sqrt5}$.

Розв'язання. $\sqrt{7+\sqrt5}+\sqrt{7-\sqrt5} =$

$$=\sqrt{7\left(1+\frac{\sqrt5}{7}\right)}+\sqrt{7\left(1-\frac{\sqrt5}{7}\right)} =$$

$$=\sqrt{7\,(1+\cos\varphi)}+\sqrt{7\,(1-\cos\varphi)} =$$

$$=\sqrt{14\cos^2\frac{\varphi}{2}}+\sqrt{14\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{14}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= 2\sqrt7\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right),\ \text{де}\ \cos\varphi = \frac{\sqrt5}{7},\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2}.$$

Приклад 7.4. Перетворити в добуток

$$3\sin^2(\alpha-270^\circ)-\cos^2(\alpha+270^\circ).$$

Розв'язання. $3\sin^2(\alpha-270^\circ)-\cos^2(\alpha+270^\circ) =$

$$=3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha = \frac{3\,(1+\cos2\alpha)+(1-\cos2\alpha)}{2} =$$

$$=1+2\cos2\alpha = 2\,(\cos60^\circ+\cos2\alpha) =$$

$$=4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha).$$

Приклад 7.5. Перетворити в добуток

$$3-4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Розв'язання. $3-4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$

$$=3-4\cos^2\alpha=3-2(1+\cos 2\alpha)=1-2\cos 2\alpha=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\cos 2\alpha\right)=2(\cos 60^\circ-\cos 2\alpha)=$$

$$=4\sin(30^\circ+\alpha)\sin(\alpha-30^\circ).$$

Приклад 7.6. Перетворити в добуток

$$1-3\,\mathrm{tg}^2(\alpha-\pi).$$

Розв'язання. $1-3\,\mathrm{tg}^2(\alpha-\pi)=1-3\,\mathrm{tg}^2\alpha=$

$$=3\left(\frac{1}{3}-\mathrm{tg}^2\alpha\right)=3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\mathrm{tg}\,\alpha\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\mathrm{tg}\,\alpha\right)=$$

$$=3(\mathrm{tg}\,30^\circ-\mathrm{tg}\,\alpha)(\mathrm{tg}\,30^\circ+\mathrm{tg}\,\alpha)=$$

$$=\frac{3\sin(30^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha)}{\cos^2 30^\circ\cos^2\alpha}=\frac{4\sin(30^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha)}{\cos^2\alpha}.$$

Приклад 7.7. Перетворити в добуток

$$\sin 6\alpha-2\sqrt{3}\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}.$$

Розв'язання. $\sin 6\alpha-2\sqrt{3}\cos^2 3\alpha+\sqrt{3}=$

$$=\sin 6\alpha-\sqrt{3}(1+\cos 6\alpha)+\sqrt{3}=\sin 6\alpha-$$

$$-\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos 6\alpha+\sqrt{3}=\sin 6\alpha-\sqrt{3}\cos 6\alpha=$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\sin 6\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 6\alpha\right)=$$

$$=2(\sin 6\alpha\cos 60^\circ-\cos 6\alpha\sin 60^\circ)=2\sin(6\alpha-60^\circ).$$

Приклад 7.8. Спростити вираз

$$1-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

Розв'язання. $1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\alpha}{4} =$

$$= 1 + \sin\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\alpha}{4} = \sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin^2\frac{\alpha}{4} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4} + 2\sin^2\frac{\alpha}{4} = 2\sin\frac{\alpha}{4}\left(\cos\frac{\alpha}{4} + \sin\frac{\alpha}{4}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right).$$

Пример 7.9. Спростити вираз

$$\frac{\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha - 180^\circ)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ - \alpha) - 1}{\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha)}.$$

Розв'язання. Використовуючи формули зведення, одержимо $\frac{\operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha - 180^\circ)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ - \alpha) - 1}{\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha)} =$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha \cdot 2\operatorname{ctg}2\alpha = 1.$$

Приклад 7.10. Спростити вираз

$$\frac{4\sin^4\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^4\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) + \cos^4\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) - 1}.$$

Розв'язання. $\frac{4\sin^4\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin^4\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) + \cos^4\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) - 1} =$

$$= \frac{4\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - 1} =$$

$$= \frac{4\cos^4\alpha}{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1} =$$

$$= \frac{4\cos^4\alpha}{-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = -2\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Приклад 7.11. Спростити вираз

$$\frac{\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{11\pi}{6} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}.$$

Розв'язання. $\dfrac{\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{11\pi}{6} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)} =$

$$= \frac{\sin\alpha + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha + 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha\right)}{2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Приклад 7.12. Довести тотожність

$$\sin 2\alpha\,(1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha) + \frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Розв'язання. $\sin 2\alpha\,(1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg}\alpha) + \dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha} =$

$$= \sin 2\alpha\left(1 + \frac{\sin 2\alpha \sin\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha}\right) + \frac{1 + \cos(90^\circ - \alpha)}{1 - \cos(90^\circ - \alpha)} =$$

$$= \sin 2\alpha \cdot \frac{\cos 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha\sin\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha} + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha\cos\alpha} + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right),$$

що й вимагалось довести.

Приклад 7.13. Довести тотожність

$$\operatorname{tg} 4\alpha + \sec 4\alpha = \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

Розв'язання. $\operatorname{tg} 4\alpha + \sec 4\alpha = \dfrac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} + \dfrac{1}{\cos 4\alpha} =$

$$= \frac{1 + \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} =$$

$$= \frac{(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)^2}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha},$$

що й вимагалось довести.

Приклад 7.14. Довести тотожність

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} (\alpha + \beta)} + \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} (\alpha - \beta)} + 2\operatorname{tg}^2 \alpha = 2\sec^2 \alpha.$$

Розв'язання. $\dfrac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} (\alpha + \beta)} + \dfrac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} (\alpha - \beta)} + 2\operatorname{tg}^2 \alpha =$

$$= 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + 2\operatorname{tg}^2 \alpha =$$

$$= 2 + 2\operatorname{tg}^2 \alpha = 2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 2\sec^2 \alpha,$$

що й вимагалось довести.

Приклад 7.15. Довести тотожність

$$\frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha} - 2(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha) - 1 = 0.$$

Розв'язання.

$$\frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha} - 2(\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha) - 1 =$$

$$= \frac{\sin 7\alpha - 2\sin \alpha \cos 2\alpha - 2\sin \alpha \cos 4\alpha}{\sin \alpha} -$$

$$- \frac{2\sin \alpha \cos 6\alpha + \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin 7\alpha}{\sin \alpha} +$$

$$+ \frac{-(\sin 3\alpha - \sin \alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha + \sin 7\alpha - \sin 5\alpha) - \sin \alpha}{\sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sin 7\alpha + \sin \alpha - \sin 7\alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha} = 0,$$

що й вимагалось довести.

Приклад 7.16. Довести

$$\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}.$$

Розв'язання. $\dfrac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} =$

$$= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1}{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) - 1} =$$

$$= \frac{-2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha - 1} =$$

$$= \frac{-2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1} =$$

$$= \frac{-2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{-3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3},$$

що й вимагалось довести.

Приклад 7.17. Довести тотожність

$$16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha = \sin 5\alpha.$$

Розв'язання. $16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha =$

$$= \sin \alpha\,(16 \sin^4 \alpha - 20 \sin^2 \alpha + 5) =$$

$$= \sin \alpha\,(4\,(1 - \cos 2\alpha)^2 - 10\,(1 - \cos 2\alpha) + 5) =$$

$$= \sin \alpha\,(4 \cos^2 2\alpha + 2 \cos 2\alpha - 1) =$$

$$= \sin \alpha\,(2 \cdot (1 + \cos 4\alpha) + 2 \cos 2\alpha - 1) =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos 4\alpha + 2 \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha =$$

$$= \sin 5\alpha - \sin 3\alpha + \sin 3\alpha - \sin \alpha + \sin \alpha = \sin 5\alpha,$$

що й вимагалось довести.

Приклад 7.18. Довести тотожність

$$\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 33^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 27^\circ \operatorname{tg} 33^\circ = \sqrt{3}.$$

Розв'язання. Якщо $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ і $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ існують, то $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$. Тому

$$\operatorname{tg}27^\circ + \operatorname{tg}33^\circ + \sqrt{3}\operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}33^\circ =$$

$$= \operatorname{tg}(27^\circ + 33^\circ)(1 - \operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}33^\circ) + \sqrt{3}\operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}33^\circ =$$

$$= \sqrt{3}(1 - \operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}33^\circ) + \sqrt{3}\operatorname{tg}27^\circ\operatorname{tg}33^\circ = \sqrt{3},$$

що й вимагалось довести.

Приклад 7.19. Довести тотожність

$$\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}2\alpha + 4\operatorname{ctg}4\alpha = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Розв'язання. $\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}2\alpha + 4\operatorname{ctg}4\alpha =$

$$= \operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}2\alpha + 4\,\frac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{2\operatorname{tg}2\alpha} =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}2\alpha + \frac{2-2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha} =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha + \frac{2\operatorname{tg}^2 2\alpha + 2 - 2\operatorname{tg}^2 2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{2}{\operatorname{tg}2\alpha} =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha + \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha,$$

що й вимагалось довести.

Вправи

Перетворити в добуток:

7.20. $1 - 4\sin^2\alpha$.

7.21. $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$.

7.22. $\sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta)$.

7.23. $\sin 4\alpha - 2\cos^2 2\alpha + 1$.

7.24. $\sin^2(\alpha + 90^\circ) - 3\cos^2(\alpha - 90^\circ)$.

7.25. $\sin^2\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$.

7.26. $3 - 4\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

7.27. $1 - 3\,\text{tg}^2\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right).$

7.28. $\text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} + \text{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2} + 2.$

7.29. $\sec^4 \alpha - \text{cosec}^4\,\alpha.$

7.30. $\dfrac{\text{tg}^4\,\alpha - \text{tg}^6\,\alpha}{\text{ctg}^4\,\alpha - \text{ctg}^2\,\alpha}.$

7.31. $\text{tg}^2\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{2}\right) - \text{ctg}^2\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{2}\right).$

7.32. $1 + \cos(2\alpha + 270^\circ) + \sin(2\alpha + 450^\circ).$

7.33. $1 - \cos(2\alpha - 270^\circ) + \sin(2\alpha + 270^\circ).$

7.34. $1 - \cos(2\alpha - \pi) - \cos(4\alpha + \pi) + \cos(6\alpha - 2\pi).$

7.35. $1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 3\alpha\right) - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - 3\alpha\right) + \text{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{2} + 3\alpha\right).$

7.36. $1 + \text{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2} - 4\alpha\right) + \text{cosec}\left(\dfrac{5\pi}{2} + 4\alpha\right).$

7.37. $\dfrac{\sin\alpha - 2\cos 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos\alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 5\alpha}.$

7.38. $\dfrac{\sin 4\alpha + \sin 5\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha}.$

7.39. $\dfrac{\cos 7\alpha - \cos 8\alpha - \cos 9\alpha + \cos 10\alpha}{\sin 7\alpha - \sin 8\alpha - \sin 9\alpha + \sin 10\alpha}.$

7.40. $\dfrac{\sin 13\alpha + \sin 14\alpha + \sin 15\alpha + \sin 16\alpha}{\cos 13\alpha + \cos 14\alpha + \cos 15\alpha + \cos 16\alpha}.$

7.41. $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha.$

7.42. $1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha - \text{tg}\,2\alpha.$

7.43. $-\cos 5\alpha\cos 4\alpha - \cos 4\alpha\cos 3\alpha +$

$+ 2\cos^2 2\alpha\cos\alpha.$

7.44. $\sin 10\alpha\sin 8\alpha + \sin 8\alpha\sin 6\alpha - \sin 4\alpha\sin 2\alpha.$

7.45. $\sqrt{\text{tg}\,\alpha + \sin\alpha} - \sqrt{\text{tg}\,\alpha - \sin\alpha}\,,\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}.$

7.46. $\frac{1}{\sqrt{3}} \sin 4\alpha + 1 - 2\cos^2 2\alpha.$

7.47. $3 - 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha - 8\cos^4 2\alpha.$

7.48. $\operatorname{tg}^3 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha - 3\operatorname{tg} \alpha + 3.$

7.49. $\operatorname{tg}^4 \alpha - 4\operatorname{tg}^2 \alpha + 3.$

7.50. $6\sin^2 2\alpha - 1 - \cos 4\alpha.$

7.51. $2\cos^2 2\alpha + 3\cos 4\alpha - 3.$

7.52. $\frac{\sin(2\alpha - \beta)}{\cos 4\alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos 2\alpha}.$

7.53. $3 + 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha.$

7.54. $\sqrt{1 + \sin\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}$, якщо $0 < \alpha \le 180^\circ$.

7.55. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha - \beta).$

7.56. $\frac{\sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta) - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$

7.57. $2 - \frac{\sin 8\alpha}{\sin^4 2\alpha - \cos^4 2\alpha}.$

7.58. $2 - \operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha.$

7.59. $\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}.$

7.60. $\frac{\sqrt{1 + \sin\alpha} + \sqrt{1 - \sin\alpha}}{\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha}}$, якщо

а) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, *б*) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

7.61. $2\sin^2 2\alpha + \sqrt{3}\sin 4\alpha - \frac{4\operatorname{tg} 2\alpha\,(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)}{\sin 8\alpha\,(1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha)^2}.$

7.62. $\frac{\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \sec\frac{\varphi}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \sec\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\varphi}.$

7.63. $\cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right).$

7.64. $\dfrac{3\,\mathrm{tg}^2(\alpha+3\pi)-1}{1-3\,\mathrm{tg}^2\left(\alpha+\dfrac{5\pi}{2}\right)}$.

Довести тотожності:

7.65. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha$.

7.66. $\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\dfrac{21\alpha}{2}$.

7.67. $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha-\sec\alpha}{\cos\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha\sec\alpha$.

7.68. $\dfrac{\cos 4\alpha+1}{\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha} = \dfrac{1}{2}\sin 4\alpha$.

7.69. $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \dfrac{1-\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}\,\alpha}$.

7.70. $(\sin\alpha)^{-1}+(\mathrm{tg}\,\alpha)^{-1} = \mathrm{ctg}\,\dfrac{\alpha}{2}$.

7.71. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 = 4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

7.72. $\dfrac{(\mathrm{tg}\,\alpha+\sec\alpha)(\cos\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha)}{(\cos\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha)(\mathrm{tg}\,\alpha-\sec\alpha)} = 1$.

7.73. $\dfrac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \mathrm{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

7.74. $\sin^2\alpha+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right) = \dfrac{1}{4}$.

7.75. $\dfrac{\mathrm{tg}\,3\alpha}{\mathrm{tg}^2\,3\alpha-1}\cdot\dfrac{1-\mathrm{ctg}^2\,3\alpha}{\mathrm{ctg}\,3\alpha} = 1$.

7.76. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\,\mathrm{ctg}\,2\alpha = -1$.

7.77. $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\sec^2 2\alpha-1}+\dfrac{1+\cos 4\alpha}{\mathrm{cosec}^2\,2\alpha-1} = 2$.

7.78. $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha \sec 2\beta - \operatorname{tg} 2\beta \sec 2\alpha}{\sec 2\alpha + \sec 2\beta} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$.

7.79. $1 - \sin 4\alpha + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{4} - 2\alpha\right)\cos 4\alpha = 0$.

7.80. $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha} = 2\sin\alpha$.

7.81. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg} 2\alpha} - \cos 8\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha = \sin 8\alpha$.

7.82. $\left(\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sin\alpha + \cos\alpha}\right)^2 = 2\operatorname{cosec} 2\alpha$.

7.83. $\sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ - \alpha) -$

$- \sin 15^\circ \cos(15^\circ + 2\alpha) = \sin 2\alpha$.

7.84. $\dfrac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

7.85. $\cos 4\alpha - \sin 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha = \cos 2\alpha - 2\cos^2\alpha$.

7.86. $\dfrac{3 + 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha}{3 - 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha} = \operatorname{ctg}^4 2\alpha$.

7.87. $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha} - \sqrt{\operatorname{tg}\alpha}} = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

7.88. $\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta - \dfrac{2\cos(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta} + 2 =$

$= \dfrac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2\alpha \sin^2\beta}$.

7.89. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg} 2\alpha - 4\operatorname{tg} 4\alpha = 8\operatorname{ctg} 8\alpha$.

7.90. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg} 2\alpha = 4\operatorname{ctg} 4\alpha$.

7.91. $\operatorname{tg} 6\alpha - \operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} 6\alpha \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha$.

7.92. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

ГЛАВА II.
Розв'язання тригонометричних рівнянь

§8. Обернені тригонометричні функції

Функція $y = \sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ зростає і неперервна; отже, вона має обернену функцію, що зростає і є неперервною.

Функція, обернена для функції $y = \sin x$ *на відрізку* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, *називається* ***арксинусом*** *і позначається* arcsin.

Згідно означенню оберненої функції, областю визначення арксинуса буде відрізок $[-1; 1]$, а множиною значень — відрізок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функція $y = \cos x$ на відрізку $[0; \pi]$ спадає і неперервна; отже, вона має обернену функцію, що спадає і є неперервною.

Функція, обернена для функції $y = \cos x$ *на відрізку* $[0; \pi]$, *називається* ***арккосинусом*** *і позначается* arccos.

Областю визначення арккосинуса буде відрізок $[-1; 1]$, а множиною значень — відрізок $[0; \pi]$.

Функція тангенс неперервна і зростає на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, отже, вона має обернену функцію, що є неперервною і зростає.

Функція, обернена для функції $y = \operatorname{tg} x$ *на інтервалі* $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, *називається* ***арктангенсом*** *и позначається* arctg.

Областю визначення арктангенса буде інтервал $(-\infty; \infty)$, а множиною значень — інтервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

На інтервалі $(0;\ \pi)$ функція котангенс спадає, крім того, вона неперервна в кожній точці інтервала $(0;\ \pi)$, отже, на інтервалі $(0;\ \pi)$ ця функція має обернену функцію, що спадає і неперервна.

Функція, обернена для функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ *на інтервалі* $(0;\ \pi)$, *називається* ***арккотангенсом*** *і позначається* arcctg.

Згідно означенню оберненої функції, областю визначення арккотангенса буде інтервал $(-\infty;\ \infty)$, а множиною значень — інтервал $(0;\ \pi)$.

З означення обернених тригонометричних функцій випливає:

- $\sin(\arcsin x) = x$, якщо $|x| \le 1$.
- $\cos(\arccos x) = x$, якщо $|x| \le 1$.
- $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x$, для будь-якого дійсного числа x.
- $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, x) = x$, для будь-якого дійсного числа x.

Зворотний порядок цих операцій дає той же результат:

- $\arcsin(\sin x) = x$ у випадку, коли $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.
- $\arccos(\cos x) = x$ у випадку, коли $0 \le x \le \pi$.
- $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x)$ у випадку, коли $|x| < \frac{\pi}{2}$.
- $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x) = x$ у випадку, коли $0 < x < \pi$.

Основні тотожності

1. При всіх допустимих значеннях x справедливі тотожності:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

$$\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2}. \qquad (2)$$

Доведемо одну з них, наприклад, (2).

Переписавши його у вигляді $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$, обчислимо $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$.

Оскільки $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, то

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x < \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, два числа $\operatorname{arctg} x$ і $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$, замкнені в одному інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, мають рівні значення тангенса:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right).$$

Звідси випливає рівність цих чисел, тобто

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x \text{ або } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Відзначимо ще декілька тотожностей.

2. При всіх допустимих значеннях аргумента x справедливі тотожності:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \tag{3}$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \tag{4}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \tag{5}$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x. \tag{6}$$

Доведемо одну з них, наприклад, (5).

Маємо $\cos(\arccos(-x)) = -x$ і

$$\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x, \text{ тобто}$$

$$\cos(\arccos(-x)) = \cos(\pi - \arccos x).$$

Оскільки $0 \le \arccos a \le \pi$ для будь-якого $|a| \le 1$, то

$$0 \le \arccos(-x) \le \pi \text{ і } 0 \le \pi - \arccos x \le \pi.$$

Таким чином, числа $\arccos(-x)$ і $\pi - \arccos x$, замкнені в одному проміжку $[0; \pi]$, мають рівні значення косинуса. Отже, ці числа однакові, тобто $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Приклад 8.1. Знайти область визначення функції

$$y = \sqrt{\pi - 4\arccos\frac{x}{2}}\,.$$

Розв'язання. Арккосинус визначений для всіх значень аргумента, що не перевищують за абсолютною величиною одиницю. Отже, область визначення даної функції знайдемо з системи нерівностей

$$\begin{cases} -1 \le \dfrac{x}{2} \le 1, \\ \pi - 4\arccos\dfrac{x}{2} \ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \le \dfrac{x}{2} \le 1, \\ \arccos\dfrac{x}{2} \le \dfrac{\pi}{4}\,. \end{cases}$$

Враховуючи, що $\dfrac{\pi}{4} = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, останню рівність можна записати у вигляді

$$\arccos\frac{x}{2} \le \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\,. \qquad (*)$$

Оскільки арккосинус монотонно спадає в області визначення, то з нерівності (*) випливає, що $1 \ge \dfrac{x}{2} \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тобто $\sqrt{2} \le x \le 2$.

Продовжуючи розв'язання системи, одержимо

$$\begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ \sqrt{2} \le x \le 2, \end{cases}$$

звідки $\sqrt{2} \le x \le 2$. Отже, область визначення функції $y = \sqrt{\pi - 4\arccos\dfrac{x}{2}}$ є відрізок $[\sqrt{2};\ 2]$.

Відповідь: $\sqrt{2} \le x \le 2$.

Приклад 8.2. Знайти область визначення функції

$$y = \arcsin(x^3 + 2x^2 + 3x + 1).$$

Розв'язання. Область визначення даної функції знайдемо з системи нерівностей

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \le 1, \\ x^3 + 2x^2 + 3x + 1 \ge -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + 2x^2 + 3x \le 0, \\ x^3 + 2x^2 + 3x + 2 \ge 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\,(x^2 + 2x + 3) \le 0, \\ (x + 1)\,(x^2 + x + 2) \ge 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x \le 0, \\ x \ge -1, \end{cases}$$

звідки $-1 \le x \le 0$.

Відповідь: $-1 \le x \le 0$.

Приклад 8.3. Обчислити $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{11}\right)\right)$.

Розв'язання. Зазначимо, що $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ лише в тому випадку, коли $0 < x < \pi$. Оскільки π — період котангенса, то

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{11}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{11} + \pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{10\pi}{11} \quad \text{і}$$

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{11}\right)\right) = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{10\pi}{11}\right) = \frac{10\pi}{11}.$$

Відповідь: $\frac{10\pi}{11}$.

Приклад 8.4. Обчислити $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6)$.

Розв'язання. Маємо $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, якщо $|x| < \frac{\pi}{2}$. Через періодичність тангенсу $\operatorname{tg} 6 = \operatorname{tg}(6 - 2\pi)$, причому $-\frac{\pi}{2} < 6 - 2\pi < 0$. Тому

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(6 - 2\pi)) = 6 - 2\pi.$$

Відповідь: $6 - 2\pi$.

Приклад 8.5. Визначити знак виразу

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{\sqrt{5}}{3} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Розв'язання. Вкажемо границі, в яких лежать значення виразів, що стоять в дужках, і визначимо знак кожного співмножника:

а) з нерівності $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ і через зростання арктангенса маємо, що $\operatorname{arctg} 0 < \operatorname{arctg} \frac{1}{3} < \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$. Враховуючи, що $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$, одержуємо

$$0 < \operatorname{arctg} \frac{1}{3} < \frac{\pi}{6} \text{ і } 0 < 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} < \frac{\pi}{3}.$$

Оскільки $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, то

$$0 < 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\pi}{2},$$

отже, $\sin\left(2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0$;

б) з нерівності $\sqrt{2} < \frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ і через спадання арккосинуса маємо, що

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} > \arccos \frac{\sqrt{5}}{3} > \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Враховуючи, що $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, одержуємо $\frac{\pi}{6} < \arccos \frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{\pi}{4}$ і

$$\frac{\pi}{2} < 3 \arccos \frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{3\pi}{4}. \qquad (**)$$

Далі з нерівності $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ і через зростання арксинуса маємо, что

$$\arcsin \frac{1}{2} < \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} < \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Оскільки $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, то одержимо

$$\frac{\pi}{6} < \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\pi}{4}. \qquad (***)$$

Таким чином, з нерівностей (**) і (***) випливає, що $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} < 3 \arccos \frac{\sqrt{5}}{3} + \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} < \pi$. Значить, $\mathrm{tg}\left(3 \arccos \frac{\sqrt{5}}{3} + \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}}\right) < 0$.

Отже, даний вираз як добуток двох чисел різних знаків, від'ємний.

Приклад 8.6. Обчислити $\mathrm{tg}\left[2 \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$.

Розв'язання. Позначаючи $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, маємо

$$\cos \alpha = -\frac{2}{3}, \text{ де } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

Таким чином, наша задача зводится до пошуку $\mathrm{tg}\, 2\alpha$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ і $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Розв'язуючи цю задачу, одержуємо $\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2 \,\mathrm{tg}\, \alpha}{1 - \mathrm{tg}^2 \alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{1 - \frac{5}{4}} = 4\sqrt{5}$

$$\left(\mathrm{tg}\, \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = -\frac{\sqrt{5}}{2}\right),$$

перед радикалом береться знак «–», оскільки у вказаних межах $\mathrm{tg}\, \alpha < 0$.

Відповідь: $4\sqrt{5}$.

Приклад 8.7. Обчислити $\mathrm{arctg}\, 2 + \mathrm{arctg}\, 3$.

Розв'язання. Позначивши шукану величину через A: $\mathrm{arctg}\, 2 + \mathrm{arctg}\, 3 = A$, обчислимо $\mathrm{tg}\, A$. Маємо

$$\mathrm{tg}\, A = \mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\, 2 + \mathrm{arctg}\, 3) =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\, 2) + \mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\, 3)}{1 - \mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\, 2) \cdot \mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\, 3)} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = -1.$$

Теперь залишається знайти A за заданим значенням тангенса цього аргумента. Для того, щоб ця задача була однозначною, треба вказати границі змінювання A.

Оскільки $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 3 < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 < \pi$, тобто аргумент A закінчуєтся в II чверті. Отже, $A = \frac{3\pi}{4}$.

Відповідь: $\frac{3\pi}{4}$.

Приклад 8.8. Розв'язати рівняння

$$\arcsin x + 3 \arccos x = \pi.$$

Розв'язання. $\arcsin x + \arccos x + 2 \arccos x = \pi$,

$$\frac{\pi}{2} + 2 \arccos x = \pi, \quad \arccos x = \frac{\pi}{4},$$

$$\cos (\arccos x) = \cos \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Приклад 8.9. Розв'язати рівняння

$$\arcsin \frac{3}{5} x + \arcsin \frac{4}{5} x = \arcsin x.$$

Розв'язання. Область допустимих значень $|x| \le 1$. Прирівнюючи синуси правої й лівої частин заданого рівняння і враховуючи, що $\sin (\arcsin a) = a$ і $\cos (\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}$ при будь-якому $-1 \le a \le 1$, одержуємо

$$\sin \left(\arcsin \frac{3}{5} x + \arcsin \frac{4}{5} x\right) = \sin (\arcsin x),$$

$$\sin \left(\arcsin \frac{3}{5} x\right) \cos \left(\arcsin \frac{4}{5} x\right) +$$

$$+ \sin \left(\arcsin \frac{4}{5} x\right) \cos \left(\arcsin \frac{3}{5} x\right) = \sin (\arcsin x).$$

Отже, маємо

$$\frac{3}{5} x \sqrt{1 - \frac{16}{25} x^2} + \frac{4}{5} x \sqrt{1 - \frac{9}{25} x^2} = x.$$

Виділяючи корінь $x = 0$, після необхідних перетворень знаходимо $25 - 9x^2 = 16$, $x = \pm 1$.

Отже, ми одержали три кореня: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$. Безпосередньою підстановкою їх у вихідне рівняння впевнюємось, що всі вони підходять.

Відповідь: $x \in \{0, 1, -1\}$.

Приклад 8.10. Відомо, що $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$ і $\arcsin a + \arcsin b + \arcsin c = \pi$. Довести, що $a\sqrt{1 - a^2} + b\sqrt{1 - b^2} + c\sqrt{1 - c^2} = 2abc$.

Розв'язання. Нехай

$$\arcsin a = \alpha,\ \arcsin b = \beta,\ \arcsin c = \gamma,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2},\ 0 < \gamma < \frac{\pi}{2} \text{ і } \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Тоді $\sin \alpha = a$, $\sin \beta = b$, $\sin \gamma = c$, $\cos \alpha = \sqrt{1 - a^2}$, $\cos \beta = \sqrt{1 - b^2}$, $\cos \gamma = \sqrt{1 - c^2}$. Маємо

$$a\sqrt{1 - a^2} + b\sqrt{1 - b^2} + c\sqrt{1 - c^2} =$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta + \sin \gamma \cos \gamma =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2}(2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \sin 2\gamma) =$$

$$= \sin \gamma (\cos(\alpha - \beta) + \cos \gamma) =$$

$$= \sin \gamma (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\pi - \alpha - \beta)) =$$

$$= 2 \sin \gamma \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= 2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = 2abc,$$

що й вимагалось довести.

Приклад 8.11. Розв'язати нерівність

$$\arcsin x + 2 \arccos x < \frac{3\pi}{4}.$$

Розв'язання. $\arcsin x + 2\arccos x < \frac{3\pi}{4}$,

$$\frac{\pi}{2} + \arccos x < \frac{3\pi}{4}, \quad \arccos x < \frac{\pi}{4},$$

звідки $\frac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 1.$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 1.$

Приклад 8.12. Розв'язати рівняння

$$\arccos(x^2 + xy + y^2) + \arccos(x^3 - y^3) = 0.$$

Розв'язання. Оскільки $0 \leq \arccos a \leq \pi$, дане рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \arccos(x^2 + xy + y^2) = 0, \\ \arccos(x^3 - y^3) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ x^3 - y^3 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ x - y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = y + 1, \\ (y+1)^2 + (y+1)\,y + y^2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи друге рівняння системи, одержимо

$$3y^2 + 3y + 1 = 1, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = -1.$$

Тоді $x_1 = 1, \ x_2 = 0.$

Перевірка підтверджує, що розв'язками є пари (1; 0) і (0; −1).

Відповідь: (1; 0), (0;−1).

Приклад 8.13. Розв'язати рівняння

$$\arcsin(x^2 + xy) + \arcsin(xy + y^2) = \pi.$$

Розв'язання. Оскільки $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$, дане рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \arcsin(x^2 + xy) = \frac{\pi}{2}, \\ \arcsin(xy + y^2) = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x\,(x + y) = 1, \\ y\,(x + y) = 1, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 1, \\ x\,(x + y) = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи одержану систему, знаходимо $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Перевірка підтверджує, що пари $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ задовільняють рівнянню.

Відповідь: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Приклад 8.14. Довести, що

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \frac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{2}.$$

Розв'язання. Нехай $\arcsin x = \alpha$, тоді $\sin\alpha = x$ і $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{\alpha}{2} \le \dfrac{\pi}{4}$, тому

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + 2\sqrt{1 - x^2}}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 + x + 2\sqrt{1 - x^2} + 1 - x}{4}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})^2}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{2},$$

що й вимагалось довести.

При доведенні тотожності $A = B$, де A і B — обернені тригонометричні функції або їх комбінації, прикидкою виділяємо проміжок, в якому лежать значення A і B, а потім беремо ту тригонометричну функцію, що монотонна на цьому проміжку. Тоді з рівності значень цієї функції від аргументів A і B буде випливати шукана рівність $A = B$.

Наприклад, якщо A і B лежать в проміжку $(0;\ \pi)$, то беремо функцію косинус (або котангенс).

Тоді з рівності $\cos A = \cos B$ (або $\mathrm{ctg}\, A = \mathrm{ctg}\, B$) випливає, що $A = B$.

З декількох функцій, монотонних на вказаному проміжку, доцільно вибрати ту, при якій доводжувана тотожність зводиться до більш простої.

Пояснимо на прикладі.

Приклад 8.15. Довести тотожність

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. Замінимо даний вираз рівносильним: $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{4}{5}$ або

$$\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\arccos\frac{4}{5}.$$

Оцінимо величину аргумента

$$\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}.$$

Оскільки $\frac{5}{13}<\frac{1}{2}$ и $\frac{16}{65}<\frac{1}{2}$, то

$$0<\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}<\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{2}<$$

$$<\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}.$$

Отже, числа $\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}$ і $\arccos\frac{4}{5}$ лежать в проміжку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, на якому косинус змінюється монотонно. Значить, досить довести, що

$$\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}\right)=\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right). \qquad (*)$$

Розкриваючи косинус суми, маємо

$$\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arcsin\frac{16}{65}\right)-$$

$$-\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\cdot\sin\left(\arcsin\frac{16}{65}\right)=\frac{4}{5} \quad \text{або}$$

$$\sqrt{\left(1-\frac{25}{169}\right)\left(1-\frac{16^2}{65^2}\right)}-\frac{5\cdot 16}{13\cdot 65}=\frac{4}{5}.$$

Після спрощення лівої частини одержуємо тотожність $\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$. Звідси випливає, що тотожність (*), а значить, і дана, справедлива.

Вправи

Обчислити:

8.16. *а*) $\arcsin\frac{1}{2}$; *ж*) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; *з*) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

в) $\operatorname{arctg} 1$; *и*) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;

г) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; *к*) $\operatorname{arcctg}(-1)$;

д) $\arcsin 1$; *л*) $\arccos(-1)$;

е) $\arccos 0$; *м*) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

8.17. $\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

8.18. $\sin\left(3\operatorname{arctg}\sqrt{3}+2\arccos\frac{1}{2}\right)$.

8.19. $\cos\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

8.20. $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

8.21. $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arccos\frac{1}{2}\right)$.

Довести рівності:

8.22. *а*) $\sin(\arcsin m)=m$ $(|m|\le 1)$;

б) $\cos(\arcsin m)=\sqrt{1-m^2}$ $(|m|\le 1)$;

в) $\operatorname{tg}(\arcsin m) = \dfrac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$ $(|m| < 1)$;

г) $\operatorname{ctg}(\arcsin m) = \dfrac{\sqrt{1 - m^2}}{m}$

$(m \in [-1;\ 0) \cup (0;\ 1])$.

8.23. *а*) $\cos(\arccos m) = m$ $(|m| \le 1)$;

б) $\sin(\arccos m) = \sqrt{1 - m^2}$ $(|m| \le 1)$;

в) $\operatorname{tg}(\arccos m) = \dfrac{\sqrt{1 - m^2}}{m}$

$(m \in [-1;\ 0) \cup (0;\ 1])$;

г) $\operatorname{ctg}(\arccos m) = \dfrac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$ $(|m| < 1)$.

8.24. *а*) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} m) = m$;

б) $\sin(\operatorname{arctg} m) = \dfrac{m}{\sqrt{1 + m^2}}$;

в) $\cos(\operatorname{arctg} m) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + m^2}}$;

г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} m) = \dfrac{1}{m}$ $(m \ne 0)$.

8.25. *а*) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} m) = m$;

б) $\sin(\operatorname{arcctg} m) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + m^2}}$;

в) $\cos(\operatorname{arcctg} m) = \dfrac{m}{\sqrt{1 + m^2}}$;

г) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} m) = \dfrac{1}{m}$.

Обчислити:

8.26. $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$.

8.27. $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$.

8.28. $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$.

8.29. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

8.30. $\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}+\arccos\frac{1}{4}\right)$.

8.31. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right)$.

8.32. $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{3}{4}+\arccos\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$.

8.33. $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right)$.

8.34. $\cos\left(2\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$.

Довести тотожності:

8.35. $\arccos\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{7}\right)=\arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$.

8.36. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\operatorname{arctg}\frac{32}{43}$.

8.37. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

8.38. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{6}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{7}=\frac{\pi}{2}$.

Довести, що:

8.39. $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)=\sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

8.40. $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}$.

8.41. $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$.

8.42. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2} + 1}$.

Розв'язати рівняння:

8.43. $4 \operatorname{arctg}(x^2 - 3x - 3) - \pi = 0$.

8.44. $6 \arcsin(x^2 - 6x + 8{,}5) = \pi$.

8.45. $\operatorname{arctg}(x + 2) - \operatorname{arctg}(x + 1) = \dfrac{\pi}{4}$.

8.46. $2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2} - \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{4}$.

8.47. $\arcsin \dfrac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin \sqrt{1 - x} = \arcsin \dfrac{1}{3}$.

8.48. $\arcsin 3x = \arccos 4x$.

8.49. $2 \arcsin x = \arcsin \dfrac{10x}{3}$.

8.50. $\arcsin x + \arcsin 2x = \arcsin 3x$.

§9. Розв'язання тригонометричних рівнянь

Найпростішими тригонометричними рівняннями *називаються рівняння вигляду* $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, *де* a *— деяке число.*

Очевидно, рівняння $\sin x = a$ і $\cos x = a$ мають розв'язки тільки при $|a| \le 1$, а рівняння $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$ — при будь-яких значеннях a.

Розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь

1. Якщо $\sin x = a$, де $|a| \le 1$, то

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$$

де n — довільне ціле число.

Окремі випадки:

$$\sin x = -1,\ \ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z,$$

$$\sin x = 0,\ \ x = \pi n,\ \ n \in Z,$$

$$\sin x = 1,\ \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z.$$

2. Якщо $\cos x = a$, де $|a| \le 1$, то

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k,$$

k — довільне ціле число.

Окремі випадки:

$$\cos x = -1,\ \ x = \pi + 2\pi k,\ \ k \in Z,$$

$$\cos x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z,$$

$$\cos x = 1,\ \ x = 2\pi k,\ \ k \in Z.$$

3. Якщо $\operatorname{tg} x = a$, то $x = \operatorname{arctg} a + \pi f$, $f \in Z$.

4. Якщо $\operatorname{ctg} x = a$, то $x = \operatorname{arcctg} a + \pi l$, $l \in Z$.

Приклад 9.1. Розв'язати рівняння

$$\sin\left(30^\circ - \frac{3x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді

$$\sin\left(\frac{3x}{2} - 30^\circ\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Розв'яжемо його відносно $\frac{3x}{2} - 30^\circ$. Одержимо

$$\frac{3x}{2} - 30^\circ = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 180^\circ k,$$

звідки $x = (-1)^{k+1} \cdot 30^\circ + 120^\circ k + 20^\circ$, де k — довільне ціле число.

Якщо це необхідно, замінюючи k парним або непарним числом, формулу $x = (-1)^{k+1} \cdot 30^\circ + 120^\circ k + 20^\circ$ можна записати у вигляді двох формул:

- при $k = 2n$

$$x = -30^\circ + 120^\circ \cdot 2n + 20^\circ = -10^\circ + 240^\circ n;$$

- при $k = 2n + 1$

$$x = 30^\circ + 120^\circ (2n + 1) + 20^\circ = 170^\circ + 240^\circ n.$$

Приклад 9.2. Розв'язати рівняння

$$\cos\frac{2x - \pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Розв'язуючи це рівняння відносно $\frac{2x - \pi}{3}$, знаходимо:

$$\frac{2x - \pi}{3} = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,$$

$$\frac{2x - \pi}{3} = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, \quad \frac{2x - \pi}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,$$

звідки $x = \pm\pi + \frac{\pi}{2} + 3\pi k$, де k — довільне ціле число.

Якщо необхідно, одержану формулу $x = \pm\pi + \frac{\pi}{2} + 3\pi k$ можна записати у вигляді двох формул:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi k \quad \text{і} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 3\pi k.$$

Приклад 9.3. Розв'язати рівняння $\cos(\cos x) = 1$.

Розв'язання. $\cos x = 2\pi k$. Одержане рівняння має розв'язки лише при $k = 0$, оскільки при $k \neq 0$ $|2\pi k| > 1$. При $k = 0$ маємо:

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$

Приклад 9.4. Розв'язати рівняння

$$\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}.$$

Розв'язання. $\frac{1 + \cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{3}{4}$, $\cos\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, звідки $6x - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{18} \pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Одержану формулу можна записати у вигляді двох формул: $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$ і $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Розв'язання рівнянь, що зводяться до квадратних рівнянь

Приклад 9.5. Розв'язати рівняння

$$3\sin^2 x - 10\sin x + 3 = 0.$$

Розв'язання. Нехай $\sin x = y$. Дане рівняння прийме такий вигляд: $3y^2 - 10y + 3 = 0$. Розв'язавши його, знайдемо $y_1 = \frac{1}{3}$, $y_2 = 3$. Значення $y_2 = 3$ не задовольняє умові, оскільки $|\sin x| \leq 1$. Отже,

$$\sin x = \frac{1}{3}, \quad x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Приклад 9.6. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = 2{,}5.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$\operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{5}{2}.$$

Нехай $\mathrm{tg}\, 2x = y$. Дане рівняння прийме такий вигляд: $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$, $2y^2 - 5y + 2 = 0$. Розв'язавши його, знайдемо $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{1}{2}$. Тоді $\mathrm{tg}\, 2x = 2$,

$$2x = \mathrm{arctg}\ 2 + \pi k,\quad x = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\ 2 + \frac{\pi k}{2},\quad k \in Z;$$

$$\mathrm{tg}\, 2x = \frac{1}{2},\quad x = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\ \frac{1}{2} + \pi n,\quad n \in Z.$$

Приклад 9.7. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2}\,\sin^2 x = \cos x.$$

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне рівнянню $\sqrt{2}\,(1 - \cos^2 x) = \cos x$ або

$$\sqrt{2}\,\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0,$$

звідки $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ або $\cos x = -\sqrt{2}$. Друге з одержаних рівнянь не має розв'язку. Розв'язком першого рівняння є $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, де k — довільне ціле число.

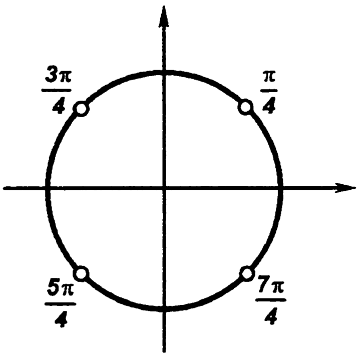
Треба зазначити, що при розв'язанні рівнянь форма запису не однозначна. Тому перед самостійним розв'язанням рівнянь треба познайомитись з такими зауваженнями.

Зауваження 1. Одна і та ж відповідь, одержана при розв'язані рівняння, може бути записана по-різному. Наприклад:

$$\pm\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\qquad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z;\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\pi f}{4}, & f \in Z, \\ x \ne \dfrac{\pi l}{2}, & l \in Z. \end{cases}$$

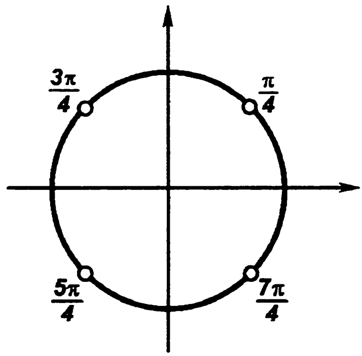
Виявити ідентичність цих відповідей легко таким прийомом. Малюємо круг і на ньому кружечками позначаємо розв'язки, що належать даній множині розв'язків, записаних в загальному вигляді, а хрестиками — розв'язки, що йому не належать (мал. 5).

Зауваження 2. Різна форма запису розв'язків може пояснюватись і різними методами, за допомогою



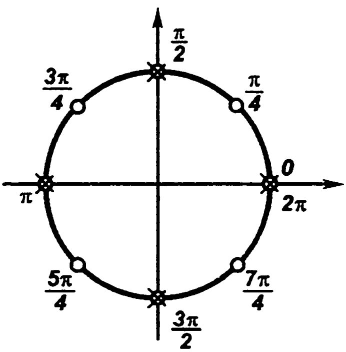
$\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z;$

Мал. 5*а*



$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\quad k\in Z;$

Мал. 5*б*



$$\begin{cases} x=\frac{\pi f}{4}, & f\in Z, \\ x\neq\frac{\pi l}{2}, & l\in Z. \end{cases}$$

Мал. 5*в*

яких розв'язувалось дане рівняння. В такому випадку ідентичність одержаної і даної відповіді можна довести за допомогою тотожніх перетворювань. Пояснимо на прикладі.

Приклад 9.8. Розв'язати рівняння

$$\sin x-\cos x=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}.$$

Розв'язання.

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}},$$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$

$$x-\frac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+\pi n,\quad n\in Z,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Але одержаний розв'язок можна перетворити, одержавши більш просту множину розв'язків:

$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Дійсно,

$$\arcsin \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \arcsin \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \arcsin \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{2\sqrt{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)\right) = \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\sin 60^\circ - \sin 30^\circ)\right) =$$

$$= \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{12}\right) = \arcsin \left(\sin \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Остання рівність грунтується на тому, що $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{12} \le \frac{\pi}{2}$.

Зауваження 3. Дуже часто множина розв'язків тригонометричних рівнянь записується за допомогою декількох формул. Іноді їх можна об'єднати, і буде одержано більш простий запис відповіді. В інших же випадках буває, що одна і та ж множина розв'язків повторюється декілька разів. В цих випадках необхідно в остаточній формі ці записи виключити. Як і в зауваженні 1, допомагає знаходити можливість об'єднання множини розв'язків або виключити ті, що повторюються — коло, на якому відмічаються кружечками розв'язки, що належать одній множині розв'язків, а хрестиками — ті, що їй не належать.

Пример 9.9. Розв'язати рівняння

$$\sin 2x \operatorname{tg} 3x \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Розв'язання. З розв'язання сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \operatorname{tg} 3x = 0, \\ \operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0 \end{array}\right.$$

одержимо

$$\left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{\pi k}{2}, \ k \in Z, & \text{(I)} \\ x = \dfrac{\pi n}{3}, \ n \in Z, & \text{(II)} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + \pi m, \ m \in Z. & \text{(III)} \end{array}\right.$$

Зобразимо знайдені розв'язки на колі, виключивши з одержаних ті, при яких $\operatorname{tg} 3x$ або $\operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ втрачають сенс, тобто

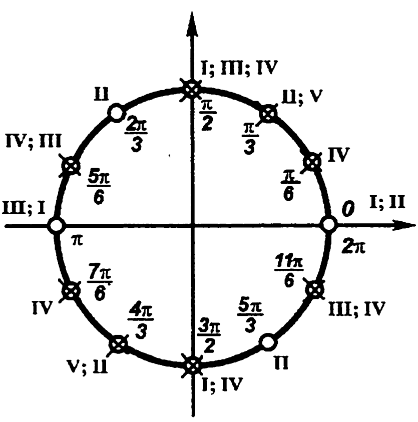
$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi f}{3}, \qquad \text{(IV)}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi l. \qquad \text{(V)}$$

Отже, як випливає з малюнка 6, розв'язком даного рівняння є

$$x = \pi k, \ k \in Z \ \text{і}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + n\pi, \ n \in Z.$$



Мал. 6

Рівність однойменних функцій і їх використання при розв'язанні рівнянь

До найпростіших рівнянь приєднуються рівняння вигляду $\sin\alpha = \sin\beta$, $\cos\alpha = \cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$, де деякі або всі α і β містять невідоме.

З умови рівності однойменних тригонометричних функцій випливають певні співвідношення між їх аргументами. Довести самостійно твердження:

1. **Якщо** $\sin\alpha = \sin\beta$, **то** $\alpha + \beta = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$;
   $\alpha - \beta = 2\pi n$, $n \in Z$.
2. **Якщо** $\cos\alpha = \cos\beta$, **то** $\alpha \pm \beta = 2\pi l$, $l \in Z$.
3. **Якщо** $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, **то** $\alpha - \beta = \pi m$, $m \in Z$;
   при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$ $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi f$, $f \in Z$.
4. **Якщо** $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$, **то** $\alpha - \beta = \pi k$, $k \in Z$;
   при $\alpha \neq \pi n$, $n \in Z$ $\beta \neq \pi m$, $m \in Z$.

Приклад 9.10. Розв'язати рівняння

$$\sin 3x = \cos 2x.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos 2x.$$

З умови рівності косинусів одержимо

$$3x - \frac{\pi}{2} \pm 2x = 2\pi k, \quad k \in Z.$$

$3x - \frac{\pi}{2} + 2x = 2\pi k, \quad k \in Z,$	$3x - \frac{\pi}{2} - 2x = 2\pi k, \quad k \in Z,$
$5x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z,$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z.$
$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \quad k \in Z.$	

Об'єднуючи одержані розв'язки, будемо мати

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \quad k \in Z.$$

Відповідь: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, \quad k \in Z.$

Приклад 9.11. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. З умови рівності тангенсів маємо

$$3x - x = \pi k, \quad k \in Z,$$

при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi f, \quad f \in Z;$

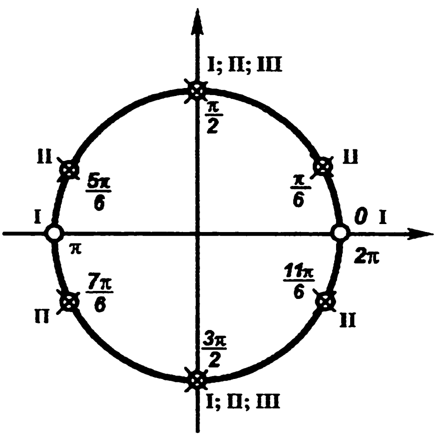
$$3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Отже,

$$x = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z, \qquad \text{(I)}$$

$$x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in Z, \qquad \text{(II)}$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi f, \quad f \in Z. \qquad \text{(III)}$$



Мал. 7

Відповідь: $\pi l, \quad l \in Z.$

Розв'язання однорідних рівнянь або рівнянь, що зводяться до однорідних

Рівняння вигляду

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \ldots +$$

$$+ a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *— дійсні числа, називаються* ***однорідними*** *відносно* $\sin x$ *і* $\cos x$.

Розділивши обидві частини даного рівняння на $\cos^n x$ (впевнившись попередньо, що розв'язки рівняння $\cos x = 0$ не є розв'язками вихідного рівняння), одержимо рівняння вигляду

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + a_2 \operatorname{tg}^{n-2} x + \ldots + a_n = 0.$$

Приклад 9.12. Розв'язати рівняння

$$2 \sin 5x + 7 \cos 5x = 0.$$

Розв'язання. Ділимо обидві частини даного рівняння на $\cos 5x$, одержимо рівносильне рівняння

$$2 \operatorname{tg} 5x + 7 = 0, \quad \operatorname{tg} 5x = -3{,}5,$$

звідки $5x = -\operatorname{arctg} 3{,}5 + \pi k,\ k \in Z$ і

$$x = -\frac{1}{5} \operatorname{arctg} 3{,}5 + \frac{\pi k}{5}, \quad k \in Z.$$

Приклад 9.13. Розв'язати рівняння

$$\sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 7 \cos^2 x = 0.$$

Розв'язання. Оскільки $\sin x$ і $\cos x$ не можуть одночасно дорівнювати нулю, то з умови прикладу випливає, що $\cos x \neq 0$. Розділивши обидві частини рівняння на $\cos^2 x$, одержимо рівносильне рівняння

$$\operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x + 7 = 0,$$

яке, в свою чергу, рівносильне сукупності рівнянь $\operatorname{tg} x = 1$ і $\operatorname{tg} x = 7$, звідки

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z; \quad x = \operatorname{arctg} 7 + \pi n,\ n \in Z.$$

Приклад 9.14. Розв'язати рівняння

$$8 \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 4.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$8 \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 4 (\sin^2 x + \cos^2 x),$$

звідки $4 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$.

Оскільки $\cos x \neq 0$, то, розділивши на $\cos^2 x$, одержимо $4 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0$, звідки

$$\operatorname{tg} x = -1 \text{ і } \operatorname{tg} x = \frac{3}{4}.$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z; \quad x = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + k\pi.$$

Приклад 9.15. Розв'язати рівняння

$$2\sin^4 x + 1{,}25\sin^2 2x - \cos^4 x = \cos 2x.$$

Розв'язання. Вихідне рівняння можна записати так: $2\sin^4 x + 1{,}25 \cdot 4\sin^2 x\cos^2 x - \cos^4 x =$

$$= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \text{ або}$$

$$2\sin^4 x + 5\sin^2 x\cos^2 x - \cos^4 x = \cos^4 x - \sin^4 x.$$

Одержали однорідне рівняння четвертого степеня. Розділивши обидві частини рівняння на $\cos^4 x$ ($\cos x \neq 0$), одержимо $3\operatorname{tg}^4 x + 5\operatorname{tg}^2 x - 2 = 0$, звідки

$$\operatorname{tg}^2 x = -2 \text{ (немає розв'язків), або}$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Розв'язання рівнянь розкладанням на множники

Приклад 9.16. Розв'язати рівняння

$$2\sin^3 x + 2\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$2\sin^2 x(\sin x + \cos x) - \cos^2 x(\sin x + \cos x) = 0,$$

$$(\sin x + \cos x)(2\sin^2 x - \cos^2 x) = 0.$$

Одержане рівняння рівносильне сукупності двох однорідних рівнянь

$$\sin x + \cos x = 0 \text{ і } 2\sin^2 x - \cos^2 x = 0,$$

розв'язуючи які, ожержимо

$$\operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in Z \text{ або}$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{2}, \quad x = \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Приклад 9.17. Розв'язати рівняння

$$\sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

Розв'язання. Згрупуємо перший член з третім, другий з четвертим, і кожну групу звернемо в добуток. Маємо

$$(\sin x + \sin 2x) + (\cos x + \cos 2x) = 0,$$

$$2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0,$$

$$2 \cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2}\right) = 0,$$

$$2 \cos \frac{x}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + \cos \frac{3x}{2}\right) = 0,$$

$$4 \cos \frac{x}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0.$$

Одержане рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

1) $\cos \frac{x}{2} = 0, \ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ x = \pi + 2\pi n, \ n \in Z;$

2) $\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 0, \ \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$ $k \in Z;$

3) $\cos \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0, \ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi l, \ x = \frac{3\pi}{4} + \pi l,$ $l \in Z.$

Відповідь: $\pi + 2\pi n, \ n \in Z; \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z;$ $\frac{3\pi}{4} + \pi l, \ l \in Z.$

Розв'язання рівнянь перетворенням добутку тригонометричних функцій в суму

Приклад 9.18. Розв'язати рівняння

$$\sin x \sin 2x - \cos 4x \cos 5x = 0.$$

Розв'язання.

$$\frac{1}{2} (\cos x - \cos 3x) - \frac{1}{2} (\cos 9x + \cos x) = 0,$$

$$\cos 3x + \cos 9x = 0, \quad 2 \cos 6x \cos 3x = 0.$$

Дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l}\cos 6x = 0,\\ \cos 3x = 0,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{6},\ \ k \in Z,\\[2ex] x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3},\ \ n \in Z.\end{array}\right.$$

Одержали дві сукупності чисел. Перевіримо, чи немає чисел, що належать обом сукупностям одночасно. Для цього розв'яжемо рівняння

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ \ 1 + 2k = 2 + 4n,\ \ k, n \in Z.$$

Одержане рівняння не має розв'язків в цілих числах, оскільки його ліва частина — непарне число, а права — парне.

Відповідь: $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{6}$, $k \in Z$; $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Приклад 9.19. Розв'язати рівняння

$$\sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x + \sin 2x.$$

Розв'язання. Після перетворення добутків тригонометричних функцій в суми одержимо

$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x) + \sin 2x \ \text{ або}$$

$$\frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sin 4x + \sin 2x,$$

$$\sin 4x + \sin 2x = 0,\ \ 2\sin 3x \cos x = 0.$$

Дане рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0,\\ \cos x = 0,\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi k}{3},\ \ k \in Z,\\[2ex] x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z.\end{array}\right.$$

Перевірте самостійно, що одержані дві сукупності не мають спільних чисел.

Відповідь: $\dfrac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Приклад 9.20. Розв'язати рівняння

$$\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}+\sin 2x\cos 7x=0.$$

Розв'язання.

$$\frac{1}{2}(\sin 5x+\sin 2x)+\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin 2x)+$$

$$+\frac{1}{2}(\sin 9x-\sin 5x)=0,$$

$$\sin 3x+\sin 9x=0,\quad 2\sin 6x\cos 3x=0.$$

Звідси

$$\left[\begin{array}{l}\sin 6x=0,\\ \cos 3x=0,\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{6},\quad k\in Z,\\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{3},\quad n\in Z.\end{array}\right.$$

Сукупність чисел вигляду $\frac{\pi k}{6}$ містить сукупність чисел вигляду $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$.

Відповідь: $\frac{\pi k}{6}$, $k\in Z$.

Розв'язання рівнянь із застосуванням формул зниження ступеня

Приклад 9.21. Розв'язати рівняння

$$\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x.$$

Розв'язання. Знижуючи другі степені і зводячи подібні члени, одержимо

$$\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}+\frac{1-\cos 12x}{2},$$

$$\cos 6x+\cos 8x=\cos 10x+\cos 12x,$$

$$2\cos 7x\cos x=2\cos 11x\cos x,$$

$$\cos x(\cos 7x-\cos 11x)=0,$$

$$\cos x\sin 9x\sin 2x=0,$$

звідки

1) $\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z;$

2) $\sin 2x = 0,\ x = \frac{\pi n}{2},\ n \in Z;$

3) $\sin 9x = 0,\ x = \frac{\pi l}{9},\ l \in Z.$

Множина чисел $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$ містить множину $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Знайдемо спільні числа множин $x = \frac{\pi n}{2}$ і $x = \frac{\pi l}{9}$.

$$\frac{\pi n}{2} = \frac{\pi l}{9};\ n = \frac{2l}{9},\ l = 9r,\ r \in Z.$$

Відповідь: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $\frac{\pi l}{9}$, $l \in Z$; $l \neq 9r$, $r \in Z$.

Приклад 9.22. Розв'язати рівняння

$$\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{15}{16}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{1 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)}{2}\right)^2 = \frac{15}{16},$$

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sin 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 - \sin 2x}{2}\right)^2 = \frac{15}{16},$$

звідки $1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\sin 2x +$

$+ \sin^2 2x + 1 - 2\sin 2x + \sin^2 2x = \frac{15}{4}$ або

$$4 - 2\cos 2x + \sin^2 2x = \frac{15}{4},$$

і, нарешті, $4\cos^2 2x + 8\cos 2x - 5 = 0$. Розв'язуючи це рівняння і враховуючи, що $|\cos 2x| \le 1$, знаходимо: $\cos 2x = \frac{1}{2}$, звідки $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, де $k \in Z$.

Рівняння, лінійні відносно $\sin x$ і $\cos x$

Рівняння вигляду $a\sin x + b\cos x = c$, *де* a, b *і* c *— постійні коефіцієнти, називаються* ***лінійними відносно*** $\sin x$ *і* $\cos x$.

Розглянемо випадок, коли $a \ne 0$, $b \ne 0$, $c \ne 0$, оскільки у випадках $a = 0$ або $b = 0$, або $c = 0$ рівняння розв'язуються за допомогою методів, розглянутих вище.

Розглянемо способи розв'язання даного рівняння.

I спосіб. Зводимо дане рівняння до однорідного другого ступеня відносно $\sin\frac{x}{2}$ і $\cos\frac{x}{2}$, записавши його у вигляді

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = c\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right),$$

звідки $(b + c)\sin^2\frac{x}{2} - 2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + (c - b)\cos^2\frac{x}{2} = 0$.

II спосіб. Якщо дане рівняння не має розв'язку $x = \pi + 2\pi k$, де $k \in Z$, то його можна звести до квадратного відносно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, використовуючи формули

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \quad \text{і} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

III спосіб. Дане рівняння можна розв'язати за допомогою введення допоміжного аргумента. Розділимо обидві частини рівняння на $a \ne 0$. Одержимо:

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}.$$

Нехай $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Тоді $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$ і рівняння прийме вигляд $\sin x + \operatorname{tg}\varphi\cos x = \frac{c}{a}$, звідки

$$\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{a} \cos \varphi \quad \text{або}$$

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi.$$

Якщо $\left|\frac{c}{a} \cos \varphi\right| \leq 1$, то рівняння має розв'язок

$$x + \varphi = (-1)^k \arcsin \left(\frac{c}{a} \cos \varphi\right) + k\pi \quad \text{і}$$

$$x = (-1)^k \arcsin \left(\frac{c}{a} \cos \varphi\right) - \varphi + k\pi, \quad \text{де} \quad k \in Z.$$

Приклад 9.23. Розв'язати рівняння

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5.$$

Розв'язання. I спосіб. Зводим дане рівняння до однорідного відносно $\sin \frac{x}{2}$ і $\cos \frac{x}{2}$.

$$6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 4 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) = 5 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}\right),$$

$$9 \sin^2 \frac{x}{2} - 6 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0,$$

звідки $9 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$, $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$,

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, \quad x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

II спосіб. Застосуємо формули

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \text{і} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Рівняння прийме вигляд

$$\frac{6 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{4 - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 5.$$

Позначимо $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$, попередньо перевіривши, що числа вигляду $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$ не є коренями вихідного рівняння. Маємо $\frac{6z}{1 + z^2} + \frac{4 - 4z^2}{1 + z^2} = 5$, звідки $9z^2 - 6z + 1 = 0$, $z = \frac{1}{3}$. Тоді $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$,

$$x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

III спосіб. Запишемо рівняння у вигляді

$$\sin x + \frac{4}{3}\cos x = \frac{5}{3}.$$

Нехай $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Тоді $\frac{4}{3} = \operatorname{tg}\varphi$ і рівняння прийме вигляд $\sin x + \operatorname{tg}\varphi\cos x = \frac{5}{3}$ або

$$\sin x\cos\varphi + \sin\varphi\cos x = \frac{5}{3}\cos\varphi,$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{5}{3}\cos\varphi.$$

Оскільки $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = \frac{3}{5},$$

то $\sin(x + \varphi) = 1$, $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} - \varphi + 2\pi n$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$ або

$$x = \operatorname{arcctg}\frac{4}{3} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Ще раз звернемо увагу на той факт, що при розв'язанні рівняння різними способами одержали дві на перший погляд різних відповіді. Насправді ж ці відповіді співпадають.

Покажемо, що $\operatorname{arcctg}\frac{4}{3} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Зрозуміло, що

$$0 < \operatorname{arcctg}\frac{4}{3} < \frac{\pi}{2} \text{ і } 0 < 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}.$$

Крім того, $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.

1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4}$;

2) $$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}.$$

Таким чином, одержали відповідь:

$$x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z \text{ або}$$

$$x = \operatorname{arcctg}\frac{4}{3} + 2\pi n,\ \ n \in Z.$$

Рівняння, симетричні відносно $\sin x$ і $\cos x$

Приклад 9.24. Розв'язати рівняння

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

Розв'язання. Нехай $\sin x + \cos x = u$, тоді

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = u^2,$$

звідки $\sin x\cos x = \frac{u^2-1}{2}$. З вихідного рівняння одержуємо $u + \frac{u^2-1}{2} = 1$ або $u^2 + 2u - 3 = 0$.

Розв'язуючи дане рівняння, одержимо

$$u_1 = 1,\ \ u_2 = -3.$$

Тому дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\sin x + \cos x = 1 \text{ і } \sin x + \cos x = -3,$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Очевидно, що друге з цих рівнянь не має розв'язків. Розв'язуючи перше рівняння, одержимо

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad n\in Z.$$

Приклад 9.25. Розв'язати рівняння

$$\frac{\sin x+\cos x-1}{\sin x+\cos x-2}=\frac{4(\sin x+\cos x)}{9-3\sin 2x}.$$

Розв'язання. Заміною $\sin x+\cos x=u$ зводимо це рівняння до раціонального: $\dfrac{u-1}{u-2}=\dfrac{4u}{9+3(1-u^2)}$.

Розв'язуючи одержане рівняння, знаходимо $u_1=\dfrac{2}{3}$ і $u_2=-3$ (не задовольняє умові). Отже, дане рівняння рівносильне рівнянню $\sin x+\cos x=\dfrac{2}{3}$ або $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, звідки знаходимо

$$x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}+2\pi n, \quad n\in Z.$$

Рівняння, що розв'язуються заміною аргумента

Приклад 9.26. Розв'язати рівняння

$$\cos x=\sin^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{3}\right).$$

Розв'язання. Позначивши $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{3}=y$, знайдемо $x=\dfrac{\pi}{2}-3y$ і перепишемо рівняння в вигляді

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-3y\right)=\sin^2 y, \quad \sin 3y=\sin^2 y.$$

Використовуючи формулу $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, одержимо $3\sin y-4\sin^3 y=\sin^2 y$,

$$4\sin^3 y + \sin^2 y - 3\sin y = 0,$$

$$\sin y\,(\sin y + 1)\,(4\sin y - 3) = 0.$$

Одержане рівняння рівносильне сукупності рівнянь $\sin y = 0$, $\sin y = -1$, $\sin y = \frac{3}{4}$, розв'язуючи які, знаходимо $y = \pi n$, $n \in Z$; $y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi f$, $f \in Z$; $y = \pm(-1)^k \arcsin\frac{3}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Повертаючись до підстановки, будемо мати

$$x = \frac{\pi}{2} - 3\pi n,\ \ n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{2} - 3\cdot(-1)^k \arcsin\frac{3}{4} + 3\pi k,\ \ k \in Z;$$

$$x = 2\pi - 6\pi f,\ \ f \in Z.$$

Приклад 9.27. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Розв'язання. Позначаючи $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = y$, перепишемо рівняння у вигляді $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) = \operatorname{tg}^3 y$, або

$$\operatorname{ctg} 2y = \operatorname{tg}^3 y\ \ (2y \neq \pi n,\ \ n \in Z).$$

Переходячи до функції $\operatorname{tg} y$, отримаємо біквадратне рівняння $2\operatorname{tg}^4 y + \operatorname{tg}^2 y - 1 = 0$, розв'язуючи яке, знаходимо $\operatorname{tg} y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Таким чином, $y = \pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Повертаючись до x, отримуємо

$$x = \frac{\pi}{2} \mp 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z.$$

Рівняння, що розв'язуються за допомогою універсальної підстановки

Всі тригонометричні функції аргумента α раціонально виражаються через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Треба мати на увазі, що при використанні універсальної підстановки можна загубити корені рівняння, оскільки область визначення рівняння може звузитись. Тому при розв'язуванні рівняння цим методом необхідно перевіряти, чи є числа $\pi + 2\pi k$ коренями даного рівняння.

Приклад 9.28. Розв'язати рівняння

$$\sin 4x + \operatorname{tg} 2x = 2.$$

Розв'язання. I спосіб. Виражаючи $\sin 4x$ через $\operatorname{tg} 2x$, отримуємо рівняння

$$\frac{2\operatorname{tg} 2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x} + \operatorname{tg} 2x = 2,$$

рівносильне даному, котре після очевидних спрощень приводиться до кубічного рівняння відносно $\operatorname{tg} 2x$:

$$\operatorname{tg}^3 2x - 2\operatorname{tg}^2 2x + 3\operatorname{tg} 2x - 2 = 0.$$

Ліва частина цього рівняння розкладається на множники: $(\operatorname{tg} 2x - 1)(\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x + 2) = 0$.

Розв'язуючи рівняння $\operatorname{tg} 2x - 1 = 0$, знаходимо

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z.$$

Друге рівняння не має дійсних коренів.

Треба зазначити, що загальний метод раціоналізації не завжди є прийнятним, а часто приводить до раціональних рівнянь вищих ступенів. Розв'язане вище рівняння можна розв'язувати й інакше.

II спосіб. Запишемо рівняння у вигляді

$$\operatorname{tg} 2x - 1 = 1 - \sin 4x,$$

$$\frac{\sin 2x - \cos 2x}{\cos 2x} = (\sin 2x - \cos 2x)^2,$$

$$(\sin 2x - \cos 2x)\left(\frac{1}{\cos 2x} - \sin 2x + \cos 2x\right) = 0,$$

і дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь: однорідного $\sin 2x - \cos 2x = 0$ і рівняння, що зводиться до однорідного $\frac{1}{\cos 2x} - \sin 2x + \cos 2x = 0$.

Вправи

Розв'язати рівняння:

9.29. *а*) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *д*) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *е*) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\operatorname{tg} x = 1$; *ж*) $\operatorname{tg} x = -1$;

г) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; *з*) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

9.30. *а*) $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$;

б) $\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$;

в) $\cos^2 x + \cos x - 6 = 0$.

9.31. *а*) $2\cos^2 x = 3\sin x$;

б) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x$;

в) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x = 2$.

9.32. *а*) $5\sin^2 x = 2\sin x$;

б) $\sin^3 2x - \sin 2x = 0$;

в) $\sin 2x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$.

9.33. *а)* $\text{tg}^3\, x + \text{tg}^2\, x - 2\ \text{tg}\ x - 2 = 0$;

б) $1 - \cos x = \text{tg}\ x - \sin x$;

в) $2 \sin x\ \text{tg}\ x - \sin x - 2\ \text{tg}\ x + 1 = 0$.

9.34. *а)* $\sin x - 2 \cos x = 0$;

б) $\cos^2 x - 3 \sin^2 x = 0$;

в) $3 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x = 0$.

9.35. *а)* $\sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 7 \cos^2 x = 0$;

б) $2 \sin^4 2x - 9 \sin^3 2x \cos 2x + 7 \sin^2 2x \cos^2 2x = 0$;

в) $3 \sin^2 x \cos x - 4 \sin x \cos^2 x + \cos^3 x = 0$.

9.36. *а)* $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 1 = 0$;

б) $8 \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x = 4$.

9.37. Знайдіть залежність між α і β, якщо

а) $\sin \alpha = \cos \beta$;

б) $\sin \alpha = - \sin \beta$;

в) $\cos \alpha = - \cos \beta$.

Розв'язати рівняння:

9.38. *а)* $\text{tg}\ x = \text{tg}\ 2x$;

б) $\sin 3x = \cos 2x$;

в) $\text{tg}\ 2x - \text{ctg}\ 3x = 0$.

9.39. $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}\,(\cos x - \sin 3x)$.

9.40. $7 + 4 \sin x \cos x + 1{,}5\,(\text{tg}\ x + \text{ctg}\ x) = 0$.

9.41. $\dfrac{4\ \text{ctg}\ x}{1 + \text{ctg}^2\, x} + \sin^2 2x + 1 = 0$.

9.42. $\dfrac{\sin^2 2x - 4 \sin^2 x}{\sin^2 2x + 4 \sin^2 x - 4} + 1 = 2\ \text{tg}^2\, x$.

9.43. $\text{tg}\ 3x - \text{tg}\ x - 4 \sin x = 0$.

9.44. $\cos^{-1} 3x - 6 \cos 3x = 4 \sin 3x$.

9.45. $\text{ctg}\ x - \sin x = 2 \sin^2 \dfrac{x}{2}$.

9.46. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\operatorname{ctg}3x+\sin(\pi+2x)-$

$-\sqrt{2}\cos 5x=0.$

9.47. $\sin x\cos 2x+\cos x\cos 4x=$

$=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right).$

9.48. $\sin 2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}.$

9.49. $(1+\cos 4x)\sin 2x=\cos^2 2x.$

9.50. $\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x=2.$

9.51. $\operatorname{ctg}^4 2z+\sin^{-4} 2z=25.$

9.52. $\operatorname{tg}2x\cos 3x+\sin 3x+\sqrt{2}\sin 5x=0.$

9.53. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\operatorname{tg}^2 x=(\cos 2x-1)\cos^{-2}x.$

9.54. $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}-\sin x\sin 3x-\sin 2x\sin 3x=0.$

9.55. $1-\sin 3x=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2.$

9.56. $2\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x-$

$-\cos^3 x=0.$

9.57. $\sin 7x+\sin 9x=2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)\right).$

9.58. $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}3x=0$

9.59. $\cos^{-1}x+\operatorname{ctg}3x=\operatorname{ctg}\frac{3x}{2}.$

9.60. $2\operatorname{tg}^3 x-2\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg}x-3=0.$

9.61. $\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 12x.$

9.62. $\sin 2x\sin 6x-\cos 2x\cos 6x=$

$=\sqrt{2}\sin 3x\cos 8x.$

9.63. $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0.$

9.64. $\sin 3x\cos 3x=\sin 2x.$

9.65. $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0.$

9.66. $2\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) = \cos x.$

9.67. $8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x - \cos x + 1 = 0.$

9.68. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - 6x\right).$

9.69. $\cos 3x = 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right).$

9.70. $\cos 4x + 2 \sin^2 x = 0.$

9.71. $3 \sin 5z - 2 \cos 5z = 3.$

9.72. $1 - \cos 6x = \operatorname{tg} 3x.$

9.73. $\sin 9x = 2 \sin 3x.$

9.74. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$

9.75. $\cos 2x = \sqrt{2}\,(\cos x - \sin x).$

9.76. $(\sin^{-1} z + \cos^{-1} z)(\sin z + \cos z) + 2 = 0.$

9.77. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2 \cos 3x.$

9.78. $\cos x - \sqrt{3} \sin x + \cos 3x$

9.79. $6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2.$

9.80. $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x.$

9.81. $\sin z - \sin^2 z = \cos^2 z - \cos z.$

9.82. $\sin z + \sin 2z + \sin 3z = \cos z + \cos 2z + \cos 3z.$

9.83. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} z + 2\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + \frac{1}{\operatorname{tg} x - 1}\right) = 4.$

9.84. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0{,}5.$

9.85. $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \sin 2x \cos 2x.$

9.86. $2 \cos 2x + 2 \operatorname{tg}^2 x = 5.$

9.87. $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x} + 2 = 0.$

9.88. $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x = 2 \sin 4x$

9.89. $\cos 9x - 2 \cos 6x = 9.$

9.90. $\sin 2x + 2 \operatorname{ctg} x = 3.$

9.91. $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{5}{8}.$

9.92. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ.$

9.93. $\cos x - \sin x = 4 \cos x \sin^2 x.$

9.94. $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} + t\right) = \sin t + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{8} - t\right).$

9.95. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} x = 1.$

9.96. $\sin^3 x (1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x (1 + \operatorname{tg} x) =$

$= 2\sqrt{\sin x \cos x}.$

9.97. $\dfrac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} + 2 \cdot \dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} - 3 = 0.$

9.98. $\dfrac{1 - \sin^6 x - \cos^6 x}{1 - \sin^4 x - \cos^4 x} = 2 \cos^2 3x$

9.99. $(\sin x + \cos x)^4 + (\sin x - \cos x)^4 = 3 - \sin 4x.$

9.100. $\cos x \cos 2x \sin 3x = 0{,}25 \sin 2x.$

9.101. $\dfrac{1}{2} \sin 4x \sin x + \sin 2x \sin x = 2 \cos^2 x.$

9.102. $\sin^3 z \sin 3z + \cos^3 z \cos 3z = \cos^3 4z.$

9.103. $2 \sin^4 t(\sin 2t - 3) - 2 \sin^2 t (\sin 2t - 3) - 1 = 0.$

9.104. $\sin 2x - 2 \cos^2 x +$

$+ 4 (\sin x - \cos x + \operatorname{tg} x - 1) = 0.$

9.105. $4 \sin 2x \sin 5x \sin 7x - \sin 4x = 0.$

9.106. $2 (\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = \cos 2x.$

9.107. $\operatorname{tg} z \operatorname{tg} 2z = \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} 2z.$

9.108. $\sin 2z - \sin 6z + 2 = 0$

9.109. $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2 \cos x - \sin z} = \cos 2x.$

9.110. $4 \cos x = \sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 1.$

§10. Нестандартні тригонометричні рівняння

Досить часто зустрічаються задачі, що не розв'язуються стандартними методами, за допомогою звичних шкільних міркувань.

Деякі з цих задач зовнішньо мають дуже незвичний вигляд, і тому незрозуміло, як до них підступитись. Інші замасковані: з першого погляду, наприклад, це звичайне рівняння, але стандартними прийомами воно не розв'язується. Цей тип задач умовно назвемо нестандартними. Вони потребують для розв'язування кмітливості, вільного володіння різними розділами математики і високої логичної культури.

Неможливо вказати всі методи розв'язання нестандартних задач. Тут доводиться застосовувати і графіки, і самі різні властивості функцій, і нерівності, і, нарешті, перше за важливістю — логіку.

Приклад 10.1. Розв'язати рівняння

$$\cos 3x \cdot \sin 5x = 1.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$\sin 8x + \sin 2x = 2.$$

Оскільки $|\sin \alpha| \le 1$, останнє рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \sin 8x = 1, \\ \sin 2x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 8x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z, \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi n}{4}, \quad n \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язки рівняння в цілих числах:

$$\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad n, \ k \in Z,$$

звідки $1 + 4n = 4 + 16k$.

Розв'язків немає, оскільки права частина останньої рівності — парне число, а ліва — непарне. Значить, отримана система рівнянь несумісна і вихідне рівняння не має розв'язку.

Приклад 10.2. Розв'язати рівняння

$$\cos x \cos 4x = \frac{1}{\cos 5x}.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$\cos 5x + \cos 3x = \frac{2}{\cos 5x},$$

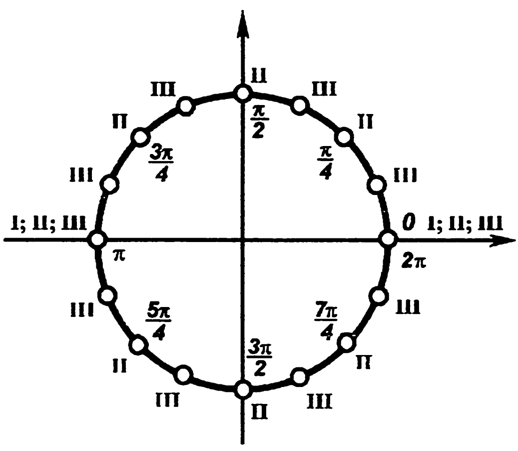
$$\cos^2 5x + \cos 5x \cos 3x = 2 \text{ або}$$

$$1 + \cos 10x + \cos 8x + \cos 2x = 4,$$

звідки $\cos 2x + \cos 8x + \cos 10x = 3$.

Отримане рівняння виконується тільки при тих значеннях x, при яких одночасно $\cos 2x = 1$, $\cos 8x = 1$, $\cos 10x = 1$, тобто отримане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos 8x = 1, \\ \cos 10x = 1, \end{cases}$$



Мал. 8

звідки

$$\left[\begin{array}{ll} x = \pi k, \quad k \in Z, & \text{(I)} \\ x = \dfrac{\pi n}{4}, \quad n \in Z, & \text{(II)} \\ x = \dfrac{\pi m}{5}, \quad m \in Z. & \text{(III)} \end{array}\right.$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь на колі, одержимо $x = \pi f$, $f \in Z$ (мал. 8).

Приклад 10.3. Розв'язати рівняння

$$\sin^{1986} x + \cos^{1917} x = 1.$$

Розв'язання. Оскільки $|\sin x| \le 1$ и $|\cos x| \le 1$, то

$$\sin^{1986} x \le \sin^2 x, \quad \cos^{1917} x \le \cos^2 x.$$

Тоді $\sin^{1986} x + \cos^{1917} x \le 1$. Ліва частина даного рівняння не перевищує одиниці і дорівнює одиниці тільки у випадку, коли виконується система рівнянь

$$\begin{cases} \cos^{1917} x = \cos^2 x, \\ \sin^{1986} x = \sin^2 x. \end{cases}$$

Перше рівняння задовольняється при $\cos x = 0$ і $\cos x = 1$. Але при цих значеннях x друге рівняння системи також задовольняється: якщо $\cos x = 0$, то $\sin^2 x = 1$, а якщо $\cos x = 1$, то $\sin x = 0$. Тому розв'язками системи, а разом з нею і вихідного рівняння, будуть $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ або $x = 2\pi k$, де k — будь-яке ціле число.

Приклад 10.4. Розв'язати рівняння

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = y^2 - 4y + 5.$$

Розв'язання. I спосіб. При $x \ne \pi + 2k\pi$, $k \in Z$ рівняння можна записати у вигляді $\sin x = (y - 2)^2 + 1$. Оцінимо ліву і праву частини рівняння:

$$\sin x \le 1, \quad (y-2)^2 + 1 \ge 1.$$

Значить, рівняння буде мати розв'язки тільки при виконанні умови

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ (y-2)^2 + 1 = 1, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z, \\ y = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z, \ y = 2.$

II спосіб. Оскільки ліва частина рівняння при $x \ne \pi + 2k\pi, \ k \in Z$, дорівнює $\sin x$, дане рівняння можна записати у вигляді $y^2 - 4y + (5 - \sin x) = 0$, і розглянемо його як квадратне відносно y.

Це рівняння має корені з тих і тільки тих значень x, при яких дискримінант

$$D = \sin x - 1 \ge 0.$$

Звідси випливає, що $\sin x = 1$. Тоді

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z, \ y = 2.$$

Приклад 10.5. Розв'язати рівняння

$$\sin \frac{x}{4} + 2 \cos \frac{x - 2\pi}{3} = 3.$$

Розв'язання. Оцінимо ліву частину рівняння:

$$\sin \frac{x}{4} \le 1 \ \text{ і } \ 2 \cos \frac{x - 2\pi}{3} \le 2,$$

отже, $\sin \dfrac{x}{4} + 2 \cos \dfrac{x - 2\pi}{3} \le 3$, звідки випливає, що дане рівняння може мати розв'язки лише якщо

$$\begin{cases} \sin \dfrac{x}{4} = 1, \\ 2 \cos \dfrac{x - 2\pi}{3} = 2. \end{cases}$$

Розв'язуючи кожне рівняння системи, отримаємо

$$\begin{cases} x = 2\,(4k + 1)\,\pi, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ x = 2\,(3n + 1)\,\pi, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

Ця система має розв'язки тоді і тільки тоді, коли рівняння $4k + 1 = 3n + 1$ має цілі розв'язки. Розв'язуючи його, отримаємо $4k = 3n$, звідки $k = \frac{3n}{4}$. Якщо $n = 4t$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то $k = 3t$ — ціле, і тоді

$$x = 2\,(12t + 1)\,\pi, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Ця формула містить всі розв'язки даного рівняння.

Приклад 10.6. Розв'язати рівняння

$$2 \cos^6 x \cos^{10} x = \operatorname{tg}^8 x + \operatorname{ctg}^8 x.$$

Розв'язання. Очевидно, що при всіх допустимих значеннях x

$$\operatorname{tg}^8 x + \operatorname{ctg}^8 x \ \geq\ 2\sqrt{\operatorname{tg}^8 x \operatorname{ctg}^8 x} = 2.$$

Оцінюючи ліву частину рівняння, зауважимо, що $2 \cos^6 x \cos^{10} x \leq 2$. Тому якщо задане рівняння має розв'язок, то при тих значеннях x, при яких одночасно мають розв'язки два рівняння:

$$\operatorname{tg}^8 x + \operatorname{ctg}^8 x = 2 \ \text{ и } \ \cos^6 x \cos^{10} x = 1.$$

Розв'язками першого з них є $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. Оскільки ці значення x не задовільняє друге рівняння, то дане рівняння не має розв'язку.

Приклад 10.7. Розв'язати рівняння

$$\arccos\,(x^3 + xy^2) + \arccos\,(x^2y + y^3) = 2\pi.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\arccos\,(x^3 + xy^2) \leq \pi \ \text{ и } \ \arccos\,(x^2y + y^3) \leq \pi,$$

то дане рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \arccos\,(x^3 + xy^2) = \pi, \\ \arccos\,(x^2y + y^3) = \pi, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x\,(x^2 + y^2) = -\,1, \\ y\,(x^2 + y^2) = -\,1. \end{cases}$$

Визначаючи дійсні розв'язки цієї системи рівнянь, отримаємо $x = y = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Приклад 10.8. Розв'язати рівняння

$$x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{x-y} + 1 = 0.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\left(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{x-y} + \cos^2\frac{\pi}{x-y}\right) + \left(1 - \cos^2\frac{\pi}{x-y}\right) = 0 \text{ или}$$

$$\left(x - \cos\frac{\pi}{x-y}\right)^2 + \sin^2\frac{\pi}{x-y} = 0.$$

Це рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} x - \cos\dfrac{\pi}{x-y} = 0, \\ \sin\dfrac{\pi}{x-y} = 0. \end{cases}$$

Оскільки рівняння $\sin\dfrac{\pi}{x-y} = 0$ рівносильне сукупності двох рівнянь

$$\cos\frac{\pi}{x-y} = 1 \text{ і } \cos\frac{\pi}{x-y} = -\,1,$$

то остання система рівнянь рівносильна сукупності двох систем

$$\begin{cases} x - \cos\dfrac{\pi}{x-y} = 0, \\ \cos\dfrac{\pi}{x-y} = 1 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x - \cos\dfrac{\pi}{x-y} = 0, \\ \cos\dfrac{\pi}{x-y} = -\,1. \end{cases}$$

Розв'язуючи першу з цих систем, знаходимо $x = 1$. Тоді $\cos\dfrac{\pi}{y-1} = 1$, звідки

$$\frac{\pi}{y-1} = 2\pi k, \ \ k \in Z \ \text{ и } \ y = 1 + \frac{1}{2k}, \ \ k \in Z, \ \ k \neq 0.$$

Аналогічно розв'язуючи другу систему, знайдемо $x = -1$ і $y = -1 + \dfrac{1}{2n+1}$, $n \in Z$. Тому дане рівняння має такі розв'язки:

$$x_1 = 1, \ \ y_1 = 1 + \frac{1}{2k}, \ \ k \in Z;$$

$$x_2 = -1, \ \ y_2 = -1 + \frac{1}{2n+1}, \ \ n \in Z.$$

Приклад 10.9. Розв'язати рівняння

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2 (x + y).$$

Розв'язання. Застосовуючи нерівність Коші, маємо:

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 2\,\frac{\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y}{2} +$$

$$+ 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y \geq 2\sqrt{\operatorname{tg}^4 x \operatorname{tg}^4 y} + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y =$$

$$= 2(\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y) =$$

$$= 4\,\frac{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y}{2} \geq$$

$$\geq 4\sqrt{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y} = 4.$$

Тому $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y \geq 4$. З іншого боку, очевидно $3 + \sin^2 (x + y) \leq 4$.

Дане рівняння має розв'язки тоді і тільки тоді, коли обидві його частини дорівнюють 4. Тому дане рівняння рівносильне системі двох рівнянь:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 4, & (*) \\ 3 + \sin^2 (x + y) = 4, & (**) \end{cases}$$

З рівняння (**) маємо

$$\sin^2 (x + y) = 1 \ \text{ або } \ \cos (x + y) = 0,$$

звідки

$$x + y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ \ k \in Z \ \text{ або } \ y = \frac{\pi}{2} - x + k\pi, \ \ k \in Z.$$

Це значення y підставляємо в рівняння (*). Отримаємо $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + 2\operatorname{tg}^2 x \operatorname{ctg}^2 x = 4$ або

$$(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x)^2 = 4,$$

звідки, оскільки $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x > 0$,

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2.$$

Розв'язуючи це рівняння, знайдемо $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. Тоді $y = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right) + k\pi = \frac{\pi}{4} + \pi\left(k - \frac{n}{2}\right)$.

Отже, дане рівняння має такі розв'язки:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \quad \text{і} \quad y = \frac{\pi}{4} + \left(k - \frac{n}{2}\right)\pi, \quad n, k \in Z.$$

Приклад 10.10. При яких значеннях параметра a рівняння $1 + \sin^2 ax = \cos x$ має один корінь?

Розв'язання. Очевидно, при будь-якому значенні x

$$1 + \sin^2 ax \geq 1 \quad \text{і} \quad \cos x \leq 1.$$

Тому дане рівняння рівносильне системі двох рівнянь

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin ax = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x = 2\pi k, \quad k \in Z, \\ ax = \pi n, \quad n \in Z. \end{cases}$$

З останньої системи виключаємо x. Отримаємо:

$$2ak\pi = \pi n \quad \text{або} \quad 2ak = n.$$

Якщо a — раціональне число, то, очевидно, існує нескінченна множина цілих чисел k і n, при яких виконується рівняння $2ak = n$.

Отже, при раціональних значеннях a рівняння має нескінченну множину розв'язків.

Якщо a — ірраціональне число, то рівність $2ak = n$ виконується тільки при $k = 0$.

Отже, дане рівняння має єдиний розв'язок при будь-якому ірраціональному значенні параметра a. Цей розв'язок $x = 0$.

Приклад 10.11. Зайти всі пари чисел x, y, що задовольняють рівняння

$$\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y.$$

Розв'язання. Перетворимо ліву частину розв'язуваного рівняння таким чином:

$$\sin^4 x + \frac{1}{\sin^4 x} + \cos^4 x + \frac{1}{\cos^4 x} + 4 =$$

$$= (\sin^4 x + \cos^4 x) + \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x \cos^4 x} + 4 =$$

$$= (\sin^4 x + \cos^4 x)\left(1 + \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x}\right) + 4 =$$

$$= (1 - 2\sin^2 x \cos^2 x)\left(1 + \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x}\right) + 4 =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) + 4.$$

Отже, дане рівняння набуває вигляду

$$(2 - \sin^2 2x)\left(1 + \frac{16}{\sin^4 2x}\right) = 16 + \sin y.$$

Але $2 - \sin^2 2x \geq 1$, $1 + \dfrac{16}{\sin^4 2x} \geq 17$, причому знаки рівності мають місце тоді і тільки тоді, коли $\sin^2 2x = 1$. Тому ліва частина даного рівняння більше або дорівнює 17, а права частина менша або дорівнює 17. Таким чином, дане рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \sin^2 2x = 1, \\ \sin y = 1, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4}(2k + 1), & k \in Z, \\ y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in Z. \end{cases}$$

Вправи

Розв'язати рівняння:

10.12. $2\cos^2\frac{x^2+5x}{6}=2^x+2^{-x}.$

10.13. $\frac{2}{\pi}\arcsin\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]=1-\log_\pi x.$

10.14. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin 100x=100.$

10.15. $\sin x\sin 3x\sin 7x=1.$

10.16. $(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 4x=2.$

10.17. $(\cos 4x-\cos 2x)^2=5+\sin 3x.$

10.18. $x^2+4x\cos(xy)+4=0.$

10.19. $1-2x-x^2=\mathrm{tg}^2(x+y)+\mathrm{ctg}^2(x+y).$

10.20. $(\cos^2 x+\sec^2 x)(1+\mathrm{tg}^2 2y)(3+\sin 3z)=4.$

10.21. $\left(2+\frac{1}{\cos^2 x}\right)(4-2\cos^2 x)=1+5\sin 3y.$

10.22. $(5+3\,\mathrm{cosec}^2 x)(2-\sin^6 x)=7+\cos 2y.$

10.23. $(4-\cos 2x)(2+3\sin y)=12+13\sec^2 3z.$

10.24. $(3-\sin x)(4-\mathrm{cosec}^2 x)=12+\cos^2 y.$

10.25. $\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3}{2}.$

§11. Умовні рівності

Рівності, справедливі при всіх допустимих значеннях аргументів, що задовольняють заданим умовам (умовам зв'язку), називаються ***умовними.***

Умовні рівності I виду

Умовними рівностями I виду *називають рівності, в яких даються співвідношення між аргументами, а доводяться співвідношення між функціями кутів.*

Приклад 11.1. Довести, що якщо $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma$.

Розв'язання. *Синтетичний метод.*

$$\alpha \neq k\pi, \ \beta \neq n\pi, \ \gamma \neq m\pi, \ k, n, m \in Z.$$

Беруть дане або очевидне співвідношення і перетворюють в потрібне:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}, \ \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma, \ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right),$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{ctg} \gamma, \ \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \dfrac{1}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}} = \operatorname{ctg} \gamma,$$

$$\frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1} = \operatorname{ctg} \gamma,$$

$$\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1} = \operatorname{ctg} \gamma,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \gamma,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma.$$

Аналітичний метод.

$$\alpha \neq k\pi, \ \beta \neq n\pi, \ \gamma \neq m\pi, \ k, n, m \in Z.$$

Беруть одну частину (або різницю між частинами рівності, що доводиться) і перетворюють на підставі даних співвідношень:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta), \ \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma =$$

$$= (\mathrm{ctg}\ \alpha + \mathrm{ctg}\ \beta) + \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) =$$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \sin\beta} + \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta)(\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \sin\beta)}{\cos(\alpha + \beta)\sin\alpha \sin\beta} =$$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha \cos\beta}{\cos(\alpha + \beta)\sin\alpha \sin\beta} = \mathrm{tg}\ (\alpha + \beta)\ \mathrm{ctg}\ \alpha\ \mathrm{ctg}\ \beta.$$

Оскільки $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$, то

$$\mathrm{tg}\ (\alpha + \beta)\ \mathrm{ctg}\ \alpha\ \mathrm{ctg}\ \beta = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\mathrm{ctg}\ \alpha\ \mathrm{ctg}\ \beta =$$

$$= \mathrm{ctg}\ \alpha\ \mathrm{ctg}\ \beta\ \mathrm{ctg}\ \gamma.$$

Приклад 11.2. Відомо, що $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Довести, що $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Розв'язання. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma =$

$$= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + \frac{1 + \cos 2\gamma}{2} =$$

$$= \frac{2 + (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + (1 + \cos 2\gamma)}{2} =$$

$$= \frac{2 + 2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + 2\cos^2(\pi - (\alpha + \beta))}{2} =$$

$$= 1 + \cos(\alpha + \beta)(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) =$$

$$= 1 + 2\cos(\alpha + \beta)\cos\alpha\cos\beta =$$

$$= 1 + 2\cos(\pi - \gamma)\cos\alpha\cos\beta = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

що і вимагалось довести.

Приклад 11.3. Відомо, що $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Довести, що $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$.

Розв'язання. $1 - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma =$

$$= 1 - (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))\sin\gamma =$$

$$= 1 - (\sin\gamma + \cos(\alpha - \beta))\sin\gamma =$$

$$= 1 - \sin^2\gamma - \cos(\alpha - \beta)\sin\gamma =$$

$$= 1 - \sin^2\gamma - \frac{1}{2}(\sin(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\gamma - \alpha + \beta)) =$$

$$= 1 - \sin^2\gamma - \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right) =$$

$$= 1 - \sin^2\gamma - \frac{1}{2}(\cos 2\beta + \cos 2\alpha) =$$

$$= -\sin^2\gamma + \frac{2 - \cos 2\beta - \cos 2\alpha}{2} =$$

$$= -\sin^2\gamma + \frac{(1 - \cos 2\beta) + (1 - \cos 2\beta)}{2} =$$

$$= -\sin^2\gamma + \sin^2\beta + \sin^2\alpha,$$

що і вимагалось довести.

Вправи

Довести, що:

11.4. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, якщо $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

11.5. $\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, якщо $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

11.6. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, якщо $\alpha = \beta + \gamma$.

11.7. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, якщо $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

11.8. $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$, якщо $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

11.9. $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = 1$, якщо $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

11.10. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1,$

якщо $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

11.11. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$,

якщо $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

11.12. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, якщо

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

11.13. $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2$, если $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

11.14. $1-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$,

якщо $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

11.15. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$,

якщо $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$.

11.16. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=$

$=1+4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}$,

якщо $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

11.17. $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}=\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma$, якщо $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

11.18. $\sin\gamma=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$, якщо $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

11.19. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=1+$

$+4\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right)$, якщо

$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$.

11.20. $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$, якщо $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

11.21. $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=$

$=4\sin\left(\frac{\pi+A}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi+B}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi+C}{4}\right)$, якщо $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

11.22. $\frac{\sin A}{\sin B\sin C}+\frac{\sin C}{\sin A\sin B}=$

$=\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C$, если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Знаючи, що A, B і C — внутрішні кути деякого трикутника, довести рівності:

11.23. $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A-\sin B-\sin C}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$.

11.24. $\frac{\sin C}{\cos A\cos B}=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B$.

11.25. $\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=$

$=-4\sin 2A\sin 2B\sin 2C$.

11.26. $\frac{1}{\sin A\sin B}+\frac{1}{\sin B\sin C}+\frac{1}{\sin C\sin A}=$

$=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$.

11.27. $\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}\cdot\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}\cdot\frac{\sin C+\sin A}{\cos C+\cos A}=$

$=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

11.28. $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=$

$=1+\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}$.

11.29. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=$

$=\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2}\right)$.

11.30. $\cos 2A+\cos 2B-\sin 2C=$

$=-4\cos C\cos(45^\circ-A)\cos(45^\circ-B)$.

11.31. $\cos^2 A + \cos^2 B = \sin^2 C - 2\cos A \cos B \cos C.$

11.32. $\sin A \sin B \cos C + \sin A \sin C \cos B +$

$+ \sin B \sin C \cos A - \cos A \cos B \cos C = 1.$

11.33. $\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C = 3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} +$

$+ \cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}.$

11.34. $\sin\left(A + \frac{B}{2}\right) + \sin\left(B + \frac{C}{2}\right) + \sin\left(C + \frac{A}{2}\right) + 1 =$

$= 4\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}.$

11.35. $\dfrac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{\sin A + \sin B + \sin C} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$

11.36. $\dfrac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{\sin^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C} = -\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$

11.37. $\dfrac{\cos A}{\sin B \sin C} + \dfrac{\cos B}{\sin A \sin C} + \dfrac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$

Умовні рівності II виду

***Умовними рівностями II виду** називають рівності, в яких вимагається довести деяке співвідношення між тригонометричними функціями, якщо задані інші співвідношення між тригонометричними функціями тих же аргументів.*

Способи розв'язання задач даного виду: *а*) безпосередньо доводиться те, що вимагається, використовуючи при цьому задану умову; *б*) перетворенням заданого співвідношення до вигляду шуканого.

Приклад 11.38. Довести, що

$$\frac{1 + \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{m + n} = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{m - n},$$

якщо $\dfrac{\sin\beta}{\sin(2\alpha + \beta)} = \dfrac{n}{m}.$

Розв'язання. Перш за все зазначимо, що $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. Крім того, $2\alpha + \beta \neq \pi k$, де k — ціле число, і $m(m-n)(m+n) \neq 0$.

Рівність, що доводиться, рівносильна рівності

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta)} = \frac{m+n}{m-n} \text{ або } \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{m+n}{m-n}.$$

Застосовуючи похідну пропорцію, отримаємо

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(\alpha+\beta)} = \frac{m+n-m+n}{m-n+m+n} \text{ або}$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)} = \frac{n}{m}.$$

Отже, додатковою умовою є рівність, рівносильна рівності, що доводиться, отже, остання рівність справедлива.

Приклад 11.39. Довести, що

$$\sin(\alpha+\beta) = 3\sin(\alpha-\beta),$$

якщо $\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$.

Розв'язання. Зазначимо, що

$$\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad \beta \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta, \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\beta}{\cos\beta},$$

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),$$

звідки $\sin(\alpha+\beta) = 3\sin(\alpha-\beta)$, що і вимагалось довести.

Приклад 11.40. Довести, що $A^2 = B^2 - C^2$, якщо $A = B\sin\alpha$ і $A\cos\alpha = C\sin\alpha$, $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$.

Розв'язання. З умови маємо:

$$\begin{cases} A^2 = B^2 \sin^2 \alpha, \\ A^2 \cos^2 \alpha = C^2 \sin^2 \alpha. \end{cases}$$

Віднімаючи від верхньої рівності нижню, маємо $A^2 \sin^2 \alpha = (B^2 - C^2) \sin^2 \alpha$, звідки, беручі до уваги, що $\sin \alpha \neq 0$, маємо: $A^2 = B^2 - C^2$.

Приклад 11.41. Довести, що $\operatorname{ctg} \beta = \dfrac{p+q}{p-q} \operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{p}{q}$.

Розв'язання. Зазначимо, що $\alpha - \beta \neq \pi n$, $q \neq 0$, $\alpha \neq \pi k$, $\beta \neq \pi f$, $p \neq q$, $k, n, f \in Z$.

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{p}{q}, \quad \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} = \frac{p}{q}.$$

Розділивши чисельник і знаменник дробу, що стоїть в лівій частині даної рівності, на $\sin \alpha \sin \beta$, маємо

$$\frac{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{p}{q},$$

звідки, застосовуючи похідну пропорцію, отримаємо $\operatorname{ctg} \beta = \dfrac{p+q}{p-q} \operatorname{ctg} \alpha$, що і вимагалось довести.

Приклад 11.42. Довести, що

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin \beta}{\cos \beta - A},$$

якщо $\sin \alpha = A \sin(\alpha+\beta)$, $\cos \beta \neq A$, $\alpha + \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Розв'язання. $\sin \alpha = A \sin(\alpha+\beta)$,

$$\sin((\alpha+\beta) - \beta) = A \sin(\alpha+\beta),$$

$$\sin(\alpha+\beta) \cos \beta - \cos(\alpha+\beta) \sin \beta = A \sin(\alpha+\beta),$$

$$\sin(\alpha+\beta)(\cos \beta - A) = \cos(\alpha+\beta) \sin \beta,$$

звідки $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin \beta}{\cos \beta - A}$, що і вимагалось довести.

Приклад 11.43. Довести, що $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}$, якщо $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$, причому $\alpha+\beta\neq 2\pi k$, $k\in Z$, $\alpha\neq\pi+2\pi n$, $n\in Z$, $\beta\neq\pi+2\pi m$, $m\in Z$.

Розв'язання. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$,

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},$$

$$3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2},$$

звідки $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}$, що і вимагалось довести.

Приклад 11.44. Довести, що $\sin(2\alpha-\beta)=k\sin\beta$, якщо $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{1-k}{1+k}\operatorname{tg}\alpha$.

Розв'язання. Зазначимо, що $\beta-\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m\in Z$, $k\neq-1$.

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{1-k}{1+k}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$(1+k)\sin(\beta-\alpha)\cos\alpha=(1-k)\sin\alpha\cos(\beta-\alpha),$$

$$(1+k)(\sin(\beta-2\alpha)+\sin\beta)=(1-k)(\sin\beta+\sin(2\alpha-\beta)),$$

$$(1+k)\sin(\beta-2\alpha)+(1+k)\sin\beta=$$

$$=(1-k)\sin\beta+(1-k)\sin(2\alpha-\beta),$$

$$2k\sin\beta=(1-k+1+k)\sin(2\alpha-\beta),$$

звідки $\sin(2\alpha-\beta)=k\sin\beta$, що і. вимагалось довести.

Приклад 11.45. Знаючи, що

$$\sin\alpha = A\sin\beta \ \text{ і } \ \operatorname{tg}\alpha = B\operatorname{tg}\beta,$$

довести, що одне із значень $\cos\alpha$ є $\sqrt{\dfrac{A^2-1}{B^2-1}}$.

Розв'язання. Розділивши почленно дані рівності, знайдемо: $\cos\alpha = \dfrac{A}{B}\cos\beta$. Таким чином,

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{A}, \quad \cos\beta = \frac{B\cos\alpha}{A}.$$

Далі знаходимо $\sin^2\beta + \cos^2\beta = \dfrac{\sin^2\alpha}{A^2} + \dfrac{B^2\cos^2\alpha}{A^2}$

або $A^2 = 1 - \cos^2\alpha + B^2\cos^2\alpha$, звідки

$$A^2 - 1 = (B^2-1)\cos^2\alpha, \quad \cos^2\alpha = \frac{A^2-1}{B^2-1}, \text{ а}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{A^2-1}{B^2-1}}.$$

Отже, одним із значень $\cos\alpha$ є $\sqrt{\dfrac{A^2-1}{B^2-1}}$, що і вимагалось довести.

Вправи

11.46. Довести, що $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 2\operatorname{tg}\alpha$, якщо $3\sin\beta = \sin(2\alpha+\beta)$.

11.47. Довести, що $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \dfrac{3\sin\alpha}{3\cos\alpha - 5}$, якщо $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = 4\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

11.48. Довести, що $\sin(\alpha+2\beta) = \sin\alpha$, якщо $\cos(\alpha+\beta) = 0$.

11.49. Довести, що $\dfrac{\sin^8\alpha}{m^3}+\dfrac{\cos^8\alpha}{n^3}=\dfrac{1}{(m+n)^3}$,

якщо $\dfrac{\sin^4\alpha}{m}+\dfrac{\cos^4\alpha}{n}=\dfrac{1}{m+n}$, $m+n\neq 0$,

$m\neq 0$, $n\neq 0$.

11.50. Довести, що

$\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=12\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$,

якщо $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$.

11.51. Довести, що $a\cos\beta=b\cos\alpha$, якщо

$a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta=(a+b)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

11.52. Довести, що $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$, якщо

$\cos(2\alpha+\beta)=1$.

11.53. Довести, що

$\sin(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha=2\sin 2\beta$, якщо

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=3\operatorname{tg}\alpha$.

11.54. Довести, що $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=3\operatorname{tg}\alpha$, якщо

$\sin(2\alpha+\beta)=2\sin\beta$, $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$,

$\alpha+\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

11.55. Довести, що $\operatorname{tg}\dfrac{x+\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x-\alpha}{2}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}$,

якщо $\cos x=\cos\alpha\cos\beta$.

11.56. Довести, що

$1+\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\operatorname{cosec}^2\gamma$, якщо

$\cos 2\alpha=\cos 2\beta\cos 2\gamma$.

11.57. Довести, що $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{aa_1+bb_1}{ab_1+a_1b}$,

якщо $\dfrac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)}=\dfrac{a}{b}$ і $\dfrac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}=\dfrac{a_1}{b_1}$.

Умовні рівності III виду

***Умовними рівностями III виду** називаються рівності, в яких даються залежності між тригонометричними функціями аргументів і треба знайти залежність між самими аргументами.*

Щоб встановити залежність між аргументами за даними співвідношеннями між функціями цих аргументів, частіше за все задане співвідношення перетворюють так, щоб ліва частина являла собою добуток тригонометричних функцій, а права — нуль; прирівнюючи кожний співмножник до нуля, отримують шукані співвідношення між аргументами.

Приклад 11.58. Дано: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\sin\gamma = \cos\gamma$. Знайти залежність між α, β і γ.

Розв'язання. Допустимі значення аргументів

$$\alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z.$$

Перетворимо дане співвідношення:

$$\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma = \cos(\alpha+\beta)\cos\gamma,$$

$$\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma - \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma = 0 \ \text{ або}$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = 0,$$

звідки $\alpha+\beta+\gamma = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z.$

Приклад 11.59. Встановити співвідношення між гострими кутами α, β і γ, при яких має місце співвідношення $\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

Розв'язання. Дане в умові задачі співвідношення

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = 0$$

розглянемо як квадратне рівняння відносно $\sin\alpha$, тоді отримаємо

$$\sin\alpha = \sin\beta\cos\gamma \pm \sqrt{\sin^2\beta\cos^2\gamma - \sin^2\beta + \sin^2\gamma} =$$

$$= \sin\beta\cos\gamma \pm \sqrt{\sin^2\beta(\cos^2\gamma - 1) + \sin^2\gamma} =$$

$$= \sin\beta\cos\gamma \pm \sqrt{-\sin^2\beta\sin^2\gamma + \sin^2\gamma} =$$

$$= \sin\beta\cos\gamma \pm \sqrt{\sin^2\gamma(-\sin^2\beta + 1)} =$$

$$= \sin\beta\cos\gamma \pm \sqrt{\sin^2\gamma\cos^2\beta} = \sin\beta\cos\gamma \pm \sin\gamma\cos\beta.$$

Таким чином, одержали два співвідношення:

1. $\sin\alpha = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$; перетворимо його:

$$\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma), \quad \sin\alpha - \sin(\beta+\gamma) = 0,$$

звідки $2\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2} = 0.$

Якщо $\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 0$, то

$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ і $\alpha+\beta+\gamma = \pi + 2\pi k$.

З умови задачі випливає, що

$$0 < \alpha+\beta+\gamma < \frac{3\pi}{2},$$

тому остання рівність можлива лише при $k = 0$, і тоді $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.

Аналогічно з умови $\sin\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2} = 0$ отримуємо $\alpha-\beta-\gamma = 0$.

2. $\sin\alpha = \sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma$, перетворимо його, отримаємо: $\sin\alpha = \sin(\beta-\gamma)$, $\sin\alpha - \sin(\beta-\gamma) = 0$,

$$2\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2} = 0.$$

Якщо $\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = 0$, то $\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ і $\alpha+\beta-\gamma = \pi + 2k\pi$. Ця рівність неможлива ні при якому цілому k, оскільки згідно умови задачі $-\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta-\gamma < \pi$.

Якщо $\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2} = 0$, то

$$\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}=k\pi \text{ і } \alpha+\gamma-\beta=2k\pi.$$

Але оскільки з умови рівності випливає, що $-\frac{\pi}{2}<\alpha+\gamma-\beta<\pi$, тому попередня рівність можлива тільки при $k=0$, тобто $\alpha+\gamma-\beta=0$.

Відповідь: $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $\alpha-\beta-\gamma=0$, $\alpha+\gamma-\beta=0$.

Приклад 11.60. При якому співвідношенні між кутами α, β і γ буде мати місце рівність

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1?$$

Розв'язання. Перетворимо задане співвідношення так: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)=1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}},\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right),$$

звідки $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi k$ або $\alpha+\beta+\gamma=\pi+2\pi k$. Це і є шукане співвідношення.

Зауваження. При діленні на $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ ми вважали, що $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\neq 0$. Але ця умова не є додатковою. Дійсно, якби $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, то з даної рівності випливало б $-\operatorname{tg}^2\beta=1$, що неможливо для дійсних значень β.

Приклад 11.61. Для того, щоб в трикутнику ABC один з кутів дорівнював 60°, необхідно і достатньо виконання рівності

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=0.$$

Розв'язання. Достатність. Якщо

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0,$$

то один з кутів 60°.

$$(\sin 3A + \sin 3B) + \sin 3C = 0,\ \ A + B + C = 180^\circ,$$

звідки $3C = 540^\circ - 3(A + B)$. Тоді

$$2\sin\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2} + \sin(3A+3B) = 0,$$

$$2\sin\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A-3B}{2} +$$

$$+ 2\sin\frac{3A+3B}{2}\cos\frac{3A+3B}{2} = 0,$$

$$2\sin\frac{3A+3B}{2}\left(\cos\frac{3A-3B}{2} + \cos\frac{3A+3B}{2}\right) = 0,$$

$$\cos\frac{3C}{2}\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2} = 0.$$

Нехай $\cos\frac{3C}{2} = 0$. Оскільки $0 < C < 180^\circ$, то $0 < \frac{3C}{2} < 270^\circ$ і рівність $\cos\frac{3C}{2} = 0$ виконується лише при $\frac{3C}{2} = 90^\circ$, звідки $C = 60^\circ$. Аналогічно розмірковуємо і у випадках $\cos\frac{3A}{2} = 0$ або $\cos\frac{3B}{2} = 0$.

Необхідність. Якщо один з кутів 60°, то виконується рівність $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$. Доведемо це.

За умовою один з кутів 60° і $A + B + C = 180^\circ$. Оскільки

$$\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 2\cos\frac{3C}{2}\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2} \text{ і}$$

$$\cos 90^\circ = 0, \text{ то } \sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0,$$

що і вимагалось довести.

Приклад 11.62. A, B, C — кути трикутника ABC. Відомо, що $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \sqrt{3}$. Довести, що хоча б один з кутів трикутника дорівнює 60°.

Розв'язання. З даної рівності отримуємо

$$(\sin A - \sqrt{3}\cos A) + (\sin B - \sqrt{3}\cos B) +$$
$$+ (\sin C - \sqrt{3}\cos C) = 0,$$
$$(\sin A - \operatorname{tg} 60^\circ \cos A) + (\sin B - \operatorname{tg} 60^\circ \cos B) +$$
$$+ (\sin C - \operatorname{tg} 60^\circ \cos C) = 0,$$

звідки $\sin(A - 60^\circ) + \sin(B - 60^\circ) + \sin(C - 60^\circ) = 0,$

$$2\sin\left(\frac{A+B}{2} - 60^\circ\right)\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C-60^\circ}{2}\cos\frac{C-60^\circ}{2} = 0,$$

$$\sin\left(\frac{180^\circ - C}{2} - 60^\circ\right)\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C-60^\circ}{2}\cos\frac{C-60^\circ}{2} = 0,$$

$$\sin\left(30^\circ - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2} - \sin\left(30^\circ - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{C-60^\circ}{2} = 0,$$

$$\sin\left(30^\circ - \frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{C-60^\circ}{2}\right) = 0,$$

$$2\sin\left(30^\circ - \frac{C}{2}\right)\sin\frac{A-B+C-60^\circ}{4}\sin\frac{C-60^\circ-A+B}{4} = 0,$$

$$\sin\left(30^\circ - \frac{C}{2}\right)\sin\frac{180^\circ - 2B - 60^\circ}{4}\sin\frac{180^\circ - 2A - 60^\circ}{4} = 0,$$

$$\sin\left(30^\circ - \frac{C}{2}\right)\sin\left(30^\circ - \frac{B}{2}\right)\sin\left(30^\circ - \frac{C}{2}\right) = 0.$$

Звідси випливає, що $30^\circ - \frac{C}{2} = 0$ або $30^\circ - \frac{B}{2} = 0,$ або $30^\circ - \frac{A}{2} = 0,$ звідки $C = 60^\circ$ або $B = 60^\circ,$ або $A = 60^\circ,$ що і вимагалось довести.

Приклад 11.63. В трикутнику ABC

$$\sin^2 C - \sin A \sin B = \sin^2 A + \sin^2 B.$$

Довести, що $C = 120^\circ$.

Розв'язання І. З даної рівності маємо:

$$\frac{1-\cos 2C}{2} - \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2} =$$

$$= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2},$$

$$1 - \cos 2C - \cos (A-B) + \cos (A+B) = 2 - \cos 2A - \cos 2B,$$

$$- \cos 2C - \cos (A - B) - \cos C =$$

$$= 1 - 2 \cos (A + B) \cos (A - B),$$

$$1 - 2 \cos^2 C - \cos (A - B) - \cos C = 1 + 2 \cos C \cos (A - B),$$

звідки $(2 \cos^2 C + 2 \cos C \cos (A - B)) +$

$$+ (\cos C + \cos (A - B)) = 0,$$

$$2 \cos C (\cos C + \cos (A - B) + (\cos C + \cos (A - B)) = 0,$$

$$(\cos C + \cos (A - B)) (2 \cos C + 1) = 0,$$

тоді

1) $\cos C + \cos (A - B) = 0,$

$$2 \cos \frac{C + A - B}{2} \cos \frac{C - A + B}{2} = 0.$$

а) $\cos \frac{C + A - B}{2} = 0$, звідки $\frac{c + A - B}{2} = 90^\circ$,

$$C + A - B = 180^\circ, \ - B = 180^\circ - (C + A), \ - B = B,$$

що неможливо.

б) $\cos \frac{C - A + B}{2} = 0$, звідки $\frac{C - A + B}{2} = 90^\circ$,

$$C - A + B = 180^\circ, \ - A = 180^\circ - (B + C), \ - A = A,$$

що неможливо.

2) $2 \cos C + 1 = 0$, звідки $\cos C = -\frac{1}{2}$, $C = 120^\circ$, що і вимагалось довести.

Розв'язання II. Помноживши обидві частини вихідної рівності на $4R^2$ (R — радіус описаного кола), одержимо

$$4R^2 \sin^2 C - 2R \sin A \cdot 2R \sin B = 4R^2 \sin^2 A + 4R^2 \sin^2 B.$$

Застосовуючи теорему синусів ($a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$), маємо: $c^2 - ab = a^2 + b^2$ або

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab. \qquad (*)$$

Але за теоремою косинусів

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \qquad (**)$$

З рівнянь (*), (**) випливає, що

$$a^2 + b^2 + ab = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

звідки $\cos C = -\frac{1}{2}$ і $C = 120^\circ$.

Приклад 11.64. В трикутнику ABC

$$(\sin B + \sin C + \sin A)(\sin B + \sin C - \sin A) =$$
$$= 3\sin B \sin C.$$

Довести, що $A = 60^\circ$.

Розв'язання. I спосіб. З вихідної рівності маємо: $(\sin B + \sin C)^2 - \sin^2 A = 3\sin B\sin C$,

$$\sin^2 B - \sin B\sin C + \sin^2 C = \sin^2 A,$$

звідки $\frac{1-\cos 2B}{2} - \frac{\cos(B-C) - \cos(B+C)}{2} +$

$$+\frac{1-\cos 2C}{2} = \frac{1-\cos 2A}{2},$$

$$1 - \cos 2B - \cos(B-C) + \cos(B+C) +$$
$$+ 1 - \cos 2C = 1 - \cos 2A,$$

$$1 - \cos 2B - \cos(B-C) - \cos A - \cos 2C = -\cos 2A,$$

$$(1 + \cos 2A) - (\cos 2B + \cos 2C) - \cos A - \cos(B-C) = 0,$$

$$2\cos^2 A - 2\cos(B+C)\cos(B-C) -$$
$$-\cos A - \cos(B-C) = 0,$$

$$(2\cos A - 1)(\cos(B-C) + \cos A) = 0.$$

1. Якщо $2\cos A - 1 = 0$, то $\cos A = \frac{1}{2}$, $A = 60^\circ$.

2. Якщо $\cos(B-C) + \cos A = 0$, то така рівність для кутів трикутника не має місця, що було доведено при розв'язанні прикладу 11.63.

II спосіб. Помноживши обидві частини вихідної рівності на $4R^2$ і застосовуючи теорему синусів, отримаємо

$$(c + b + a)(c + b - a) = 3bc,$$

$$(c + b)^2 - a^2 = 3bc,$$

$$c^2 - bc + b^2 = a^2. \qquad (*)$$

Але за теоремою косинусів

$$c^2 - 2b\cos A + b^2 = a^2. \qquad (*)$$

Порівнюючи рівності (*), (**), маємо: $\cos A = \frac{1}{2}$, звідки $A = 60^\circ$, що і вимагалось довести.

Вправи

11.65. $\sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B$. Знайти залежність між кутами A і B.

11.66. Довести, що якщо має місце співвідношення

$$\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\gamma = 1,$$

де α, β і γ — гострі кути, то $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

11.67. Відомо, що в трикутнику ABC

$$\frac{3}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{1}{\sin A + \sin C} + \frac{1}{\sin B + \sin C}.$$

Довести, що $C = 60^\circ$.

§12. Вилучення параметрів[1]

Загальний метод вилучення параметрів із системи двох рівнянь полягає в тому, що розв'язують одне з даних рівнянь відносно параметра (якщо це можливо) і знайдене для нього значення підставляють в друге з даних рівнянь.

Але застосування деяких штучних прийомів дає іноді можливість отримати результат набагато простіше.

При вилученні параметрів з даної системи рівнянь ми отримуємо необхідні (але не достатні) умови сумісності даної системи, тому цілком допустимими є такі перетворення, що можуть дати сторонні корені (наприклад, піднесення обох частин рівняння до квадрату).

Приклад 12.1. Вилучити α з системи рівностей

$$\begin{cases} x = 5 \sin \alpha, \\ y = 5 \cos \alpha. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} x^2 = 25 \sin^2 \alpha, \\ y^2 = 25 \cos^2 \alpha. \end{cases}$$

Склавши рівняння отриманої системи, будемо мати:

$$x^2 + y^2 = 25 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha), \ \ x^2 + y^2 = 25.$$

Приклад 12.2. Вилучити α з системи рівностей

$$\begin{cases} x = 3 \cos \alpha, \\ y = 2 \operatorname{tg} \alpha. \end{cases}$$

Розв'язання. Перемноживши рівняння системи, отримаємо: $xy = 6 \sin \alpha$, звідки $\sin \alpha = \frac{xy}{6}$. З першого рівняння системи $\cos \alpha = \frac{x}{3}$. Піднесемо до квадрату і додамо рівняння отриманої системи:

---

1 *Зауваження.* Всі перетворення даного параграфа ведуться в області визначення, яку ми звичайно не вказуємо.

$$\begin{cases} \sin\,\alpha = \dfrac{xy}{6}\,, \\ \cos\,\alpha = \dfrac{x}{3}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin^2\alpha = \dfrac{x^2y^2}{36}\,, \\ \cos^2\alpha = \dfrac{x^2}{9}\,, \end{cases}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{x^2y^2}{36} + \frac{x^2}{9}\,,$$

звідки $\dfrac{x^2y^2}{36} + \dfrac{x^2}{9} = 1$, $x^2\,(y^2 + 4) = 36$.

Приклад 12.3. Вилучити α з системи рівностей

$$\begin{cases} a\,\mathrm{ctg}\,\alpha = m, \\ b\,\sin\,2\alpha = n. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} \dfrac{a\,\cos\,\alpha}{\sin\,\alpha} = m, \\ 2b\,\sin\,\alpha\,\cos\,\alpha = n. \end{cases}$$

Помноживши і розділивши рівняння отриманої системи, будемо мати

$$\begin{cases} 2ab\,\cos^2\alpha = mn, \\ \dfrac{a}{2b\,\sin^2\alpha} = \dfrac{m}{n}\,, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} \cos^2\alpha = \dfrac{mn}{2ab}\,, \\ \sin^2\alpha = \dfrac{na}{2mb}\,. \end{cases}$$

Додамо рівняння одержаної системи:

$$\frac{mn}{2ab} + \frac{na}{2mb} = 1.$$

Приклад 12.4. Виразити

$$y = \frac{\sin\,3\alpha + 2\,\sin\,5\alpha + \sin\,7\alpha}{\sin\,3\alpha + \sin\,5\alpha}$$

через $x = 4\,\cos^2\alpha$.

Розв'язання. Маємо $x = 4\cos^2\alpha$, $x = 2(1 + \cos 2\alpha)$, звідки $2\cos 2\alpha = x - 2$. Перетворимо вираз

$$y = \frac{\sin 3\alpha + 2\sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha} =$$

$$= \frac{(\sin 3\alpha + \sin 5\alpha) + (\sin 5\alpha + \sin 7\alpha)}{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha} =$$

$$= 1 + \frac{2\sin 6\alpha\cos\alpha}{2\sin 4\alpha\cos\alpha} = 1 + \frac{\sin 6\alpha}{\sin 4\alpha} =$$

$$= 1 + \frac{3\sin 2\alpha - 4\sin^3 2\alpha}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha} = 1 + \frac{3 - 4\sin^2 2\alpha}{2\cos 2\alpha} =$$

$$= 1 + \frac{4\cos^2 2\alpha - 1}{2\cos 2\alpha}.$$

Підставляючи в отриманий вираз $2\cos 2\alpha = x - 2$, будемо мати

$$y = 1 + \frac{4\cos^2 2\alpha - 1}{2\cos 2\alpha} = 1 + \frac{(x-2)^2 - 1}{x - 2} = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}.$$

Приклад 12.5. Вилучити α з системи рівностей

$$\begin{cases} \cos\alpha - \sin\alpha = a, \\ \sin 2\alpha = b. \end{cases}$$

Розв'язання. Піднесемо перше рівняння системи до квадрату і складемо з другим:

$$\begin{cases} 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = a^2, \\ 2\sin\alpha\cos\alpha = b, \end{cases} \qquad 1 = a^2 + b.$$

Приклад 12.6. Вилучити α і β з системи рівностей

$$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = a, \\ \cos\alpha + \cos\beta = b, \\ \cos(\alpha - \beta) = c. \end{cases}$$

Розв'язання. Піднесемо першу і другу рівності до квадрату. Додаючи їх, отримаємо $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) +$ $+ (2\sin\alpha\sin\beta + 2\cos\alpha\cos\beta) + (\sin^2\beta + \cos^2\beta) = a^2 + b^2$, тобто $2 + 2\cos(\alpha - \beta) = a^2 + b^2$.

Використовуючи третю рівність системи, остаточно отримаємо $2 + 2c = a^2 + b^2$.

Приклад 12.7. Вилучити α і β з системи рівностей

$$\begin{cases} m\cos^2\alpha + n\cos^2\beta = 1, \\ m\sin\alpha = n\sin\beta, \\ m\,\mathrm{ctg}^2\alpha + n\,\mathrm{ctg}^2\beta = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо рівняння системи у вигляді

$$\begin{cases} m(1 - \sin^2\alpha) + n(1 - \sin^2\beta) = 1, \\ m^2\sin^2\alpha = n^2\sin^2\beta, \\ m\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + n\dfrac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\sin^2\alpha + n\sin^2\beta = m + n - 1, \\ m^2\sin^2\alpha - n^2\sin^2\beta = 0, \\ \dfrac{m(1 - \sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha} + \dfrac{n(1 - \sin^2\beta)}{\sin^2\beta} = 1. \end{cases}$$

Виключаючи з перших рівнянь системи спочатку $\sin^2\alpha$, а потім $\sin^2\beta$, отримаємо:

$$n(m + n)\sin^2\beta = m(m + n - 1),$$

$$m(m + n)\sin^2\alpha = n(m + n - 1),$$

звідки

$$\sin^2\beta = \frac{m(m + n - 1)}{n(m + n)} \quad \text{і} \quad \sin^2\alpha = \frac{n(m + n - 1)}{m(m + n)}.$$

Підставляючи в третє рівняння системи після спрощення, отримаємо $(m^2 - n^2)^2 = -mn$.

Вправи

Вилучити параметри α і β із систем рівностей:

12.8. $\begin{cases} x = \dfrac{5}{\sin\alpha}, \\ y = 4\,\mathrm{ctg}\,\alpha. \end{cases}$

12.9. $\begin{cases} \dfrac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha = x, \\ \dfrac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha = y. \end{cases}$

12.10. $\begin{cases} a\sin^2\alpha + b\cos^2\alpha = 1, \\ a\cos^2\beta + b\sin^2\beta = 1, \\ x\,\mathrm{tg}\,\alpha = y\,\mathrm{tg}\,\beta. \end{cases}$

12.11. $\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\beta = a, \\ x\sin\beta - y\cos\alpha = b, \\ (x^2 + y^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\beta) = 2ab. \end{cases}$

12.12. $\begin{cases} \mathrm{tg}\,(\alpha + x) = a, \\ \mathrm{tg}\,(\alpha - y) = b. \end{cases}$

12.13. $\begin{cases} \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = a, \\ \mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta = b, \\ \alpha + \beta = \gamma. \end{cases}$

12.14. $\begin{cases} \cos(\beta + x) = m, \\ \cos(\beta - x) = n. \end{cases}$

12.15. $\begin{cases} x = \sin\alpha, \\ y = \cos 2\alpha. \end{cases}$

12.16. $\begin{cases} x = \mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha, \\ y = \mathrm{tg}\,2\alpha + \mathrm{ctg}\,2\alpha. \end{cases}$

§13. Співвідношення між елементами трикутника

Найважливішими співвідношеннями між елементами трикутника є теореми синусів і косинусів.

Теорема синусів. В довільному трикутнику відношення сторони до синуса протилежного кута є величина постійна, що дорівнює діаметру описаного кола, тобто $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

Теорема синусів встановлює зв'язок між радіусом описаного кола і основними елементами трикутника:

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C.$$

Теорема косинусів. Квадрат сторони довільного трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без їх подвоєного добутку на косинус кута, що міститься між ними, тобто

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

Приклад 13.1. Довести, що в довільному трикутнику має місце співвідношення $a = b \cos C + c \cos B$ (формула косинусів).

Розв'язання. За теоремою синусів маємо:

$$b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C,$$

тому

$$b \cos C + c \cos B = 2R \sin B \cos C + 2R \sin C \cos B =$$

$$= 2R (\sin B \cos C + \sin C \cos B) =$$

$$= 2R \sin (B + C) = 2R \sin A = a.$$

Аналогічно маємо

$$b = a \cos C + c \cos A \quad \text{і} \quad c = a \cos B + b \cos A.$$

Приклад 13.2. Довести, що в довільному трикутнику має місце співвідношення $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg} \dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \dfrac{A-B}{2}}$ (теорема тангенсів).

Розв'язання. За теоремою синусів маємо:

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B.$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2R\sin A + 2R\sin B}{2R\sin A - 2R\sin B} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

Приклад 13.3. Довести, що в довільному трикутнику має місце співвідношення $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$ (теорема Мольвейде).

Розв'язання. Застосовуючи теорему синусів, маємо:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2R\sin A + 2R\sin B}{2R\sin C} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin(A+B)} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}.$$

Приклад 13.4. Довести, що в довільному трикутнику має місце співвідношення $p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ — його напівпериметр.

Розв'язання.

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2R\sin A + 2R\sin B + 2R\sin C}{2} =$$

$$= R(\sin A + \sin B + \sin C) =$$

$$= R\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\right) =$$

$$= 2R\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) =$$

$$= 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Приклад 13.5. Довести, що в довільному трикутнику має місце співвідношення $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$, де S — площа трикутника.

Розв'язання. $S = \frac{1}{2} ab \sin C =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \sin A \sin B \sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Приклад 13.6. Довести, що в довільному трикутнику має місце співвідношення

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

де r — радіус вписаного, а R — радіус описаного кола.

Розв'язання. $r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2} ab \sin C}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{ab \sin C}{a+b+c} =$

$$= \frac{4R^2 \sin A \sin B \sin C}{2R \sin A + 2R \sin B + 2R \sin C} =$$

$$= \frac{4R^2 \sin A \sin B \sin C}{8R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

Приклад 13.7. Довести, що в довільному трикутнику має місце співвідношення

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{2S}{R}.$$

Розв'язання. $a \cos A + b \cos B + c \cos C =$

$$= R(2 \sin A \cos A + 2 \sin B \cos B + 2 \sin C \cos C) =$$

$$= 2R \sin C (\cos (A - B) + \cos C) =$$

$$= 2R \sin C \cdot 2 \sin \frac{A - B + C}{2} \cos \frac{A - B - C}{2} =$$

$$= 4R \sin C \cos \frac{180^\circ - 2B}{2} \cos \frac{A - 180^\circ + A}{2} =$$

$$= 4R \sin C \sin B \sin A = \frac{2S}{R}$$ (див. приклад 13.6).

Приклад 13.8. Довести, що в довільному трикутнику має місце співвідношення

$$a \operatorname{ctg} A + b \operatorname{ctg} B + c \operatorname{ctg} C = 2\,(R + r).$$

Розв'язання. $a \operatorname{ctg} A + b \operatorname{ctg} B + c \operatorname{ctg} C =$

$$= 2R \cos A + 2R \cos B + 2R \cos C =$$

$$= 2R\,(\cos A + \cos B + \cos C) =$$

$$= 2R\left(2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \cos C\right) =$$

$$= 2R\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}\right) =$$

$$= 2R\left(1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\right) =$$

$$= 2R\left(1 + 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right)\right)\right) =$$

$$= 2R\left(1 + 4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B+180^\circ-C}{4}\sin\frac{180^\circ-C-A+B}{4}\right) =$$

$$= 2R\left(1 + 4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right) =$$

$$= 2R + 8R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 2R + 2r = 2\,(R + r).$$

Вправи

Довести, що в довільному трикутнику мають місце співвідношення:

13.9. $\operatorname{tg} A = \dfrac{a \sin B}{c - a\cos B}$.

13.10. $\dfrac{a^2 - b^2}{c^2} = \dfrac{\sin\,(A - B)}{\sin C}$.

13.11. $\dfrac{a\,(a + c - b)}{b\,(b + c - a)} = \dfrac{1 - \cos A}{1 - \cos B}$.

13.12. $a + b = 4R\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A - B}{2}$.

13.13. $a - b = 4R\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A - B}{2}$.

13.14. $a + b + c = 8R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

13.15. $a + b - c = 8R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

13.16. $a \cos A + b \cos B + c \cos C =$

$= 4R \sin A \sin B \sin C.$

13.17. $a (\sin B - \sin C) + b (\sin C - \sin A) +$

$+ c (\sin A - \sin B) = 0.$

13.18. $\frac{a^2 \sin (B - C)}{\sin A} + \frac{b^2 \sin (C - A)}{\sin B} +$

$+ \frac{c^2 \sin (A - B)}{\sin C} = 0.$

13.19. $(a^2 - b^2) \operatorname{ctg} C + (b^2 - c^2) \operatorname{ctg} A +$

$+ (c^2 - a^2) \operatorname{ctg} B = 0.$

13.20. $b \cos B + c \cos C = a \cos (B - C).$

13.21. $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A.$

Довести, що для довільного трикутника зі сторонами a, b і c і кутами A, B і C його площу можна визначити за формулою:

13.22. $S = p (a - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

13.23. $S = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}$.

13.24. $S = (p - a)^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$.

13.25. $S = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$, где $p = \frac{a + b + c}{2}$.

13.26. $S = (p - b) (p - c) \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$.

13.27. $S = aR \sin B \sin C$, де R — радіус описаного круга.

13.28. $S = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4} \operatorname{tg} A.$

13.29. $S = \sqrt{\frac{1}{2} R\, h_a\, h_b\, h_c}$.

§14. Задачі на встановлення виду трикутника

Основним методом розв'язання задач, в яких вимагається встановити вид трикутника за певним співвідношенням між його елементами, є перетворення даного виразу так, щоб в одній частині був нуль, а в іншій частині — добуток тригонометричних функцій.

Приклад 14.1. Кути трикутника пов'язані співвідношенням $\sin\alpha = 2\sin\beta\cos\gamma$. Довести, що трикутник рівнобедрений.

Розв'язання. Маємо: $\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma) + \sin(\beta - \gamma)$ або $\sin\alpha = \sin\alpha + \sin(\beta - \gamma)$, звідки $\sin(\beta - \gamma) = 0$.

Оскільки β і γ — кути трикутника, то $\beta = \gamma$ і, отже, $b = c$.

Приклад 14.2. Довести, що трикутник прямокутний, якщо $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = 0,$$

$$\cos(\alpha + \beta)(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)) = 0,$$

$$2\cos(\alpha + \beta)\cos\alpha\cos\beta = 0.$$

Якщо $\cos\alpha = 0$, то $\alpha = 90^\circ$;

якщо $\cos\beta = 0$, то $\beta = 90^\circ$;

якщо $\cos(\alpha + \beta) = 0$, то $\alpha + \beta = 90^\circ$ і $\gamma = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

В усіх трьох випадках трикутник прямокутний.

Приклад 14.3. Якщо в трикутнику

$$\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a + b - c} = c^2 \text{ и } \sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{4},$$

то такий трикутник — рівнобічний. Довести.

Розв'язання. Перетворимо перше з даних співвідношень: $a^3 + b^3 - c^3 = (a + b - c)\,c^2$,

$$a^3 + b^3 - c^3 = (a + b)\,c^2 - c^3,$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)c^2.$$

Оскільки a і b — сторони трикутника, то $a + b \neq 0$ і тому $a^2 - ab + b^2 = c^2$.

За теоремою косинусів маємо $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \times \cos\gamma$, отже, $a^2 - ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, звідки $\cos\gamma = \frac{1}{2}$ і $\gamma = 60°$.

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{4},\ \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = \frac{3}{4},$$

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma = \frac{3}{2},\ \cos(\alpha - \beta) + \cos 60° = \frac{3}{2},$$

$$\cos(\alpha - \beta) = 1,\ \alpha - \beta = 0,\ \alpha = \beta.$$

З системи

$$\begin{cases} \gamma = 60°, \\ \alpha = \beta \end{cases}$$

маємо $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

Приклад 14.4. Якщо в трикутнику

$$\sin C\cos B\cos A = \frac{\sin B + \sin A}{\sec B + \sec A},$$

то такий трикутник прямокутний. Довести.

Розв'язання. Зрозуміло, що $\cos A\cos B \neq 0$.

$$\sin C\cos B\cos A = \frac{\sin B + \sin A}{\sec B + \sec A} =$$

$$= \frac{\sin B + \sin A}{\frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos A}} = \left(\frac{\sin B + \sin A}{\cos A + \cos B}\right)\cos B\cos A,$$

звідки $\sin C = \dfrac{\sin B + \sin A}{\cos B + \cos A} =$

$$= \frac{2\sin\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2}}{2\cos\frac{A + B}{2}\cos\frac{A - B}{2}} = \operatorname{tg}\frac{A + B}{2} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{180° - C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{C}{2}.$$

З отриманої рівності $\sin C = \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$ будемо мати

$$2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}}, \text{ звідки}$$

$$2 \sin^2 \frac{C}{2} = 1, \quad 1 - \cos C = 1, \quad \cos C = 0, \quad C = 90^\circ,$$

що й вимагалось довести.

Приклад 14.5. Якщо в трикутнику виконується співвідношення $(b^2 + c^2) \sin (C - B) = (c^2 - b^2) \sin(C + B)$, то такий трикутник прямокутний або рівнобедрений.

Розв'язання. За теоремою синусів

$$b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C.$$

Підставляючи в задане співвідношення, отримаємо

$$4R^2 (\sin^2 B + \sin^2 C) \sin (C - B) =$$
$$= 4R^2 (\sin^2 C - \sin^2 B) \sin A,$$

звідки $\frac{1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C}{2} \sin (C - B) =$

$$= \frac{1 - \cos 2C - 1 + \cos 2B}{2} \sin A,$$

$$(1 - \cos (B + C) \cos (B - C)) \sin (C - B) =$$
$$= \sin (B + C) \sin (C - B) \sin A.$$

Розглянемо випадки:

1. $\sin (C - B) = 0$, звідки $C = B$. Трикутник рівнобедрений.

2. $1 - \cos (B + C) \cos (B - C) = \sin^2 A$. Тоді

$$1 + \cos A \cos (B - C) = 1 - \cos^2 A \text{ або}$$

$$\cos A \cos (B - C) = - \cos^2 A.$$

а) Якщо $\cos A = 0$, тоді $A = 90^\circ$. Трикутник прямокутний.

б) Якщо $\cos (B - C) = - \cos A$, то

$$\cos(B - C) + \cos A = 0 \text{ або}$$

$$2\cos\frac{B - C + A}{2}\cos\frac{B - C - A}{2} = 0.$$

Тоді $\cos\frac{B - C + A}{2} = 0$, $B - C + A = 180°$, $-C = C$, що неможливо. $\cos\frac{B - C - A}{2} = 0$,

$$B - C - A = 180° - C - A = C + A, \quad C + A = 0,$$

що неможливо. Таким чином, або $A = 90°$, або $B = C$.

Приклад 14.6. Якщо в трикутнику виконується співвідношення $a \operatorname{tg} A + b \operatorname{tg} B = (a + b) \operatorname{tg}\frac{A + B}{2}$, то даний трикутник рівнобічний. Довести.

Розв'язання.

$$a \operatorname{tg} A + b \operatorname{tg} B = a \operatorname{tg}\frac{A + B}{2} + b \operatorname{tg}\frac{A + B}{2},$$

$$a\left(\operatorname{tg} A - \operatorname{tg}\frac{A + B}{2}\right) + b\left(\operatorname{tg} B - \operatorname{tg}\frac{A + B}{2}\right) = 0,$$

$$\frac{a \sin\frac{A - B}{2}}{\cos A \cos\frac{A + B}{2}} - \frac{b \sin\frac{A - B}{2}}{\cos B \cos\frac{A + B}{2}} = 0.$$

Якщо: 1. $\sin\frac{A - B}{2} = 0$, $A = B$. Трикутник рівнобедрений.

2. $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$, $\frac{2R\sin A}{\cos A} = \frac{2R\sin B}{\cos B}$, $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B$, $A = B$. Трикутник рівнобічний, що й вимагалось довести.

Приклад 14.7. Якщо в трикутнику виконується співвідношення $\frac{b}{a} = 2\cos C$, то даний трикутник рівнобічний. Довести.

Розв'язання. За теоремою синусів

$$b = 2R\sin B, \quad a = 2R\sin A.$$

Підставляючи в дане співвідношення, отримаємо

$$\frac{\sin B}{\sin A} = 2\cos C,\quad \sin B = 2\sin A\cos C,$$

$$\sin(A + C) = 2\sin A\cos C,\quad \cos A\sin C = \sin A\cos C,$$

$$\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A,\quad A = C,$$

що й вимагалось довести.

Вправи

14.8. Знайти залежність між сторонами трикутника, якщо його площа виражається формулою $S = \dfrac{a^2 + b^2}{4}$.

14.9. Визначити вид трикутника, в якому $2h_a = a\operatorname{tg}\beta$.

Довести, що при виконанні таких умов трикутник буде прямокутним ($C = 90°$).

14.10. $\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{a + c}{b}$.

14.11. $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1$.

Довести, що при виконанні таких умов трикутник буде або прямокутним, або рівнобедреним:

14.12. $\dfrac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A} = \dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 A}$.

14.13. $\dfrac{\cos C + 2\cos A}{\cos C + 2\cos B} = \dfrac{\sin B}{\sin A}$.

14.14. Якщо квадрати двох сторін відносяться, як їх проекції на третю сторону.

14.15. $\dfrac{\cos A + \cos C}{\cos A + \cos B} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$.

Довести, що в кожному з таких випадків трикутник буде рівнобедреним:

14.16. $a = 2b\sin\dfrac{A}{2}$.

14.17. $\dfrac{a - b}{a} = 1 - 2\cos C$.

§15. Підсумовування

Задачі на підсумовування мають велике значення для математичного розвитку учнів. Підсумовування тригонометричних виразів здійснюється різними способами.

Найбільш вживаним в тригонометрії способом підсумовування є представлення спільного члена суми різницею певних функцій.

При підсумовуванні синусів або косинусів, аргументи яких утворюють арифметичну прогресію з різницею α, досить шукану суму помножити й розділити на $2\sin\frac{\alpha}{2}$ і всі добутки перетворити в суми.

Приклад 15.1. Знайти суму

$$S = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha.$$

Розв'язання. Оскільки аргументи утворюють арифметичну прогресію з різницею α, то, помноживши обидві частини попередньої рівності на $2\sin\frac{\alpha}{2}$, отримаємо:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot S = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha + \ldots +$$

$$+ 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin n\alpha,$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot S = \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2} + \cos\frac{3\alpha}{2} + \ldots +$$

$$+ \cos\left(n\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(n\alpha + \frac{\alpha}{2}\right),$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot S = \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n\alpha + \frac{\alpha}{2}\right),$$

звідки $S = \dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha\cdot\sin\dfrac{n}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

Зауваження. Якщо $\sin\frac{\alpha}{2} = 0$, тобто $\alpha = 2\pi k$, наш розв'язок не проходить. Але зрозуміло, що при $\alpha = 2\pi k$

$$\sin\alpha = \sin 2\alpha = \ldots = \sin n\alpha = 0 \text{ і } S = 0.$$

Відповідь: $\begin{cases} \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha \sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} & \text{при } \alpha \neq 2\pi k,\ k \in Z, \\ 0 \text{ при } \alpha = 2\pi k. \end{cases}$

Приклад 15.2. Обчислити суму

$$\cos\alpha + \cos 5\alpha + \cos 9\alpha + \ldots + \cos(4n-3)\alpha = S.$$

Розв'язання. Оскільки аргументи утворюють арифметичну прогресію з різницею 4α, то, помноживши обидві частини попередньої рівності на $2\sin 2\alpha$, отримаємо: $2S\sin 2\alpha = 2\sin 2\alpha\cos\alpha + 2\sin 2\alpha\cos 5\alpha +$

$$+ 2\sin 2\alpha\cos 9\alpha + \ldots + 2\sin 2\alpha\cos(4n-3)\alpha,$$

$$2S\sin 2\alpha = \sin 3\alpha + \sin\alpha + \sin 7\alpha - \sin 3\alpha + \sin 11\alpha -$$

$$- \sin 7\alpha + \sin(4n\alpha - \alpha) - \sin(4n\alpha - 5\alpha),$$

$$2S\sin 2\alpha = \sin\alpha + \sin(4n\alpha - \alpha),$$

$$2S\sin 2\alpha = 2\sin n\alpha\cos(2n\alpha - \alpha),$$

звідки $S = \dfrac{\sin 2n\alpha\cos(2n-1)\alpha}{\sin 2\alpha}$.

Аналогічно прикладу 15.1 маємо відповідь:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin 2n\alpha\cos(2n-1)\alpha}{\sin 2\alpha} & \text{при } \alpha \neq \dfrac{\pi k}{2}, \\ 0 \text{ при } \alpha = \dfrac{\pi k}{2},\ k \in Z. \end{cases}$$

Якщо послідовність членів суми знакозмінна, то кожний член представляють сумою доданків.

Приклад 15.3. Обчислити суму

$$S = \sin\alpha - \sin 2\alpha + \sin 3\alpha - \ldots + (-1)^{n-1}\sin n\alpha.$$

Розв'язання. Оскільки аргументи утворюють арифметичну прогресію з різницею α, а вираз $\sin\alpha\cos\beta$ перетворюється в суму, то, помноживши обидві частини попередньої рівності на $2\cos\frac{\alpha}{2}$, отримаємо

$$2S\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin 2\alpha\cos\frac{\alpha}{2} +$$

$$+ 2\sin 3\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \ldots + (-1)^{n-1}\cdot 2\sin n\alpha\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$2S\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{7\alpha}{2} -$$

$$- \ldots + (-1)^{n-1}\sin\frac{2n+1}{2}\alpha + (-1)^{n-1}\sin\frac{2n-1}{2}\alpha \text{ або}$$

$$2S\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} + (-1)^{n-1}\sin\frac{2n+1}{2}\alpha.$$

При парному n знаходимо

$$2S\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{2n+1}{2}\alpha,$$

$$2S\cos\frac{\alpha}{2} = -2\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n+1}{2}\alpha,$$

звідки $S = \dfrac{-\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ при $\alpha \neq \pi + 2\pi k$.

При непарному n знаходимо:

$$2S\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{2n+1}{2}\alpha,$$

$$2S\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha,$$

звідки $S = \dfrac{\cos\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Неважко впевнитись в тому, що в обох випадках відповідь можна замінити такою:

$$S = -\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\alpha}{2}+\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{(n+1)(\alpha+\pi)}{2}\sin\frac{n(\alpha+\pi)}{2}.$$

Зауваження. Останній вираз можна отримати зразу, якщо дану знакозмінну суму замінити такою знакопостійною:

$$S = \sin\alpha + \sin(2\alpha+\pi) + \sin(3\alpha+2\pi) +$$

$$+ \sin(4\alpha+3\pi) + \ldots + \sin(n\alpha + (n-1)\pi),$$

в якій аргументи утворюють арифметичну прогресію з різницею $x + \pi$.

Приклад 15.4. Знайти суму

$$S = \sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha.$$

Розв'язання. Перш за все знизимо степінь тригонометричних функцій, отримаємо:

$$S = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 4\alpha}{2} + \frac{1-\cos 6\alpha}{2} + \ldots +$$

$$+\frac{1-\cos 2n\alpha}{2} = \frac{n}{2} - \frac{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha + \ldots + \cos 2n\alpha}{2}.$$

В чисельнику дробу праворуч маємо суму косинусів кутів, що утворюють арифметичну прогресію з різницею 2α. Як і в попередньому прикладі, помножимо і розділимо всі члени цієї суми на $2\sin\alpha$.

$$S = \frac{n}{2} - \frac{1}{4\sin\alpha}(2\sin\alpha\cos 2\alpha + 2\sin\alpha\cos 4\alpha +$$

$$+ 2\sin\alpha\cos 6\alpha + \ldots + 2\sin\alpha\cos 2n\alpha) =$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{4\sin\alpha}(\sin 3\alpha - \sin\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha + \sin 7\alpha -$$

$$- \sin 5\alpha + \ldots + \sin(2n+1)\alpha - \sin(2n-1)\alpha) =$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{1}{4\sin\alpha}\left(\sin(2n+1)\alpha - \sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)\alpha\sin n\alpha}{\sin\alpha}.$$

Якщо $\alpha = \pi k$, то $S = 0$.

Приклад 15.5. Знайти суму

$$S = \sin^3\alpha + \sin^3 2\alpha + \sin^3 3\alpha + \ldots + \sin^3 n\alpha.$$

Розв'язання. Відомо, що $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, звідки $\sin^3\alpha = \dfrac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$. Тоді маємо

$$S = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} + \frac{3\sin 2\alpha - \sin 6\alpha}{4} +$$

$$+ \frac{3\sin 3\alpha - \sin 9\alpha}{4} + \ldots + \frac{3\sin n\alpha - \sin 3n\alpha}{4} =$$

$$= \frac{3}{4}(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha) -$$

$$- \frac{1}{4}(\sin 3\alpha + \sin 6\alpha + \ldots + \sin 3n\alpha). \qquad (*)$$

В прикладі 15.1 показано, що

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha \sin\frac{n}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Нехай $S_1 = \sin 3\alpha + \sin 6\alpha + \ldots + \sin 3n\alpha$.

$$2\sin\frac{3\alpha}{2} S_1 = 2\sin\frac{3\alpha}{2}\sin 3\alpha + 2\sin\frac{3\alpha}{2}\sin 6\alpha + \ldots +$$

$$+ 2\sin\frac{3\alpha}{2}\sin 3n\alpha,$$

$$2\sin\frac{3\alpha}{2} S_1 = \cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{9\alpha}{2} + \cos\frac{9\alpha}{2} - \cos\frac{15\alpha}{2} +$$

$$+ \ldots + \cos\frac{3(2n-1)}{2}\alpha - \cos\frac{3(2n+1)}{2}\alpha,$$

$$2\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot S_1=\cos\frac{3\alpha}{2}-\cos\frac{3(2n+1)}{2}\alpha,$$

$$2\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot S_1=2\sin\frac{3n+3}{2}\alpha\sin\frac{3n}{2}\alpha\ ,$$

звідки $S_1=\dfrac{\sin\frac{3(n+1)}{2}\alpha\sin\frac{3n}{2}\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$.

Повертаючись до рівності (*), отримаємо:

$$S=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}-\frac{\sin\frac{3(n+1)}{2}\alpha\sin\frac{3n}{2}\alpha}{4\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

Інші прийоми підсумовування

Приклад 15.6. Знайти суму $S=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha\cos2\alpha}+$

$$+\frac{\sin\alpha}{\cos2\alpha\cos3\alpha}+\ldots+\frac{\sin\alpha}{\cos n\alpha\cos(n+1)\alpha}.$$

Розв'язання. Зазначимо, що

$$\frac{\sin\alpha}{\cos k\alpha\cos(k+1)\alpha}=\frac{\sin[(k+1)\alpha-k\alpha]}{\cos k\alpha\cos(k+1)\alpha}=$$

$$=\frac{\sin(k+1)\alpha\cos k\alpha-\cos(k+1)\alpha\sin k\alpha}{\cos k\alpha\cos(k+1)\alpha}=$$

$$=\operatorname{tg}(k+1)\alpha-\operatorname{tg}k\alpha.$$

Використовуючи отриману формулу, будемо мати:

$$S=\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}3\alpha+$$

$$+\ldots+\operatorname{tg}(n+1)\alpha-\operatorname{tg}n\alpha=$$

$$=\operatorname{tg}(n+1)\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin n\alpha}{\cos(n+1)\alpha\cos\alpha}.$$

Приклад 15.7. Знайти суму $S = \dfrac{1}{\cos x + \cos 3x} +$

$$+ \frac{1}{\cos x + \cos 5x} + \ldots + \frac{1}{\cos x + \cos (2n+1)x}.$$

Розв'язання. $S = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\cos x \cos 2x} + \dfrac{1}{\cos 2x \cos 3\alpha} +\right.$

$$\left. + \ldots + \frac{1}{\cos nx \cos (n+1)x}\right) = \frac{1}{2 \sin x} S_1,$$

де S_1 — сума, розглянута в задачі 15.6. Тому $S = \dfrac{1}{2 \sin x} \cdot \dfrac{\sin nx}{\cos (n+1)x \cos x} =$

$$= \frac{\sin nx}{\sin 2x \cos (n+1)x}.$$

Приклад 15.8. Обчислити суму

$$S = \operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec} \frac{x}{2} + \operatorname{cosec} \frac{x}{2^2} + \ldots + \operatorname{cosec} \frac{x}{2^n}.$$

Розв'язання. Використовуючи формулу

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{cosec} \alpha,$$

отримаємо $S = \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2} - \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} \dfrac{x}{4} - \operatorname{ctg} \dfrac{x}{2} +$

$$+ \ldots + \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{n+1}} - \operatorname{ctg} x =$$

$$= \frac{\sin\left(x\left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)\right)}{\sin \dfrac{x}{2^{n+1}} \sin x}.$$

Приклад 15.9. Обчислити суму

$$S = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}2\alpha \operatorname{tg}3\alpha + \operatorname{tg}3\alpha \operatorname{tg}4\alpha +$$

$$+ \ldots + \operatorname{tg}(n-1)\alpha \operatorname{tg} n\alpha.$$

Розв'язання. Використовуючи вираз

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

отримуємо

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} - 1. \qquad (*)$$

Подаючи кожний доданок даної суми у вигляді різниці, застосовуючи формулу (*), отримаємо

$$S = \frac{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - 1 + \frac{\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - 1 +$$

$$+ \ldots + \frac{\operatorname{tg}n\alpha - \operatorname{tg}(n-1)\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - 1 = \frac{\operatorname{tg}n\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} - (n-1).$$

Приклад 15.10. Обчислити суму

$$S = \operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}2\alpha + 4\operatorname{tg}4\alpha + \ldots + 2^n \operatorname{tg}2^n\alpha.$$

Розв'язання. З відомої формули

$$\operatorname{ctg}2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

отримуємо $2\operatorname{ctg}2\alpha = \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha$, звідки

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg}2\alpha.$$

Подаючи кожний доданок даної суми у вигляді різниці, застосовуючи одержану формулу, отримаємо

$$S = \operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg}2\alpha + 2\operatorname{ctg}2\alpha - 4\operatorname{ctg}4\alpha + 4\operatorname{ctg}4\alpha -$$

$$- 8\operatorname{ctg}8\alpha + \ldots + \operatorname{ctg}2^n\alpha - 2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha =$$

$$= \operatorname{ctg}\alpha - 2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha.$$

Вправи

Обчислити суми:

15.11. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha.$

15.12. $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{5\alpha}{2} + \ldots + \sin\frac{2n-1}{2}\alpha.$

15.13. $\cos x + \cos(x+h) + \cos(x+2h) + \ldots +$
$+ \cos(x+nh).$

15.14. $\sec\alpha\sec 3\alpha + \sec 3\alpha\sec 5\alpha + \ldots +$
$+ \sec(2n-1)\alpha\sec(2n+1)\alpha.$

15.15. $\operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec} 2x + \operatorname{cosec} 4x + \ldots +$
$+ \operatorname{cosec} 2^{n-1}x.$

15.16. $\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}(\alpha+\beta) + \operatorname{cosec}(\alpha+\beta)\times$
$\times\operatorname{cosec}(\alpha+2\beta) + \ldots + \operatorname{cosec}(\alpha+n\beta)\operatorname{cosec}(\alpha+\beta+n\beta).$

15.17. $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha - 2\operatorname{tg}4\alpha - \ldots -$
$- 2^n\operatorname{tg}2^n\alpha.$

§16. Розв'язання систем тригонометричних рівнянь

При розв'язанні систем тригонометричних рівнянь використовуються ті ж прийоми, що і при розв'язанні систем алгебраїчних рівнянь.

Приклад 16.1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \\ x - y = \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$, то задана система рівносильна такій:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \\ x - y = \dfrac{\pi}{6}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}}{\cos x \cos y} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \\ x - y = \dfrac{\pi}{6}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ x - y = \dfrac{\pi}{6}, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos(x - y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y + \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x \sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Віднімаючи від першого рівняння системи друге, маємо: $\cos x \cos y - \sin y \sin x = 0$, $\cos(x + y) = 0$, $x + y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$. Тепер маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ x - y = \dfrac{\pi}{6}, \end{cases}$$

Звідси $2x = \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ \ x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2},\ \ y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$.

Відповідь: $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2},\ \ y = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ \ n \in Z.$

Приклад 16.2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Враховуючи, що $\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}(\sin x + \sin y)$, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\sin x + \sin y) = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{1}{2}, \\ \sin x \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану систему рівнянь, отримаємо:

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin y = -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ y = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2}, \\ \sin y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ y = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \end{cases} \quad \begin{cases} x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, \\ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases}$

$n, k \in Z$

Приклад 16.3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin^2 x = \sin y, \\ \cos^4 x = \cos y. \end{cases}$$

Розв'язання. Зауважимо, що $\sin y \geq 0$ і $\cos y \geq 0$, тобто $2\pi n \leq y \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Підносячи почленно до квадрату обидва рівняння, а потім склавши їх, отримаємо:

$$\sin^4 x + \cos^8 x = 1. \quad (1)$$

Далі зазначимо, що $\sin^4 x \leq \sin^2 x$, $\cos^8 x \leq \cos^2 x$, звідки $\sin^4 x + \cos^8 x \leq 1$. Рівність досягається лише у випадку, коли x задовільняє системі рівнянь

$$\begin{cases} \sin^4 x = \sin^2 x, \\ \cos^8 x = \cos^2 x. \end{cases}$$

Можливі такі варіанти:

1. $\sin x = 0$, $x = \pi k$.

Тепер з рівняння $\sin^2 x = \sin y$ знаходимо, що

$$\sin y = 0, \quad y = \pi k \quad \left(2\pi n \leq y \leq 2\pi n + \frac{\pi}{2}\right).$$

Перевірка підтверджує, що пари вигляду

$$(x = \pi k, \quad y = 2\pi n, \quad k, n \in Z)$$

задовольняють вихідній системі рівнянь.

2. $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. З рівняння $\sin^2 x = \sin y$ знаходимо, що $\sin y = 1$ і $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\left(\text{адже } 2\pi n \leq y \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$.

Перевірка підтверджує, що пари вигляду

$$\left(x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \quad k, n \in Z$$

є розв'язками вихідної системи.

3. $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Перевірка підтверджує і пари такого вигляду.

Відповідь: $(x = \pi k,\ y = 2\pi k)$,

$$\left(x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right).$$

$$\left(x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),\ \text{где}\ \ k, n \in Z.$$

Приклад 16.4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\cos(x+y)}{\cos(x-y)} = \dfrac{1}{9}, \\ \sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Розв'язання. Перепишемо перше рівняння системи таким чином:

$$\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\cos x \cos y + \sin x \sin y} = \frac{1}{9}.$$

Підставляючи в отримане рівняння $\sin x \sin y = \dfrac{1}{3}$,

маємо: $\dfrac{\cos x \cos y - \frac{1}{3}}{\cos x \cos y + \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{9}$, звідки $\cos x \cos y = \dfrac{5}{12}$.

Тепер маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{5}{12}, \\ \sin x \sin y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Додаючи почленно обидва рівняння отриманої системи, маємо:

$$\cos(x-y) = \frac{3}{4},\ \ x - y = \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi n,\ \ n \in Z.$$

Віднімаючи від першого рівняння друге, отримаємо: $\cos(x+y) = \dfrac{1}{12}$, $x + y = \pm \arccos \dfrac{1}{12} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x - y = \pm \arccos \dfrac{3}{4} + 2\pi n, \\ x + y = \pm \arccos \dfrac{1}{12} + 2\pi k. \end{cases}$$

Можливі випадки:

1. $\begin{cases} x - y = \arccos \dfrac{3}{4} + 2\pi n, \\ x + y = \arccos \dfrac{1}{12} + 2\pi k, \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\arccos \dfrac{3}{4} + \arccos \dfrac{1}{12}\right) + \pi n + \pi k, \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\arccos \dfrac{1}{12} - \arccos \dfrac{3}{4}\right) + \pi k + \pi n. \end{cases}$$

2. $\begin{cases} x - y = -\arccos \dfrac{3}{4} + 2\pi n, \\ x + y = \arccos \dfrac{1}{12} + 2\pi k, \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\arccos \dfrac{1}{12} - \arccos \dfrac{3}{4}\right) + \pi n + \pi k, \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\arccos \dfrac{1}{12} + \arccos \dfrac{3}{4}\right) + \pi k + \pi n. \end{cases}$$

3. $\begin{cases} x - y = \arccos \dfrac{3}{4} + 2\pi n, \\ x + y = -\arccos \dfrac{1}{12} + 2\pi k, \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\arccos \dfrac{3}{4} - \arccos \dfrac{1}{12}\right) + \pi n + \pi k, \\ y = -\dfrac{1}{2}\left(\arccos \dfrac{1}{12} + \arccos \dfrac{3}{4}\right) + \pi k + \pi n. \end{cases}$$

4. $\begin{cases} x - y = -\arccos \dfrac{3}{4} + 2\pi n, \\ x + y = -\arccos \dfrac{1}{12} + 2\pi k, \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}\left(\arccos \dfrac{1}{12} + \arccos \dfrac{3}{4}\right) + \pi n + \pi k, \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\arccos \dfrac{3}{4} - \arccos \dfrac{1}{12}\right) + \pi k + \pi n, \quad n, k \in Z. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(x = \frac{1}{2}\left(\arccos\frac{3}{4} \pm \arccos\frac{1}{12}\right) + \pi n + \pi k,\right.$
$\left. y = \pm\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{12} \mp \arccos\frac{3}{4}\right) + \pi n + \pi k\right),$
$\left(x = \pm\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{12} \mp \arccos\frac{3}{4}\right) + \pi n + \pi k,\right.$
$\left. y = \frac{1}{2}\left(\arccos\frac{3}{4} \pm \arccos\frac{1}{12}\right) + \pi n + \pi k\right),$
$n, k \in Z.$

Приклад 16.5. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. З першого рівняння системи знаходимо, що $\cos y = -\sin x$, $\cos^2 y = \sin^2 x$. Тепер з другого рівняння системи маємо:

$$2\cos^2 y = \frac{1}{2},\ \ 1 + \cos 2y = \frac{1}{2},\ \ \cos 2y = -\frac{1}{2},$$

$$2y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ \ y = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ \ n, k \in Z.$$

При цьому $\cos y = \pm\frac{1}{2}$.

Розглянемо випадки:

1. $\begin{cases} \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin x = -\frac{1}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ n, k \in Z. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \cos y = -\frac{1}{2}, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = (-1)^{k}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ n, k \in Z, \end{cases}$

Перевірка підтверджує знайдені розв'язки.

Відповідь: $\left(x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ y = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n, k \in Z\right),$
$\left(x = (-1)^{k}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \ n, k \in Z\right).$

Приклад 16.6. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \cos \pi x - \cos \pi y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin \pi x - \sin \pi y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{cases} -2\sin\dfrac{\pi x + \pi y}{2}\sin\dfrac{\pi x - \pi y}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ 2\cos\dfrac{\pi x + \pi y}{2}\sin\dfrac{\pi x - \pi y}{2} = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad (*)$$

Ділимо обидві частини першого рівняння на відповідні частини іншого рівняння. Отримаємо:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x + \pi y}{2} = \sqrt{3},$$

звідки

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = k\pi + \frac{\pi}{3}, \qquad (**)$$

де $k \in Z$.

Розглянемо тепер два випадки, коли $k = 2n$ і коли $k = 2n + 1$, де $n \in Z$.

а) Нехай $k = 2n$. Тоді рівняння (**) має вигляд

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = 2\pi n + \frac{\pi}{3}. \qquad (***)$$

Підставляючи значення $\dfrac{\pi x + \pi y}{2}$ з рівняння (***), наприклад, в рівняння (*), отримаємо:

$$2\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{1}{2} \text{ або } \sin\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{1}{2},$$

звідки

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \pi l + (-1)^l\frac{\pi}{6}, \qquad (****)$$

де $l \in Z$.

Нехай $l = 2m$, де $m \in Z$. Тоді з рівняння (****) отримаємо:

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi m.$$

З цього рівняння і рівняння (***) утворюємо систему рівнянь. Маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi x + \pi y}{2} = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \dfrac{\pi x - \pi y}{2} = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi m. \end{cases}$$

Праві й ліві частини рівнянь цієї системи складемо і віднімемо. Отримаємо

$$\begin{cases} \pi x = \dfrac{\pi}{2} + 2\,(m + n)\,\pi, \\ \pi y = \dfrac{\pi}{6} + 2\,(n - m)\,\pi, \end{cases}$$

звідки $x = \dfrac{1}{2} + 2\,(m + n)$ и $y = 2\,(n - m) + \dfrac{1}{6}$, $m, n \in Z$.

Нехай тепер $l = 2m + 1$, де $m \in Z$. Тоді з рівняння (****) отримаємо:

$$\frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m.$$

З цього рівняння і рівняння (***) утворимо систему. Маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\pi x + \pi y}{2} = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ \dfrac{\pi x - \pi y}{2} = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m, \end{cases}$$

звідки після складання і віднімання правих і лівих частин рівняння цієї системи знаходимо:

$$\begin{cases} \pi x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\,(m + n)\,\pi, \\ \pi y = -\dfrac{\pi}{2} + 2\,(n - m)\,\pi. \end{cases}$$

Тому $x = \dfrac{7}{6} + 2\,(n + m)$ і $y = 2\,(n - m) - \dfrac{1}{2}$, де $m, n \in Z$.

б) Нехай $k = 2n + 1$. Тоді рівняння (**) має вигляд

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n.$$

Далі робимо так само, як і в попередньому випадку. При цьому знайдемо ще і такі розв'язки даної системи:

$$\begin{cases} x = \frac{7}{6} + 2(n + m), \\ y = \frac{3}{2} + 2(n - m) \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x = \frac{5}{2} + 2(n + m), \\ y = \frac{1}{6} + 2(n - m), \end{cases}$$

де $m, n \in Z$.

Приклад 16.7. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y = 2, & (*) \\ \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, z = 3, & (**) \\ x + y + z = \pi. & (***) \end{cases}$$

Розв'язання. З рівнянь (*) і (**) маємо:

$$\mathrm{tg}\, y = \frac{2}{\mathrm{tg}\, x} \text{ і } \mathrm{tg}\, z = \frac{3}{\mathrm{tg}\, x}.$$

Оскільки з рівняння (***) випливає, що $y + z = \pi - x$, то $\mathrm{tg}\,(y + z) = \mathrm{tg}\,(\pi - x)$ або

$$\frac{\mathrm{tg}\, y + \mathrm{tg}\, z}{1 - \mathrm{tg}\, y\, \mathrm{tg}\, z} = -\,\mathrm{tg}\, x,$$

звідки $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y + \mathrm{tg}\, z = \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y\, \mathrm{tg}\, z$. В це рівняння підставляємо значення $\mathrm{tg}\, y = \frac{2}{\mathrm{tg}\, x}$ і $\mathrm{tg}\, z = \frac{3}{\mathrm{tg}\, x}$. Тоді після нескладних перетворень отримуємо $\mathrm{tg}^2\, x = 1$, звідки $\mathrm{tg}\, x = \pm 1$ і $\mathrm{tg}\, y = \frac{2}{\mathrm{tg}\, x} = \pm 2$.

Дана система рівнянь рівносильна сукупності таких двох систем:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\, x = 1, \\ \mathrm{tg}\, y = 2, \\ x + y + z = \pi \end{cases} \text{ і } \begin{cases} \mathrm{tg}\, x = -1, \\ \mathrm{tg}\, y = -2, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи, знаходимо:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \\ y = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, \\ z = \dfrac{3\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2 - (k + n)\pi \end{cases} \quad \text{і}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, \\ y = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, \\ z = \dfrac{5\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2 - (k + n)\pi, \quad k, n \in Z. \end{cases}$$

Приклад 16.8. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin x : \sin y : \sin z = 4 : 3 : 5, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки $\sin x : \sin y : \sin z = 4:3:5$, то $\sin x = 4a$, $\sin y = 3a$, $\sin z = 5a$, де $a \neq 0$, $a \in R$.

З рівняння $x + y + z = \pi$ отримуємо, що

$$\begin{cases} \sin(y + z) = \sin x, \\ \sin(z + x) = \sin y, \\ \sin(x + y) = \sin z, \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} \sin y \cos z + \sin z \cos y = \sin x, \\ \sin z \cos x + \sin x \cos z = \sin y, \\ \sin x \cos y + \sin y \cos x = \sin z. \end{cases}$$

Підставляючи значення $\sin x$, $\sin y$ і $\sin z$, отримаємо:

$$\begin{cases} 3a \cos z + 5a \cos y = 4a, \\ 5a \cos x + 4a \cos z = 3a, \\ 4a \cos y + 3a \cos x = 5a, \end{cases}$$

звідки, оскільки $a \neq 0$,

$$\begin{cases} 3 \cos z + 5 \cos y = 4, \\ 5 \cos x + 4 \cos z = 3, \\ 4 \cos y + 3 \cos x = 5. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь відносно $\cos x$, $\cos y$ і $\cos z$, знаходимо:

$$\cos x = \frac{3}{5}, \ \cos y = \frac{4}{5} \ \text{ і } \ \cos z = 0.$$

Дана система рівносильна такій:

$$\begin{cases} \cos y = \frac{4}{5}, \\ \cos z = 0, \\ x + y + z = \pi, \end{cases}$$

звідки отримуємо розв'язки:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{4}{5} - (2k + n)\pi, \\ y = \arccos\frac{4}{5} + 2\pi k, \\ z = \frac{\pi}{2} + \pi n. \end{cases}$$

Вправи

Розв'язати системи рівнянь:

16.9. $\begin{cases} x - y = -\frac{1}{6}, \\ \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

16.10. $\begin{cases} \sin x = \operatorname{cosec} x + \sin y, \\ \cos x = \sec x + \cos y. \end{cases}$

16.11. $\begin{cases} x + y = \frac{2}{3}, \\ \operatorname{tg} \pi x + \operatorname{tg} \pi y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

16.12. $\begin{cases} y - x = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$

16.13. $\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

16.14. $\begin{cases} \cos(x-y) = \dfrac{1}{2}, \\ \cos(x+y) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

16.15. $\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 2, \\ x + y = \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$

16.16. $\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

16.17. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin x : \sin y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

16.18. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1. \end{cases}$

16.19. $\begin{cases} \sin(x + 10^\circ)\sin(y + 20^\circ) = \dfrac{1}{2}, \\ x - y = 10^\circ. \end{cases}$

16.20. $\begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 y = \dfrac{3}{4}, \\ x - y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

§17. Розв'язування тригонометричних нерівностей

***Найпростішими тригонометричними нерівностями** називаються нерівності вигляду*

$$a_1 \le \sin\alpha \le b_1,\ \ a_2 \le \cos\alpha \le b_2,$$

$$a_3 \le \operatorname{tg}\alpha \le b_3,\ \ a_4 \le \operatorname{ctg}\alpha \le b_4,$$

де a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4 *— задані числа.*

При розв'язанні цих нерівностей як допоміжний засіб зручно використовувати графік відповідної функції або тригонометричне коло.

1. $\sin x > a$.

   $\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k$,

   $k \in Z$ при $-1 \le a < 1$;

   при $a \ge 1$ немає розв'язків;

   при $a < -1$ $x \in R$.

2. $\sin x < a$.

   $\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < 2\pi + \arcsin a + 2\pi k$,

   $k \in Z$ при $-1 < a \le 1$;

   при $a \le -1$ немає розв'язків;

   при $a > 1$ $x \in R$.

3. $\cos x > a$.

   $2\pi k - \arccos a < x < 2\pi k + \arccos a$, $k \in Z$

   при $-1 \le a < 1$;

   при $a \ge 1$ немає розв'язків;

   при $a < -1$ $x \in R$.

4. $\cos x < a$.

   $2\pi k + \arccos a < x < 2\pi k + 2\pi - \arccos a$,

   $k \in Z$ при $-1 < a \le 1$;

   при $a \le -1$ немає розв'язків;

   при $a > 1$ $x \in R$.

5. $\operatorname{tg} x > a$.

$$\pi k + \operatorname{arctg} a < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z \quad \text{при} \quad a \in R.$$

6. $\operatorname{tg} x < a$.

$$\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k + \operatorname{arctg} a, \quad k \in Z \quad \text{при} \quad a \in R.$$

7. $\operatorname{ctg} x > a$.

$$\pi k < x < \pi k + \operatorname{arcctg} a, \quad k \in Z \quad \text{при} \quad a \in R.$$

8. $\operatorname{ctg} x < a$.

$$\pi k + \operatorname{arcctg} a < x < \pi + \pi k, \quad k \in Z \quad \text{при} \quad a \in R.$$

Нерівність, що не є найпростішою, за допомогою найпростіших перетворень треба звести до рівносильної найпростішої нерівності або до системи найпростіших нерівностей.

Приклад 17.1. Розв'язати нерівність $\cos^2 3x < \frac{1}{4}$.

Розв'язання. $\dfrac{1 + \cos 6x}{2} < \dfrac{1}{4}$, $\cos 6x < -\dfrac{1}{2}$,

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < 6x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,$$

$$\frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3} < x < \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in Z.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{\pi k}{3} < x < \dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Приклад 17.2. Розв'язати нерівність

$$2 \sin^2 x + \sin x > 0.$$

Розв'язання. Нехай $\sin x = t$. Маємо систему нерівностей

$$\begin{cases} 2t^2 + t > 0, \\ -1 \le t \le 1, \end{cases}$$

звідки $-1 \le t < -\dfrac{1}{2}$, $0 < t \le 1$.

а) $\sin x < -\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

б) $\sin x > 0,\ 2\pi k < x < \pi + 2\pi k,\ k \in Z.$

Відповідь: $2\pi k - \frac{5\pi}{6} < x < 2\pi k - \frac{\pi}{6}$;

$$2\pi k < x < \pi + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Приклад 17.3. Розв'язати нерівність

$$\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 6 < 0.$$

Розв'язання. $2 < \operatorname{tg} x < 3,$

$$\pi k + \operatorname{arctg} 2 < x < \pi k + \operatorname{arctg} 3,\ k \in Z.$$

Відповідь: $\operatorname{arctg} 2 + \pi k < x < \operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in Z.$

Приклад 17.4. Розв'язати нерівність

$$\sin^2 x - \sin 2x + 3 \cos^2 x < 0.$$

Розв'язання. Перепишемо вихідну нерівність так:

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x < 0.$$

Розглянемо два випадки:

а) $\cos^2 x = 0.$

Тоді з останньої нерівності отримаємо: $\sin^2 x < 0$, розв'язків немає.

б) $\cos^2 x > 0.$

Розділивши обидві частини вихідної нерівності на $\cos^2 x$, отримаємо рівносильну нерівність

$$\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 3 < 0,$$

яке не має розв'язків.

Відповідь: $x \in \varnothing.$

Приклад 17.5. Розв'язати нерівність $\sin 2x > \cos x.$

Розв'язання. $2 \sin x \cos x - \cos x > 0,$

$$\cos x\,(2 \sin x - 1) > 0.$$

Нехай $f(x) = \cos x\,(2 \sin x - 1)$. Функція f періодична з періодом 2π. Знайдемо множину розв'язків вихідної нерівності на проміжку $[0;\ 2\pi]$. На цьому проміжку функція має такі корені: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$.

Складаємо таблицю:

x	$\left[0;\ \frac{\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{6}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{6};\ \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$
$\cos x$	+	+	—	—	+
$2\sin x - 1$	—	+	+	—	—
$f(x)$	—	+	—	+	—

З таблиці знаходимо, що $f(x) > 0$ при $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ або $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$. Враховуючи періодичність функції f, отримуємо відповідь: $2\pi k + \frac{\pi}{6} < x < 2\pi k + \frac{\pi}{2}$,

$$2\pi n + \frac{5\pi}{6} < x < 2\pi n + \frac{3\pi}{2},\ k, n \in Z.$$

Приклад 17.6. Розв'язати нерівність

$$|\cos x| + 3\cos x < 1.$$

Розв'язання. Розглянемо два випадки:

а) $\begin{cases}\cos x < 0,\\ 2\cos x < 1,\end{cases}$ $\cos x < 0,$

$$2\pi k + \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

б) $\begin{cases}\cos x \geq 0,\\ 4\cos x < 1,\end{cases}$ $0 \leq \cos x < \frac{1}{4},$

$$2\pi k - \frac{\pi}{2} \leq x < 2\pi k - \arccos\frac{1}{4},$$

$$2\pi k + \arccos\frac{1}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

З'єднавши результати, отримуємо відповідь:

$2\pi k + \arccos\frac{1}{4} < x < 2\pi k + 2\pi - \arccos\frac{1}{4},\ k \in Z.$

Приклад 17.7. Розв'язати нерівність

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x < 2.$$

Розв'язання.

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x < 2\sin^2 x + 2\cos^2 x,$$

$$\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 5\cos^2 x > 0. \qquad (*)$$

При $\cos x = 0$ нерівність прийме вигляд $\sin^2 x > 0$. Розв'язком системи

$$\begin{cases}\cos x = 0,\\ \sin^2 x > 0\end{cases}$$

є $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z.$

При $\cos x \neq 0$ нерівність (*) рівносильне нерівності

$$\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\,x + 5 > 0, \qquad (**)$$

одержаній діленням нерівності (*) на $\cos^2 x \neq 0$. Як нескладно впевнитись, нерівність (**) виконується при будь-якому $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$.

Об'єднуючи отримані результати, маємо відповідь: $x \in R$.

Приклад 17.8. Розв'язати нерівність

$$\mathrm{tg}\,x\cos 2x < \cos 2x\,\mathrm{tg}\,2x.$$

Розв'язання. Зауважимо, що при $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, тобто $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ $\cos 2x\,\mathrm{tg}\,2x = \sin 2x$.

Тому при $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$ вихідна нерівність рівносильна такій:

$$\mathrm{tg}\,x\cos 2x < \sin 2x. \qquad (*)$$

Нехай $\mathrm{tg}\,x = z$. Відомо, що $\cos 2x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$, $\sin 2x = \frac{2z}{1 + z^2}$. Нерівність (*) прийме вигляд

$$\frac{z\,(1-z^2)}{1+z^2} < \frac{2z}{1+z^2}, \quad z\,(1-z^2) < 2z,$$

$$z\,(-1-z^2) < 0, \quad z > 0.$$

$$\operatorname{tg} x > 0, \quad \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Враховуючи, що $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, маємо відповідь:

$$\pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad \frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$$

Вправи

Розв'язати нерівності:

17.9. $\sin x > \frac{1}{2}$.

17.10. $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

17.11. $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$.

17.12. $\operatorname{tg} 7x \leq 1$.

17.13. $3 \operatorname{ctg}\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) > 2$.

17.14. $\frac{1}{3} < \sin x < \frac{1}{2}$.

17.15. $-1 < \operatorname{ctg} x < 2$.

17.16. $\sin x < \cos x$.

17.17. $\sin 3x < \sin x$.

17.18. $\cos^2 x - 3\cos x < 0$.

17.19. $\sin x + \sqrt{3}\cos x > 0$.

17.20. $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 \geq 0$.

17.21. $\sin^2 4x > \frac{1}{2}$.

17.22. $\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x < \frac{3}{8}$.

§18. Доведення справедливості тригонометричних нерівностей

Доведення справедливості тригонометричних нерівностей, що зв'язують значення тригонометричних функцій на всій числовій осі або на деякому її проміжку, звичайно грунтується на дослідженні властивостей функцій: монотонності, обмеженості тощо. Крім того, при доведенні справедливості тригонометричних нерівностей використовуються алгебраїчні нерівності, що встанавлюють зв'язок між середнім геометричним і середнім арифметичним двох або декількох додатних чисел.

Типова помилка, яку роблять при доведенні нерівностей, полягає в такому. Нерівність, що підлягає доведенню, перетворюють і приходять до очевидно справедливої нерівності (наприклад, $(2 \sin x - 1)^2 \geq 0$), після чого роблять висновок: «Отже, нерівність доведено».

Це логічна помилка: з того, що отримана правильна нерівність, зовсім не обов'язково випливає, що вихідна нерівність вірна.

Логічно правильно проводити міркування в зворотньому порядку. Необхідно взяти деяку очевидно справедливу нерівність і провести над нею такі перетворення, які приведуть до тієї нерівності, яку вимагалось довести. Залишається головне питання: з якої ж нерівності треба виходити і як її перетворювати, щоб прийти до шуканої нерівності?

Для відповіді на нього треба провести пошук доведення, тобто перетворення запропонованої нерівності, яке приводить нас до очевидно справедливої нерівності, а потім взяти цю очевидно справедливу нерівність і провести над нею ті ж перетворення, тільки в зворотньому порядку.

Але частіше за все роблять дещо інакше. Якщо в процесі пошуку доведення до очевидного ми кожен раз замінювали нерівність на рівносильну, підкреслюючи це, то остання нерівність рівносильна вихідній, а тому з її справедливості зразу ж випливає справедливість вихідної нерівності і зворотній хід викладок не потрібен.

Примітка. При доведенні нерівностей в книзі зворотній хід викладок не наводиться, оскільки кожна нерівність замінювалась на рівносильну їй.

Приклад 18.1. Довести нерівність

$$\operatorname{tg}\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha)\le\frac{\sqrt{2}+1}{2}\sec^3\alpha$$

при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)\le\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\cos^3\alpha}$,

$$\frac{\sin\alpha\,(\cos\alpha+\sin\alpha+1)}{\cos^2\alpha}\le\frac{\sqrt{2}+1}{2\cos^3\alpha},$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha\,(\cos\alpha+\sin\alpha+1)\le\sqrt{2}+1,$$

$$\sin 2\alpha\,(\cos\alpha+\sin\alpha+1)\le\sqrt{2}+1. \qquad (*)$$

Оцінимо ліву частину отриманої нерівності: $0<\sin 2\alpha<1$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\cos\alpha+\sin\alpha\le\sqrt{2}$.

Таким чином, нерівність (*) справедлива, а значить, справедлива і задана нерівність. Рівність досягається лише при $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Приклад 18.2. Довести нерівність

$$\operatorname{tg}\alpha+(1+\operatorname{tg}\alpha)\sec\alpha\le\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)\sec^2\alpha.$$

Розв'язання. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos^2\alpha}\le\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}\right)\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$,

$$\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\le\frac{1}{2}+\sqrt{2}.$$

Оцінимо ліву частину отриманої нерівності:

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\le\frac{1}{2},\ \ \cos\alpha+\sin\alpha\le\sqrt{2}.$$

Отже, нерівність (*), а значить, і задана, справедливі.

Приклад 18.3. Довести нерівність

$$9\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} \le \mathrm{tg}\,\alpha\,(4\cos\alpha + 1) \le \frac{9}{2\sin 2\alpha},$$

де $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. 1. Спочатку доведемо справедливість нерівності

$$9\ \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} \le \mathrm{tg}\,\alpha\,(4\cos\alpha + 1). \qquad (*)$$

Позначимо $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = z$. Тоді

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2z}{1 - z^2},\quad \cos\alpha = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}.$$

Підставляючи в нерівність (*) і враховуючи, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $z > 0$, отримаємо: $9z \le \frac{2z}{1 - z^2}\left(4 \cdot \frac{1 - z^2}{1 + z^2} + 1\right)$,

$$9z \le \frac{2z}{1 - z^2} \cdot \frac{5 - 3z^2}{1 + z^2},$$

$$9 \le \frac{10 - 6z^2}{1 - z^4}. \qquad (**)$$

Оскільки $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$, тобто $0 < \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} < 1$, отже, $z < 1$ і $1 - z^4 > 0$. Значить, нерівність (**) рівносильна нерівності

$$9 - 9z^4 \le 10 - 6z^2,\ \ 9z^4 - 6z^2 + 1 \ge 0,\ \ (3z^2 - 1)^2 \ge 0,$$

що справедливо. Рівність досягається лише при $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$, тобто $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

2. Доведемо справедливість нерівності

$$\mathrm{tg}\,\alpha\,(4\cos\alpha + 1) \le \frac{9}{2\sin 2\alpha}.$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(4\cos\alpha + 1) \le \frac{9}{4\sin\alpha\cos\alpha},$$

$$4\sin^2\alpha\,(4\cos\alpha+1)\le 9,\ \ 4\,(1-\cos^2\alpha)\,(4\cos\alpha+1)\le 9,$$

$$16\cos^3\alpha+4\cos^2\alpha-16\cos\alpha+5\ge 0,$$

$$(2\cos\alpha-1)^2\,(4\cos\alpha+5)\ge 0,$$

що справедливо. Рівність досягається лише при $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Таким чином, наведена в умові нерівність справедлива.

Приклад 18.4. A, B, C — величини кутів деякого трикутника. Довести, що числа $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ — довжини сторін деякого трикутника.

Розв'язання. Нехай $\sin A\ge\sin B\ge\sin C$. За властивістю трикутника $a<b+c$. Використовуючи теорему синусів $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$, отримаємо

$$2R\sin A<2R\sin B+2R\sin C,$$

звідки $\sin A<\sin B+\sin C$, що й закінчує доведення.

Приклад 18.5. ABC — гострокутний трикутник. Довести, що числа $a\sin A$, $b\sin B$, $c\sin C$ — сторони деякого трикутника.

Розв'язання. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що з величин $a\sin A$, $b\sin B$, $c\sin C$ найбільшою є $c\sin C$. Доведемо тепер, що

$$a\sin A+b\sin B>c\sin C.$$

Використовуючи теорему синусів

$$a=2R\sin A,\ \ b=2R\sin B,\ \ c=2R\sin C,$$

отримаємо $2R\sin^2 A+2R\sin^2 B>2R\sin^2 C$,

$$\sin^2 A+\sin^2 B>\sin^2 C,\ \ \sin^2 A+\sin^2 C>\sin^2(A+B),$$

$$\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}>\frac{1-\cos 2\,(A+B)}{2},$$

$$1+\cos 2\,(A+B)>\cos 2A+\cos 2B,$$

$$2\cos^2(A+B)>2\cos(A+B)\cos(A-B),$$

$$\cos^2 (A + B) > \cos (A + B) \cos (A - B).$$

Остання нерівність для гострокутного трикутника ABC справедлива, оскільки $\cos (A + B) < 0$, а $\cos (A - B) > 0$ (оскільки $0° < C < 90°$, $90° < A + B < 180°$).

Приклад 18.6. Довести справедливість нерівності $\text{tg } 50° > \frac{13}{11}$ без обчислювальних засобів.

Розв'язання. $\text{tg } 50° = \text{tg } (45° + 5°) =$

$$= \frac{1 + \text{tg } 5°}{1 - \text{tg } 5°} = \frac{1 + \text{tg } \frac{\pi}{36}}{1 - \text{tg } \frac{\pi}{36}}.$$

Оскільки при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\text{tg } x > x$, то

$$\frac{1 + \text{tg } \frac{\pi}{36}}{1 - \text{tg } \frac{\pi}{36}} > \frac{1 + \frac{\pi}{36}}{1 - \frac{\pi}{36}} > \frac{1 + \frac{3}{36}}{1 - \frac{3}{36}} = \frac{13}{11},$$

що й вимагалось довести.

Приклад 18.7. Довести нерівність

$$\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{\sin x} \geq 2 \cos x - \cos^2 x.$$

Розв'язання. Оцінимо ліву частину даної нерівності.

Нехай $\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{\sin x} = A$. Зазначимо, що $A > 0$. Тоді

$$A^2 = 1 + 2 \sqrt{\sin x (1 - \sin x)} \geq 1,$$

звідки випливає, що $A \geq 1$.

Оцінимо праву частину даної нерівності.

$$2 \cos x - \cos^2 x = 1 - 1 + 2 \cos x - \cos^2 x =$$

$$= 1 - (1 - 2 \cos x + \cos^2 x) = 1 - (\cos x - 1)^2 \leq 1.$$

Таким чином,

$$\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{\sin x} \geq 1 \geq 2 \cos x - \cos^2 x,$$

що завершує доведення. Рівність виконується при $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

Приклад 18.8. Довести нерівність

$$\sqrt{\frac{2\cos x}{3}} + \sqrt{\frac{2 - 2\cos x}{3}} \le \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{2\sin x}$$

при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Оцінимо ліву частину даної нерівності.

Нехай $A = \sqrt{\frac{2\cos x}{3}} + \sqrt{\frac{2 - 2\cos x}{3}} > 0$. Тоді

$$A^2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{\cos x - \cos^2 x} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{4} + \cos x - \cos^2 x - \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4}\right)} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{4} - \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2} \le \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{3},$$

звідки випливає, що $A \le \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Оцінимо праву частину даної нерівності, використовуючи нерівність Коші, що встановлює зв'язок між середнім арифметичним і середнім геометричним двох додатних чисел:

$$\frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{2\sin x} \ge 2\sqrt{\frac{2}{3}\sin x \cdot \frac{1}{2\sin x}} = 2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Таким чином, отримана нерівність

$$\sqrt{\frac{2\cos x}{3}} + \sqrt{\frac{2 - 2\cos x}{3}} \le \frac{2}{\sqrt{3}} \le \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{2\sin x}$$

завершує доведення.

Приклад 18.9. Довести нерівність

$$\frac{1}{1+\sin^2\alpha}+\frac{1}{1+\cos^2\alpha}\le\frac{2}{1+\sin\alpha\cos\alpha}$$

при $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$.

Розв'язання.

$$\frac{1+\cos^2\alpha+1+\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\le\frac{2}{1+\sin\alpha\cos\alpha},$$

$$\frac{3}{2+\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\le\frac{2}{1+\sin\alpha\cos\alpha},$$

$$3+\frac{3}{2}\sin 2\alpha \le 4+\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha,$$

$$\sin^2 2\alpha-3\sin 2\alpha+2\ge 0,$$

$$(\sin 2\alpha-1)(\sin 2\alpha-2)\ge 0,$$

що вірно, оскільки вирази, записані всередині кожної з отриманих дужок, недодатні. Рівність виконується лише при $\alpha = 45^\circ$.

Приклад 18.10. Довести нерівність

$$\sin 32^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ$$

без допомоги обчислювальних засобів.

Розв'язання. Проведемо серію рівносильних перетворень: $\sin 32^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ$, $\sin 32^\circ < \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin^2 32^\circ < \frac{1}{3}$,

$$\frac{1-\cos 64^\circ}{2}<\frac{1}{3},\ \cos 64^\circ>\frac{1}{3},\ \cos^2 64^\circ>\frac{1}{9},$$

$$\frac{1+\cos 128^\circ}{2}>\frac{1}{9},\ \frac{1-\sin 38^\circ}{2}>\frac{1}{9},\ \sin 38^\circ<\frac{7}{9}.$$

З огляду на ланцюжок нерівностей

$$\sin 38^\circ < \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{7}{9}$$

дана нерівність справедлива.

Вправи

Довести нерівності:

18.11. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \le \dfrac{2 \cos \alpha \cos \beta}{\cos (\alpha - \beta)}$, де

$0 \le \alpha,\ \ \beta \le \dfrac{\pi}{4}$.

18.12. $\dfrac{1}{4} \le \sin^4 \alpha + \sin^3 \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha +$

$+ \sin \alpha \cos^3 \alpha + \cos^4 \alpha \le \dfrac{5}{4}$.

18.13. $1 + \operatorname{ctg} \alpha \le \operatorname{ctg} \dfrac{\alpha}{2}$, где $0^\circ < \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$.

18.14. $\sin^4 \alpha + 2 \sin^3 \alpha \cos \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha +$

$+ 4 \sin \alpha \cos^3 \alpha + 2 \cos^4 \alpha \ge 0$.

Довести без допомоги обчислювальних засобів:

18.15. $\sin 35^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ < \sin 36^\circ$.

18.16. $\operatorname{tg} 26^\circ < \sin 30^\circ < \operatorname{tg} 27^\circ$.

18.17. $\sin^2 26^\circ < 0{,}2 < \sin^2 27^\circ$.

18.18. $\cos^2 36^\circ < \dfrac{2}{3} < \cos^2 35^\circ$.

§19. Розв'язування рівнянь з параметрами

Приклад 19.1. При яких значеннях a рівняння

$$\cos\left(mx + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(mx - \frac{\pi}{6}\right) = a$$

має корені?

Розв'язання. Маємо: $\frac{1}{2}\left(\cos 2mx + \cos\frac{\pi}{3}\right) = a$, звідки

$$\cos 2mx = 2a - \frac{1}{2}, \quad \cos 2mx = \frac{4a-1}{2}.$$

З цієї рівності випливає, що

$$-1 \le \frac{4a-1}{2} \le 1, \quad -2 \le 4a - 1 \le 2, \quad -1 \le 4a \le 3.$$

Відповідь: $-\frac{1}{4} \le a \le \frac{3}{4}$.

Приклад 19.2. Розв'язати рівняння

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0.$$

Розв'язання. Маємо:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \sin 2x + a = 0,$$

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \sin 2x + a = 0,$$

$$\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(a+1) = 0,$$

звідки $\sin 2x = 1 \pm \sqrt{2a+3}$. Умовою існування коренів є $2a + 3 \ge 0$, або $a \ge -\frac{3}{2}$.

Оскільки $|\sin 2x| \le 1$, то $|1 \pm \sqrt{2a+3}| \le 1$.

Розглянемо окремо останні співвідношення:

1. $|1 - \sqrt{2a+3}| \le 1$, звідки

$$-\frac{3}{2} \le a \le \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

За цієї умови $\sin 2x = 1 - \sqrt{2a+3}$ і

$$x = \frac{\pi k}{2} + \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\left(1 - \sqrt{2a+3}\right). \qquad (**)$$

2. $|1 + \sqrt{2a + 3}| \le 1$, але оскільки, з іншого боку, $1 + \sqrt{2a+3} \ge 1$, то $\sqrt{2a+3} = 0$, тобто $a = -\frac{3}{2}$. Тому в цьому випадку

$$\sin 2x = 1. \qquad (***)$$

Оскільки $a = -\frac{3}{2}$ входить в (*), то розв'язки рівняння (***) входять в розв'язки (**).

Відповідь: $x = \frac{\pi k}{2} + \frac{(-1)^k}{2} \arcsin\left(1 - \sqrt{2a+3}\right)$,

$$\text{де } -\frac{3}{2} \le a \le \frac{1}{2}.$$

Приклад 19.3. Розв'язати рівняння

$$\sin 3x + \sin 2x = m \sin x.$$

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння таким чином: $\sin(2x + x) + \sin 2x = m \sin x$,

$$\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x + \sin 2x - m \sin x = 0,$$

$$\sin x\,(2\cos^2 x + \cos 2x + 2\cos x - m) = 0,$$

$$\sin x\,(4\cos^2 x + 2\cos x - m - 1) = 0. \qquad (1)$$

Оскільки квадратний тричлен, що в дужках, має корені $\frac{-1 + \sqrt{4m+5}}{4}$ і $\frac{-1 - \sqrt{4m+5}}{4}$, то рівняння (1) розпадається на три:

$$\sin x = 0, \qquad (2)$$

$$\cos x = \frac{-1 + \sqrt{4m+5}}{4}, \qquad (3)$$

$$\cos x = \frac{-1 - \sqrt{4m+5}}{4}. \qquad (4)$$

З (2) отримуємо $x = \pi k$. Умовою існування коренів рівняння (3) і (4) є нерівність $4m + 5 \ge 0$, тобто $m \ge -\frac{5}{4}$.

Щоб рівняння (3) мало розв'язок, ще необхідно, щоб

$$\left|\frac{-1+\sqrt{4m+5}}{4}\right| \le 1, \qquad (5)$$

а для того, щоб рівняння (4) мало розв'язок, необхідно, щоб

$$\left|\frac{-1-\sqrt{4m+5}}{4}\right| \le 1. \qquad (6)$$

З (5) випливає

$$|-1+\sqrt{4m+5}| \le 4 \text{ або } -4 \le -1+\sqrt{4m+5} \le 4,$$

$$-3 \le \sqrt{4m+5} \le 5,$$

звідки $-\frac{5}{4} \le m \le 5$.

З (6) маємо $-4 \le -1 - \sqrt{4m+5} \le 4$, звідки $-\frac{5}{4} \le m \le 1$. Отже, $x_1 = \pi k$ при будь-якому m;

$$x_2 = 2\pi k \pm \arccos\frac{-1+\sqrt{4m+5}}{4} \quad \text{при } -\frac{5}{4} \le m \le 5;$$

$$x_3 = 2\pi k \pm \arccos\frac{-1-\sqrt{4m+5}}{4} \quad \text{при } -\frac{5}{4} \le m \le 1.$$

Приклад 19.4. Розв'язати рівняння

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a.$$

Визначити значення a, при яких рівняння має розв'язки.

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння

$$(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = a,$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = a,$$

$$\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 3\sin^2 x\cos^2 x = a,$$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{3}{4}\cdot 4\sin^2 x\cos^2 x = a,$$

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = a,$$

звідки $\sin^2 2x = \frac{4(1-a)}{3}$ або $\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{4(1-a)}{3}$.

Звідси

$$\cos 4x = \frac{8a - 5}{3}. \qquad (*)$$

Необхідною і достатньої умовою існування розв'язку заданого рівняння є нерівність $-1 \le \frac{8a - 5}{3} \le 1$, звідки

$$\frac{1}{4} \le a \le 1. \qquad (**)$$

При виконанні умов (**) і (*) отримуємо

$$4x = 2\pi k \pm \arccos \frac{8a - 5}{3} \quad \text{і}$$

$$x = \frac{\pi k}{2} \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{8a - 5}{3}.$$

Відповідь: $x = \frac{\pi k}{2} \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{8a - 5}{3}$ при $\frac{1}{4} \le a \le 1$.

Зокрема, якщо $a = 1$, то $x = \frac{\pi k}{2}$,

а якщо $a = \frac{1}{4}$, то $x = \frac{\pi k}{2} \pm \frac{\pi}{4}$.

Приклад 19.5. Розв'язати рівняння

$$a(\cos x - \sin x)^2 + b \cos 2x = 0.$$

Розв'язання. Дане рівняння перетворимо таким чином:

$$a(\cos x - \sin x)^2 + b(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0,$$

$$(\cos x - \sin x)((b - a)\sin x + (a + b)\cos x) = 0,$$

звідки

$$\cos x - \sin x = 0 \;\; \text{или} \;\; (b - a)\sin x + (a + b)\cos x = 0.$$

Перше з цих рівнянь має корені $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, де $k \in Z$. Розв'язуємо рівняння

$$(b - a)\sin x + (a + b)\cos x = 0.$$

Якщо $a = b = 0$, то це рівняння виконується при будь-яких значеннях x.

Якщо $a = b \neq 0$, то з останнього рівняння отримаємо $\cos x = 0$ і $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, де $k \in Z$.

Якщо $a \neq b$, то $b - a \neq 0$ і $\operatorname{tg} x = \frac{a + b}{a - b}$, звідки

$$x = k\pi + \operatorname{arctg} \frac{a + b}{a - b}, \text{ де } k \in Z.$$

Відповідь: Якщо $a \neq b$, то $x = k\pi + \operatorname{arctg} \frac{a + b}{a - b}$ і $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, де $k \in Z$;

якщо $a = b \neq 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ і $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, де $k \in Z$;

якщо $a = b = 0$, то x — будь-яке дійсне число.

Вправи

Розв'язати рівняння:

19.6. $\sin 2x + 2a\sqrt{2}(\sin x - \cos x) + 1 - 4a = 0$.

19.7. $(a + 1)\cos x - (a - 1)\sin x = 2a$.

19.8. $\frac{a \sin x + b}{b \cos x + a} = \frac{a \cos x + b}{b \sin x + a}$.

§20. Різні задачі

20.1. Для кутів трикутника ABC довести нерівність $\sqrt[n]{\sin A} + \sqrt[n]{\sin B} > \sqrt[n]{\sin C}$.

20.2. При яких цілих k рівняння

$$2 \sin^2 x + 6 \cos^2 \frac{x}{2} = 5 - 2k$$

має розв'язки?

20.3. Знайти спільні розв'язки рівнянь

$$3 \sin^3 x - 3 \cos^2 x + 7 \sin x - \cos 2x + 1 = 0,$$

$$\cos^2 x + 3 \cos x \sin 2x - 8 \sin x = 0.$$

20.4. Довести, що при $\frac{\pi}{3} \le \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3} \le \beta < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{2}{\cos \alpha + \cos \beta} - 1 \le \sqrt{\left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos \beta} - 1\right)}.$$

20.5. Довести, що система нерівностей

$$\begin{cases} \sin x \ge \sqrt{3x^2 - 20x + 32}, \\ \cos x \ge x^2 \end{cases}$$

не має розв'язків.

20.6. При якому a рівняння

$$6 \sin x = a\,(7 + \cos 2x) \text{ і } 3a \sin x - 8 = a\,(4 + \sin 3x)$$

мають спільний корінь?

20.7. Розв'язати рівняння

$$\cos x \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} + \cos 3x \sqrt{\frac{1}{\cos 3x} - 1} = 1.$$

20.8. Довести нерівність

$$\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta} \le \frac{1}{2}\,(\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta).$$

20.9. Довести, що якщо α, β — гострі кути і $\operatorname{tg} \beta = 3 \operatorname{tg} \alpha$, то $\beta \le 30^\circ + \alpha$.

20.10. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{\sin x - \sqrt{\sin x + \cos x}} = \cos x.$$

20.11. Довести рівність

$$\frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}.$$

20.12. Довести, що всі розв'язки рівняння $(2\sqrt{2}\cos 25^\circ - 1)\operatorname{tg} x^\circ = (2\sqrt{2}\sin 25^\circ - 1)\operatorname{tg} 3x^\circ$ — цілі числа.

20.13. Що більше: $\operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{tg} 42^\circ$ чи $\operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 24^\circ$?

20.14. Розв'язати рівняння

$$(3\sin x + \sqrt{3}\cos x + 5y)^2 = 37\,(1 + y^2).$$

20.15. Кут A трикутника ABC дорівнює 60°. Обчислити його інші кути, якщо

$$2\cos B - 1 = \frac{a + b}{a + c}.$$

20.16. Розв'язати рівняння

$$\cos^{12} x + \sin^6 x\,(1 + \cos^2 x)^3 = 1.$$

20.17. Розв'язати рівняння

$$4\sin^{12} x + 4\,(\sin^6 x + 1)\cos^6 x + 3\sin^2 2x = 4.$$

20.18. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2 - 2\cos x} + \sqrt{10 - 6\cos x} = \sqrt{10 - 6\cos 2x}.$$

20.19. Довести, що для трикутника справедлива нерівність $a \geq 2h_a \operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

20.20. Довести, що якщо $\alpha + \beta = 60^\circ$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \leq \frac{1}{3}$.

20.21. Довести справедливість числової рівності

$$\sin\frac{\pi}{36}\cos\frac{7\pi}{36}\sin\frac{13\pi}{36} = \frac{1}{16}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

20.22. Довести, що якщо x, y, z — кути гострокутного трикутника, то

$$\operatorname{tg}^n x + \operatorname{tg}^n y + \operatorname{tg}^n z \geq 3\sqrt{3^n}.$$

20.23. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin^3 x = \sin y, \\ \sin^2 y = \sin z, \\ \sin^2 z = \sin x, \end{cases}$$

якщо $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, $0 \leq z \leq \pi$.

20.24. Довести справедливість такої рівності: $\operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 85^\circ$.

20.25. Довести, що не існує трикутника ABC, для кутів якого мала б місце рівність

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C.$$

20.26. Чи має розв'язки нерівність

$$3x - \operatorname{tg} x > 1{,}2$$

на відрізку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$?

20.27. Що більше:

$$4 \operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 9^\circ \text{ чи } 3 \operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{tg} 10^\circ?$$

20.28. Розв'язати рівняння

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \sin x \sin y + \sin x + \sin y - 1.$$

20.29. Розташувати в порядку зростання числа $4 \operatorname{tg} 1^\circ$, $3 \operatorname{tg} 2^\circ$, $2 \operatorname{tg} 3^\circ$, $\operatorname{tg} 4^\circ$.

20.30. Довести, що при $\alpha > 2$ виконується нерівність $\sin \frac{\pi}{\alpha} > \frac{3}{\sqrt{\alpha^2 + 9}}$.

20.31. Розв'язати рівняння

$$\sin(45^\circ + x) \sin(75^\circ + 2x) = \sqrt{2} \sin(75^\circ + x) \cos 2x.$$

20.32. Довести, що для довільного трикутника ABC виконується рівність

$$\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{A}{2}+B\right)+\cos\frac{B}{2}\cos\left(\frac{B}{2}+C\right)+$$
$$+\cos\frac{C}{2}\cos\left(\frac{C}{2}+A\right)=0.$$

20.33. Обчислити при довільному α суму

$$\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+1^\circ)+\sin^2(\alpha+2^\circ)+\ldots+\sin^2(\alpha+179^\circ).$$

20.34. Задані чотири кута α, β, γ і δ, такі, що $\alpha+\beta=\gamma+\delta<180^\circ$, причому всі кути додатні і $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\gamma : \operatorname{tg}\delta$. Довести, що $\alpha=\gamma$ і $\beta=\delta$ або $\alpha=90^\circ+\delta$ і $\gamma=90^\circ+\beta$.

20.35. Для трикутника ABC виконується рівність $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sin 2A+\sin 2B}{\sin 2C}$. Довести, що ця пропорція рівносильна рівності

$$\cos A+\cos B=1.$$

20.36. Виразити через сторони трикутника ABC відношення $\sin\left(B+\dfrac{C}{2}\right):\sin\dfrac{C}{2}$.

20.37. Знайдіть кут β, якщо числа α, β, γ і $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$ складають арифметичні прогресії.

20.38. Медіана BM трикутника ABC утворює зі стороною BC кут φ. Доведіть, що

$$\operatorname{ctg}A\geq\frac{2\sqrt{2}-3\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

20.39. Доведіть нерівність Гюйгенса: якщо $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, то $2\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha>3\alpha$.

20.40. В трикутнику ABC $b+c=2R\sqrt{3}$. Довести, що $\dfrac{\sin 2A}{\sin 3A}>\dfrac{2}{3}$.

20.41. Розв'язати рівняння

$$2+\sec x\sec 3x=2\operatorname{ctg}2x\operatorname{tg}3x.$$

20.42. Довести, що якщо A, B, C — кути тупокутного трикутника ABC, то

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C<0.$$

Як скласти тригонометричну тотожність

Нехай, як звичайно, сторони довільного трикутника мають довжини a, b, c, а протилежні кути відповідно дорівнюють α, β, γ.

За теоремою косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \tag{1}$$

Згідно з теоремою синусів,

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma,$$

де R — радіус кола, описаного навколо трикутника.

Підставляючи ці значення в рівність (1), отримуємо:

$$4R^2 \sin^2\alpha = 4R^2 \sin^2\beta + 4R^2 \sin^2\gamma - 8R^2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha,$$

звідки

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha. \tag{2}$$

Доведемо, що тотожність (2) виконується не тільки для кутів довільного трикутника, але і для будь-яких кутів α, β, γ, що задовольняють умові $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Тепер $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$ і $\cos \alpha = -\cos (\beta + \gamma)$. Далі маємо: $\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha =$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\gamma) -$$

$$- \cos \alpha (\cos (\beta - \gamma) - \cos (\beta + \gamma)) =$$

$$= 1 - \cos (\beta + \gamma) \cos (\beta - \gamma) - \cos \alpha \cos (\beta - \gamma) +$$

$$+ \cos \alpha \cos (\beta + \gamma) = 1 + \cos \alpha \cos (\beta - \gamma) -$$

$$- \cos \alpha \cos (\beta - \gamma) - \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha.$$

Аналогічно доведемо, що при $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ справедливі тотожності

$$\sin^2 \beta = \sin^2 \gamma + \sin^2 \alpha - 2 \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta, \tag{3}$$

$$\sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma. \tag{4}$$

Додавши почленно рівності (2), (3) і (4), отримуємо:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha +$$
$$+ 2 \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma. \tag{5}$$

Нехай $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Покладемо $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$, $\gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$. Зазначимо, що

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Тому для кутів α_1, β_1, γ_1 справедлива тотожність (2).

$$\sin^2 \alpha_1 = \sin^2 \beta_1 + \sin^2 \gamma_1 - 2 \sin \beta_1 \sin \gamma_1 \cos \alpha_1, \text{ або}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} - 2 \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (6)$$

Аналогічно доведемо, що

$$\cos^2 \frac{\beta}{2} = \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \quad (7)$$

і

$$\cos^2 \frac{\gamma}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} - 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \quad (8)$$

Складаючи почленно рівності (6), (7) і (8), отримуємо рівність

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} +$$

$$+ 2 \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}. \quad (9)$$

Зрозуміло, що таким чином можна отримати з тотожності (2) нові тотожності. Наприклад, поклавши $\alpha_1 = \pi - 2\alpha$, $\beta_1 = \pi - 2\beta$, $\gamma_1 = \pi - 2\gamma$, де $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, отримаємо з тотожності (2)

$$\sin^2 2\alpha = \sin^2 2\beta + \sin^2 2\gamma + 2 \sin 2\beta \sin 2\gamma \cos 2\alpha. \quad (10)$$

Нехай $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Тоді $-\cos \alpha = \cos (\beta + \gamma) =$

$$= \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma,$$

звідки $\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha = \sin \beta \sin \gamma$.

Підносячи до квадрату обидві частини останньої рівності, отримуємо:

$$(\cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \beta \sin^2 \gamma \text{ або}$$

$$\cos^2\beta\cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\alpha =$$
$$= (1 - \cos^2\beta)(1 - \cos^2\gamma),$$

звідки маємо:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \qquad (11)$$

З тотожності (11) отримуємо тотожності для кутів α, β, γ, що задовільняють умові $\alpha + \beta + \gamma = \pi$:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} = 1 - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$\left(\text{заміни } \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2},\ \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2},\ \gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$;

$$\cos^2 2\alpha + \cos^2 2\beta + \cos^2 2\gamma = 1 + 2\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma$$

(заміни $\alpha_1 = \pi - 2\alpha$, $\beta_1 = \pi - 2\beta$, $\gamma_1 = \pi - 2\gamma$).

Як скласти тригонометричну нерівність

Розглянемо трикутник зі сторонами a, b, c і відповідними кутами α, β, γ. Відомо, що

$$\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha \le 2. \qquad (1)$$

Рівність досягається лише при $\alpha = 60^\circ$. Використовуючи відомі формули $\sin\alpha = \frac{2S}{bc}$ і $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, маємо з нерівності (1) $\frac{2\sqrt{3}\,S}{bc} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \le 2$,

$$4\sqrt{3}\,S + b^2 + c^2 - a^2 \le 4bc. \qquad (2)$$

Аналогічно доведемо, що

$$4\sqrt{3}\,S + a^2 + b^2 - c^2 \le 4ab. \qquad (3)$$

Додамо почленно рівності (2) і (3):

$$8\sqrt{3}\,S + 2b^2 \le 4bc + 4ab, \text{ або}$$

$$4\sqrt{3}\,S \le 2ab + 2bc - b^2. \qquad (4)$$

Рівність в нестрогій нерівності (4) досягається лише при $\alpha = \beta = 60^\circ$.

Відомо, що $S = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$. З теореми синусів випливає, що $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $c = 2R\sin\gamma$.

Підставляючи ці значення в нерівність (4), маємо:
$8\sqrt{3}\ R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \le$

$$\le 8R^2 \sin\alpha \sin\beta + 8R^2 \sin\beta \sin\gamma - 4R^2 \sin^2\beta \text{ або}$$

$$2\sqrt{3} \sin\alpha \sin\gamma \le 2\sin\alpha + 2\sin\gamma - \sin\beta. \qquad (5)$$

Ми отримали нерівність, справедливу для кутів α, β, γ довільного трикутника.

Кути $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$, $\gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$ також є кутами деякого трикутника. Тому з рівняння (5) отримуємо: $2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) \le$

$$\le 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) \text{ або}$$

$$2\sqrt{3} \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\gamma}{2} \le 2\cos\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\beta}{2}. \qquad (6)$$

Кути $\alpha_1 = \pi - 2\alpha$, $\beta = \pi - 2\beta$, $\gamma_1 = \pi - 2\gamma$ є кутами трикутника, якщо кути α, β, γ гострі. Тому для кутів α, β, γ гострокутного трикутника отримуємо з нерівності (5):

$$2\sqrt{3} \sin(\pi - 2\alpha) \sin(\pi - 2\gamma) \le$$

$$\le 2\sin(\pi - 2\alpha) + 2\sin(\pi - 2\gamma) - \sin(\pi - 2\beta) \text{ або}$$

$$2\sqrt{3} \sin 2\alpha \sin 2\gamma \le 2\sin 2\alpha + 2\sin 2\gamma - \sin 2\beta. \qquad (7)$$

Таким чином можна отримувати нові нерівності з нерівності (5). Виконуються нерівності, аналогічні нерівності (5):

$$2\sqrt{3} \sin\beta \sin\gamma \le 2\sin\beta + 2\sin\gamma - \sin\alpha, \qquad (8)$$

$$2\sqrt{3} \sin\alpha \sin\beta \le 2\sin\alpha + 2\sin\beta - \sin\gamma. \qquad (9)$$

Додавши почленно нерівності (5), (8) і (9), маємо:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} (\sin\alpha \sin\beta + \sin\beta \sin\gamma + \sin\gamma \sin\alpha) \le$$

$$\le \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma.$$

Рівність в останній нерівності досягається лише при $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

Відповіді. Вказівки. Розв'язки

§ 1.

1.5. 2. **1.6.** 0. **1.7.** 1. **1.8.** 1. **1.9.** 1. **1.10.** $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta$. **1.11.** $\sin\alpha\cos\alpha$. **1.12.** $\cos^2\alpha$. **1.13.** $\sin^2\alpha$. **1.14.** $\sin^2\alpha$. **1.15.** $\operatorname{tg}^6\alpha$. **1.16.** 4. **1.17.** $2\sec\alpha$. **1.18.** $2\operatorname{cosec}\alpha$. **1.19.** $2\operatorname{cosec}^2\alpha$. **1.20.** $2|\operatorname{ctg}\alpha|$. **1.56.** $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-m^2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$; $\sec\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{m}$. **1.57.** $\cos\alpha = \frac{1}{p}$; $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{1}{p^2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{p^2-1}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{p^2-1}}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \pm\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}$. **1.58.** *а*) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{12}{5}$; $\sec\alpha = -\frac{13}{12}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{13}{5}$; *б*) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$; $\sec\alpha = \frac{5}{3}$; $\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{5}{4}$; *в*) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{12}{35}$; $\sec\alpha = -\frac{37}{35}$; $\cos\alpha = -\frac{35}{37}$; $\sin\alpha = \frac{12}{37}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{37}{12}$; *г*) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{3}$; $\sec\alpha = \sqrt{10}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$; $\sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$; $\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{3}$. **1.59.** $\frac{a\operatorname{ctg}^2\alpha + a}{b\operatorname{ctg}^2\alpha - c}$. **1.60.** *а*) $\frac{2a+b}{2c-d}$; *б*) $\frac{a-3b}{c+3d}$. **1.61.** *а*) $7\sin^2\alpha - 4$; *б*) $3 - 7\cos^2\alpha$. **1.62.** *а*) $\frac{a + b\operatorname{tg}^2\alpha}{c - d\operatorname{tg}^2\alpha}$; *б*) $\frac{a\operatorname{ctg}^2\alpha + b}{c\operatorname{ctg}^2\alpha - d}$. **1.68.** $\frac{p^2-1}{2}$; $\pm\sqrt{2-p^2}$; $\frac{1}{2}p(3-p^2)$; $\frac{1+2p^2-p^4}{2}$.

1.69. *а)* $m^2 - 2$; *б)* $\pm\sqrt{m^2 - 4}$; *в)* $m^3 - 3m$; *г)* $\pm\sqrt{m^2 - 4}\,(m^2 - 1)$. **1.72.** $m^2 + n^2 = 2$. **1.73.** $2 + n = m^2$. **1.74.** $m\,(3 - m^2) = 2n$. **1.75.** $2m^2 = m^4 + n^2$. **1.76.** $2p = 1 - m^4 + 2m^2$. **1.77.** $4l = 1 - 3m^4 + 6m^2$. **1.78.** $n = m^3 - 3m$. **1.79.** $4\,(m^2 - 1)^2 = m^2\,(m^2 - 1)^2 - n^2$. **1.80.** $y^2 - 2 = x$. **1.81.** $16x^2 - 25y^2 = 400$. **1.82.** $x^2y^2\,(x^2 + y^2 + 3) = 1$. **1.83.** $x = y$ или $x + y = 2xy$. **1.84.** $2\,(x^2 + y^2) = (a + b)^2$.

§ 2.

2.5. Непарна. **2.6.** Парна. **2.7.** Ні парна, ні непарна. **2.8.** Непарна. **2.9.** Ні парна, ні непарна. **2.10.** Непарна. **2.11.** Парна. **2.12.** Непарна. **2.13.** Парна. **2.14.** Непарна. **2.22.** $-\sin 7^\circ$. **2.23.** $-\operatorname{tg} 34^\circ$. **2.24.** $\operatorname{ctg} 4^\circ$. **2.25.** $\sin 34^\circ$. **2.26.** $-\operatorname{ctg} 24^\circ$. **2.27.** $\cos 28^\circ$. **2.28.** $-\operatorname{ctg} 5^\circ$. **2.29.** $-\sin\alpha$. **2.30.** $-\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. **2.31.** $-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. **2.32.** $\cos\left|\frac{\pi}{6} - \alpha\right|$. **2.33.** $-\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$. **2.34.** 0. **2.35.** 0. **2.36.** $\sin\alpha$. **2.37.** 0. **2.38.** 1. **2.39.** –1. **2.40.** 1. **2.41.** 0. **2.42.** $3\sin^2 x$. **2.43.** 2. **2.59.** $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$. **2.60.** $-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.61.** –1. **2.62.** 0. **2.63.** 0. **2.64.** 0. **2.65.** 1. **2.66.** 1. **2.67.** 0. **2.69.** Існує. **2.70.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **2.71.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **2.72.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **2.73.** $\frac{1}{2}$.

§ 3.

3.12. $\frac{1}{2}$. **3.13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.14.** $\sqrt{3}$. **3.15.** $\sqrt{3}$. **3.16.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3.17.** $\cos\frac{\pi}{30}$. **3.18.** $\cos 10^\circ$. **3.19.** 1. **3.20.** 1. **3.21.** $\operatorname{tg}\alpha$. **3.22.** $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$. **3.23.** 1. **3.24.** 1. **3.25.** $\sin 40^\circ$. **3.26.** $-\sin 40^\circ$. **3.40.** $\frac{\pi}{4}$. **3.41.** *а)* 135°; *б)* 135°. **3.43.** $ab - \sqrt{a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1}$.

§ 4.

4.9. 1. **4.10.** 1. **4.11.** $\mathrm{tg}\,2\alpha$. **4.12.** $\sin 2\alpha$. **4.13.** $\sin 80^\circ$. **4.14.** $2\,\mathrm{cosec}\,\alpha$. **4.15.** 1. **4.16.** $\mathrm{tg}\,2\alpha$. **4.17.** $\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha$. **4.18.** $\frac{1}{2}$. **4.19.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.20.** $\frac{1}{8}$. **4.21.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **4.22.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.38.** $\mathrm{tg}\,25^\circ$. **4.39.** $\sin 2\alpha$. **4.40.** $\mathrm{tg}\,(30^\circ - \alpha)$. **4.41.** 1. **4.42.** $\sqrt{2}\,\mathrm{ctg}\,2\alpha$. **4.43.** $\cos\frac{\alpha}{4}$. **4.44.** $\sin\frac{\alpha}{4}$.

§ 5.

5.7. $\frac{1}{2}(\cos 35^\circ + \cos 15^\circ)$. **5.8.** $\frac{1}{4}(\sin 4^\circ + \sin 8^\circ + \sin 12^\circ - \sin 24^\circ)$. **5.9.** $\frac{1}{4}\sin 3\alpha$. **5.10.** $\frac{1}{2}(1 - \cos 6\alpha - \cos 8\alpha + \cos 10\alpha)$. **5.11.** $\frac{2\sin(60^\circ + \alpha)}{\cos\alpha}$. **5.12.** $\frac{2\sin(\alpha - 30^\circ)}{\cos\alpha}$. **5.13.** $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. **5.14.** $4\cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$. **5.15.** $4\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)$. **5.16.** $4\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)$. **5.17.** $\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\beta-\alpha}{2}$. **5.18.** $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$. **5.19.** $\mathrm{ctg}\,40^\circ\,\mathrm{tg}\,15^\circ$. **5.20.** $\frac{\cos 20^\circ}{\cos 48^\circ\cos 22^\circ}$. **5.21.** $4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$. **5.22.** $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\sin(\alpha - 45^\circ)}{\sin\alpha}$. **5.23.** $4\cos\alpha \times \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\alpha}{2}\right)$. **5.24.** $4\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}$. **5.25.** $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta+\gamma}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma+\alpha}{2}$.

§ 6.

6.31. $\frac{3\sqrt{2}}{32}$. **6.32.** $\frac{1}{8}$. **6.33.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos 40^\circ$. **6.34.** $3\sin 4\alpha$. **6.35.** $\frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{2}$. **6.36.** $\operatorname{tg} 3\alpha$.

§ 7.

7.20. $4\sin(\alpha + 30^\circ)\sin(30^\circ - \alpha)$. **7.21.** $\sin(\beta - \alpha)\times$ $\times\sin(\alpha + \beta)$. **7.22.** $\sin 2\alpha \sin 2\beta$. **7.23.** $\sqrt{2}\sin(4\alpha - 45^\circ)$. **7.24.** $4\sin(\alpha + 30^\circ)\sin(30^\circ - \alpha)$. **7.25.** $\cos(\alpha + \beta)\times$ $\times\cos(\alpha - \beta)$. **7.26.** $4\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.

7.27. $\frac{4\sin(\alpha - 60^\circ)\sin(\alpha + 60^\circ)}{\sin^2\alpha}$. **7.28.** $\frac{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$.

7.29. $-\frac{16\operatorname{ctg} 2\alpha}{\sin^3 2\alpha}$. **7.30.** $\operatorname{tg}^8\alpha$. **7.31.** $\frac{4\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}$. **7.32.** $2\sqrt{2}\cos\alpha\cos(45^\circ - \alpha)$. **7.33.** $2\sqrt{2}\sin\alpha\cos(45^\circ - \alpha)$. **7.34.** $4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha$.

7.35. $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{3\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3\alpha\right)}{\cos 3\alpha}$.

7.36. $\frac{2\sqrt{2}\cos 2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)}{\cos 4\alpha}$. **7.37.** $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\operatorname{ctg} 3\alpha$.

7.38. $\operatorname{tg} 5\alpha$. **7.39.** $\operatorname{ctg}\frac{17\alpha}{2}$. **7.40.** $\operatorname{tg}\frac{29\alpha}{2}$. **7.41.** $4\sin 3\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha$. **7.42.** $\frac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}$.

7.43. $2\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 6\alpha$. **7.44.** $2\cos 2\alpha\sin 6\alpha\times$ $\times\sin 10\alpha$. **7.45.** $2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

7.46. $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(4\alpha - 60^\circ)$. **7.47.** $-8\cos 4\alpha$.

7.48. $\dfrac{4\sqrt{2}\sin(\alpha-45^\circ)\sin(\alpha-60^\circ)\sin(\alpha+60^\circ)}{\cos^3\alpha}$. **7.49.** $\dfrac{8\sin(\alpha-45^\circ)\sin(\alpha+45^\circ)\sin(\alpha-60^\circ)\sin(\alpha+60^\circ)}{\cos^4\alpha}$.

7.50. $8\sin(2\alpha+30^\circ)\sin(2\alpha-30^\circ)$.

7.51. $8\cos(2\alpha+60^\circ)\cos(2\alpha-60^\circ)$. **7.52.** $\dfrac{\cos(2\alpha+\beta)}{\cos 4\alpha}$.

7.53. $8\cos^4 2\alpha$. **7.54.** $2\sin\dfrac{\alpha}{4}$. **7.55.** $\sin^2(\alpha-\beta)$. **7.56.** $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. **7.57.** $4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-2\alpha\right)$.

7.58. $-\dfrac{4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-4\alpha\right)}{\sin 8\alpha}$. **7.59.** $2\operatorname{ctg}4\alpha$. **7.60.** *а)* $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$; *б)* $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. **7.61.** $2\sin\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$. **7.62.** $\sec^2\dfrac{\varphi}{2}$. **7.63.** $\sin 4\alpha$. **7.64.** $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\operatorname{tg}^2\alpha$.

§ 8.

8.16. *а)* $\dfrac{\pi}{6}$; *б)* $\dfrac{\pi}{4}$; *в)* $\dfrac{\pi}{4}$; *г)* $\dfrac{\pi}{6}$; *д)* $\dfrac{\pi}{2}$; *ж)* $\dfrac{\pi}{2}$; *з)* $-\dfrac{\pi}{3}$; *и)* $\dfrac{2\pi}{3}$; *к)* $-\dfrac{\pi}{3}$; *л)* $\dfrac{3\pi}{4}$; *м)* π; *н)* $-\dfrac{\pi}{4}$. **8.17.** -1. **8.18.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **8.19.** $\dfrac{1}{2}$. **8.20.** -1. **8.21.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **8.26.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **8.27.** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **8.28.** $\dfrac{\sqrt{33}}{11}$. **8.29.** $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$. **8.30.** $\dfrac{2+5\sqrt{3}}{12}$. **8.31.** $\dfrac{3}{11}$. **8.32.** $\dfrac{(27-16\sqrt{2})\sqrt{7}}{49}$. **8.33.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$. **8.34.** $\dfrac{7}{25}$. **8.43.** 4; -1. **8.44.** 4; 2. **8.45.** -1; -2. **8.46.** $\dfrac{1}{7}$. **8.47.** $\dfrac{2}{3}$. **8.48.** $\dfrac{1}{5}$. **8.49.** 0. **8.50.** 0.

§ 9.

9.29. *а)* $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; *б)* $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; *в)* $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; *г)* $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; *д)* $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; *е)* $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; *ж)* $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; *з)* $\frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **9.30.** *а)* $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; *б)* $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; *в)* $\varnothing$. **9.31.** *а)* $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; *б)* $\pi + 2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; *в)* $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **9.32.** *а)* πn, $n \in Z$; $(-1)^k \arcsin\frac{2}{5} + \pi k$, $k \in Z$; *б)* $\frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; *в)* $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $\frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **9.33.** *а)* $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; $\pm \operatorname{arctg}\sqrt{2} + \pi k$, $k \in Z$; *б)* $2\pi n$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; *в)* $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. **9.34.** *а)* $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in Z$; *б)* $\pm\frac{\pi}{6} + \pi l$, $l \in Z$; *в)* πk, $k \in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \pi n$, $n \in Z$. **9.35.** *а)* $\operatorname{arctg} 7 + \pi n$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; *б)* $\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{7}{2} + \frac{\pi f}{2}$, $f \in Z$; *в)* $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi f$, $f \in Z$. **9.36.** *а)* $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in Z$; *б)* $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi k$, $k \in Z$. **9.37.** *а)* $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; *б)* $\alpha + \beta = 2\pi n$, $n \in Z$; $\alpha - \beta = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$; *в)* $\alpha + \beta = \pi - 2\pi n$, $n \in Z$; $\alpha - \beta = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$. **9.38.**

а) πn, $n \in Z$; *б*) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in Z$; *в*) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$. **9.39.** $\frac{\pi}{8}(4k + 1)$, $\frac{\pi}{12}(12k + 1)$, $k \in Z$. **9.40.** $(-1)^{k-1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **9.41.** $\frac{\pi}{4}(4k - 1)$, $k \in Z$. **9.42.** $\frac{\pi}{4}(2k + 1)$, $k \in Z$. **9.43.** πk, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$. **9.44.** $\frac{\pi}{12}(4k - 1)$, $k \in Z$; $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$. **9.45.** $\frac{\pi}{4}(4k + 1)$, $\frac{\pi}{2}(4k - 1)$, $k \in Z$. **9.46.** $\frac{\pi}{10}(2k + 1)$; $(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$. **9.47.** $\frac{\pi}{12}(4k - 1)$, $k \in Z$. **9.48.** $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k \in Z$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **9.49.** $\frac{\pi}{4}(2k + 1)$, $k \in Z$; $(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **9.50.** $\frac{\pi}{4}(2k + 1)$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{14}(2k + 1)$, $k \in Z$. **9.51.** $\frac{\pi}{12}(6k \pm 1)$, $k \in Z$. **9.52.** $\frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{8}(8k \pm 3)$, $k \in Z$. **9.53.** πk, $k \in Z$; $\frac{\pi}{4}(4k + 1)$, $k \in Z$. **9.54.** $\frac{\pi}{9}(2k + 1)$, $k \in Z$. **9.55.** πk, $k \in Z$; $\frac{\pi}{4} \times$ $\times (2k + 1)$, $k \in Z$. **9.56.** $\frac{\pi}{4}(4k - 1)$, $k \in Z$; $\pm \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} +$ $+ \pi k$, $k \in Z$. **9.57.** $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k \in Z$; $\frac{2\pi k}{5}$, $k \in Z$; $\pi\left(2k + \frac{1}{11}\right)$, $k \in Z$. **9.58.** $\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$. **9.59.** $\frac{\pi}{4}(4k + 1)$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{8}(4k + 1)$, $k \in Z$. **9.60.** $\frac{\pi}{4}(4k + 1)$, $k \in Z$. **9.61.** $\frac{\pi k}{8}$, $k \in Z$. **9.62.** $\frac{\pi}{16}(2k + 1)$, $k \in Z$; $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$. **9.63.** $\frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{6}(2k + 1)$, $k \in Z$. **9.64.** $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{12}(6k \pm 1)$, $k \in Z$. **9.65.** $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$.

9.66. $\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $k \in Z$. **9.67.** $\pm \arccos\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right) + 2\pi k$; $\frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$. **9.68.** $\frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$. **9.69.** $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$. **9.70.** $\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k \in Z$; $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **9.71.** $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in Z$; $\frac{2}{5}\operatorname{arctg} 5 + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in Z$. **9.72.** $\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{12}(4k+1)$, $k \in Z$. **9.73.** $\frac{\pi k}{3}$; $\pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$. **9.74.** $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{3}(2k+1)$, $k \in Z$. **9.75.** $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. **9.76.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **9.77.** $\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $k \in Z$. **9.78.** πk, $k \in Z$; $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **9.79.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi k$, $k \in Z$. **9.80.** $\frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{2}(4k-1)$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{10}(4k+1)$, $k \in Z$. **9.81.** $2\pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $k \in Z$. **9.82.** $\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $k \in Z$; $\frac{2\pi}{3}(3k \pm 1)$, $k \in Z$. **9.83.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-2 \pm \sqrt{5}) + \frac{\pi k}{2}$. **9.84.** $\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k \in Z$. **9.85.** $\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $k \in Z$. **9.86.** $\frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$, $k \in Z$. **9.87.** $\frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$, $k \in Z$. **9.88.** $\frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$, $k \neq 4l + 2$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi k$, $k \in Z$. **9.89.** Немає розв'язків. **9.90.** $\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k \in Z$. **9.91.** $\frac{\pi}{6}(3k \pm 1)$, $k \in Z$. **9.92.** $\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$. **9.93.** $\frac{\pi}{4}(4k-1)$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $k \in Z$.

9.94. πk, $k \in Z$; $\frac{\pi}{4}(8k \pm 1)$, $k \in Z$. **9.95.** $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. **9.96.** $\frac{\pi}{4}(8k + 1)$, $k \in Z$. **9.97.** πk, $k \in Z$; $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in Z$. **9.98.** $\frac{\pi}{18}(6k \pm 1)$, $k \in Z$. **9.99.** $\frac{\pi}{16}(4k + 1)$, $k \in Z$. **9.100.** $\frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k \in Z$. **9.101.** $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k \in Z$. **9.102.** $\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$. **9.103.** $\frac{\pi}{4}(4k + 1)$, $k \in Z$; $(-1)^k \frac{1}{2} \arcsin(1 - \sqrt{3}) + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **9.104.** $\frac{\pi}{4}(4k + 1)$, $k \in Z$. **9.105.** $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{24}(2k + 1)$, $k \in Z$. **9.106.** $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k \in Z$. **9.107.** πk, $k \in Z$; $\pi k - \operatorname{arctg} 3$, $k \in Z$. **9.108.** $\frac{\pi}{4}(4k - 1)$, $k \in Z$. **9.109.** $\frac{\pi}{4}(4k - 1)$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k \in Z$; $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $n \in Z$. **9.110.** $\frac{\pi}{3}(6k + 1)$, $k \in Z$; $\frac{2\pi}{9}(1 + 3k)$, $k \in Z$.

§ 10.

10.12. 0. **10.13.** 1. **10.14.** Немає розв'язків. **10.15.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. **10.16.** Немає розв'язків. **10.17.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$. **10.18.** $x_1 = -2$, $y_1 = \pi n$, $n \in Z$, $x_2 = 2$, $y_2 = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, $m \in Z$. **10.19.** $x = -1$, $y = 1 \pm \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. **10.20.** $x = \pi k$, $k \in Z$, $y = \frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$, $z = \frac{\pi}{6} \times (4n - 1)$, $n \in Z$. **10.21.** $x = \pi k$, $k \in Z$, $y = \frac{\pi}{6}(4k + 1)$, $k \in Z$. **10.22.** $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k \in Z$; $y = \pi m$, $m \in Z$.

10.23. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in Z$, $y = \frac{\pi}{2}(4m+1)$, $m \in Z$, $z = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$. **10.24.** $x = \frac{\pi}{2}(4k-1)$, $k \in Z$; $y = \frac{\pi}{2} \times$ $\times (2n+1)$, $n \in Z$. **10.25.** $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi(k+n)$, $y_1 = \frac{\pi}{3} +$ $+ 2\pi(k-n)$; $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi(k+n)$, $y_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi(k-n)$; $x_3 = \frac{5\pi}{3} + 2\pi(k+n)$, $y_3 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi(k-n)$; $x_4 = \frac{\pi}{3} + 2\pi \times$ $\times (k+n)$, $y_4 = -\frac{5\pi}{3} + 2\pi(k-n)$, $k, n \in Z$.

§ 11.

11.65. $A - B = \pi n$, $n \in Z$ або $A + B = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

§ 12.

12.8. $\frac{25}{x^2} + \frac{25y^2}{16x^2} = 1$. **12.9.** $\frac{1}{x^2y^2} - x^2 - y^2 = 3$. **12.10.** Розділимо всі члени першого рівняння системи на $\cos^2\alpha$, а всі члени другого — на $\cos^2\beta$.

$$\begin{cases} a\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + b = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}, \\ a + b\,\mathrm{tg}^2\,\beta = \dfrac{1}{\cos^2\beta}, \\ x\,\mathrm{tg}\,\alpha = y\,\mathrm{tg}\,\beta, \end{cases} \quad \begin{cases} a\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + b = 1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha, \\ a + b\,\mathrm{tg}^2\,\beta = 1 + \mathrm{tg}^2\,\beta, \\ x\,\mathrm{tg}\,\alpha = y\,\mathrm{tg}\,\beta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{tg}^2\,\alpha\,(a-1) = 1 - b, \\ \mathrm{tg}^2\,\beta\,(b-1) = 1 - a, \\ x\,\mathrm{tg}\,\alpha = y\,\mathrm{tg}\,\beta, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathrm{tg}^2\,\alpha = \dfrac{1-b}{a-1}, \\ \mathrm{tg}^2\,\beta = \dfrac{1-a}{b-1}, \\ x^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha = y^2\,\mathrm{tg}^2\,\beta, \end{cases}$$

$$\frac{x^2(1-b)}{a-1} = \frac{y^2(1-a)}{b-1}.$$

12.11. $\begin{cases}(x\cos\alpha + y\sin\beta)^2 = a^2,\\ (x\sin\beta - y\cos\alpha)^2 = b^2,\\ (x^2+y^2)(\sin^2\alpha + \cos^2\beta) = 2ab.\end{cases}$

Вказівка. Після піднесення в степінь, склавши рівняння системи, отримаємо $2(x^2+y^2) = (a+b)^2$.

12.12. $\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg}((\alpha + x) - (\alpha - y)) =$

$$= \frac{\operatorname{tg}(\alpha + x) - \operatorname{tg}(\alpha - y)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha + x)\operatorname{tg}(\alpha - y)} = \frac{a-b}{1+ab}.$$

12.13. $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{b-a}{ab}$. **12.14.** $mn + \sqrt{(1-m^2)(1-n^2)} = \cos 2x$. **12.15.** $y = 1 - 2x^2$. **12.16.** $y = -\frac{2}{x} - \frac{x}{2}$.

§ 14.

14.8. З рівностей $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, $S = \frac{a^2+b^2}{4}$ маємо

$\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{a^2+b^2}{4}$, $2\sin C = \frac{a^2+b^2}{ab}$, $2\sin C = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Оцінюючи ліву і праву частини отриманої рівності: $2\sin C \le 2$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$, отримуємо

$$\begin{cases}\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2,\\ 2\sin C = 2,\end{cases}$$

звідки випливає: $a = b$, $C = 90^\circ$.

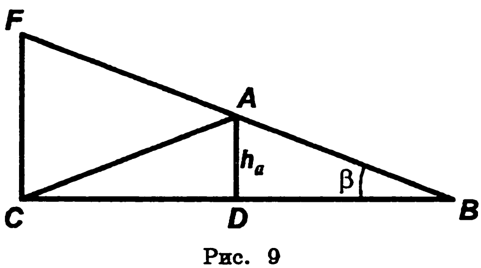


Рис. 9

14.9. ABC — даний трикутник, $CF \perp CB$. $CF = a\operatorname{tg}\beta = 2h_a$ за умовою. Значить, AD — середня лінія ΔBFC. Тоді $CD = DB$ і $AC = AB$. Даний трикутник — рівнобедрений.

14.10. За теоремою синусів

$$a = 2R\sin A,\ \ c = 2R\sin C.$$

Підставляючи в дане співвідношення, отримаємо

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = \frac{2R\sin A + 2R\sin C}{2R\sin B},$$

звідки $1 + \cos B - \sin A - \sin(A + B) = 0,$

$$2\cos^2\frac{B}{2} - 2\sin\frac{2A + B}{2}\cos\frac{B}{2} = 0,$$

$$2\cos\frac{B}{2}\left(\cos\frac{B}{2} - \sin\frac{2A + B}{2}\right) = 0.$$

Оскільки $A + B + C = 180^\circ$, то

$$2\cos\frac{B}{2}\left(\cos\frac{B}{2} - \sin\left(90^\circ + \frac{A - C}{2}\right)\right) = 0 \text{ або}$$

$$4\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A + B - C}{2}\sin\frac{A - C - B}{2} = 0,$$

звідки $\quad \sin\dfrac{B + A - C}{2} = 0,\ \ B + A = C;$

$$\sin\frac{A - C - B}{2} = 0,\ \ A = C + B.$$

Трикутник прямокутний.

14.11. $1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B - 1 - \cos 2C = 2,$

$$1 + \cos 2C - (\cos 2A + \cos 2B) = 0,$$

$$2\cos^2 C - 2\cos(A + B)\cos(A - B) = 0,$$

$$A + B = 180^\circ - C,\ \ 2\cos^2 C + 2\cos C\cos(A - B) = 0,$$

$$2\cos C\,(\cos C + \cos(A - B)) = 0,$$

$$4\cos C\cos\frac{A - B + C}{2}\cos\frac{A - B - C}{2} = 0,$$

звідки $\cos C = 0,\ \ C = 90^\circ,\ \ \cos\dfrac{A - B + C}{2} = 0.$

Такого випадку бути не може, оскільки

$$A + C - B \neq 180^\circ.$$

$$\cos\frac{A-B-C}{2}=0.$$

Такого випадку бути не може.

14.12. $\dfrac{\sin B\cos A}{\cos B\sin A}=\dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 A}$, $\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$, звідки $\sin 2A-\sin 2B=0$ тощо.

14.13. $\sin A\cos C+\sin 2A=\sin B\cos C+\sin 2B$,

$$\cos C(\sin A-\sin B)+(\sin 2A-\sin 2B)=0,$$

$$\cos C(\sin A-\sin B)+\sin(A-B)\cos(A+B)=0,$$

$$\cos C(\sin A-\sin B)-\cos C\sin(A-B)=0,$$

$$2\cos C\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}-$$

$$-2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cos C=0,$$

звідки $\cos C=0$, $C=90^\circ$; трикутник прямокутний, або

$$\sin\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\right)=0,$$

$$\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=0,\ \text{звідки}$$

$$\sin\frac{A-B}{2}=0,\ \angle A=\angle B.$$

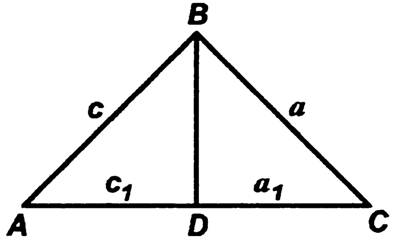
Трикутник рівнобедрений.

14.14. $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{c_1}{a_1}$,

$c_1=c\cos A$,

$a_1=a\cos C$.

Підставляючи дані значення, отримаємо



Мал. 10

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{c\cos A}{a\cos C},\quad c = 2R\sin C,\quad a = 2R\sin A,$$

$$\frac{4R^2\sin^2 C}{4R^2\sin^2 A} = \frac{2R\sin C\cos A}{2R\sin A\cos C},\quad \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\cos A}{\cos C},$$

$$\sin 2C = \sin 2A,$$

$$2\sin(C-A)\cos(C+A) = 0 \text{ тощо.}$$

14.15. $$\frac{2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}} - \frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = 0.$$

З рівності $A + B + C = \pi$ отримуємо

$$\frac{A+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2},\quad \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$$

Підставляючи отримані значення, будемо мати

$$\frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}} - \frac{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = 0,$$

$$\frac{\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A-C}{2}\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}} = 0,$$

$$\frac{\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\left(\frac{A}{2} - C\right) - \cos\frac{A}{2} - \cos\left(\frac{A}{2} - B\right)\right)}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}} = 0.$$

Після перетворень отримаємо

$$\sin\frac{B}{2}\cos A\cos\left(\frac{A}{2} + B\right) = 0 \text{ тощо.}$$

14.16. Застосовуючи теорему синусів

$$a = 2R\sin A,\quad b = 2R\sin B,$$

отримаємо $2R\sin A = 4R\sin B\sin\frac{A}{2}$,

$$4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} - 2\sin B\sin\frac{A}{2} = 0.$$

Оскільки $A \neq 0$, то

$$\cos\frac{A}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = 0,$$

$$2\sin\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{2} - B\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - B\right) = 0 \text{ тощо.}$$

14.17. Застосовуючи теорему синусів

$$a = 2R\sin A,\quad b = 2R\sin B,$$

отримаємо $\dfrac{2R\sin A - 2R\sin B}{2R\sin A} = 1 - 2\cos C,$

$$\sin B = \sin(A + C) + \sin(A - C),$$

$$\sin B = \sin(180^\circ - B) + \sin(A - C),\quad \sin(A - C) = 0,$$

звідки маємо $A = C$. Трикутник рівнобедрений.

§ 15.

15.11. $\dfrac{\cos\dfrac{n+1}{2}\alpha\sin\dfrac{n}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$ при $\alpha \neq 2\pi k$; n при $\alpha = 2\pi k$, $k \in Z$.

15.12. $\dfrac{\sin^2\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. **15.13.** $\dfrac{\sin\dfrac{h}{2}(n+1)\cos\dfrac{2x+nh}{2}}{\sin\dfrac{h}{2}}$.

15.14. $\dfrac{\sin 2n\alpha}{\sin 2\alpha\cos(2n+1)\alpha\cos\alpha}$. **15.15.** $\dfrac{\sin\left(2^{n-1}x - \dfrac{x}{2}\right)}{\sin\dfrac{x}{2}\sin 2^{n-1}x}$.

15.16. $\dfrac{2\sin(n\beta + \beta)}{\sin\beta\sin(\alpha + n\beta + \beta)\sin\alpha}$. **15.17.** $2^{n+1}\operatorname{ctg} 2^{n+1}\alpha$.

§ 16.

16.9. $\left(x = \frac{1}{6} + \frac{n}{2};\ y = \frac{1}{3} + \frac{n}{2}\right)$. **16.10.** $\left(x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \times \times (k + n);\ y = -\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}(3k - n)\right)$. **16.11.** $\left(x = n + \frac{1}{3};\ y = \frac{1}{3} - n\right)$. **16.12.** $\left(x = \pi n;\ y = \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $\left(x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n;\ y = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 3 + \pi n\right)$. **16.13.** $\left(x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} + \pi n;\ y = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} - \pi n\right)$, $\left(x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} + \pi n;\ y = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} - \pi n\right)$.
16.14. $\left(x = \frac{\pi}{6}(6k + 6n \pm 1);\ y = \frac{\pi}{2}(2k - 2n \pm 1)\right)$, $\left(x = \frac{\pi}{2}(2k + 2n \pm 1);\ y = \frac{\pi}{6}(6k - 6n \pm 1)\right)$.
16.15. $\left(x = -\frac{\pi}{12}(12n - 5);\ y = \frac{\pi}{3}(3n + 1)\right)$, $\left(x = -\frac{\pi}{12} \times (12n - 1);\ y = \frac{\pi}{3}(3n + 2)\right)$. **16.16.** $\left(x = (-1)^n \times \arcsin\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \frac{\pi}{12} + \pi n;\ y = \frac{5\pi}{12} - (-1)^n \arcsin\sqrt{2 - \sqrt{3}} - \pi n\right)$.
16.17. $\left(x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k;\ y = \operatorname{arctg} 2 - \pi k\right)$. **16.18.** $\left(x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2};\ y = -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi k}{2}\right)$. **16.19.** $(x = 35^\circ + 90^\circ k;\ y = 25^\circ + 90^\circ k)$. **16.20.** $\left(x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2};\ y = (-1)^k \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}\right)$.

§ 17.

17.9. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$. **17.10.** $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$. **17.11.** $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{3} + \pi n$. **17.12.** $-\frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7} < x < \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$. **17.13.** $\frac{\pi k}{4} - \frac{\pi}{12} < x <$

$< \frac{1}{4}\operatorname{arcctg}\frac{2}{3} + \frac{\pi k}{4}$. **17.14.** $\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$. **17.15.** $\operatorname{arcctg} 2 + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n$. **17.16.** $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n$. **17.17.** $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < 2\pi n$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $\pi + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$. **17.18.** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **17.19.** $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **17.20.** $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$. **17.21.** $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4} < x < \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$. **17.22.** $-\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}$.

§ 19.

19.6. Якщо $0 < a < 1$, то $x = k\pi + (-1)^k \arcsin(2a - 1) + \frac{\pi}{4}$ і $x = 2\pi k + \frac{3\pi}{4}$, $k \in Z$; якщо $a = 0$, то $x = 2\pi k - \frac{\pi}{4}$ і $x = 2\pi k + \frac{3\pi}{4}$, де $k \in Z$; якщо $a < 0$ або $a > 1$, то $x = 2\pi k + \frac{3\pi}{4}$. **19.7.** Якщо $a = 1$, то $x = 2\pi k$, де $k \in Z$; якщо $a = -1$, то $x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$, де $k \in Z$; якщо $a = -\frac{1}{3}$, то $x = 2\pi k + \pi$ і $x = 2\pi k - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, де $k \in Z$; якщо $-1 < a < -\frac{1}{3}$ або $-\frac{1}{3} < a < 1$, то $x = 2\pi k + 2\operatorname{arctg}\frac{1 - a \pm \sqrt{2(1 - a^2)}}{3a + 1}$, $k \in Z$; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то рівняння не має розв'язків. **19.8.** Якщо $a = 0$, $b \neq 0$ або $b = 0$, $a \neq 0$ і $\frac{b}{a} \neq \pm\sqrt{2}$, то

$x = \pi k + \frac{\pi}{4}$, де $k \in Z$; якщо $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$, то $x = 2\pi k + \frac{\pi}{4}$, $k \in Z$; якщо $\frac{b}{a} = -\sqrt{2}$, то $x = 2\pi k + \frac{5\pi}{4}$, $k \in Z$; якщо $a = b = 0$, то рівняння не має розв'язків.

§ 20.

20.1. Оскільки $\cos A < 1$, $\cos B < 1$, $\sin A > 0$, $\sin B > 0$, то $\sin C = \sin (A + B) =$

$$= \sin A \cos B + \sin B \cos A < \sin A + \sin B.$$

Але якщо числа a і b додатні, то

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} > \sqrt[n]{a + b},$$

отже, $\sqrt[n]{\sin A} + \sqrt[n]{\sin B} > \sqrt[n]{\sin A + \sin B} > \sqrt[n]{\sin C}$, що й вимагалось довести.

20.2. Застосовуючи формули $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ і $2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$, перепишемо рівняння у вигляді

$$2\cos^2 x - 3\cos x = 2k.$$

Оскільки $-3 \le 2\cos^2 x - 3\cos x \le 5$, то ліва частина рівняння на відрізку $[-1; 1]$ може приймати значення -2, 0, 2, 4, отже, k може приймати значення -1, 0, 1, 2. Перевіряючи, знаходимо, що отримане рівняння, а значить, і вихідне, має розв'язки тільки при k, що дорівнюють 0, 1, 2.

20.3. Після перетворювань і позначення $\sin x = y$ дані рівняння перепишуться у вигляді

$$3y^3 + 5y^2 + 7y - 3 = 0, \quad 6y^3 + y^2 + 2y - 1 = 0.$$

Якщо тепер a — спільний корінь цих рівнянь, що лежить в проміжку $[-1; 1]$, то віднімаючи від першого рівняння, помноженого на 2, друге рівняння, отримаємо, що a є коренем рівняння $9y^2 + 12y - 5 = 0$, звідки $y = \frac{1}{3}$. Перевірка показує, що $y = \frac{1}{3}$ дійсно задовольняє обом рівнянням. Звідси випливає, що спільними коренями двох даних рівнянь є корені рівняння $\sin x = \frac{1}{3}$, тобто $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k$, де $k \in Z$.

20.4. За умовою $0 < \cos\alpha \le \frac{1}{2}$ і $0 < \cos\beta \le \frac{1}{2}$, тоді $0 < \cos\alpha + \cos\beta \le 1$ і $0 < \cos\alpha \cos\beta \le \frac{1}{4}$.

Введемо позначення $\cos\alpha + \cos\beta = a$ і $\cos\alpha \times$ $\times \cos\beta = b$ і перепишемо дану нерівність у вигляді $\frac{2-a}{a} \le \sqrt{\frac{1-a+b}{b}}$. Оскільки обидві частини отриманої нерівності додатні, то $(2-a)^2 \le a^2(1-a+b)$, тобто $a^3 - a^2 - 4ab + 4b \le 0$ або $(a-1)(a^2 - 4b) \le 0$.

Але $a - 1 \le 0$, а $a^2 - 4b = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 \ge 0$; звідси випливає справедливість даної нерівності.

20.5. Оскільки $|\cos x| \le 1$, то числа x такі, що $|x| > 1$, заздалегідь не задовольняють другій нерівності даної системи і тому розв'язки даної системи задовольняють системі

$$\begin{cases} 0 \le 3x^2 - 20x + 32 \le 1, \\ -1 \le x \le 1. \end{cases}$$

Але на відрізку $-1 \le x \le 1$ тричлен $y = 3x^2 -$ $- 20x + 32$, як легко бачити, спадає і приймає, таким чином, своє найменше на цьому відрізку значення при $x = 1$. Іншими словами, якщо $-1 \le x \le 1$, то $3x^2 - 20x + 32 \ge 15$, а це означає, що отримана система нерівностей розв'язків не має, отже, і дана система не має розв'язків.

20.6. Оскільки для будь-якого x

$$6 \sin x \ge -7 - \cos 2x,$$

то з першого рівняння випливає, що

$$a = \frac{6 \sin x}{7 + \cos 2x} \ge -1.$$

З другого рівняння отримуємо

$$3a \sin x - 8 = a\,(4 + 3 \sin x - 4 \sin^3 x),$$

звідки $\sin^3 x = \dfrac{a+2}{a}$. З нерівностей $-1 \le \dfrac{a+2}{a} \le 1$ випливає, що $a \le -1$. Таким чином, a може дорівнювати тільки -1.

Перевірка показує, що при $a = -1$ дані рівняння мають спільні корені $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$.

20.7. Оскільки в області визначення даного рівняння виконуються нерівності $\cos x > 0$, $\cos 3x > 0$, то його можна переписати у вигляді

$$\sqrt{\cos x - \cos^2 x} + \sqrt{\cos 3x - \cos^2 3x} = 1.$$

Зазначивши тепер, що при довільному дійсному z має місце нерівність $z - z^2 \le \dfrac{1}{4}$, причому рівність досягається тільки при $z = \dfrac{1}{2}$, отримуємо, що дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2}, \\ \cos 3x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Але ця система не має розв'язків: якщо $\cos x = \dfrac{1}{2}$, то $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = -1$. Отже, і вихідне рівняння не має розв'язків.

20.8. Додавши до обох частин даної нерівності по 1, отримаємо

$$\frac{2}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta} \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta}\right),$$

$$(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)^2 \ge 4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta,$$

$$(\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta)^2 \ge 0.$$

Таким чином, вихідну нерівність доведено.

20.9. Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає для гострих кутів, то $\beta - \alpha$ — додатний гострий кут. Маємо

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha + 3 \operatorname{tg}\alpha} \le \frac{1}{\sqrt{3}},$$

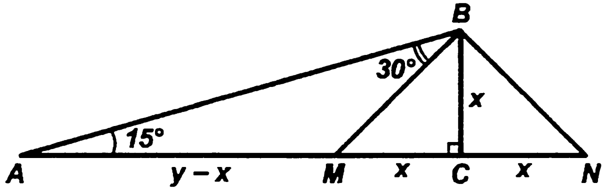
оскільки $\operatorname{ctg}\alpha + 3 \operatorname{tg}\alpha \ge 2\sqrt{3 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg}\alpha} = 2\sqrt{3}$.

Звідси $\beta - \alpha \le 30^\circ$, що й вимагалось довести.

20.10. Всякий розв'язок даного рівняння задовільняє нерівності $\cos x \ge 0$; але тоді

$$\sqrt{\sin x + \cos x} \ge \sqrt{\sin x} \ge \sin x,$$

і, таким чином, підкореневий вираз в лівій частині рівняння є додатним. Це означає, що корені рівняння повинні задовольняти рівностям $\cos x = 0$, $\sqrt{\sin x} = \sin x$, звідки отримуємо $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.



Мал. 11

20.11. Розв'язання I. Розглянемо прямокутний трикутник ABC, у якого

$$AB = 1, \ A = 15^\circ, \ x = BC = \sin 15^\circ,$$

$$y = AC = \cos 15^\circ \text{ (мал. 11)}.$$

Побудуємо на катеті AC і його продовженні точки M і N такі, що $CM = CN = x$, тоді $AN = x + y$. Застосуємо теорему синусів до трикутників ABM і ABN. Маємо: $\frac{y - x}{1} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 135^\circ}$, $y - x = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\frac{y + x}{1} = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 45^\circ}, \ y + x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Звідси знаходимо, що

$$\frac{y+x}{y-x} = \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \sqrt{3}.$$

Розв'язання II. Нехай ΔACD симетричний трикутнику ABC відносно осі AC, тоді

$$S_{\Delta ABD} = xy = \frac{1}{2}\sin 30^\circ = \frac{1}{4}.$$

Таким чином, $x^2 + y^2 = 1$, $xy = \frac{1}{4}$. Звідси

$$(x+y)^2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad y + x = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$(y-x)^2 = 1 - \frac{1}{2}, \quad y - x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

тому $\frac{y+x}{y-x} = \sqrt{\frac{3}{2}} : \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}.$

20.12. Оскільки $\operatorname{tg} 3x = \frac{\sin x + 2\sin x \cos 2x}{-\cos x + 2\cos x \cos 2x} =$

$$= \operatorname{tg} x \, \frac{2\cos 2x + 1}{2\cos 2x - 1},$$

то дане рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x^\circ = 0, \\ \\ \dfrac{2\cos 2x^\circ + 1}{2\cos 2x^\circ - 1} = \dfrac{2\sqrt{2}\cos 25^\circ - 1}{2\sqrt{2}\sin 25^\circ - 1}. \end{array}\right.$$

Перше рівняння має корені $x = 180^\circ n$, $n \in Z$, а з другого рівняння отримуємо (простіше за все за допомогою похідної пропорції)

$$2\cos 2x^\circ = \frac{\sqrt{2}(\cos 25^\circ + \sin 25^\circ) - 1}{\sqrt{2}(\cos 25^\circ - \sin 25^\circ)}.$$

Права частина отриманого рівняння дорівнює

$$\frac{2\sin 70^\circ - 1}{2\sin 20^\circ} = \frac{\sin 70^\circ - \sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} = 2\cos 50^\circ,$$

і тому його розв'язками є значення

$$x = \pm 25^\circ + 180^\circ n, \quad n \in Z.$$

Таким чином, всі розв'язки вихідного рівняння — цілі числа.

20.13. Маємо: $\operatorname{tg} 6^\circ\ 42^\circ - \operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 24^\circ =$

$$= \frac{\sin 6^\circ \sin 42^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ - \sin 12^\circ \sin 24^\circ \cos 6^\circ \cos 42^\circ}{\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ}.$$

$$16 \sin 6^\circ \cos 24^\circ \sin 42^\circ \cos 12^\circ = 16 \sin 6^\circ \sin 66^\circ \times$$

$$\times \sin 42^\circ \sin 78^\circ = \frac{4 \sin 6^\circ \sin 66^\circ \sin 54^\circ}{\sin 54^\circ} \times$$

$$\times \frac{4 \sin 18^\circ \sin 78^\circ \sin 42^\circ}{\sin 18^\circ} = \frac{\sin 18^\circ \sin 54^\circ}{\sin 54^\circ \sin 18^\circ} = 1$$

(тут ми використали формулу $\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \times \times \sin (60^\circ - \alpha) \sin (60^\circ + \alpha)$).

$$16 \sin 24^\circ \cos 6^\circ \sin 12^\circ \cos 42^\circ = 16 \sin 24^\circ \sin 84^\circ \times$$

$$\times \sin 12^\circ \sin 48^\circ = \frac{4 \sin 24^\circ \sin 84^\circ \sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} \times$$

$$\times \frac{4 \sin 12^\circ \sin 48^\circ \sin 72^\circ}{\sin 72^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \sin 36^\circ}{\sin 36^\circ \sin 72^\circ} = 1.$$

Звідси випливає, що дані добутки рівні.

20.14. Оскільки $3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, то дане рівняння можна переписати таким чином: $3y^2 - 5\sqrt{3}\ ty - 3t^2 + \frac{37}{4} = 0$, де $t = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Отримали квадратне рівняння відносно y, його дискримінант дорівнює $111\ (t^2 - 1)$, тобто рівняння має розв'язок лише при $t = \pm 1$.

Якщо $t = 1$, то $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ і $y_1 = \frac{5\sqrt{3}}{6}$,

якщо $t = -1$, то $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ і $y_2 = -\frac{5\sqrt{3}}{6}$,

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

20.15. Проведемо висоту CD. Тоді $\angle DCA = 30^\circ$, $DA = \frac{b}{2}$, $DB = c - \frac{b}{2}$, $\cos B = \frac{c - \frac{b}{2}}{a} = \frac{2c - b}{2a}$.

Прирівнявши знайдене значення $\cos B$ до заданого в умові, отримуємо $a^2 = c^2 - ab - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}ac$. Але за теоремою косинусів $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Тому $c^2 - ab - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}ac = b^2 + c^2 - bc$, звідки $(a + b)(c - 2b) = 0$. Тоді $c = 2b$. Отже, $a = b\sqrt{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Значить, $B = 30^\circ$, $C = 90^\circ$.

20.16. Маємо: $\cos^{12} x + \sin^6 x\,(1 + \cos^2 x)^3 = 1$,

$$(\sin^2 x)^3 (1 + \cos^2 x)^3 - (1 - \cos^{12} x) = 0,$$

$$(1 - \cos^2 x)^3 (1 + \cos^2 x)^3 - (1 - (\cos^4 x)^3) = 0,$$

$$(1 - \cos^4 x)^3 - (1 - \cos^4 x)(1 + \cos^4 x + \cos^8 x) = 0,$$

$$(1 - \cos^4 x)(-3\cos^4 x) = 0,$$

звідки $\cos^4 x = 1$ або $\cos^4 x = 0$, тобто

$$\cos x = \pm 1 \text{ або } \cos x = 0,$$

отже, $x = \frac{\pi k}{2}$, де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

20.17. Виражаючи $\cos^6 x$ і $\sin^2 2x$ через $\sin x$, отримаємо $4\sin^{12} x + 4(\sin^6 x + 1)(1 - \sin^2 x)^3 +$

$$+ 3 \cdot 4\sin^2 x\,(1 - \sin^2 x) = 4.$$

Після спрощення будемо мати

$$\sin^{10} x - \sin^8 x = 0 \text{ або } \sin^8 x \cos^2 x = 0,$$

тому коренями даного рівняння є $x = \frac{\pi n}{2}$, де n — ціле число.

20.18. Зазначимо перш за все, що якщо перенести всі члени рівняння в ліву частину, то отримаємо парну функцію з періодом 2π і тому достатньо розв'язувати рівняння на відрізку $[0;\ \pi]$. На проміжку $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ рівняння розв'язків не має, це випливає з нерівностей $\sqrt{2-2\cos x} \geq \sqrt{2} \geq 1{,}4$,

$$\sqrt{10-6\cos x} > \sqrt{10} > 3{,}1,\quad \sqrt{10-6\cos 2x} \leq 4.$$

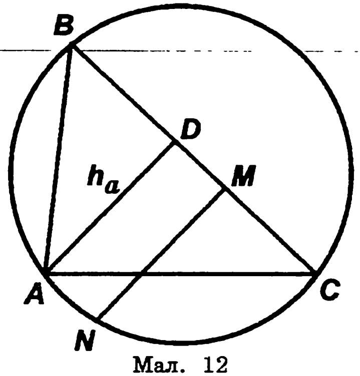
Нехай $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Розглянемо ΔABD, в якому $\angle BAC = \angle CAD = x$, $AB = AC = 1$, $AD = 3$, тоді за теоремою косинусів перший доданок в лівій частині рівняння є довжиною сторони BC трикутника ABC, а другий — довжиною сторони CD трикутника ACD. Права ж частина рівняння являє собою довжину відрізку BD, тому дане рівняння рівносильне рівності $BC + CD = BD$, що означає, що точка C лежить між точками B і D. Таким чином,

$$S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABD},\ \text{тобто}\ \sin x + 3\sin x = 3\sin 2x,$$

звідки $\cos x = \frac{2}{3}$ або $x = \arccos\frac{2}{3}$.

Крім того, число 0 є коренем рівняння, значить, на відрізку від $-\pi$ до π вихідне рівняння має спільні корені $-\arccos\frac{2}{3}$, 0, $\arccos\frac{2}{3}$, а спільний розв'язок записується у вигляді $x_1 = 2\pi k$,

$x_2 = \pm\arccos\frac{2}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.



Мал. 12

20.19. Опишемо навколо трикутника ABC коло (мал. 12). Висота h_a трикутника не перевищує висоти MN сегменту CAB, тобто $h_a \le MN$. Але $MN = \frac{a}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{A}{2}$, тому

$$h_a \le \frac{a}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{A}{2}, \text{ або } a \ge 2h_a\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}.$$

20.20. Оскільки $\mathrm{tg}\,(\alpha + \beta\} = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} = \sqrt{3}$, то

$$\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta = 1 - \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{1}{2} + \cos(\alpha - \beta)} \le \frac{1}{3}.$$

20.21. $\sin\frac{\pi}{36}\cos\frac{7\pi}{36}\sin\frac{13\pi}{36} =$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{8\pi}{36} - \sin\frac{6\pi}{36}\right)\sin\frac{13\pi}{36} = \frac{1}{2}\sin\frac{8\pi}{36}\sin\frac{13\pi}{36} -$$

$$- \frac{1}{4}\sin\frac{13\pi}{36} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{5\pi}{36} - \cos\frac{21\pi}{36}\right) - \frac{1}{4}\cos\frac{5\pi}{36} =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos\frac{7\pi}{12} = -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{16}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

20.22. Відомо, що для кутів гострокутного трикутника виконується співвідношення

$$\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y + \mathrm{tg}\,z = \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y\,\mathrm{tg}\,z, \text{ але}$$

$$\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y + \mathrm{tg}\,z \ge 3\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y\,\mathrm{tg}\,z},$$

звідки $\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y\,\mathrm{tg}\,z \ge 3\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y\,\mathrm{tg}\,z}$, таким чином, $\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y\,\mathrm{tg}\,z \ge \sqrt{3^3}$. Звідси маємо

$$\mathrm{tg}^n\,x + \mathrm{tg}^n\,y + \mathrm{tg}^n\,z \ge 3\sqrt[3]{\mathrm{tg}^n\,x\,\mathrm{tg}^n\,y\,\mathrm{tg}^n\,z} \ge$$

$$\ge 3\sqrt[3]{(\sqrt{3^3})^n} = 3\sqrt{3^n},$$

що й вимагалось довести.

20.23. Складаючи рівняння системи, отримуємо

$$\sin x(\sin x - 1) + \sin y(\sin y - 1) + \sin z(\sin z - 1) = 0,$$

але $\sin x$, $\sin y$, $\sin z$ на заданому відрізку невід'ємні, отже, $\sin x = 0$ або $\sin x = 1$.

Якщо $\sin x = 0$, то $\sin y = \sin z = 0$, і ми отримуємо розв'язки: $(0;\ 0;\ 0)$, $(0;\ \pi;\ 0)$, $(0;\ 0;\ \pi)$, $(0;\ \pi;\ \pi)$ і $(\pi;\ 0;\ 0)$, $(\pi;\ \pi;\ 0)$, $(\pi;\ 0;\ \pi)$, $(\pi;\ \pi;\ \pi)$.

Якщо $\sin x = 1$, то $\sin y = \sin z = 1$, звідки маємо розв'язок $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

20.24. Маємо: $\operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 65^\circ =$

$$= \operatorname{tg}(60^\circ - 5^\circ) \operatorname{tg}(60^\circ + 5^\circ) = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 5^\circ}{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ}.$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{ctg} 15^\circ = \operatorname{ctg} 3 \cdot 5^\circ = \frac{1 - 3\operatorname{tg}^2 5^\circ}{3\operatorname{tg} 5^\circ - \operatorname{tg}^3 5^\circ}.$$

Таким чином,

$$\operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 65^\circ \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 5^\circ} = \operatorname{tg} 85^\circ.$$

20.25. Розглянемо різницю D:

$$D = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - (\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C).$$

Очевидно, що

$$D = \frac{1}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} \cdot [(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) \times$$

$$\times \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B].$$

Але для кутів непрямокутного трикутника справедлива рівність $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$.

Тому $D = \dfrac{1}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} \cdot [(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)^2 -$

$$- (\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A)] =$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} [(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B)^2 + (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)^2 +$$

$$+ (\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A)^2] \neq 0,$$

що й вимагалось довести.

20.26. Досить впевнитись, що дана нерівність задовільняється при $x = \frac{\pi}{4}$:

$$3 \cdot \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 1 > \frac{9}{4} - 1 = 1{,}25.$$

Таким чином, на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ дана нерівність має розв'язок.

20.27. Розглянемо функцію f, визначену формулою $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Зрозуміло, що на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ її похідна

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x}$$

додатна, і отже, на цьому проміжку функція зростає; тому

$$\frac{6\pi}{180} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{180} < \frac{5\pi}{180} \operatorname{tg} \frac{6\pi}{180} \text{ і } 6 \operatorname{tg} 5^\circ < 5 \operatorname{tg} 6^\circ.$$

Аналогічно отримуємо нерівність $10 \operatorname{tg} 9^\circ < 9 \operatorname{tg} 10^\circ$.

Перемноживши дві останніх нерівності, ми отримаємо, що $3 \operatorname{tg} 6^\circ \operatorname{tg} 10^\circ > 4 \operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 9^\circ$.

20.28. Помноживши обидві частини рівняння на 2 і переносячи всі його члени в ліву частину, будемо мати: $(\sin^2 x - 2 \sin x + 1) + (\sin^2 y - 2 \sin y + 1) +$

$$+ (\sin^2 x + \sin^2 y - 2 \sin x \sin y) = 0, \text{ або}$$

$$(\sin x - 1)^2 + (\sin y - 1)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 0,$$

звідки $\sin x = 1$, $\sin y = 1$, $\sin x = \sin y$.

Таким чином, розв'язком рівняння буде будь-яка пара виду $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $k, n \in Z$.

20.29. Позначимо величину кута в 1° через α і розглянемо функцію f: $x \to \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, $x \in]0;\ 5\alpha[$.

Оскільки $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2} = \dfrac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x} > 0$, то функція f зростає і, таким чином,

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg} 4\alpha}{4\alpha},\quad \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2\alpha} < \frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{3\alpha}.$$

З іншого боку, $3 \operatorname{tg} 2^\circ > \operatorname{tg} 4^\circ$, оскільки ця нерівність рівносильна нерівностям

$$3 \operatorname{tg} 2^\circ > \frac{2 \operatorname{tg} 2^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 2^\circ},\quad \operatorname{tg}^2 2^\circ < \frac{1}{3},$$

а остання нерівність вірна.

Звідси і з (1) отримуємо, що

$$4 \operatorname{tg} 1^\circ < \operatorname{tg} 4^\circ < 3 \operatorname{tg} 2^\circ < 2 \operatorname{tg} 3^\circ.$$

20.30. Оскільки при $\alpha > 2$ $0 < \dfrac{\pi}{\alpha} < \dfrac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} \dfrac{\pi}{\alpha} > \dfrac{\pi}{\alpha} > \dfrac{3}{\alpha}$. З тотожності $\cos^2 \alpha = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ отримуємо $\cos^2 \dfrac{\pi}{\alpha} < \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{3}{\alpha}\right)^2}$. Тоді

$$\sin^2 \frac{\pi}{\alpha} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{\alpha} > 1 - \frac{a^2}{a^2 + 9} = \frac{9}{a^2 + 9},$$

що й вимагалось довести.

20.31. Оскільки $\cos 2x = \sin (90^\circ + 2x) =$

$$= 2 \sin (45^\circ + x) \cos (45^\circ + x),$$

то рівняння розпадається на два:

$$\sin (45^\circ + x) = 0 \text{ і}$$

$$\sin (75^\circ + 2x) = 2\sqrt{2} \sin (75^\circ + x) \sin (45^\circ - x).$$

Розв'язком першого рівняння буде $x = -45° + 180°k$, $k \in Z$.

Друге рівняння після заміни $2x + 30° = y$ і послідовних перетворювань набуде вигляду

$$\sin(y + 45°) = \sqrt{2}(\cos y - \cos 120°).$$

Звідси $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin y + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y = \sqrt{2}\cos y + \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\sin y = 1 + \cos y.$$

Тоді $y_1 = 180° + 360°k$, $y_2 = 90° + 360°k$, $k \in Z$. Отже, розв'язками даного рівняння є

$$x_1 = 75° + 180°k,\ x_2 = 30° + 180°k,$$

$$x_3 = -45° + 180°k,\ k \in Z.$$

20.32. Скористаємось тотожністю

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta).$$

Маємо: $\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{A}{2} + B\right) =$

$$= \frac{1}{2}(\cos(A + B) + \cos B) = \frac{1}{2}(\cos B - \cos C),$$

$$\cos\frac{B}{2}\cos\left(\frac{B}{2} + C\right) = \frac{1}{2}(\cos C - \cos A),$$

$$\cos\frac{C}{2}\cos\left(\frac{C}{2} + A\right) = \frac{1}{2}(\cos A - \cos B).$$

Очевидно, що сума добутків, що розглядаються, дорівнює 0.

20.33. Об'єднуючи перший доданок з дев'яносто першим, другий — з дев'яносто другим тощо, і користуючись формулою добутку, отримаємо:

$$(\sin^2\alpha + \sin^2(\alpha + 90°)) + (\sin^2(\alpha + 1°) + \sin^2(\alpha + 91°)) +$$

$$+ \ldots + (\sin^2(\alpha + 89°) + \sin^2(\alpha + 179°)) =$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\sin^2 (\alpha + 1^\circ) + \cos^2 (\alpha + 1^\circ)) + \ldots +$$

$$+ (\sin^2 (\alpha + 89^\circ) + \cos^2 (\alpha + 89^\circ)) = 90.$$

20.34. Маємо:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta} - \operatorname{tg}\alpha}{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} + 1}.$$

Аналогічно $\operatorname{ctg}(\gamma + \delta) = \dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\delta} - \operatorname{tg}\gamma}{\dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\delta} + 1}$.

Враховуючи умову задачі, отримуємо

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} - \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\delta} - \operatorname{tg}\gamma \text{ або}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{1}{\operatorname{tg}\delta} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\gamma.$$

Оскільки з умови задачі випливає, що $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\delta}$, то $\dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\delta} - \dfrac{1}{\operatorname{tg}\delta} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\gamma$,

$$(\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha)\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\delta} + 1\right) = 0.$$

З розгляду оснанньої рівності робимо висновки:

а) $\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha = 0$, а значить, $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha$ і $\gamma = \alpha$;

б) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\delta} + 1 = 0$, значить,

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}\delta = \operatorname{tg}(90^\circ + \delta) \text{ і } \alpha = 90^\circ + \delta.$$

Якщо $\alpha = \gamma$, то з умови $\alpha + \beta = \delta + \gamma$ випливає, що $\beta = \gamma$.

Аналогічно, якщо $\alpha = 90^\circ + \delta$, то $\gamma = 90^\circ + \beta$.

20.35. Додамо до обох частин даної рівності по 1:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin C} = \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin 2C}.$$

Неважко довести, що для кутів трикутника мають місце рівності $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{p}{R}$,

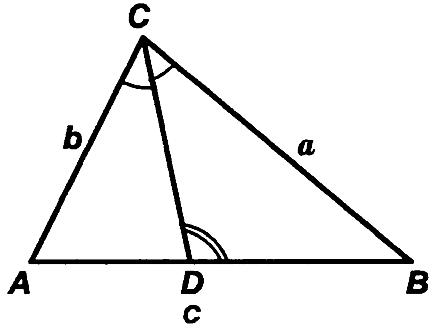
$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2S_\Delta}{R^2},$$

де p — напівпериметр трикутника, R — радіус описаного навколо нього кола. Тому отримуємо $\frac{p}{R \sin C} = \frac{2S_\Delta}{R^2 \sin 2C}$.

Звідси знаходимо, що $\cos C = \frac{r}{R}$.

Але $\cos A +$ $+ \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$, значить,

$\cos A + \cos B = 1.$



Мал. 13

20.36. За теоремою синусів з трикутника ABC, де D — основа бісектриси CD (мал. 13), маємо:

$$\sin ADC : \sin \frac{C}{2} = \sin\left(B + \frac{C}{2}\right) = b : AD,$$

де $AD = bc : (a + b)$. Звідси

$$\sin\left(B + \frac{C}{2}\right) : \sin \frac{C}{2} = b : \frac{bc}{a+b} = \frac{a+b}{c}.$$

20.37. За умовою $\alpha + \gamma = 2\beta$ і $\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma =$ $= 2\cos^2 \beta$, звідки $\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\gamma}{2} = 1 + \cos 2\beta$,

$$\cos 2\alpha + \cos 2\gamma = 2\cos 2\beta,$$

$$\cos(\alpha + \gamma)\cos(\alpha - \gamma) = \cos 2\beta,$$

$$\cos 2\beta \cos(\alpha - \gamma) = \cos 2\beta, \quad \cos 2\beta\,(1 - \cos(\alpha - \gamma)) = 0.$$

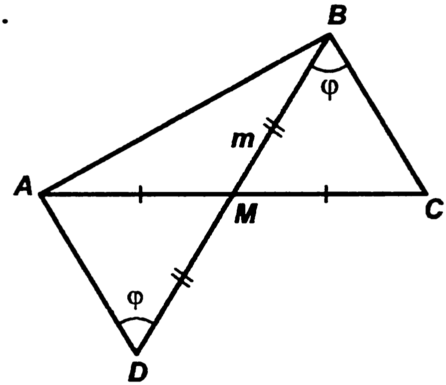
Якщо $\cos 2\beta = 0$, то $\beta = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$;

якщо $\cos(\alpha - \gamma) = 1$, то $\alpha - \gamma = 2\pi k$.

Таким чином, якщо різниця арифметичної прогресії α, β, γ дорівнює πk, то β — довільне, а якщо вона відрізняється від πk, то $\beta = \frac{\pi}{4}(2k + 1)$ для будь-якого натурального k.

20.38. Побудуємо точку D, центрально симетричну точці B в симетрії з центром M. Позначивши $BC = a$, $BM = m$, з трикутників ABD і AMD знаходимо:

$$AB^2 = a^2 + 4m^2 - 4am\cos\varphi,$$



Мал. 14

$$AM^2 = a^2 + m^2 - 2am\cos\varphi \text{ (мал. 14).}$$

З трикутника ABM

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2S},$$

де S — площа трикутника ABC.

Підставляючи в останній вираз знайдені значення AB і AM і беручи до уваги, що $S = am\sin\varphi$, отримаємо

$$\operatorname{ctg} A = \frac{a^2 + 2m^2 - 3am\cos\varphi}{am\sin\varphi} \text{ або}$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{a}{m\sin\varphi} + \frac{2m}{a\sin\varphi} - 3\operatorname{ctg}\varphi.$$

Виходячи з нерівності між середнім арифметичним і середнім геометричним, робимо висновок:

$$\frac{a}{m\sin\varphi} + \frac{2m}{a\sin\varphi} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sin\varphi}.$$

Рівність має місце при $a = m\sqrt{2}$, тобто коли доданки, що стоять в лівій частині нерівності, однакові. Таким чином, $\operatorname{ctg} A \geq \dfrac{2\sqrt{2} - 3\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

20.39. Розглянемо функцію $f(x) = 2\sin x + \operatorname{tg} x - 3x$. Тоді $f'(x) = 2\cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 3 =$

$$= \frac{(\cos x - 1)^2 (2\cos x + 1)}{\cos^2 x} \geq 0$$

для $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$, причому $f'(x) = 0$ тільки при $x = 0$. Тому $f(x)$ зростає в області $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$, а значить, $f(0) < f(\alpha)$ для довільного $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, тобто $f(\alpha) > 0$, звідки $2\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha > 3\alpha$.

20.40. Передусім зазначимо, що $b \neq c$. Насправді, якщо $b = c$, то $\sin B = \sin C$ и рівність $b + c = 2R\sqrt{3}$ набуде вигляду

$$\sin B + \sin C = \sqrt{3}, \text{ або } \sin B = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Звідси випливає, що $A = B = C = 60^\circ$. Але в цьому випадку відношення $\sin 2A : \sin 3A$ втрачає смисл.

Отже, $b \neq c$, $A \neq \dfrac{\pi}{3}$. Використовуючи теорему синусів, можна рівність $b + c = 2R\sqrt{3}$ записати таким чином: $\sin B + + \sin C = \sqrt{3}$. Перетворивши цю рівність, отримаємо $2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2} = \sqrt{3}$. Оскільки $b \neq c$, то $B \neq C$ і $0 < \cos\dfrac{B-C}{2} < 1$, а тоді $\sin\dfrac{B+C}{2} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ або $\cos\dfrac{A}{2} > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Звідси $A < \dfrac{\pi}{3}$ і $\dfrac{1}{2} < \cos A < 1$.

Доведемо, що $\sin 2A : \sin 3A > \dfrac{2}{3}$. Дійсно,

$$y = \frac{\sin 2A}{\sin 3A} = \frac{2\sin A\cos A}{\sin A\,(3 - 4\sin^2 A)} = \frac{2\cos A}{3 - 4\sin^2 A} =$$

$$= \frac{2\cos A}{4\cos^2 A - 1}.$$

Покладемо $2\cos A = x$, тоді $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ $(1 < x < 2)$. Але функція $y = \dfrac{1}{x - \frac{1}{x}}$ при $x > 1$ монотонно спадає, тому $y > \dfrac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$. Отже, $\sin 2A : \sin 3A > \dfrac{2}{3}$.

20.41. Область допустимих значень даного рівняння визначається умовами $\cos x \neq 0$, $\cos 3x \neq 0$ і $\sin 2x \neq 0$, звідки $x \neq \dfrac{\pi k}{2}$ і $x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3}$. В цій області маємо: $\sec x \sec 3x = 2\left(\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} \cdot \dfrac{\sin 3x}{\cos 3x} - 1\right)$,

$$\sec x \sec 3x = 2 \cdot \frac{\sin(3x - 2x)}{\sin 2x \cos 3x},$$

$$\sec x \sec 3x = \frac{2\sin x}{2\sin x \cos x \cos 3x},$$

$$\sec x \sec 3x = \sec x \sec 3x.$$

Отже, область розв'язків даного рівняння співпадає з областю допустимих значень.

20.42. Маємо: $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C =$

$$= \operatorname{tg}(180^\circ - (B + C)) + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C =$$

$$= -\operatorname{tg}(B + C) + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C -$$

$$- \frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} = (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)\left(1 - \frac{1}{1 - \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}\right) =$$

$$= (\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) \cdot \frac{-\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C} =$$

$$= -\operatorname{tg}(B + C)\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Отже, $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$. Оскільки даний трикутник тупокутний, то права частина отриманої рівності від'ємна, а тому і ліва частина від'ємна, тобто $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C < 0$.

Література

Под ред. Сканави М.И. Сборник задач по математике. Москва, «Высшая школа».

Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике. Москва, «Наука», 1978.

Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике. Москва, «Наука», 1988.

Айзенштат Я.И., Белоцерковская Б.Г. Решение задач по тригонометрии. Москва, Уч.пед.изд. Министерства просвещения, РСФСР, 1960.

Моденов П.С. Сборник задач по специальному курсу математики. Москва, «Высшая школа», 1960.

Горделадзе Ш.Г., Кухарчук М.М., Яремчук Ф.П. Сборник конкурсных задач по математике. Москва, «Высшая школа», Киев, 1976.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Гайштут Олександр Григорович,
Ушаков Рудольф Петрович

ТРИГОНОМЕТРІЯ
Довідник-задачник

Технічний редактор **Вербовіков А.М.**
Художник **Нещерецький П.В.**
Комп'ютерна верстка **Вербовіков А.М.**
Коректор **Яценко О.В.**

Підписано до друку 10.07.97 р. Формат 84×108/32.
Папір офсетний № 1. Друк офсетний. Гарнітура Таймс.
Умов. друк. арк. 13,44. Обл.-вид. арк. 10,21.
Тираж 10 000 прим. Замовлення № 0217229.

МСП Науково-практичний, навчально-методичний центр
«Магістр-S»
Творчої спілки вчителів України
253030, Київ-30, вул. Б.Хмельницького, 16/18. Тел. 229-89-29.

Віддруковано з готових фотоформ на комбінаті друку
видавництва «Преса України».
252047, Київ-47, пр-т Перемоги, 50.

Видавництво М
центр
«Магістр-S»
Творчої спілки вчителів України

До нового навчального року пропонує літературу з серії «Математика - це нескладно»:

1. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. ***Геометрія - це нескладно. Планіметрія. Для 6 - 9 класів. Рекомендовано Міністерством освіти України.***
2. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. ***Геометрія - це нескладно. Стереометрія. Для 10 - 11 класів. Рекомендовано Міністерством освіти України.***
3. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. ***Алгебра. Розв'язування задач та вправ. Рекомендовано Міністерством освіти України.***

З питань оптової закупівлі, замовлень та умов реалізації літератури звертатися за адресою:
252030, Київ-30, вул. Б.Хмельницького, 16/18
(ст. М «Золоті ворота», «Театральна»),
у приміщенні СШ №53
Тел./факс: (044) 229-89-29, тел.: 228-65-05