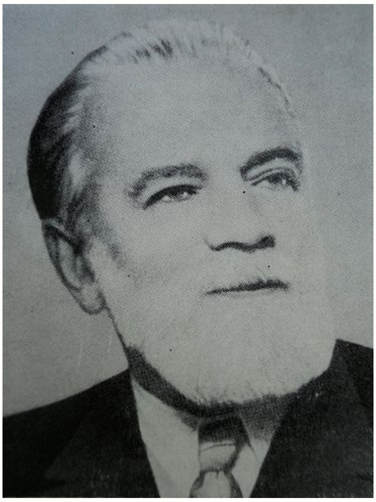
Григорій Михайлович Фіхтенгольц

Одеса, Україна



КУРС
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Переклад небайдужих до математики і України:

Сергій Зінов’єв

Андрій Груша, Олексій Галганов, Анна Рогова, Редріх Путятін

2022-02-24 – 2024-01-01

v1.0.12n

Моєму викладачу математичного аналізу Харківського Національного Університету, Володимиру Семеновичу Рижому, який викладав українською мовою.

Велика подяка тим, хто допомагав писати переклад:

- Данило Паламарчук
- Олеся Мриглод
- Катерина Татарко
- Наталія Сокол
- Роман Полоз

Подяка тим, хто прочитав і надав корисні коментарі:

- Олександр Драганов
- Тетяна Януш

Також подяка редакторам тексту:

- Олександр Телемко

Коментарі можна надсилати на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Також завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

Mathematics is an international subject, and the world's mathematicians generally stand together to oppose oppression and violence.

I consider this project to be a vital and important contribution to Ukraine's future, and a model for all of us to follow. I wish it every success.

Emeritus Professor Ian Stewart FRS,
University of Warwick, UK

2023-08-24

Зміст

ВСТУП. ДІЙСНІ ЧИСЛА **2**
0.1 Множина раціональних чисел 2
1 Попередні зауваження 2
2 Упорядкування множини раціональних чисел 3
3 Додавання та віднімання раціональних чисел 3
4 Множення та ділення раціональних чисел 5
5 Аксіома Архімедеса 7
0.2 Введення ірраціональних чисел. Упорядкування множини дійсних чисел 9
6 Означення ірраціонального числа 9
7 Упорядкування множини дійсних чисел 11
8 Допоміжні твердження 12
9 Запис дійсного числа нескінченним десятковим дробом 13
10 Неперервність множини дійсних чисел 15
11 Межі числових множин 17
0.3 Арифметичні дії над дійсними числами 20
12 Означення суми дійсних чисел 20
13 Властивості додавання 21
14 Означення добутку дійсних чисел 22
15 Властивості множення 24
16 Висновок 26
17 Абсолютні величини 26
0.4 Подальші властивості і застосування дійсних чисел 28
18 Існування кореня. Степінь із раціональним показником 28
19 Степінь з будь-яким дійсним показником 29
20 Логарифми 32
21 Вимірювання відрізків 33

1 ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ 36
1.1 Варіанта та її границя . . . 36
22 Змінна величина, варіанта . . . 36
23 Границя варіанти . . . 39
24 Нескінченно малі величини . . . 40
25 Приклади . . . 41
26 Деякі теореми про варіанту, що має границю . . . 46
27 Нескінченно великі величини . . . 48
1.2 Теореми про границі, які полегшують знаходження границь . . . 51
28 Граничний перехід у рівності і нерівності . . . 51
29 Леми про нескінченно малі . . . 53
30 Арифметичні дії над змінними . . . 54
31 Невизначені вирази . . . 56
32 Приклади на знаходження границь . . . 58
33 Теорема Штольца та її застосування . . . 65
1.3 Монотонна варіанта . . . 70
34 Границя монотонної варіанти . . . 70
35 Приклади . . . 72
36 Число e . . . 78
37 Наближене обчислення числа e . . . 80
38 Лема про вкладені проміжки . . . 83
1.4 Принцип збіжності. Часткові границі . . . 86
39 Принцип збіжності . . . 86
40 Часткові послідовності та часткові границі . . . 88
41 Лема Бользано – Ваярштрасса . . . 89
42 Найбільша та найменша границі . . . 91

2 ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ 96
2.1 Поняття функції . . . 96
43 Змінна та область її зміни . . . 96
44 Функціональна залежність між змінними. Приклади . . . 97
45 Означення поняття функції . . . 98
46 Аналітичний спосіб задання функції . . . 101
47 Графік функції . . . 103
48 Найважливіші класи функцій . . . 106

49 Поняття оберненої функції . . . 114
50 Обернені тригонометричні функції . . . 116
51 Композиція функцій. Останні зауваження . . . 122
2.2 Границя функції . . . 124
52 Означення границі функції . . . 124
53 Зведення до випадку варіанти . . . 126
54 Приклади . . . 128
55 Поширення теорії границь . . . 137
56 Приклади . . . 140
57 Границя монотонної функції . . . 143
58 Загальна ознака Бользано – Коші . . . 144
59 Найбільша та найменша границі функції . . . 145
2.3 Класифікація нескінченно малих і нескінченно великих величин . . . 147
60 Порівняння нескінченно малих . . . 147
61 Шкала нескінченно малих . . . 148
62 Еквівалентні нескінченно малі . . . 150
63 Виділення головної частини . . . 152
64 Задачі . . . 153
65 Класифікація нескінченно великих . . . 156
2.4 Неперервність (і розриви) функцій . . . 158
66 Означення неперервності функції в точці . . . 158
67 Арифметичні операції над неперервними функціями . . . 159
68 Приклади неперервних функцій . . . 160
69 Однобічна неперервність. Класифікація розривів . . . 162
70 Приклади розривних функцій . . . 163
71 Неперервність і розриви монотонної функції . . . 167
72 Неперервність елементарних функцій . . . 168
73 Композиція неперервних функцій . . . 169
74 Розв'язування одного функціонального рівняння . . . 169
75 Функціональна характеристика показникової, логарифмічної та степеневої функцій . . . 172
76 Функціональна характеристика тригонометричного та гіперболічного косинусів . . . 174

77 Використання неперервності функцій для обчислення границь 177
78 Степенево-показникові вирази 180
79 Приклади 181
2.5 Властивості неперервних функцій 184
80 Теорема про проходження функцією через нуль 184
81 Застосування до розв'язування рівнянь 186
82 Теорема про проміжне значення 187
83 Існування оберненої функції 189
84 Теорема про обмеженість функції 191
85 Найбільше та найменше значення функції 192
86 Поняття рівномірної неперервності 194
87 Теорема Кантора 196
88 Лема Бореля 197
89 Нові доведення основних теорем 199

3 ПОХІДНІ І ДИФЕРЕНЦІАЛИ **203**
3.1 Похідна та її обчислення 203
90 Задача про обчислення швидкості рухомої точки 203
91 Задача про проведення дотичної до кривої 205
92 Означення похідної 207
93 Приклади обчислення похідних 211
94 Похідна оберненої функції 214
95 Формули для похідних 217
96 Формула для приросту функції 217
97 Найпростіші правила обчислення похідних 219
98 Похідна композиції функцій 221
99 Приклади 222
100 Однобічні похідні 231
101 Нескінченні похідні 232
102 Подальші приклади особливих випадків 233
3.2 Диференціал 235
103 Означення диференціала 235
104 Зв'язок між диференційовністю та існуванням похідної 236
105 Основні формули та правила диференціювання 238

106 Інваріантність форми диференціала . . . 240
107 Диференціали як джерело наближених формул . . . 242
108 Застосування диференціалів в оцінюванні похибок . . . 245
3.3 Основні теореми диференціального числення . . . 248
109 Теорема Ферма . . . 248
110 Теорема Дарбу . . . 250
111 Теорема Ролля . . . 250
112 Формула Лаґранжа . . . 252
113 Границя похідної . . . 254
114 Формула Коші . . . 255
3.4 Похідні і диференціали вищих порядків . . . 257
115 Означення похідних вищих порядків . . . 257
116 Загальні формули для похідних будь-якого порядку . . . 258
117 Формула Ляйбніца . . . 263
118 Приклади . . . 264
119 Диференціали вищих порядків . . . 268
120 Порушення інваріантності форми для диференціалів вищих порядків 269
121 Параметричне диференціювання . . . 270
122 Скінченні різниці . . . 271
3.5 Формула Тейлора . . . 274
123 Формула Тейлора для многочлена . . . 274
124 Розкладання довільної функції; додатковий член у формі Пеано . 275
125 Приклади . . . 279
126 Інші форми додаткового члена . . . 282
127 Наближені формули . . . 285
3.6 Інтерполяція . . . 292
128 Найпростіша задача інтерполяції. Формула Лаґранжа . . . 292
129 Додатковий член формули Лаґранжа . . . 293
130 Інтерполяція з кратними вузлами. Формула Ерміта . . . 294

4 ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНИХ 297
4.1 Вивчення ходу зміни функції . . . 297
131 Умова сталості функції . . . 297
132 Умова монотонності функції . . . 299
133 Доведення нерівностей . . . 303

134 Максимуми і мінімуми; необхідні умови 307
135 Достатні умови. Перше правило 309
136 Приклади 311
137 Друге правило 317
138 Використання вищих похідних 320
139 Знаходження найбільших і найменших значень 323
140 Задачі 325
4.2 Опуклі (і увігнуті) функції 332
141 Означення опуклої (увігнутої) функції 332
142 Найпростіші твердження про опуклі функції 333
143 Умови опуклості функції 336
144 Нерівність Єнсена та її застосування 339
145 Точки перегину 341
4.3 Побудова графіків функцій 344
146 Формулювання задачі 344
147 Схема побудови графіка. Приклади 344
148 Нескінченні розриви, нескінченний проміжок. Асимптоти 347
149 Приклади 351
4.4 Розкриття невизначеностей 357
150 Невизначеність виду $\frac{0}{0}$ 357
151 Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ 363
152 Інші види невизначеностей 365
4.5 Наближене розв'язування рівнянь 368
153 Вступні зауваження 368
154 Правило пропорційних частин (метод хорд) 369
155 Правило Ньютена (метод дотичних) 375
156 Приклади і вправи 377
157 Комбінований метод 384
158 Приклади і вправи 385

5 ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ 390
5.1 Основні поняття 390
159 Функціональна залежність між змінними. Приклади 390
160 Функції двох змінних і області їх визначення 391

161 Арифметичний n-вимірний простір 395
162 Приклади областей у n-вимірному просторі 400
163 Загальне означення відкритої та замкненої області 403
164 Функції n змінних 405
165 Границя функції кількох змінних 407
166 Зведення до випадку варіанти 409
167 Приклади 411
168 Повторні границі 413
5.2 Неперервні функції 417
169 Неперервність і розриви функцій кількох змінних 417
170 Операції над неперервними функціями 419
171 Функції, неперервні в області. Теореми Бользано – Коші 420
172 Лема Бользано – Ваярштрасса 421
173 Теореми Ваярштрасса 424
174 Рівномірна неперервність 425
175 Лема Бореля 427
176 Нові доведення основних теорем 428
5.3 Похідні і диференціали функцій кількох змінних 431
177 Частинні похідні і частинні диференціали 431
178 Повний приріст функції 434
179 Повний диференціал 437
180 Геометрична інтерпретація для випадку функції двох змінних 439
181 Похідні композиції функцій 444
182 Приклади 446
183 Формула скінченних приростів 448
184 Похідна за заданим напрямком 450
185 Інваріантність форми (першого) диференціала 454
186 Застосування повного диференціала у наближених обчисленнях . . 456
187 Однорідні функції 459
188 Формула Ойлера 461
5.4 Похідні і диференціали вищих порядків 463
189 Похідні вищих порядків 463
190 Теорема про змішані похідні 466

191 Узагальнення . . . 469
192 Похідні вищих порядків композиції функцій . . . 470
193 Диференціали вищих порядків . . . 472
194 Диференціали композиції функцій . . . 475
195 Формула Тейлора . . . 477
5.5 Екстремуми, найбільші і найменші значення . . . 480
196 Екстремуми функції кількох змінних. Необхідні умови . . . 480
197 Достатні умови (випадок функції двох змінних) . . . 482
198 Достатні умови (загальний випадок) . . . 486
199 Умови відсутності екстремуму . . . 489
200 Найбільше і найменше значення функцій. Приклади . . . 491
201 Задачі . . . 496

6 ФУНКЦІОНАЛЬНІ ВИЗНАЧНИКИ; ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ 508
6.1 Формальні властивості функціональних визначників . . . 508
202 Означення функціональних визначників (якобіанів) . . . 508
203 Множення якобіанів . . . 509
204 Множення функціональних матриць (матриць Якобі) . . . 511
6.2 Неявні функції . . . 515
205 Поняття неявної функції від однієї змінної . . . 515
206 Існування неявної функції . . . 517
207 Диференційовність неявної функції . . . 519
208 Неявні функції кількох змінних . . . 521
209 Обчислення похідних неявних функцій . . . 528
210 Приклади . . . 532
6.3 Деякі застосування теорії неявних функцій . . . 538
211 Відносні екстремуми . . . 538
212 Метод невизначених множників Лаґранжа . . . 540
213 Достатні умови для відносного екстремуму . . . 542
214 Приклади і задачі . . . 543
215 Поняття незалежності функцій . . . 549
216 Ранг матриці Якобі . . . 551
6.4 Заміна змінних . . . 556
217 Функції однієї змінної . . . 556

218 Приклади 558
219 Функції кількох змінних. Заміна незалежних змінних 562
220 Метод обчислення диференціалів 564
221 Загальний випадок заміни змінних 565
222 Приклади 568

7 ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ГЕОМЕТРІЇ **579**
7.1 Аналітичне задання кривих і поверхонь 579
223 Криві на площині (у прямокутних координатах) 579
224 Приклади 581
225 Криві механічного походження 586
226 Криві на площині (у полярних координатах). Приклади 593
227 Поверхні і криві у просторі 600
228 Параметрично задані криві 602
229 Приклади 604
7.2 Дотична і дотична площина 610
230 Дотична до плоскої кривої у прямокутних координатах 610
231 Приклади 612
232 Дотична у полярних координатах 615
233 Приклади 616
234 Дотична до кривої у просторі. Дотична площина до поверхні 619
235 Приклади 623
236 Особливі точки плоских кривих 625
237 Випадок параметричного задання кривої 630
7.3 Дотик між кривими 633
238 Обвідна сімейства кривих 633
239 Приклади 636
240 Характеристичні точки 642
241 Порядок дотику двох кривих 644
242 Випадок неявного задання однієї з кривих 646
243 Стична крива 648
244 Інший підхід до стичних кривих 650
7.4 Довжина плоскої кривої 652

245 Леми 652
246 Напрямок на кривій 653
247 Довжина кривої. Адитивність довжини дуги 654
248 Достатні умови спрямляння. Диференціал дуги 657
249 Дуга у ролі параметра. Додатний напрямок дотичної 661
7.5 Кривизна плоскої кривої 665
250 Поняття кривизни 665
251 Коло кривизни та радіус кривизни 668
252 Приклади 671
253 Координати центру кривизни 677
254 Означення еволюти і евольвенти; знаходження еволюти 678
255 Властивості еволют і евольвент 683
256 Знаходження евольвент 686
7.6 Додаток. Задача поширення функцій 689
257 Випадок функції однієї змінної 689
258 Формулювання задачі для двовимірного випадку 690
259 Леми 692
260 Основна теорема про поширення функції 695
261 Узагальнення 697
262 Останні зауваження 700

8 ПЕРВІСНА ФУНКЦІЯ (НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ) 703
8.1 Невизначений інтеграл і найпростіші способи його обчислення 703
263 Поняття первісної функції (і невизначеного інтеграла) 703
264 Інтеграл і задача про знаходження площі 707
265 Таблиця основних інтегралів 709
266 Найпростіші правила інтегрування 711
267 Приклади 712
268 Інтегрування заміною змінної 717
269 Приклади 720
270 Інтегрування частинами 725
271 Приклади 727
8.2 Інтегрування раціональних виразів 732

272 Формулювання задачі інтегрування у скінченному вигляді 732
273 Прості дроби та їх інтегрування 733
274 Розкладання правильних дробів на прості дроби 734
275 Знаходження коефіцієнтів. Інтегрування правильних дробів 738
276 Виділення раціональної частини інтеграла 740
277 Приклади 743
8.3 Інтегрування деяких виразів, що містять радикали 747
278 Інтегрування виразів вигляду $R\left(x,\ \sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$. Приклади 747
279 Інтегрування біноміальних диференціалів. Приклади 748
280 Формули зведення 751
281 Інтегрування виразів вигляду $R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. Підстановки Ойлера 754
282 Геометричне трактування підстановок Ойлера 756
283 Приклади 757
284 Інші способи обчислення 763
285 Приклади 770
8.4 Інтегрування виразів, що містять тригонометричні і показникову функції 773
286 Інтегрування диференціалів $R(\sin x,\ \cos x)\,dx$ 773
287 Інтегрування виразів $\sin^\nu x\cdot\cos^\mu x$ 775
288 Приклади 777
289 Огляд інших випадків 782
8.5 Еліптичні інтеграли 784
290 Загальні зауваження і означення 784
291 Допоміжні перетворення 786
292 Зведення до канонічної форми 788
293 Еліптичні інтеграли 1-го, 2-го і 3-го роду 790

9 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ 794
9.1 Означення та умови існування визначеного інтеграла 794
294 Інший підхід до задачі про площу 794

295 Означення 796
296 Суми Дарбу 797
297 Умова існування інтеграла 800
298 Класи інтегровних функцій 801
299 Властивості інтегровних функцій 803
300 Приклади та доповнення 805
301 Нижній та верхній інтеграли як границі 807
9.2 Властивості визначених інтегралів 810
302 Інтеграл по орієнтованому проміжку 810
303 Властивості, що виражаються рівностями 811
304 Властивості, що виражаються нерівностями 812
305 Визначений інтеграл як функція верхньої межі 817
306 Друга теорема про середнє значення 819
9.3 Обчислення і перетворення визначених інтегралів 823
307 Обчислення за допомогою інтегральних сум 823
308 Основна формула інтегрального числення 827
309 Приклади 829
310 Інший спосіб отримання основної формули 833
311 Формули зведення 834
312 Приклади 835
313 Формула заміни змінної у визначеному інтегралі 838
314 Приклади 840
315 Формула Ґаусса. Перетворення Лендена 847
316 Інший спосіб отримання формули заміни змінної 850
9.4 Деякі застосування визначених інтегралів 852
317 Формула Волліса 852
318 Формула Тейлора з додатковим членом 853
319 Трансцендентність числа e 854
320 Многочлени Льожондра 856
321 Інтегральні нерівності 859
9.5 Наближене обчислення інтегралів 863
322 Формулювання задачі. Формули прямокутників та трапецій 863
323 Параболічна інтерполяція 866

324 Поділ проміжку інтегрування . . . 868
325 Додатковий член формули прямокутників . . . 870
326 Додатковий член формули трапецій . . . 872
327 Додатковий член формули Сімпсона . . . 873
328 Приклади . . . 875

10 ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ГЕОМЕТРІЇ, МЕХАНІКИ І ФІЗИКИ 883

10.1 Довжина кривої . . . 883
  329 Обчислення довжини кривої . . . 883
  330 Інший підхід до означення поняття довжини кривої та її обчислення . . . 885
  331 Приклади . . . 888
  332 Натуральне рівняння плоскої кривої . . . 897
  333 Приклади . . . 900
  334 Довжина дуги просторової кривої . . . 904
10.2 Площі та об’єми . . . 905
  335 Означення поняття площі. Властивість адитивності . . . 905
  336 Площа як границя . . . 907
  337 Класи квадрованих областей . . . 910
  338 Обчислення площі за допомогою інтеграла . . . 912
  339 Приклади . . . 915
  340 Означення поняття об’єму. Його властивості . . . 925
  341 Класи тіл, що мають об’єм . . . 927
  342 Обчислення об’єму за допомогою інтеграла . . . 928
  343 Приклади . . . 932
  344 Площа поверхні обертання . . . 940
  345 Приклади . . . 943
  346 Площа циліндричної поверхні . . . 946
  347 Приклади . . . 948
10.3 Обчислення механічних і фізичних величин . . . 952
  348 Схема застосування визначеного інтеграла . . . 952
  349 Знаходження статичних моментів та центру маси кривої . . . 955
  350 Приклади . . . 957

351 Знаходження статичних моментів та центру маси плоскої фігури . . . 959
352 Приклади . . . 961
353 Механічна робота . . . 962
354 Приклади . . . 964
355 Робота сили тертя у плоскій п'яті . . . 967
356 Задачі на підсумовування нескінченно малих елементів . . . 970
10.4 Найпростіші диференціальні рівняння . . . 977
357 Основні поняття. Рівняння першого порядку . . . 977
358 Рівняння першого степеня відносно похідної. Відокремлення змінних . . . 978
359 Задачі . . . 981
360 Зауваження щодо складання диференціальних рівнянь . . . 987
361 Задачі . . . 989

11 НЕСКІНЧЕННІ РЯДИ ЗІ СТАЛИМИ ЧЛЕНАМИ **994**

11.1 Вступ . . . 994
362 Основні поняття . . . 994
363 Приклади . . . 995
364 Основні теореми . . . 997
11.2 Збіжність додатних рядів . . . 1001
365 Умова збіжності додатного ряду . . . 1001
366 Теореми порівняння рядів . . . 1003
367 Приклади . . . 1005
368 Ознаки Коші та д'Аламбера . . . 1010
369 Ознака Раабе . . . 1012
370 Приклади . . . 1014
371 Ознака Куммара . . . 1017
372 Ознака Ґаусса . . . 1020
373 Інтегральна ознака Маклорена – Коші . . . 1022
374 Ознака Єрмакова . . . 1027
375 Додатки . . . 1030
11.3 Збіжність довільних рядів . . . 1038
376 Загальна умова збіжності ряду . . . 1038

377 Абсолютна збіжність 1039
378 Приклади 1041
379 Степеневий ряд, його проміжок збіжності 1042
380 Запис радіуса збіжності використовуючи коефіцієнти 1044
381 Знакозмінні ряди 1046
382 Приклади 1048
383 Перетворення Абеля 1050
384 Ознаки Абеля та Діріхлє 1052
385 Приклади 1053
11.4 Властивості збіжних рядів 1059
386 Сполучна властивість 1059
387 Комутативна властивість абсолютно збіжних рядів 1061
388 Випадок неабсолютно збіжних рядів 1062
389 Множення рядів 1066
390 Приклади 1069
391 Загальна теорема з теорії границь 1071
392 Подальші теореми про множення рядів 1075
11.5 Повторні і подвійні ряди 1077
393 Повторні ряди 1077
394 Подвійні ряди 1080
395 Приклади 1086
396 Степеневий ряд із двома змінними; область збіжності 1095
397 Приклади 1098
398 Кратні ряди 1100
11.6 Нескінченні добутки 1102
399 Основні поняття 1102
400 Приклади 1103
401 Основні теореми. Зв’язок із рядами 1105
402 Приклади 1108
11.7 Розкладання елементарних функцій 1117
403 Розкладання функції в степеневий ряд; ряд Тейлора 1117
404 Розкладання в ряд показникової, основних тригонометричних функцій та ін. 1119
405 Логарифмічний ряд 1121

406 Формула Стьорліна 1122
407 Біноміальний ряд 1125
408 Розкладання синуса та косинуса у нескінченні добутки 1127
11.8 Наближені обчислення за допомогою рядів. Перетворення рядів 1132
409 Загальні зауваження 1132
410 Обчислення числа π 1133
411 Обчислення логарифмів 1135
412 Обчислення коренів 1138
413 Перетворення Ойлера 1140
414 Приклади 1142
415 Перетворення Куммара 1145
416 Перетворення Маркова 1149
11.9 Підсумовування розбіжних рядів 1152
417 Вступ 1152
418 Метод степеневих рядів 1153
419 Теорема Таубера 1156
420 Метод середніх арифметичних 1159
421 Взаємини між методами Пуассона – Абеля і Чезаро 1161
422 Теорема Харді – Е. Ландау 1163
423 Застосування узагальненого підсумовування до множення рядів 1166
424 Інші методи узагальненого підсумовування рядів 1168
425 Приклади 1173
426 Загальний клас лінійних регулярних методів підсумовування 1177

12 ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПОСЛІДОВНОСТІ І РЯДИ 1181

12.1 Рівномірна збіжність 1181
427 Вступні зауваження 1181
428 Рівномірна і нерівномірна збіжності 1183
429 Умова рівномірної збіжності 1188
430 Ознаки рівномірної збіжності рядів 1190
12.2 Функціональні властивості суми ряду 1194
431 Неперервність суми ряду 1194

432 Зауваження про квазі-рівномірну збіжність 1196
433 Почленний перехід до границі 1199
434 Почленне інтегрування рядів 1200
435 Почленне диференціювання рядів 1203
436 Зв’язок з послідовностями 1206
437 Неперервність суми степеневого ряду 1208
438 Інтегрування і диференціювання степеневих рядів 1212
12.3 Застосування 1215
439 Приклади на неперервність суми ряду і на почленний перехід до границі 1215
440 Приклади на почленне інтегрування рядів 1222
441 Приклади на почленне диференціювання рядів 1235
442 Метод послідовних наближень у теорії неявних функцій 1242
443 Аналітичне означення тригонометричних функцій 1246
444 Приклад неперервної функції без похідної 1249
12.4 Додаткові відомості про степеневі ряди 1252
445 Дії над степеневими рядами 1252
446 Підстановка ряду в ряд 1255
447 Приклади 1258
448 Ділення степеневих рядів 1263
449 Числа Я. Бернуллі і розклади, в яких вони трапляються 1266
450 Розв’язування рівнянь рядами 1271
451 Обернений степеневий ряд 1274
452 Ряд Лаґранжа 1278
12.5 Елементарні функції комплексної змінної 1283
453 Комплексні числа 1283
454 Комплексна варіанта та її границя 1286
455 Функції комплексної змінної 1289
456 Степеневі ряди 1291
457 Показникова функція 1295
458 Логарифмічна функція 1297
459 Тригонометричні функції та обернені до них 1300
460 Степенева функція 1304
461 Приклади 1305

12.6 Ряди, що обгортають. Асимптотичні ряди. Формула Ойлера – Маклорена 1311
- 462 Приклади 1311
- 463 Означення 1313
- 464 Основні властивості асимптотичних розкладів 1316
- 465 Виведення формули Ойлера – Маклорена 1321
- 466 Дослідження додаткового члена 1324
- 467 Приклади обчислень за допомогою формули Ойлера – Маклорена 1326
- 468 Інший вигляд формули Ойлера – Маклорена 1330
- 469 Формула і ряд Стьорліна 1333

13 НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ **1336**

13.1 Невласні інтеграли з нескінченними межами 1336
- 470 Означення інтегралів з нескінченними межами 1336
- 471 Застосування основної формули інтегрального числення 1338
- 472 Приклади 1339
- 473 Аналогія з рядами. Найпростіші теореми 1343
- 474 Збіжність інтеграла у випадку додатної функції 1344
- 475 Збіжність інтеграла в загальному випадку 1347
- 476 Ознаки Абеля і Діріхлє 1349
- 477 Зведення невласного інтеграла до нескінченного ряду 1352
- 478 Приклади 1355

13.2 Невласні інтеграли від необмежених функцій 1365
- 479 Означення інтегралів від необмежених функцій 1365
- 480 Зауваження щодо особливих точок 1368
- 481 Застосування основної формули інтегрального числення. Приклади 1370
- 482 Умови і ознаки існування інтеграла 1372
- 483 Приклади 1375
- 484 Головні значення невласних інтегралів 1380
- 485 Зауваження про узагальнені значення розбіжних інтегралів 1385

13.3 Властивості і перетворення невласних інтегралів 1388

486 Найпростіші властивості . . . 1388
487 Теореми про середнє значення . . . 1390
488 Інтегрування частинами в разі невласних інтегралів . . . 1392
489 Приклади . . . 1393
490 Заміна змінних у невласних інтегралах . . . 1395
491 Приклади . . . 1396
13.4 Особливі способи обчислення невласних інтегралів . . . 1403
492 Деякі чудові інтеграли . . . 1403
493 Обчислення невласних інтегралів за допомогою інтегральних сум. Випадок інтегралів зі скінченними межами . . . 1406
494 Інтеграли з нескінченними межами . . . 1408
495 Інтеграли Фрулляні . . . 1412
496 Інтеграли від раціональних функцій між нескінченними межами . . . 1415
497 Змішані приклади і вправи . . . 1421
13.5 Наближене обчислення невласних інтегралів . . . 1436
498 Інтеграли зі скінченними межами; виділення особливостей . . . 1436
499 Приклади . . . 1437
500 Зауваження щодо наближеного обчислення власних інтегралів . . . 1441
501 Наближене обчислення невласних інтегралів з нескінченною межею . . . 1442
502 Використання асимптотичних розкладів . . . 1446

14 ІНТЕГРАЛИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА 1450

14.1 Елементарна теорія . . . 1450
503 Формулювання задачі . . . 1450
504 Рівномірне прямування до граничної функції . . . 1450
505 Перестановка двох граничних переходів . . . 1450
506 Граничний перехід під знаком інтеграла . . . 1450
507 Диференціювання під знаком інтеграла . . . 1450
508 Інтегрування під знаком інтеграла . . . 1451
509 Випадок, коли і межі інтеграла залежать від параметра . . . 1451
510 Введення множника, що залежить лише від x . . . 1451

511 Приклади 1451
512 Доведення Ґаусса основної теореми алгебри 1451
14.2 Рівномірна збіжність інтегралів 1452
513 Означення рівномірної збіжності інтегралів 1452
514 Умова рівномірної збіжності. Зв’язок із рядами 1452
515 Достатні ознаки рівномірної збіжності 1452
516 Інший випадок рівномірної збіжності 1452
517 Приклади 1452
14.3 Використання рівномірної збіжності інтегралів 1453
518 Граничний перехід під знаком інтеграла 1453
519 Приклади 1453
520 Неперервність і диференційовність інтеграла за параметром 1453
521 Інтегрування інтеграла за параметром 1453
522 Застосування для обчислення деяких інтегралів 1453
523 Приклади диференціювання під знаком інтеграла 1453
524 Приклади інтегрування під знаком інтеграла 1453
14.4 Доповнення 1455
525 Лема Арзеля 1455
526 Граничний перехід під знаком інтеграла 1455
527 Диференціювання під знаком інтеграла 1455
528 Інтегрування під знаком інтеграла 1455
14.5 Інтеграли Ойлера 1456
529 Інтеграл Ойлера першого роду 1456
530 Інтеграл Ойлера другого роду 1458
531 Найпростіші властивості функції Γ 1459
532 Однозначне означення функції Γ її властивостями 1465
533 Інша функціональна характеристика функції Γ 1468
534 Приклади 1470
535 Логарифмічна похідна функції Γ 1478
536 Теорема множення для функції Γ 1480
537 Деякі розклади в ряди і добутки 1481
538 Приклади і доповнення 1483
539 Обчислення деяких визначених інтегралів 1490

540 Формула Стьорліна 1498
541 Обчислення сталої Ойлера 1502
542 Складання таблиці десяткових логарифмів функції Γ 1503

15 КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ. ІНТЕГРАЛ Стілтьєса 1506
15.1 Криволінійні інтеграли першого типу 1506
543 Означення криволінійного інтеграла першого типу 1506
544 Зведення до звичайного визначеного інтеграла 1506
545 Приклади 1506
15.2 Криволінійні інтеграли другого типу 1507
546 Означення криволінійних інтегралів другого типу 1507
547 Існування та обчислення криволінійного інтеграла другого типу . 1507
548 Випадок замкненого контуру. Орієнтація площини 1507
549 Приклади 1507
550 Наближення за допомогою інтеграла, взятого по ламаній 1507
551 Обчислення площ за допомогою криволінійних інтегралів 1507
552 Приклади 1507
553 Зв'язок між криволінійними інтегралами обох типів 1507
554 Фізичні задачі 1507
15.3 Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху 1508
555 Формулювання задачі, зв'язок із питанням щодо точного диференціала 1508
556 Диференціювання інтеграла, що не залежить від шляху 1508
557 Обчислення криволінійного інтеграла через первісну 1508
558 Ознака точного диференціала та знаходження первісної у випадку прямокутної області 1508
559 Узагальнення на випадок довільної області 1508
560 Остаточні результати 1508
561 Інтеграли по замкненому контуру 1508
562 Випадок неоднозв'язної області або наявності особливих точок . . 1508
563 Інтеграл Ґаусса 1508
564 Тримірний випадок 1508
565 Приклади 1508
566 Застосування до фізичних задач 1508
15.4 Функції з обмеженою зміною 1509

567 Означення функції з обмеженою зміною 1509
568 Класи функцій з обмеженою зміною 1509
569 Властивості функцій з обмеженою зміною 1509
570 Критерії для функцій з обмеженою зміною 1509
571 Неперервні функції з обмеженою зміною 1509
572 Спрямні криві 1509
15.5 Інтеграл Стілтьєса 1510
573 Означення інтеграла Стілтьєса 1510
574 Загальні умови існування інтеграла Стілтьєса 1510
575 Класи випадків існування інтеграла Стілтьєса 1510
576 Властивості інтеграла Стілтьєса 1510
577 Інтегрування частинами 1510
578 Зведення інтеграла Стілтьєса до інтеграла Рімана 1510
579 Обчислення інтегралів Стілтьєса 1510
580 Приклади 1510
581 Геометрична ілюстрація інтеграла Стілтьєса 1510
582 Теорема про середнє, оцінки 1510
583 Граничний перехід під знаком інтеграла Стілтьєса 1510
584 Приклади та додатки 1510
585 Зведення криволінійного інтеграла другого типу до інтеграла Стілтьєса 1510

16 ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ **1511**
16.1 Означення та найпростіші властивості подвійного інтеграла 1511
586 Задача про об'єм циліндричного бруса 1511
587 Зведення подвійного інтеграла до повторного 1511
588 Означення подвійного інтеграла 1511
589 Умови існування подвійного інтеграла 1511
590 Класи інтегровних функцій 1511
591 Нижній та верхній інтеграли як границі 1511
592 Властивості інтегровних функцій та подвійних інтегралів 1511
593 Інтеграл, як адитивна функція області; диференціювання по області1511
16.2 Обчислення подвійного інтеграла 1513
594 Зведення подвійного інтеграла до повторного у випадку прямокутної області 1513

595 Приклади 1513
596 Зведення подвійного інтеграла до повторного у випадку криволінійної області 1513
597 Приклади 1513
598 Механічні застосування 1513
599 Приклади 1513
16.3 Формула Гріна 1514
600 Виведення формули Гріна 1514
601 Застосування формули Гріна до дослідження криволінійних інтегралів 1514
602 Приклади та додатки 1514
16.4 Заміна змінних у подвійному інтегралі 1515
603 Перетворення плоских областей 1515
604 Приклади 1515
605 Вираження площі у криволінійних координатах 1515
606 Додаткові зауваження 1515
607 Геометричне виведення 1515
608 Приклади 1515
609 Заміна змінних у подвійних інтегралах 1515
610 Аналогія із простим інтегралом. Інтеграл по орієнтованій області 1515
611 Приклади 1515
16.5 Невласні подвійні інтеграли 1516
612 Інтеграли, поширені на необмежену область 1516
613 Теорема про абсолютну збіжність невласного подвійного інтеграла 1516
614 Зведення подвійного інтеграла до повторного 1516
615 Інтеграли від необмежених функцій 1516
616 Заміна змінних у невласних інтегралах 1516
617 Приклади 1516

17 ПЛОЩА ПОВЕРХНІ. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ 1517
17.1 Двохсторонні поверхні 1517
618 Сторона поверхні 1517
619 Приклади 1517
620 Орієнтація поверхонь та простору 1517
621 Вибір знака у формулах для напрямних косинусів нормалі 1517

622 Випадок кусково-гладкої поверхні 1517
17.2 Площа кривої поверхні 1518
623 Приклад Шварца 1518
624 Означення площі кривої поверхні 1518
625 Зауваження 1518
626 Існування площі поверхні та її обчислення 1518
627 Підхід через вписані многогранні поверхні 1518
628 Особливі випадки означення площі 1518
629 Приклади 1518
17.3 Поверхневі інтеграли першого типу 1519
630 Означення поверхневого інтеграла першого типу 1519
631 Зведення до звичайного подвійного інтеграла 1519
632 Механічні застосування поверхневих інтегралів першого типу . . . 1519
633 Приклади 1519
17.4 Поверхневі інтеграли другого типу 1520
634 Означення поверхневого інтеграла другого типу 1520
635 Найпростіші окремі випадки 1520
636 Загальний випадок 1520
637 Деталь доведення 1520
638 Вираження об'єму тіла за допомогою поверхневого інтеграла . . . 1520
639 Формула Стокса 1520
640 Приклади 1520
641 Застосування формули Стокса до дослідження криволінійних інтегралів у просторі 1520

18 ПОТРІЙНІ ТА БАГАТОКРАТНІ ІНТЕГРАЛИ 1521
18.1 Потрійний інтеграл та його обчислення 1521
642 Задача обчислення маси тіла 1521
643 Потрійний інтеграл та умови його існування 1521
644 Властивості інтегровних функцій та потрійних інтегралів 1521
645 Обчислення потрійного інтеграла, поширеного на паралелепіпед . 1521
646 Обчислення потрійного інтеграла по довільній області 1521
647 Невласні потрійні інтеграли 1521
648 Приклади 1521
649 Механічні застосування 1521

650 Приклади 1521

18.2 Формула Ґаусса – Остроградського 1523

651 Формула Остроградського 1523

652 Застосування формули Остроградського для дослідження поверхневих інтегралів 1523

653 Інтеграл Ґаусса 1523

654 Приклади 1523

18.3 Заміна змінних у потрійних інтегралах 1524

655 Перетворення просторів та криволінійні координати 1524

656 Приклади 1524

657 Вираження об'єму у криволінійних координатах 1524

658 Додаткові зауваження 1524

659 Геометричне виведення 1524

660 Приклади 1524

661 Заміна змінних у потрійних інтегралах 1524

662 Приклади 1524

663 Притягання зі сторони тіла та потенціал на внутрішню точку . . . 1524

18.4 Елементи векторного аналізу 1525

664 Скаляри та вектори 1525

665 Скалярне та векторне поля 1525

666 Градієнт 1525

667 Потік вектора через поверхню 1525

668 Формула Остроградського. Дивергенція 1525

669 Циркуляція вектора. Формула Стокса. Вихор 1525

670 Спеціальні поля 1525

671 Обернена задача векторного аналізу 1525

672 Приклади застосування 1525

18.5 Багатократні інтеграли 1526

673 Задача про тяжіння та потенціал двох тіл 1526

674 Об'єм n-мірного тіла, n-кратний інтеграл 1526

675 Заміна змінних у n-кратному інтегралі 1526

676 Приклади 1526

19 РЯДИ Фур'є **1527**

19.1 Вступ 1527

677 Періодичні величини та гармонічний аналіз 1527
678 Визначення коефіцієнтів за методом Ойлера – Фур'є 1527
679 Ортогональні системи функцій 1527
680 Тригонометрична інтерполяція 1527
19.2 Розкладання функцій у ряд Фур'є 1528
681 Формулювання питання. Інтеграл Діріхлє 1528
682 Перша основна лема 1528
683 Принцип локалізації 1528
684 Ознаки Діні та Ліпшица збіжності рядів Фур'є 1528
685 Друга основна лема 1528
686 Ознака Діріхлє – Жордана 1528
687 Випадок неперіодичної функції 1528
688 Випадок довільного проміжку 1528
689 Розкладання лише по синусам або лише по косинусам 1528
690 Приклади 1528
691 Розкладання $\ln\Gamma(x)$ 1528
19.3 Додатки 1529
692 Ряди із спадаючими коефіцієнтами 1529
693 Підсумовування тригонометричних рядів за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної 1529
694 Приклади 1529
695 Комплексна форма рядів Фур'є 1529
696 Спряжений ряд 1529
697 Кратні ряди Фур'є 1529
19.4 Характер збіжності рядів Фур'є 1530
698 Деякі доповнення до основних лем 1530
699 Ознаки рівномірної збіжності рядів Фур'є 1530
700 Поведінка ряду Фур'є поблизу точки розриву; окремий випадок . 1530
701 Випадок довільної функції 1530
702 Особливості рядів Фур'є; попередні зауваження 1530
703 Побудова особливостей 1530
19.5 Оцінка залишку залежно від диференціальних властивостей функції . 1531
704 Зв'язок між коефіцієнтами Фур'є функції та її похідних 1531
705 Оцінка часткової суми у випадку обмеженої функції 1531

706 Оцінка залишку у випадку функції із обмеженою k-тою похідною 1531
707 Випадок функції, що має k-ту похідну з обмеженою зміною 1531
708 Вплив розривів функції та її похідних на порядок малості коефіцієнтів Фур'є 1531
709 Випадок функції, заданої на проміжку $[0, \pi]$ 1531
710 Метод виділення особливостей 1531
19.6 Інтеграл Фур'є 1532
711 Інтеграл Фур'є як граничний випадок ряду Фур'є 1532
712 Попередні зауваження 1532
713 Достатні ознаки 1532
714 Видозміна основного припущення 1532
715 Різноманітні види формули Фур'є 1532
716 Перетворення Фур'є 1532
717 Деякі властивості перетворень Фур'є 1532
718 Приклади та додатки 1532
719 Випадок функції двох змінних 1532
19.7 Приклади застосування 1533
720 Вираження ексцентричної аномалії планети через її середню аномалію 1533
721 Задача про коливання струни 1533
722 Задача про поширення тепла у скінченному стержні 1533
723 Випадок нескінченного стержня 1533
724 Видозміна граничних умов 1533
725 Поширення тепла в круглій пластині 1533
726 Практичний гармонічний аналіз. Схема для дванадцяти ординат . 1533
727 Приклади 1533
728 Схема для двадцяти чотирьох ординат 1533
729 Приклади 1533
730 Порівняння наближених та точних значень коефіцієнтів Фур'є . . 1533

20 РЯДИ Фур'є (продовження) 1534
20.1 Операції над рядами Фур'є. Повнота та замкненість 1535
731 Почленне інтегрування ряду Фур'є 1535
732 Почленне диференціювання ряду Фур'є 1535
733 Повнота тригонометричної системи 1535

734 Рівномірна апроксимація функцій. Теореми Ваярштрасса 1535
735 Апроксимація функцій у середньому. Екстремальні властивості відрізків ряду Фур'є 1535
736 Замкненість тригонометричної системи. Теорема Ляпунова 1535
737 Узагальнене рівняння замкненості 1535
738 Множення рядів Фур'є 1535
739 Деякі застосування рівняння замкненості 1535
20.2 Застосування методів узагальненого підсумовування до рядів Фур'є . 1537
740 Основна лема 1537
741 Підсумовування рядів Фур'є методом Пуассона – Абеля 1537
742 Розв'язок задачі Діріхлє для кола 1537
743 Підсумовування рядів Фур'є методом Чезаро – Фейєра 1537
744 Деякі застосування узагальненого підсумовування рядів Фур'є . . 1537
745 Почленне диференціювання рядів Фур'є 1537
20.3 Єдиність тригонометричного розкладу функції 1538
746 Допоміжні зауваження щодо узагальнених похідних 1538
747 Метод Рімана підсумовування тригонометричних рядів 1538
748 Лема про коефіцієнти збіжного ряду 1538
749 Єдиність тригонометричного розкладу 1538
750 Завершальні теореми щодо рядів Фур'є 1538
751 Узагальнення 1538

21 ДОДАТОК 1539
21.1 Загальна точка зору на границю 1539
752 Різні види границь, що зустрічаються в аналізі 1539
753 Впорядковані множини (у власному сенсі) 1539
754 Впорядковані множини (в узагальненому сенсі) 1539
755 Впорядкована змінна та її границя 1539
756 Приклади 1539
757 Зауваження щодо границі функції 1539
758 Поширення теорії границь 1539
759 Однаково впорядковані змінні 1539
760 Впорядкування за допомогою числового параметра 1539
761 Зведення до варіанти 1539
762 Найбільша та найменша границі впорядкованої змінної 1539

22 ВИДАТНІ ВЧЕНІ **1541**
22.1 Видатні вчені 1541
763 Видатні вчені 1541

23 ПІДТРИМКА **1563**
23.1 Потрібна 1563
764 Дуже 1563

Том
1

ВСТУП. ДІЙСНІ ЧИСЛА

0.1. Множина раціональних чисел

1. Попередні зауваження

Зі шкільного курсу читачеві добре знайомі раціональні числа та їхні властивості. Водночас навіть потреби елементарної математики приводять до необхідності розширення цієї числової множини. Справді, серед раціональних чисел часто не існує коренів навіть із цілих додатних (натуральних) чисел, наприклад $\sqrt{2}$, тобто *немає такого раціонального дробу* $\frac{p}{q}$ *(де* p *та* q *— натуральні числа), квадрат якого дорівнював би* 2.

Для доведення цього припустимо протилежне: нехай існує такий дріб $\frac{p}{q}$, що $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Варто зауважити, що p та q не мають спільних дільників. Бо якщо є, то скоротимо цей дріб. З $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ маємо $p^2 = 2q^2$. Тобто p — парне число: $p = 2r$ (r — ціле число). Підставляючи замість p його вираз, отримаємо: $4r^2 = 2q^2$, $q^2 = 2r^2$, звідки q — парне число, тобто p та q мають спільний дільник 2. А це суперечить нашому припущенню. Отримана суперечність доводить наше твердження.

Одночасно з цим, якби ми мали лише множину раціональних чисел, то не змогли б вимірювати **довжини** деяких відрізків. Розглянемо квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці довжини. За теоремою Пітагораса (гр. Πυϑαγόρας, Пітаго́рас), квадрат довжини його діагоналі дорівнює 2. А як ми вже бачили ця *діагональ не може бути виміряна раціональним числом* $\frac{p}{q}$.

У цьому вступі ми розширимо множину раціональних чисел, приєднавши числа нової природи — **ірраціональні**. Водночас ми покажемо, що в розширеній множині залишаться справедливими всі звичні властивості раціональних чисел, що стосуються арифметичних дій над ними і порівняння їх за допомогою знаків рівності та нерівності. Для того щоб зробити реально можливою перевірку згаданих властивостей для розширеної числової множини, дуже важливо виділити найменшу кількість **основних властивостей**, з яких усі інші випливали б уже як формально-логічні наслідки — **тоді перевірці потребують лише ці основні властивості**.

У зв'язку з цим ми наведемо нижче перелік основних властивостей множини раціональних чисел. Також ми на ряді прикладів покажемо, як їхні інші відомі властивості виводяться з основних абсолютно формально. Говорячи про "числа", ми тут завжди маємо на увазі раціональні числа: літери a, b і так далі позначають саме їх.

2. Упорядкування множини раціональних чисел

Домовимося від самого початку, що **рівні** числа ми будемо розглядати як **одне і те ж число в різних формах**. Іншими словами, для нас поняття "рівно" ($=$) означає "тотожно", тому ми не будемо перелічувати властивостей рівних чисел.

Упорядкування раціональних чисел досягається за допомогою поняття "більше" ($>$), з яким пов'язана **перша група** властивостей.

Властивість 2.1. *Для кожної пари чисел a і b справедливе одне, і тільки одне, із співвідношень*

$$a = b, \quad a > b, \quad b > a;$$

Властивість 2.2 (**Транзитивна** властивість знака $>$)**.**
З $a > b$ і $b > c$ випливає $a > c$;

Властивість 2.3 (Властивість **щільності**)**.** *Якщо $a > b$, то знайдеться також таке число c, що*

$$a > c > b;$$

(За цих умов говорять також, що число c лежить між числами a і b; очевидно таких чисел буде безліч.)

Поняття "менше" ($<$) вводиться вже як похідне. Власне, кажуть, що $a < b$ тоді й тільки тоді, коли $b > a$. Легко побачити, що з $a < b$ і $b < c$ випливає, що $a < c$ (транзитивне властивість знака $<$). Справді, нерівності $a < b$ і $b < c$ рівносильні, за умовою, нерівності $b > a$ і $c > b$; звідси випливає $c > a$ (вл. 2.2) або, що те саме, $a < c$.

Подальші властивості поняття "більше", пов'язані з арифметичними діями над раціональними числами, будуть вказані нижче.

3. Додавання та віднімання раціональних чисел

Друга група властивостей пов'язана з **додаванням**, тобто операцією знаходження суми двох чисел. Для кожної пари чисел a і b існує (єдине) число, що називається **сумою** a і b (його позначають $a + b$). Це поняття має наступні властивості.

Властивість 3.1 (**Переставна** властивість додавання)**.**

$$a + b = b + a;$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Властивість 3.2 (**Сполучна** властивість додавання)**.**

$$(a+b)+c=a+(b+c);$$

Властивість 3.3 (Особлива роль **нуля**)**.**

$$a+0=a;$$

Властивість 3.4 (**Симетричне** число)**.** *Для кожного числа a існує число $-a$ (симетричне йому), таке, що $a+(-a)=0$.*

На основі цих властивостей насамперед маємо властивості **віднімання** як дії, протилежної додаванню. Якщо **різницею** чисел a і b, як завжди, називати таке число c, для якого $c+b=a$, то постає питання існування такого числа і його єдиності. (Зважаючи на вл. 3.1, цю рівність, що означує різницю, можна написати і так: $b+c=a$.)

Поклавши $c=a+(-b)$, отримаємо (вл. 3.2, вл. 3.1, вл. 3.4, вл. 3.3):

$$c+b=[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]=a+[b+(-b)]=a+0=a$$

так що це число задовольняє означення різниці.

Нехай, з іншого боку, c' є різниця чисел a і b, так що $c'+b=a$. Додавши до обох частин цієї рівності по $(-b)$ і перетворивши ліву частину (вл. 3.2, вл. 3.4, вл. 3.3):

$$(c'+b)+(-b)=c'+[b+(-b)]=c'+0=c',$$

робимо висновок, що $c'=a+(-b)=c$.

Отже, **доведено існування та однозначність різниці чисел** a і b; її позначають $a-b$.

З однозначності різниці випливає ряд наслідків. Насамперед із вл. 3.3 випливає $0=a-a$, і ми робимо висновок, що, крім числа 0, не існує числа, яке мало б властивість, аналогічну до вл. 3.3. Далі, звідси ж випливає єдиність числа, симетричного даному: $-a=0-a$.

Оскільки з $a+(-a)=0$ випливає $(-a)+a=0$ (вл. 3.1), то виявляється, що $a=-(-a)$, тобто числа a і $-a$ **взаємно** симетричні. Доведемо ще таку властивість симетричних чисел:

$$-(a+b)=(-a)+(-b);$$

для цього досить довести, що

$$(a+b)+[(-a)+(-b)]=0,$$

а це випливає з вл. 3.1, вл. 3.2, вл. 3.4, вл. 3.3.

Нарешті, наведемо ще одну властивість, яка зв'язує знак $>$ зі знаком суми.

nebayduzhi.math@gmail.com

Властивість 3.5.
З $a > b$ випливає $a + c > b + c$.

Воно дає право до обох частин нерівності додавати порівну; за його допомогою доводиться рівносильність нерівностей

$$a > b \quad \text{і} \quad a - b > 0.$$

Далі, з $a > b$ випливає $-a < -b$. Справді, $a > b$ тягне за собою $a - b > 0$; але

$$a - b = a + (-b) = (-b) + a = (-b) + [-(-a)] = (-b) - (-a),$$

так що цю нерівність можна переписати так: $(-b) - (-a) > 0$, звідки $-b > -a$ або $-a < -b$.

Зокрема, з $a > 0$ випливає $-a < 0$, а з $a < 0$ випливає $-a > 0$. Якщо $a \neq 0$, то з двох взаємно симетричних чисел a та $-a$ одне (і лише одне) буде більше за 0; саме його і називають **абсолютною величиною** як числа a, так і числа $-a$ і позначають символом

$$|a| = |-a|.$$

Абсолютну величину числа нуль вважають рівною нулю: $|0| = 0$.

На вл. 3.5 ґрунтується можливість почленного додавання нерівностей: з $a > b$ і $c > d$ випливає $a + c > b + d$. Справді, з $a > b$ випливає $a + c > b + c$; а з $c > d$ випливає $c + b > d + b$ або (вл. 3.1) $b + c > b + d$, а тоді, з вл. 2.2, остаточно отримуємо $a + c > b + d$.

4. Множення та ділення раціональних чисел

Третя група властивостей пов'язана з множенням, тобто з операцією знаходження **добутку** двох чисел. Для кожної пари чисел a і b існує (єдине) число, яке називається **добутком** a і b (його позначають $a \cdot b$ або просто ab). Це поняття має наступні властивості.

Властивість 4.1 (**Переставна** властивість множення)**.**

$$ab = ba;$$

Властивість 4.2 (**Сполучна** властивість множення)**.**

$$(ab)c = a(bc);$$

Властивість 4.3 (Особлива роль **одиниці**)**.**

$$a \cdot 1 = a;$$

Властивість 4.4 (**Обернене** число)**.** *Для кожного числа* a*, відмінного від* 0*, існує число* $\frac{1}{a}$ *(обернене до нього), таке, що* $a \cdot \frac{1}{a} = 1$*.*

Ділення, як дія, обернена до множення, базується на множенні так само, як віднімання — на додаванні. Обернене число тут відіграватиме ту ж роль, яку там відігравало симетричне число.

Назвемо **часткою** чисел a і b (де дільник b завжди вважається відмінним від 0) таке число c, що

$$c \cdot b = a.$$

(Зважаючи на вл. 4.1, цю рівність, що означує частку, можна написати і так: $b \cdot c = a$.)

Це означення можна задовольнити, поклавши $c = a \cdot \frac{1}{b}$, бо (вл. 4.2, вл. 4.1, вл. 4.4, вл. 4.3):

$$c \cdot b = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot b = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = a \cdot 1 = a.$$

Навпаки, якщо число c' задовольняє означення частки чисел a і b, так що $c' \cdot b = a$, то, помноживши обидві частини цієї рівності на $\frac{1}{b}$ і перетворивши ліву частину (вл. 4.2, вл. 4.4, вл. 4.3):

$$(c' \cdot b) \cdot \frac{1}{b} = c' \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = c' \cdot 1 = c',$$

отримаємо, що $c' = a \cdot \frac{1}{b} = c$.

Отже, **доведені існування та однозначність частки чисел** a і b (**за умови**, що $b \neq 0$); позначають її $a : b$ або $\frac{a}{b}$.

З однозначності частки виводимо, що крім числа 1, немає числа, яке мало б властивість, аналогічну до вл. 4.3. Потім звідси, як і вище, випливає єдиність оберненого числа (як частки 1 і a); крім того, легко отримуємо, що числа a і $\frac{1}{a}$ **взаємно** обернені.

Наступна властивість пов'язує обидві основні арифметичні дії — множення та додавання.

Властивість 4.5 (**Розподільна** властивість множення відносно **додавання**)**.**

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Звідси легко вивести і **розподільну** властивість множення відносно **віднімання**:

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$$

За означенням різниці, це прямо випливає з того, що

$$(a - b) \cdot c + b \cdot c = [(a - b) + b] \cdot c = a \cdot c.$$

Застосуємо ще вл. 4.5 для доведення того, що

$$b \cdot 0 = 0 \cdot b = 0.$$

Справді, (вл. 3.3)

$$a + 0 = a, \quad (a + 0) \cdot b = a \cdot b + 0 \cdot b = a \cdot b,$$

звідки випливає $0 \cdot b = 0$, а також (вл. 4.1) $b \cdot 0 = 0$.

Навпаки, якщо $a \cdot b = 0$ і $b \neq 0$, то необхідно $a = 0$. Справді, $a = \frac{0}{b}$, але водночас і $0 = \frac{0}{b}$ (бо $b \cdot 0 = 0$), а частка має **одне і тільки одне** значення.

Нарешті, вкажемо властивість, що зв'язує знак $>$ зі знаком множення.

Властивість 4.6.
З $a > b$ та $c > 0$ випливає $a \cdot c > b \cdot c$.

На цьому ґрунтується почленне множення нерівностей з додатними членами. Звідси також випливає, що, коли $a > 0$ і $b > 0$, також і $a \cdot b > 0$.

Зауважимо, що $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$; це випливає з того, що

$$a \cdot b + (-a) \cdot b = [a + (-a)] \cdot b = 0 \cdot b = 0.$$

Тепер нескладно побачити, що якщо $a < 0$, $b > 0$, так що $a = -|a|$, $b = |b|$, то

$$a \cdot b = (-|a|) \cdot |b| = -(|a| \cdot |b|) < 0;$$

те саме буде для $a > 0$, $b < 0$. Якщо ж $a < 0$, $b < 0$, то

$$a \cdot b = (-|a|) \cdot (-|b|) = -[|a| \cdot (-|b|)] = -[-(|a| \cdot |b|)] = |a| \cdot |b| > 0.$$

Отже, ми повністю відновили відоме **правило знаків** у множенні, і це логічний наслідок вказаних властивостей раціональних чисел. Інакше кажучи, ***правило знаків*** *примусово нав'язується нам, якщо ми хочемо дотримання згаданих властивостей. Те саме можна сказати (як це з'ясовано вище) і щодо правила множення на* 0.

Маючи у своєму розпорядженні властивості додавання та множення, тепер можемо довести ту властивість **щільності** множини раціональних чисел, яку ми сформулювали вище серед основних властивостей (вл. 2.3). Власне, за допомогою їх можна показати, наприклад, що з $a > b$ випливає $a > \frac{a+b}{2} > b$.

5. Аксіома Архімедеса

Завершимо наш перелік основних властивостей раціональних чисел наступним простим і важливим твердженням, що не випливає з наведених властивостей.

Властивість 5.1 (Аксіома Архімедеса)**.** *Хоч би яке було число* $c > 0$*, існує натуральне число* n*, більше за* c*.*

Насправді Архімедес (гр. Αρχιμήδης ο Συρακούσιος, Архіме́дес) висловив геометричне твердження, відоме як “аксіома Архімедеса”:

якщо на прямій дані будь-які два відрізки A *і* B*, то можна* A *повторити як доданок стільки разів, щоб сума була більше за* B*:*

$$\underbrace{A + A + \dots + A}_{n \text{ разів}} = A \cdot n > B.$$

Якщо перефразувати це твердження для додатних чисел a і b, то воно зведеться до існування такого натурального числа n, що

$$\underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ разів}} = a \cdot n > b.$$

Ця нерівність, якщо використовувати вже вивчені властивості раціональних чисел, виявляється рівносильною такій: $n > \frac{b}{a}$; позначивши частку $\frac{b}{a}$ через c, ми й отримаємо формулювання, наведене вище.

0.2. Введення ірраціональних чисел. Упорядкування множини дійсних чисел

6. Означення ірраціонального числа

Множина раціональних чисел з усіма їхніми властивостями, вказаними в розд. 1 – розд. 5, вважається даною.

Ми викладемо **теорію ірраціональних чисел**, слідуючи за Дідікіндом (нім. Richard Dedekind, Рі́чард Діді́кінд). В основі цієї теорії лежить поняття **перерізу** множини раціональних чисел. Розглянемо розбиття множини всіх **раціональних** чисел на дві непорожні (тобто такі, що справді містять хоч по одному числу) множини A і A'. Ми називатимемо таке розбиття **перерізом**, якщо виконуються умови:

1) *кожне раціональне число потрапляє в одну і тільки в одну з множин A або A' (та обставина, що кожне раціональне число потрапляє* ***лише*** *в один із класів, випливає, втім, з наступної умови;*

2) *кожне число a множини A менше від кожного числа a' множини A'.*

Множина A називається **нижнім класом** перерізу, множина A' — **верхнім класом**. Переріз будемо позначати $A|A'$.

З означення перерізу випливає, що будь-яке раціональне число, менше від числа a нижнього класу, також належить до нижнього класу. Так само будь-яке раціональне число, більше від числа a' верхнього класу, і саме належить до верхнього класу.

Приклад 1. Означимо A як множину всіх раціональних чисел a, що задовольняють нерівність $a < 1$, а множина A' нехай складається з усіх чисел a', для яких $a' \geqslant 1$.

Легко перевірити, що так ми справді отримаємо переріз. Число 1 належить до класу A' і, очевидно, в ньому воно найменше число. З іншого боку, немає найбільшого числа в класі A, бо, хоч би яке число a з A ми не взяли, завжди можна вказати раціональне число a_1, що лежить між ним та одиницею, а отже більше від a і теж належить до класу A.

Приклад 2. До нижнього класу A віднесемо всі раціональні числа a, менші чи рівні 1: $a \leqslant 1$; до верхнього — раціональні числа a', більші від 1: $a' > 1$.

Це також буде переріз, причому тут у верхньому класі немає найменшого числа, а в нижньому є найбільше (а саме 1).

Приклад 3. Віднесемо до класу A всі додатні раціональні числа a, для яких $a^2 < 2$, число 0 і всі від'ємні раціональні числа, а до класу A' — всі додатні раціональні числа a', для яких $(a')^2 > 2$.

Як легко переконатися, ми знову отримали переріз. Тут ні в класі A немає найбільшого числа, ні в класі A' — найменшого. Доведемо, наприклад, перше з цих тверджень (друге доводиться аналогічно). Нехай a — будь-яке додатне число класу

nebayduzhi.math@gmail.com

A, тоді $a^2 < 2$. Покажемо, що можна підібрати таке ціле додатне n, що

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$$

так що і число $a + \frac{1}{n}$ належатиме до класу A.

Ця нерівність рівнозначна таким:

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2, \quad \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 - a^2,$$

Остання нерівність буде виконана, якщо n задовольнить нерівність $\frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2a+1}{n} < 2 - a^2$, для чого достатньо взяти

$$n > \frac{2a+1}{2-a^2}\,,$$

а це завжди можливо (за “аксіомою Архімедеса”, вл. 5.1). Отже, хоч би яке було додатне число a з класу A, у цьому ж класі A знайдеться число більше від a; оскільки для чисел $a \leqslant 0$ це твердження безпосередньо очевидне, то ніяке число класу A в ньому не є найбільше.

Легко зрозуміти, що *не може існувати переріз, для якого водночас у нижньому класі знайшлося б найбільше число* a_0, *а у верхньому — найменше* a'_0. Нехай насправді такий переріз існує. Візьмемо тоді, користуючись щільністю множини раціональних чисел (вл. 2.3), будь-яке раціональне число c, що міститься між a_0 і a'_0: $a_0 < c < a'_0$. Число c не може належати до класу A, бо інакше a_0 не було б найбільшим числом у цьому класі і з аналогічної причини c не може належати до класу A', а це суперечить властивості пункту 1) означення перерізу.

Отже, перерізи можуть бути лише трьох видів, що ілюструються якраз прикладами 1, 2, 3:

1) або в нижньому класі A немає найбільшого числа, а у верхньому класі A' є найменше число r;

2) або в нижньому класі A є найбільше число r, а у верхньому класі A' немає найменшого;

3) або, нарешті, ні в нижньому класі немає найбільшого числа, ні у верхньому класі — найменшого.

У перших двох випадках ми говоримо, що переріз **робиться** раціональним числом r (**межовим** між класами A і A') або що переріз **визначає** раціональне число r. У прикладах 1 і 2 таким числом r була 1. У третьому випадку межового числа не існує, переріз не визначає жодного раціонального числа. Введемо тепер **нові** об’єкти — **ірраціональні числа**, умовившись говорити, що *всякий переріз виду 3 визначає деяке* ***ірраціональне*** *число* α. Це число α замінює відсутнє межове число, ми ніби вставляємо його між усіма числами a класу A й усіма числами a' класу A'. У прикладі 3 це новостворене число, як легко здогадатися, і буде $\sqrt{2}$.

Не вводячи для ірраціональних чисел ніяких однотипних позначень, ми незмінно будемо зв'язувати ірраціональне число α з тим перерізом $A|A'$ множини раціональних чисел, яке його визначає. (Ідеться про **скінченні** позначення; зі свого роду **нескінченними** позначеннями ірраціональних чисел читач познайомиться в розд. 9. Найчастіше індивідуально задані ірраціональні числа позначають залежно від їх походження та ролі: $\sqrt{2}$, $\log_2 5$, $\sin 10^\circ$ тощо.)

Для одноманітності нам часто зручно буде те ж саме зробити і щодо раціонального числа r. Але для кожного числа r існує два перерізи, що визначають його: в обох випадках числа $a < r$ належать до нижнього класу, числа ж $a' > r$ — до верхнього, але саме число r можна довільно внести або в нижній клас (тоді r там буде найбільше), або у верхній (і r там буде найменше). Для визначеності ми домовимося раз і назавжди, говорячи про переріз, що визначає раціональне число r, вносити це число у **верхній** клас.

Числа раціональні та ірраціональні дістали загальну назву **дійсних** (**real**) чисел. Поняття дійсного числа — одне з основних понять математичного аналізу.

7. Упорядкування множини дійсних чисел

Два ***ірраціональні*** *числа α і β, що визначаються, відповідно, перерізами $A|A'$ і $B|B'$, вважаються* ***рівними*** *тоді й тільки тоді, коли ці перерізи тотожні*; втім, достатньо вимагати збігу нижніх класів A і B, бо верхні класи A' і B' тоді збіжаться самі собою. Це означення можна зберегти й у разі, коли числа α і β раціональні. Іншими словами, *якщо два* ***раціональні*** *числа α і β дорівнюють, то перерізи, які їх визначають, збігаються, і, навпаки, зі збігу перерізів випливає рівність чисел α і β.* І тут слід врахувати умову, встановлену вище щодо раціональних чисел (без цієї умови, наприклад, перерізи, розглянуті в пр. 6.1 та пр. 6.2, обидва визначали б одне і теж число 1, **не бувши тотожними**).

Перейдемо тепер до означення поняття "більше" щодо дійсних чисел. Для **раціональних** чисел це поняття вже означено. Для **раціонального** числа r та **ірраціонального** числа α поняття "більше" було, власне, означено в розд. 6: а саме, якщо α визначається перерізом $A|A'$, ми вважаємо, що α більше від усіх раціональних чисел, що входять до класу A, і водночас усі числа класу A' більші за α.

Нехай тепер маємо два **ірраціональні** числа α і β, причому α визначається перерізом $A|A'$, а β — перерізом $B|B'$. Ми будемо вважати те число **більшим**, у якого нижній клас **більший**. Точніше, *ми вважатимемо $\alpha > \beta$, якщо клас A цілком містить у собі клас B, не збігаючись з ним.* (Ця умова, очевидно, рівносильна тому, що клас B' цілком містить у собі клас A', не збігаючись з ним.) Легко перевірити, що *це означення може бути збережене і для випадків, коли одне з чисел α, β або навіть обидва —* ***раціональні***.

Покажемо, що для дійсних чисел виконуються вл. 2.1 і вл. 2.2.

nebayduzhi.math@gmail.com

Вл. 1. *Для кожної пари (дійсних) чисел* α *і* β *справедливе одне, і тільки одне, із співвідношень:*

$$\alpha = \beta, \quad \alpha > \beta, \quad \beta > \alpha.$$

Доведення. Якщо переріз $A|A'$, що визначає число α, збігається з перерізом $B|B'$, що визначає число β, то $\alpha = \beta$. Якщо ці перерізи не збігаються, то або A цілком містить у собі B, і тоді $\alpha > \beta$, або цього не відбувається. В останньому випадку існує елемент b_0 класу B, що потрапляє до класу A'. Тоді для будь-якого елемента a класу A маємо $a < b_0$. Тому клас B містить клас A, не збігаючись з ним, і ми маємо $\beta > \alpha$. ☐

Вл. 2. *З* $\alpha > \beta$ *і* $\beta > \gamma$ *випливає, що* $\alpha > \gamma$.

Доведення. Нехай числа α, β, γ (серед яких можуть бути і раціональні) визначаються перерізами $A|A'$, $B|B'$, $C|C'$. Якщо $\alpha > \beta$, то, за означенням поняття “більше”, клас A містить у собі клас B, не збігаючись з ним. Аналогічно, якщо $\beta > \gamma$, то клас B містить у собі клас C, не збігаючись з ним. Отже, клас A цілком містить у собі клас C, не збігаючись із ним, тобто $\alpha > \gamma$. ☐

Тепер можна означити поняття “менше”. Як і в розд. 2, ми говоримо, що $\alpha < \beta$, якщо $\beta > \alpha$. Так само знак $<$ має **транзитивну** властивість, як і знак $>$.

8. Допоміжні твердження

Розглянемо тепер властивість **щільності** множини всіх дійсних чисел (порівняйте з вл. 2.3); точніше, ми доведемо наступне твердження.

Лема 8.1. *Хоч би які були два дійсні числа* α *і* β $(\alpha > \beta)$, *завжди знайдеться* ***раціональне*** *число* r, *яке лежить між ними:* $\alpha > r > \beta$ *(а отже безліч таких раціональних чисел).*

Доведення. Оскільки $\alpha > \beta$, то нижній клас A перерізу, що визначає число α, цілком містить у собі нижній клас B для числа β, не збігаючись з B. Тому в A знайдеться таке раціональне число r, яке не міститься в B і, отже, належить до B'; для нього

$$\alpha > r \geqslant \beta$$

(рівність могла б виконуватися, лише якщо β раціональне). Але оскільки в A немає найбільшого числа, то, у разі потреби, збільшивши r, можна усунути рівність. ☐

Зауваження. Довівши, що між дійсними числами α і β (якщо $\alpha > \beta$) необхідно міститься **раціональне** (а не тільки дійсне) число, ми фактично довели сильнішу властивість множини дійсних чисел, ніж щільність. Надалі нам доведеться користуватися цією **посиленою щільністю**.

Звідси безпосередньо випливає таке твердження.

Лема 8.2. *Нехай дані два дійсні числа α і β. Якщо, хоч би яке взяти число $e > 0$, числа α і β можуть бути укладені між одними і тими ж раціональними межами s і s':*

$$s' \geqslant \alpha \geqslant s, \quad s' \geqslant \beta \geqslant s,$$

різниця яких менша від e:

$$s' - s < e,$$

то числа α і β необхідно рівні.

Доведення. Доведення вестимемо від протилежного. Нехай, наприклад, $\alpha > \beta$. За лем. 8.1, між α і β можна вставити два раціональні числа r і r':

$$\alpha > r' > r > \beta.$$

Тоді для будь-яких двох чисел s і s', між якими містяться α і β, очевидно виконуватимуться нерівності

$$s' > r' > r > s,$$

звідки

$$s' - s > r' - r > 0,$$

так що різниця $s' - s$, всупереч умові леми, не може бути зроблена, наприклад, меншою від числа $e = r' - r$. Ця суперечність доводить лему. ☐

9. Запис дійсного числа нескінченним десятковим дробом

Ми маємо на увазі такий запис, коли дробова частина (мантиса) додатна, тоді як ціла частина може бути як додатною, так і від'ємною або нулем.

Розглянемо спочатку деяке дійсне число α, що ані ціле число, ані будь-який скінченний десятковий дріб. Станемо шукати його десяткові наближення. Якщо воно визначається перерізом $A|A'$, то насамперед легко переконатися, що в класі A знайдеться ціле число M, а в класі A' — ціле число $N > M$. Додаючи до M по одиниці, необхідно прийдемо до таких двох **послідовних** цілих чисел C_0 і $C_0 + 1$, що

$$C_0 < \alpha < C_0 + 1.$$

При цьому число C_0 може виявитися додатним, від'ємним або нулем.

Далі, якщо розділити проміжок між C_0 і $C_0 + 1$ на десять рівних частин числами

$$C_0,1; \quad C_0,2; \quad \ldots; \quad C_0,9,$$

то α потрапить в один (і тільки в один) із часткових проміжків, і ми прийдемо до двох чисел, що різняться на $\frac{1}{10}$: C_0,c_1 і $C_0,c_1 + \frac{1}{10}$, для яких

$$C_0,c_1 < \alpha < C_0,c_1 + \frac{1}{10}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Продовжуючи цей процес далі, після знаходження цифр $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_{n-1}$, ми n-у цифру c_n, визначимо нерівностями

$$C_0, c_1c_2\dots c_n < \alpha < C_0, c_1c_2\dots c_n + \frac{1}{10^n}. \tag{9.1}$$

Отже, у процесі знаходження десяткових наближень числа α ми побудували ціле число C_0, і нескінченний ряд цифр $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n,\ \dots$. Складений з них *нескінченний десятковий дріб, тобто символ*

$$C_0, c_1c_2\dots c_n\dots \tag{9.2}$$

можна розглядати як запис дійсного числа α.

У винятковому разі, коли α саме ціле число або, взагалі, **скінченний** десятковий дріб, можна таким способом послідовно визначити число C_0 і цифри $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n,\ \dots$, виходячи із загальніших, ніж (9.1), співвідношень

$$C_0, c_1c_2\dots c_n \leqslant \alpha \leqslant C_0, c_1c_2\dots c_n + \frac{1}{10^n}. \tag{9.1a}$$

Річ у тому, що в якийсь момент число α збігається з одним із кінців проміжку, в який ми його укладаємо, з лівим або з правим — на наш вибір; починаючи з цього моменту, відповідно, ліворуч або праворуч (9.1) уже **постійно** буде рівність. Зважаючи на те, котра з цих можливостей здійснюється, наступні цифри виявляться всі нулями чи всі дев'ятками. Отже, цього разу число α має двоякий запис: один — із нулем у періоді, а інший — з дев'яткою в періоді, наприклад

$$3{,}826 = 3{,}826\,000\dots = 3{,}825\,999\dots,$$
$$-4{,}174 = -4{,}174\,000\dots = -4{,}173\,999\dots.$$

Нехай тепер, навпаки, задано довільний нескінченний десятковий дріб (9.2); покажемо, що завжди знайдеться дійсне число α, для якого саме цей дріб і буде записом. З цієї метою розглянемо відрізки дробу (9.2)

$$C_n = C_0, c_1c_2\dots c_n, \tag{9.3}$$

які є якби “наближеними значеннями за недостачею” для шуканого числа; також розглянемо його “наближені значення за надлишком”

$$C'_n = C_0, c_1c_2\dots c_n + \frac{1}{10^n}. \tag{9.4}$$

Нескладно побачити, що кожне C_n менше від кожного C'_m; (не тільки, коли $m = n$, але й коли $m \leqslant n$). Тепер ми зробимо переріз множини раціональних чисел так:

до верхнього класу A' віднесемо такі раціональні числа α', які більші від усіх C_n (наприклад усі числа C'_n), а до нижнього A — усі інші (наприклад, самі числа C_n). Легко перевірити, що це — переріз; він визначає дійсне число α, яке і буде шукане.

Справді, тому що α — межове число між двома класами, то, зокрема,

$$C_n \leqslant \alpha \leqslant C'_n,$$

тобто число α задовольняє всі нерівності виду (9.1a). Цим і доведено, що довільно взятий дріб (9.2) — запис знайденого числа.

Різниця між десятковими наближеннями (9.4) і (9.3) за надлишком і за недостачею дорівнює $\frac{1}{10^n}$, і зі зростанням n може бути зроблена меншою від будь-якого раціонального числа $e > 0$. Справді, натуральних чисел, що не перевищують числа $\frac{1}{e}$, існує лише скінченне число, тому нерівність $10^n \leqslant \frac{1}{e}$ або рівносильна їй: $\frac{1}{10^n} \geqslant e$ може виконуватися лише для **скінченного** числа значень n; для всіх же інших буде

$$\frac{1}{10^n} < e.$$

Це зауваження, зважаючи на лем. 8.2, дає змогу зробити висновок, що число β, відмінне від α, не може задовольняти ті ж нерівності (9.1) або (9.1a), що і α, а отже має запис у вигляді нескінченного десяткового дробу, відмінний від запису числа α.

Звідси, зокрема, випливає, що запис числа, не рівного жодному скінченному десятковому дробу, не має ні нуля, ні дев'ятки в періоді — бо кожен дріб із нулем чи з дев'яткою в періоді явно виражає скінченний десятковий дріб.

Відтепер читач може уявляти собі дійсні числа як нескінченні десяткові дроби. Зі шкільного курсу відомо, що **періодичний** нескінченний дріб — **раціональне** число і, навпаки, кожне **раціональне** число розкладається саме в **періодичний** дріб. Отже, *записом нововведених нами ірраціональних чисел будуть* ***неперіодичні*** *нескінченні дроби.* (Цей запис також може бути відправною точкою для побудови теорії ірраціональних чисел.)

Зауваження. Надалі нам не раз доведеться користуватися раціональними наближеннями a і a' до дійсного числа α:

$$a < \alpha < a',$$

різниця яких довільно мала. Для раціонального α існування чисел a і a' очевидне; для ірраціонального α за a і a' можна було б, наприклад використовувати десяткові наближення C_n і C'_n за досить великого n.

10. Неперервність множини дійсних чисел

Звернемося тепер до розгляду однієї дуже важливої властивості множини всіх дійсних чисел, що її істотно відрізняє від множини раціональних чисел. Розглядаючи перерізи множини раціональних чисел, ми бачили, що іноді для такого перерізу в цій множині не було **межового** числа, про яке можна було б сказати, що воно **робить** переріз. Саме ця **неповнота** множини раціональних чисел, наявність у ній цих **прогалин** і послужили основою для введення нових чисел — ірраціональних. Станемо тепер розглядати перерізи множині всіх **дійсних** чисел. Під таким перерізом ми розуміємо розбиття цієї множини на дві **непорожні** множини A і A', так що:

1) кожне дійсне число потрапляє в одну, і тільки одну, з множин A і A' (порівняйте з розд. 6);

2) кожне число α з множини A менше від кожного числа α' з множини A'.

Постає питання: чи завжди для такого перерізу $A|A'$ знайдеться серед дійсних чисел межове число, яке робить цей переріз, чи в цій множині існують прогалини (які могли б послужити основою для введення ще нових чисел)?

Виявляється, що насправді таких прогалин немає.

Теорема 10.1 (Основна теорема (Дідікінда))**.** *Для будь-якого перерізу $A|A'$ множини дійсних чисел існує дійсне число β, яке робить цей переріз. Це число β буде*

1) або найбільше в нижньому класі A,

2) або найменше у верхньому класі A'.

Цю властивість множини дійсних чисел називають її **повнотою**, а також **неперервністю** (або **суцільністю**).

Доведення. Позначимо через $\overline{A}$ множину всіх раціональних чисел, що належать до A, а через $\overline{A}'$ — множину всіх раціональних чисел, що належать до A'. Легко переконатися, що множини $\overline{A}$ та $\overline{A}'$ утворюють переріз множини всіх **раціональних** чисел.

Цей переріз $\overline{A}|\overline{A}'$ визначає деяке дійсне число β. Воно має потрапити до одного з класів A, A'; припустимо, що β потрапляє, наприклад, у нижній клас A, і доведемо, що тоді стається випадок 1), а саме β — **найбільше в класі** A. Справді, якби це було не так, то знайшлося б інше число α_0 з цього класу, більше від β. Вставимо (спираючись на лем. 8.1) між α_0 і β **раціональне** число r:

$$\alpha_0 > r > \beta;$$

r також належить до класу A, а отже належить до класу $\overline{A}$. Ми отримали суперечність: раціональне число r, що належить до нижнього класу перерізу, що визначає число β, більше від цього числа! Цим доведено наше твердження. Аналогічне міркування показує, що якщо β потрапляє у верхній клас A', то стається випадок 2). ☐

Зауваження. Одночасне існування в класі A найбільшого числа і в класі A' найменшого — неможливе; це доводиться так само, як і для перерізів множини раціональних чисел (за допомогою лем. 8.1).

11. Межі числових множин

Використаємо основну теорему (теор. 10.1), щоб отримати деякі поняття, що відіграють важливу роль у сучасному аналізі. (Вони знадобляться нам уже в розгляді арифметичних дій над дійсними числами.)

Уявимо собі довільну **нескінченну множину** дійсних чисел; вона може бути задана будь-яким чином. До таких множин належать, наприклад, множина натуральних чисел, множина всіх правильних дробів, множина всіх дійсних чисел **між** 0 і 1, множина коренів рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$ тощо.

Будь-яке число з цієї множини позначимо через x, так що x — **типове** позначення чисел множини; саму ж множину чисел x будемо позначати через $\mathcal{X} = \{x\}$.

Якщо для розглянутої множини $\{x\}$ існує таке число M, що всі $x \leqslant M$, то будемо говорити, що наша множина **обмежена зверху** (числом M); число M у цьому разі є **верхня межа** множини $\{x\}$. Наприклад множина правильних дробів обмежена зверху числом 1 чи будь-яким числом > 1; натуральний ряд зверху не обмежений.

Аналогічно до цього: якщо знайдеться таке число m, що всі $x \geqslant m$, то кажуть, що множина $\{x\}$ **обмежена знизу** (числом m), а число m називають **нижньою межею** множини $\{x\}$. Наприклад натуральний ряд обмежений знизу числом 1 або будь-яким числом < 1; множина правильних дробів обмежена знизу числом 0 або будь-яким числом < 0.

Обмежена зверху (знизу) множина може бути як обмежена, так і не обмежена знизу (зверху). Наприклад, множина правильних дробів обмежена і зверху, і знизу, а натуральний ряд обмежений знизу, але не обмежений зверху.

Якщо множина зверху (знизу) не обмежена, то за її верхню (нижню) межу приймають "невласне число" $+\infty$ $(-\infty)$. Щодо цих "невласних" чи "нескінченних" чисел ми вважаємо, що

$$-\infty < +\infty \quad \text{і} \quad -\infty < \alpha < +\infty,$$

хоч би яке було дійсне ("скінченне") число α.

Знаки $+\infty$ і $-\infty$ читаються так: "плюс нескінченність" та "мінус нескінченність".

Якщо множина обмежена зверху, тобто має скінченну верхню межу M, то водночас вона має і нескінченну множину верхніх меж (бо, наприклад, будь-яке число $> M$, очевидно, також буде верхньою межею). З усіх верхніх меж особливий інтерес становить **найменша**, яку ми називатимемо ***точною*** *верхньою межею*. Аналогічно, якщо множина обмежена знизу, то **найбільшу** з усіх нижніх меж називатимемо ***точною*** *нижньою межею*. Наприклад, для множини всіх правильних дробів **точними** межами будуть, відповідно, 0 і 1.

Постає питання: чи завжди для обмеженої зверху (знизу) множини існує **точна** верхня (нижня) межа? Справді, оскільки верхніх (нижніх) меж у цьому разі нескінченна множина, а серед нескінченної множини чисел не завжди знайдеться найменше або найбільше (як їх немає, наприклад, серед усіх правильних дробів), то саме існування такого найменшого (найбільшого) числа з усіх верхніх (нижніх) меж цієї множини вимагає доведення.

Теорема 11.1. *Якщо множина $\mathcal{X} = \{x\}$ обмежена зверху (знизу), то вона має і* ***точну*** *верхню (нижню) межу.*

Доведення. Проведемо міркування щодо верхньої межі. Розглянемо два випадки.

1. **Серед чисел x множини $\mathcal{X}$ знайдеться найбільше $\overline{x}$.** Тоді всі числа множини будуть задовольняти нерівність $x \leqslant \overline{x}$, тобто $\overline{x}$ буде верхньою межею для $\mathcal{X}$. З іншого боку, $\overline{x}$ належить до $\mathcal{X}$; отже, для будь-якої верхньої межі M виконується нерівність $\overline{x} \leqslant M$. Звідси робимо висновок, що $\overline{x}$ є **точна** верхня межа множини $\mathcal{X}$.

2. **Серед чисел x множини $\mathcal{X}$ немає найбільшого.** Зробимо переріз множини усіх дійсних чисел так. До верхнього класу A' віднесемо всі верхні межі α' множини $\mathcal{X}$, а до нижнього класу A — всі інші дійсні числа α. За цього розбиття всі числа x множини $\mathcal{X}$ потраплять до класу A, бо жодне з них, за припущенням, не буде найбільше. Отже, обидва класи A, A' не порожні. Це розбиття справді переріз, тому що всі дійсні числа розподілені по класах і кожне число з класу A' більше від будь-якого числа з класу A. За основною теоремою Дідікінда (теор. 10.1), повинне існувати дійсне число β, що робить переріз. Усі числа x (усі вони належать до класу A) не більш від цього “межового” числа β, тобто β — верхня межа для x, тому воно належить до класу A' і там найменше. Отже, β як найменша з усіх верхніх меж і є шукана **точна** верхня межа множини $\mathcal{X} = \{x\}$.

Так само доводиться і друга половина теореми (що стосується існування **точної** нижньої межі). ☐

Якщо M^* є **точна** верхня межа числової множини $\mathcal{X} = \{x\}$, то для **всіх** x буде

$$x \leqslant M^*.$$

Візьмемо тепер довільне число α, менше від M^*. Оскільки M^* — **найменша** з верхніх меж, то число α напевно не буде верхньою межею для множини X, тобто знайдеться таке число x' з $\mathcal{X}$, що

$$x' > \alpha.$$

Цими двома нерівностями цілком характеризується точна верхня межа множини $\mathcal{X}$.

Аналогічно, **точна** нижня межа m^* множини $\mathcal{X}$ характеризується тим, що для **всіх** x з $\mathcal{X}$

$$x \geqslant m^*$$

і, хоч би яке було число β, більше від m^*, знайдеться число x'' з $\mathcal{X}$ таке, що

$$x'' < \beta.$$

Для позначення точної верхньої межі M^* та точної нижньої межі m^* множини чисел $\mathcal{X}$ вживають символи

$$M^* = \sup \mathcal{X} = \sup\{x\}, \quad m^* = \inf \mathcal{X} = \inf\{x\}$$

(з латині: supremum — найвище, infimum — найнижче).

Зазначимо один очевидний висновок, який часто буде траплятися далі:

якщо всі числа x деякої множини задовольняють нерівність $x \leqslant M$, то і $\sup\{x\} \leqslant M$.

Справді, число M виявляється **однією** з верхніх меж множини, а тому **найменша** з усіх верхніх меж його не перевищує.

Аналогічно, *з нерівності $x \geqslant m$ випливає, що і* $\inf\{x\} \geqslant m$.

Домовимося, нарешті, якщо множина $\mathcal{X} = \{x\}$ не обмежена зверху, говорити, що її точна верхня межа є $+\infty$: $\sup\{x\} = +\infty$. Аналогічно, якщо множина $\mathcal{X} = \{x\}$ не обмежена знизу, то кажуть, що її точна нижня межа є $-\infty$: $\inf\{x\} = -\infty$.

nebayduzhi.math@gmail.com

0.3. Арифметичні дії над дійсними числами

12. Означення суми дійсних чисел

Розглянемо дії над дійсними числами. Грецькі літери α, β, γ далі означають саме дійсні числа, як раціональні, так і ірраціональні.

Нехай маємо два дійсні числа α і β. Станемо розглядати **раціональні** числа a, a' і b, b', що задовольняють нерівності:

$$a < \alpha < a' \quad \text{і} \quad b < \beta < b'. \tag{12.1}$$

Сумою $\alpha + \beta$ чисел α і β назвемо таке дійсне число γ, яке міститься між усіма сумами вигляду $a + b$, з одного боку, та всіма сумами вигляду $a' + b'$ — з іншого:

$$a + b < \gamma < a' + b'. \tag{12.2}$$

Переконаємося насамперед, що таке число γ існує для будь-якої пари дійсних чисел α, β.

Розглянемо множину всіляких сум $a+b$. Ця множина обмежена зверху, наприклад, будь-якою сумою вигляду $a' + b'$. Покладемо ж (розд. 110)

$$\gamma = \sup\{a + b\}.$$

Тоді $a + b \leqslant \gamma$ і водночас $\gamma \leqslant a' + b'$.

Оскільки, хоч би які були раціональні числа a, b, a', b', які задовольняють умови (12.1), завжди можна числа a, b **збільшити**, а числа a', b' **зменшити** зі збереженням цих умов, то в отриманих щойно нерівностях, поєднаних з рівностями, **рівності насправді в жодному разі бути не може**. Отже, число γ задовольняє означення суми.

Виникає, однак, питання, чи **однозначно** сума $\gamma = \alpha + \beta$ визначається нерівностями (12.2). Для того щоб переконатися в єдиності суми, підберемо, за зауваженням у розд. 9, раціональні числа a, a', b, b' так, щоб було

$$a' - a < e \quad \text{і} \quad b' - b < e,$$

де e — довільно мале раціональне додатне число. Звідси

$$(a' + b') - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) < 2e,$$

тобто і ця різниця може бути зроблена як завгодно малою (число $2e$ стає меншим від будь-якого числа $e' > 0$, якщо взяти $e < \frac{e'}{2}$). А тоді, за лем. 8.2, існує **тільки одне** число, що міститься між сумами $a + b$ і $a' + b'$.

Нарешті, зауважимо, що якщо числа α і β обидва раціональні, то їх звичайна сума $\gamma = \alpha + \beta$ очевидно задовольняє нерівності (12.2). Отже, наведене вище загальне означення суми двох **дійсних** чисел не суперечить старому означенню суми двох **раціональних** чисел.

nebayduzhi.math@gmail.com

13. Властивості додавання

Легко переконатися, що для дійсних чисел зберігаються властивості:
вл. 3.1 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;
вл. 3.2 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;
вл. 3.3 $\alpha+0=\alpha$.
Доведемо, наприклад, останнє.

Доведення. Якщо раціональні числа a, a', b, b' такі, що

$$a<\alpha<a', \quad b<0<b',$$

то, очевидно,

$$a+b<a<\alpha<a'<a'+b'.$$

Отже, α — дійсне число, затиснуте між числами вигляду $a+b$ та $a'+b'$, між якими затиснута, за означенням, і сума $\alpha+0$. Але таке число може бути лише одне; тому $\alpha+0=\alpha$, що й потрібно було довести. □

Звернемося до вл. 3.4 і доведемо, що *для кожного дійсного числа* α *існує (симетричне йому) число* $-\alpha$, *що задовольняє умову* $\alpha+(-\alpha)=0$.

Доведення. При цьому досить обмежитися випадком **ірраціонального** числа α.

Припускаючи, що число α визначається перерізом $A|A'$, ми визначимо число $-\alpha$ за допомогою перерізу $\overline{A}|\overline{A}'$. До нижнього класу $\overline{A}$ ми віднесемо всі раціональні числа $-\alpha'$, де α' — будь-яке число верхнього класу A'; а до верхнього класу $\overline{A}'$ віднесемо всі числа $-a$, де a — будь-яке число нижнього класу A. Нескладно побачити, що побудоване розбиття є переріз і визначає дійсне (в цьому разі — ірраціональне) число: це число позначимо $-\alpha$.

Доведемо тепер, що воно задовольняє зазначену вище умову. Користуючись самим означенням числа $-\alpha$, бачимо, що сума $\alpha+(-\alpha)$ — єдине дійсне число, затиснуте між числами вигляду $a-a'$ і $a'-a$, де a і a' раціональні і $a<\alpha<a'$. Але очевидно

$$a-a'<0<a'-a,$$

тож і число 0 затиснуте між щойно згаданими числами. Зважаючи на єдиність числа, що має цю властивість, отримуємо

$$\alpha+(-\alpha)=0,$$

що і потрібно було довести. □

Нарешті, доведемо властивість:
Вл. 3.5 *з* $\alpha>\beta$ *випливає* $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$.

Доведення. Якщо $\alpha > \beta$, то між ними можна вставити два раціональні числа r_1 і r_2: $\alpha > r_1 > r_2 > \beta$.

За зауваженням у розд. 9, існують такі два раціональні числа c і c', що

$$c < \gamma < c' \quad \text{і} \quad c' - c < r_1 - r_2.$$

Звідси

$$r_1 + c > r_2 + c',$$

а, за означенням суми,

$$\alpha + \gamma > r_1 + c, \quad r_2 + c' > \beta + \gamma.$$

Зіставляючи всі ці нерівності, ми і приходимо до необхідного висновку. □

Отже, щодо додавання множина дійсних чисел має всі основні вл. 3.1 – вл. 3.5, які в розд. 3 були спочатку сформульовані для раціональних чисел. Тому на дійсні числа автоматично переносяться і всі формальні логічні наслідки цих властивостей. Зокрема, для дійсних чисел може бути **буквально** повторене все, сказане в розд. 3 безпосередньо після викладу групи властивостей вл. 3.1 – вл. 3.5, тобто можуть бути доведені **існування та однозначність різниці** $\alpha - \beta$ **чисел** α **та** β, означено поняття **абсолютного значення числа** α (для якого ми зберігаємо позначення $|\alpha|$) і так далі.

14. Означення добутку дійсних чисел

Перейдемо до **множення** дійсних чисел, обмежуючись спочатку **додатними** числами. Нехай дано два такі числа α і β. Ми тут також будемо розглядати всілякі раціональні числа, що задовольняють нерівності (12.1), але й ці числа припустимо **додатними**.

Добутком *$\alpha\beta$ двох* ***додатних*** *дійсних чисел α і β назвемо таке дійсне число γ, яке міститься між усіма добутками вигляду ab, з одного боку, і усіма добутками вигляду $a'b'$ — з іншого:*

$$ab < \gamma < a'b'. \tag{14.1}$$

Доведемо існування такого числа γ.

Доведення. Для доведення існування такого числа γ візьмемо множину всіляких добутків ab; вона обмежена зверху будь-яким із добутків вигляду $a'b'$. Якщо покласти

$$\gamma = \sup\{ab\},$$

то, звісно, $ab \leqslant \gamma$, але водночас і $\gamma \leqslant a'b'$.

Можливість **збільшити** числа a, b і **зменшити** числа a', b' (як і у випадку суми) дає змогу відкинути тут знак рівності, так що число γ задовольняє означення добутку. ☐

Доведемо **єдиність** добутку.

Доведення. Єдиність добутку випливає з таких міркувань. Підберемо, за зауваженням у розд. 9, раціональні числа a, a', b, b' так, щоб було

$$a' - a < e \quad \text{i} \quad b' - b < e,$$

де e — довільно мале раціональне додатне число. При цьому можна вважати, що числа a і b додатні, а числа a' і b' не перевищують, відповідно, деяких наперед зафіксованих чисел a'_0 та b'_0. Тоді різниця

$$a'b' - ab = a'b' - ab - a'b + a'b = a'(b' - b) + b(a' - a) < a'e + be < (a'_0 + b'_0) \cdot e,$$

тобто також може бути зроблена як завгодно малою ($(a'_0 + b'_0) \cdot e$ стає меншим від будь-якого числа $e' > 0$, якщо взяти $e < \dfrac{e'}{a'_0 + b'_0}$), а цього, за лем. 8.2, достатньо для твердження, що нерівності (14.1) може задовольняти **лише одне** число γ. ☐

Якщо додатні числа α і β обидва **раціональні**, то їх **звичайний** добуток $\gamma = \alpha\beta$ задовольняє очевидно нерівності (14.1), тобто виходить таким же як і за загальним означенням добутку двох дійсних чисел — суперечності немає.

Нарешті, щоб визначити добуток довільної пари дійсних чисел (не обов'язково додатних), укладемо такі угоди.

Насамперед домовимося, що

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0,$$

хоч би яке було α.

Якщо ж обидва множника відмінні від 0, то покладемо в основу звичайне "правило знаків":

$$\begin{aligned} &\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|, \quad \textit{якщо } \alpha \textit{ і } \beta \textit{ одного знака,} \\ &\alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|), \quad \textit{якщо } \alpha \textit{ і } \beta \textit{ різних знаків} \end{aligned}$$

(ми вже знаємо, що означає добуток **додатних** чисел $|\alpha|$ і $|\beta|$).

Ці угоди, як ми бачили в розд. 4, у певному сенсі обов'язкові для нас, якщо ми хочемо, щоб дії над дійсними числами мали всі основні властивості дій над раціональними числами.

nebayduzhi.math@gmail.com

15. Властивості множення

Як і щодо раціональних чисел, для будь-яких дійсних чисел зберігаються властивості:

Вл. 4.1 $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;

Вл. 4.2 $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$;

Вл. 4.3 $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

Наприклад доведемо друге з них.

Доведення. Розпочнемо з випадку, коли всі три числа α, β, γ додатні. Нехай a, a', b, b', c, c' — довільні раціональні числа, що задовольняють нерівності

$$0 < a < \alpha < a', \quad 0 < b < \beta < b', \quad 0 < c < \gamma < c'.$$

Тоді, за самим означенням добутку двох дійсних чисел, маємо

$$ab < \alpha\beta < a'b' \quad \text{і} \quad bc < \beta\gamma < b'c'.$$

Користуючись ще раз тим самим означенням, отримаємо

$$(ab)c < (\alpha\beta)\gamma < (a'b')c' \quad \text{і} \quad a(bc) < \alpha(\beta\gamma) < a'(b'c').$$

Оскільки для раціональних чисел вл. 4.2 вже доведена, то дійсні числа $(\alpha\beta)\gamma$ і $\alpha(\beta\gamma)$ виявляються затиснутими між одними і тими ж межами:

$$(ab)c = a(bc) \quad \text{і} \quad (a'b')c' = a'(b'c').$$

Але легко показати, що через зближення множників a і a', b і b', c і c' між собою і різниця добутків $a'b'c' - abc$ може бути зроблена як завгодно малою (при цьому можна використовувати подібне твердження в розд. 14 щодо добутків двох множників). Звідси, за лем. 8.2, і вийде висновок про рівність чисел $(\alpha\beta)\gamma$ та $\alpha(\beta\gamma)$.

Перехід до випадку чисел довільних знаків робиться безпосередньо, якщо лише врахувати "правило знаків". Якщо ж хоч одне з чисел α, β, γ дорівнює 0, то обидва добутки будуть 0. ☐

Розглянемо властивість про обернене число.

Вл. 4.4 *для кожного дійсного числа α, відмінного від нуля, існує (обернене до нього) число $\frac{1}{\alpha}$, що задовольняє умову:*

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1.$$

Доведення. Достатньо обмежитися випадком **ірраціонального** числа α. Нехай спочатку $\alpha > 0$.

Якщо α визначається перерізом $A|A'$, то ми побудуємо переріз $\overline{A}|\overline{A}'$ для числа $\frac{1}{\alpha}$ так. До нижнього класу $\overline{A}$ ми віднесемо всі від'ємні раціональні числа та нуль, а також усі числа вигляду $\frac{1}{a'}$, де a' — будь-яке число верхнього класу A'; до верхнього класу $\overline{A}'$ віднесемо всі числа вигляду $\frac{1}{a}$, де a — будь-яке **додатне** число нижнього класу A. Легко переконатися, що ми так справді отримуємо переріз, який визначить додатне дійсне (у цьому разі ірраціональне) число; це число позначимо $\frac{1}{\alpha}$.

Покажемо, що воно задовольняє необхідну умову. Якщо врахувати побудову оберненого числа, то, за означенням добутку, число $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}$ — **єдине** дійсне число, затиснуте між числами вигляду $\frac{a}{a'}$ і $\frac{a'}{a}$, де a і a' — додатні раціональні числа, що задовольняють нерівності $a < \alpha < a'$. Але й число 1 затиснуте між згаданими числами:

$$\frac{a}{a'} < 1 < \frac{a'}{a},$$

отже, воно і є шуканий добуток.

Якщо $\alpha < 0$, то вважаємо

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|};$$

тоді за "правилом знаків"

$$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha} = |\alpha|\cdot\frac{1}{|\alpha|} = 1.$$

□

Після того як ми переконалися, що і стосовно множення множина дійсних чисел має всі основні вл. 4.1 – вл. 4.4, ясно, що для цієї множини буде справедливе все сказане в розд. 4 про **існування і єдиність частки** $\frac{\alpha}{\beta}$ чисел α і β (**за умови**, що $\beta \neq 0$) і так далі.

Вл. 4.5 Розподільна властивість $(\alpha+\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$
також виконується для будь-яких дійсних чисел.

Доведення. Це легко доводиться для випадку додатних чисел (як і вл. 4.2). Усі інші випадки зводяться до цього зміною знаків обох частин рівності або перенесенням членів з однієї частини до іншої. Винятком, втім, є випадок, коли одне із чисел $\alpha, \beta, \gamma, \alpha+\beta$ дорівнює нулю; але для цього випадку рівність безпосередньо очевидна.

□

Вл. 4.6 *з* $\alpha > \beta$ *і* $\gamma > 0$ *випливає* $\alpha\cdot\gamma > \beta\cdot\gamma$
перевіряється легко.

Доведення. Нерівність $\alpha > \beta$ рівносильна $\alpha - \beta > 0$; тоді за "правилом знаків" і $(\alpha - \beta) \cdot \gamma > 0$. Але множення має розподільну властивість і щодо різниці, тому $\alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma > 0$, а звідси $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$. ☐

16. Висновок

Залишається згадати ще про "аксіому Архімедеса".

Вл. 5.1: *хоч би яке було дійсне число γ, існує* ***натуральне*** *число n, більше за γ.*

Перевірка її легка: адже у верхньому класі перерізу $C|C'$, що визначає число γ, знайдеться більше від нього раціональне число c', а для раціональних чисел це справедливо.

Тепер можна, нарешті, вважати доведеним, що *в множині всіх дійсних чисел* ***повністю зберігаються правила елементарної алгебри****, які стосуються чотирьох арифметичних дій та використання рівностей і нерівностей.*

17. Абсолютні величини

В інтересах подальшого додамо ще кілька зауважень про **абсолютні величини**.

Твердження 17.1. *Насамперед з'ясуємо, що нерівність $|\alpha| < \beta$ (де, звісно, $\beta > 0$) рівносильна подвійній нерівності $-\beta < \alpha < \beta$.*

Доведення. Справді, з $|\alpha| < \beta$ випливає, що водночас $\alpha < \beta$ і $-\alpha < \beta$, тобто $\alpha > -\beta$. І навпаки, якщо дано, що $\alpha < \beta$ і $\alpha > -\beta$, то маємо водночас: $\alpha < \beta$ і $-\alpha < \beta$; але одне з цих чисел α, $-\alpha$ і є $|\alpha|$, так що напевно $|\alpha| < \beta$. ☐

Твердження 17.2. *Аналогічно, виявляються рівносильними нерівності:*

$$|\alpha| \leqslant \beta \quad \text{і} \quad -\beta \leqslant \alpha \leqslant \beta.$$

Твердження 17.3. *Доведемо далі корисну нерівність:*

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|. \tag{17.1}$$

Доведення. Додаючи почленно очевидні нерівності

$$-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha| \quad \text{і} \quad -|\beta| \leqslant \beta \leqslant |\beta|,$$

отримаємо

$$-(|\alpha| + |\beta|) \leqslant \alpha + \beta \leqslant |\alpha| + |\beta|,$$

звідки, через зроблене вище зауваження, і випливає необхідна нерівність. ☐

За допомогою математичної індукції воно поширюється на будь-яке число доданків:

$$|\alpha + \beta + \cdots + \gamma| \leqslant |\alpha| + |\beta| + \cdots + |\gamma|. \tag{17.2}$$

Якщо замінити в доведеній нерівності β на $-\beta$, то отримаємо

$$|\alpha - \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|. \tag{17.3}$$

Оскільки $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta$, то $|\alpha| \leqslant |\alpha + \beta| + |\beta|$, або

$$|\alpha + \beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|. \tag{17.4}$$

Аналогічно,

$$|\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha - \beta|. \tag{17.5}$$

Оскільки водночас і

$$|\beta| - |\alpha| \leqslant |\alpha - \beta|,$$

то очевидно

$$||\alpha| - |\beta|| \leqslant |\alpha - \beta|. \tag{17.6}$$

Усі ці нерівності будуть корисні в **теорії границь**.

0.4. Подальші властивості і застосування дійсних чисел

18. Існування кореня. Степінь із раціональним показником

Означення множення (і ділення) дійсних чисел безпосередньо приводить, як і зазвичай, до означення степеня з цілим додатним (і від'ємним) показником. Переходячи до степеня з взагалі раціональним показником, зупинимося насамперед на питанні про **існування кореня**.

Як ми пам'ятаємо, відсутність у множині раціональних чисел простих коренів послужила одним з приводів для розширення цієї множини; перевіримо ж, якою мірою проведене розширення заповнило старі прогалини (не створивши водночас нових).

Нехай α — будь-яке дійсне число, n — натуральне число.

Як відомо, коренем n-го степеня з числа α називають таке дійсне число ξ, що

$$\xi^n = \alpha.$$

Ми обмежимося випадком, коли α додатне, і будемо шукати також додатне ξ, яке задовольняє це співвідношення, тобто так зване **арифметичне значення** кореня. Ми доведемо, що таке число ξ завжди існує, і лише одне.

Доведення. Твердження щодо єдиності числа ξ відразу випливає з того, що різним додатним числам відповідають і різні їх степені: якщо $0 < \xi < \xi'$, то $\xi^n < \xi'^n$.

Якщо існує таке **раціональне** число r, n-й степінь якого дорівнює α, то воно і буде шуканим числом ξ. Тому надалі достатньо обмежитися припущенням, що такого **раціонального** числа немає.

Побудуємо тепер переріз $X|X'$ у множині всіх раціональних чисел так. До класу X віднесемо всі від'ємні раціональні числа та нуль, а також ті з додатних раціональних чисел x, для яких $x^n < \alpha$. До класу X' віднесемо додатні раціональні числа x', для яких $x'^n > \alpha$.

Легко побачити, що ці класи не порожні і що X містить додатні числа. Якщо взяти, наприклад, натуральне число m так, щоб було $\frac{1}{m} < \alpha < m$, то й тим паче $\frac{1}{m^n} < \alpha < m^n$, так що число $\frac{1}{m}$ входить до X, а число m — до X'.

Інші вимоги до перерізу перевіряються безпосередньо.

Нехай тепер ξ буде число, що визначається перерізом $X|X'$; доведемо, що $\xi^n = \alpha$, тобто $\xi = \sqrt[n]{\alpha}$. Розглядаючи ξ^n як добуток n множників, рівних ξ, на підставі означення добутку додатних дійсних чисел (розд. 14) робимо висновок, що

$$x^n < \xi^n < x'^n,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

якщо x і x' — додатні раціональні числа, для яких

$$0 < x < \xi < x'.$$

Оскільки, очевидно, x належить до класу X, а x' — класу X', то, за означенням цих класів, водночас і

$$x^n < \alpha < x'^n.$$

Але різниця $x - x'$ може бути зроблена меншою за будь-яке число $e > 0$ (зауваження в розд. 9), причому ніщо не заважає вважати x' меншим за деяке заздалегідь фіксоване число x'_0. У такому разі різниця

$$x'^n - x^n = (x' - x)(x'^{n-1} + x \cdot x'^{n-2} + \dots + x^{n-1}) < e \cdot n \cdot x_0'^{n-1},$$

тобто також може бути зроблена як завгодно малою (зауважимо, що число $e \cdot n \cdot x_0'^{n-1}$ стає менше за будь-яке число $e' > 0$, якщо взяти $e < \dfrac{e'}{nx_0'^{n-1}}\Big)$. Звідси, за лем. 8.2, і випливає рівність чисел ξ^n та α. $\square$

Після того, як доведено існування кореня, звичайним способом вводиться поняття степеня з будь-яким **раціональним** показником r і перевіряється, що для таких степенів справедливі звичайні правила, що виводяться в курсі елементарної алгебри:

$$\alpha^r \cdot \alpha^{r'} = \alpha^{r+r'}, \quad \alpha^r : \alpha^{r'} = \alpha^{r-r'}, \quad (\alpha^r)^{r'} = \alpha^{r \cdot r'}, \quad (\alpha\beta)^r = \alpha^r \cdot \beta^r, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r = \frac{\alpha^r}{\beta^r}$$

і інші.

Підкреслимо ще, що для $\alpha > 1$ степінь зростає зі **зростанням** раціонального показника r.

19. Степінь з будь-яким дійсним показником

Звернемося до означення **степеня будь-якого дійсного (додатного) числа** α **з будь-яким дійсним показником** β.

Розглянемо степені числа α

$$\alpha^b \quad \text{і} \quad \alpha^{b'}$$

з раціональними показниками b і b', що задовольняють нерівності

$$b < \beta < b'.$$

Степенем числа $\alpha > 1$ з показником β називають (і позначають символом α^β) дійсне число γ, що міститься між степенями α^b і $\alpha^{b'}$:

$$\alpha^b < \gamma < \alpha^{b'}. \tag{19.1}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

(Випадком $\alpha > 1$ можна обмежитися; при $\alpha < 1$ візьмемо, наприклад, $\alpha^\beta = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\beta}$.)

Легко переконатися, що таке число завжди існує.

Доведення. Справді, множина степенів $\{\alpha^b\}$ обмежена зверху, наприклад, будь-яким степенем $\alpha^{b'}$. Візьмемо тоді (розд. 11)

$$\gamma = \sup_{b<\beta}\{\alpha^b\}.$$

Для цього числа матимемо

$$\alpha^b \leqslant \gamma \leqslant \alpha^{b'}.$$

Насправді ж знак рівності тут не потрібен, зважаючи на можливість **збільшити** b і **зменшити** b', тож побудоване число γ задовольняє умови (19.1). □

Доведемо тепер єдиність числа, що визначається цими умовами.

Для цього насамперед зауважимо, що лем. 8.2 справедлива і в тому разі, якщо опустити вимогу до чисел s, s' і e бути обов'язково **раціональними**; доведення залишається тим же.

Далі, доведемо одну дуже просту, але часто корисну нерівність, яку іноді пов'язують з ім'ям Я. Бернуллі (швейц. Jakob Bernoulli, Я́коб Берну́ллі).

Теорема 19.1. *Якщо n — натуральне число, більше від одиниці, і $\gamma > 1$, то*

$$\gamma^n > 1 + n(\gamma - 1). \tag{19.2}$$

Доведення. Справді, поклавши $\gamma = 1 + \lambda$, де $\lambda > 0$, за формулою бінома Ньютена (англ. Isaac Newton, А́йзек Нью́тен) матимемо

$$(1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \ldots;$$

оскільки ненаписані члени додатні, то

$$\gamma^n = (1+\lambda)^n > 1 + n\lambda = 1 + n(\gamma - 1),$$

що і потрібно було довести. □

Поклавши тут $\gamma = \alpha^{\frac{1}{n}}$ $(\alpha > 1)$, отримаємо нерівність

$$\alpha^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\alpha - 1}{n}, \tag{19.3}$$

якою ми зараз і скористаємося.

Теорема 19.2. *Доведемо тепер єдиність числа γ, що визначається умовами* (19.1).

Доведення. Ми знаємо, що числа b і b' можна вибрати так, щоб різниця $b'-b$ була менша від $\frac{1}{n}$ для будь-якого наперед заданого натурального n; тоді, за нерівністю (19.3),

$$\alpha^{b'}-\alpha^{b}=\alpha^{b}\left(\alpha^{b'-b}-1\right)<\alpha^{b}\left(\alpha^{\frac{1}{n}}-1\right)<\alpha^{b}\cdot\frac{\alpha-1}{n}\,.$$

Оскільки b менше від будь-якого (але фіксованого) b'_0, то достатньо взяти

$$n>\frac{\alpha^{b'_0}(\alpha-1)}{\varepsilon}\,,$$

де ε — довільно мале додатне число, щоб було

$$\alpha^{b'}-\alpha^{b}<\varepsilon.$$

У такому разі, за узагальненою вище лем. 8.2, між межами α^{b} і $\alpha^{b'}$ не може бути двох **різних** чисел γ. □

Якщо β раціональне, то наведене вище означення повертає нас до звичного розуміння символу α^{β}.

Легко перевірити, що для степеня з будь-яким дійсним показником виконуються всі звичайні для степеня правила. Зупинимося, наприклад, на доведенні правила додавання показників при множенні:

$$\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}=\alpha^{\beta+\gamma}.$$

Доведення. Нехай b, b', c, c' — будь-які раціональні числа, для яких

$$b<\beta<b',\quad c<\gamma<c';$$

за означенням суми (розд. 12)

$$b+c<\beta+\gamma<b'+c';$$

а, за означенням степеня,

$$\alpha^{b}<\alpha^{\beta}<\alpha^{b'},\quad \alpha^{c}<\alpha^{\gamma}<\alpha^{c'}\quad \text{і}\quad \alpha^{b+c}<\alpha^{\beta+\gamma}<\alpha^{b'+c'}.$$

Перемноживши почленно перші дві подвійні нерівності (з урахуванням того, що для раціональних показників доводжуване правило вже відоме), отримаємо

$$\alpha^{b+c}<\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}<\alpha^{b'+c'}.$$

Отже, два числа $\alpha^{\beta+\gamma}$ та $\alpha^{\beta}\cdot\alpha^{\gamma}$ виявляються затиснутими між межами α^{b+c}, $\alpha^{b'+c'}$, які, як легко показати, можуть бути зроблені як завгодно близькими. Звідси (за узагальненою лем. 8.2) і випливає рівність цих чисел. □

Перевіримо ще, що, коли $\alpha > 1$, степінь α^{β} **зростає** зі зростанням дійсного показника β.

Доведення. Якщо $\beta < \overline{\beta}$, то, вставивши раціональне число r між ними: $\beta < r < \overline{\beta}$, за означенням степеня з дійсним показником, будемо мати

$$\alpha^{\beta} < \alpha^{r} \quad \text{і} \quad \alpha^{r} < \alpha^{\overline{\beta}}, \quad \text{звідки} \quad \alpha^{\beta} < \alpha^{\overline{\beta}}.$$

□

20. Логарифми

Користуючись означенням степеня з будь-яким дійсним показником, тепер легко довести **існування логарифма** для будь-якого додатного дійсного числа γ за додатної основи α, відмінної від 1 (ми будемо, наприклад, вважати $\alpha > 1$).

Доведення. Якщо існує таке **раціональне** число r, що

$$\alpha^{r} = \gamma,$$

то r і є шуканий логарифм. Припустимо ж, що такого раціонального числа r немає.

Тоді можна зробити переріз $B|B'$ множини всіх раціональних чисел за таким правилом. До класу B віднесемо раціональні числа b, для яких $\alpha^{b} < \gamma$, а до класу B' — раціональні числа b', для яких $\alpha^{b'} > \gamma$.

Покажемо, що класи B та B' — не порожні. Зважаючи на нерівність (19.2),

$$\alpha^{n} > 1 + n(\alpha - 1) > n(\alpha - 1),$$

і достатньо взяти

$$n > \frac{\gamma}{\alpha - 1}\,,$$

щоб було $\alpha^{n} > \gamma$; таке натуральне число n належить до класу B'. Водночас маємо:

$$\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^{n}} < \frac{1}{n(\alpha - 1)}\,,$$

і достатньо взяти

$$n > \frac{1}{\gamma(\alpha - 1)}\,,$$

щоб було $\alpha^{-n} < \gamma$ і число $-n$ потрапило до класу B.

Інші вимоги до перерізу тут також виконані.

Побудований переріз $B|B'$ визначає дійсне число β, що “межове” між числами обох класів. За означенням степеня, маємо

$$\alpha^b < \alpha^\beta < \alpha^{b'} \quad (b < \beta < b'),$$

причому α^β є **єдине** число, яке задовольняє всі подібні нерівності. Але для числа γ маємо (за побудовою перерізу)

$$\alpha^b < \gamma < \alpha^{b'}.$$

Отже,

$$\alpha = \gamma \quad \text{і} \quad \beta = \log_n \gamma;$$

існування логарифма доведено. □

21. Вимірювання відрізків

Неможливість забезпечити, залишаючись у множині раціональних чисел, усі відрізки довжинами також була найважливішим приводом для введення ірраціональних чисел. Покажемо тепер, що зробленого розширення числової множини достатньо для розв’язання **задачі вимірювання відрізків**.

Насамперед сформулюємо саму задачу (ми користуємося тут шкільними відомостями з геометрії і не формулюємо аксіом, що стосуються цього).

Потрібно з кожним прямолінійним відрізком A зв’язати деяке додатне дійсне число $l(A)$, яке називатимемо “довжиною відрізка A”, так щоб:

1) деякий наперед обраний відрізок E (“еталон довжини”) мав довжину 1:

$$l(E) = 1;$$

2) рівні відрізки мали однакову довжину;

3) довжина суми відрізків завжди дорівнювала сумі довжин відрізків, які додаються:

$$l(A + B) = l(A) + l(B)$$

(“властивість адитивності”).

Поставлені умови приводять до однозначного розв’язання задачі.

Доведення. З умов 2) і 3) випливає, що q-а частина еталона повинна мати довжину $\frac{1}{q}$; якщо ж ця частина повторена доданком p разів, то з умови 3) отриманий відрізок повинен мати довжину $\frac{p}{q}$. Отже, якщо відрізок A **сумірний** з еталоном довжини, і загальна міра відрізків A і E укладається в них, відповідно, p і q разів, то необхідно

$$l(A) = \frac{p}{q}\,.$$

Легко побачити, що це число не залежить від узятої загальної міри і що якщо відрізкам, сумірним з еталоном, приписати раціональні довжини за цим правилом, то для цих відрізків задача вимірювання буде повністю розв'язана.

Якщо відрізок A більший від відрізка B, так що $A = B + C$, де C — також деякий відрізок, то, за умовою 3), має бути:

$$l(A) = l(B) + l(C)$$

і, оскільки $l(C) > 0$, то $l(A) > l(B)$. Отже, нерівні відрізки повинні мати нерівні довжини, зокрема більший відрізок — більшу довжину. Оскільки **кожне** додатне раціональне число $\frac{p}{q}$ — довжина деякого відрізка, сумірного з еталоном довжини E, то зі сказаного, між іншим, ясно, що жоден відрізок, несумірний з еталоном, не може мати раціональної довжини.

Нехай же Σ буде такий відрізок, **несумірний** з E. Знайдеться безліч відрізків S і S', сумірних з E і, відповідно, менших чи більших від Σ. (Це легко довести, виходячи з геометричної "аксіоми Архімедеса", про яку вже йшлося в розд. 5.) Якщо позначити їх довжини через s і s': $l(S) = s$, $l(S') = s'$, то шукана довжина $l(\Sigma)$ повинна задовольняти нерівності

$$s < l(\Sigma) < s'.$$

(Зрозуміло, і для довжини відрізка Σ, **сумірного** з E, також виконуються ці нерівності.)

Якщо розбити всі раціональні числа на два класи B і B', віднісши до нижнього класу B числа s (і крім них — всі від'ємні числа та 0), а до верхнього класу B' — числа s', то вийде переріз множини раціональних чисел. Оскільки в нижньому класі очевидно немає найбільшого числа, а у верхньому — найменшого, то цим перерізом визначається **ірраціональне** число σ, яке і буде єдиним дійсним числом, що задовольняє нерівності $s < \sigma < s'$. Саме це число **необхідно** зв'язати з довжиною $l(\Sigma)$.

Припустимо тепер, що усім відрізкам, як сумірним з E, так і несумірним, приписані довжини згідно із зазначеними правилами. Виконання умов 1), 2) очевидне. Розглянемо два відрізки P, Σ з довжинами $\varrho = l(P)$, $\sigma = l(\Sigma)$ та їх суму, відрізок $T = P + \Sigma$, довжину якого позначимо через $\tau = l(T)$. Взявши будь-які додатні раціональні числа r, r', s, s' такі, що

$$r < \varrho < r', \quad s < \sigma < s',$$

побудуємо відрізки R, R', S, S', яким саме ці числа, відповідно, служать довжинами. Відрізок $R+S$ (довжини $r+s$) буде менший за T, а відрізок $R'+S'$ (довжини $r'+s'$) — більший за T. Тому

$$r + s < \tau < r' + s'.$$

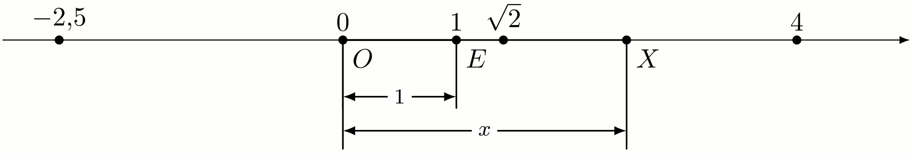


Рис. 21.1

Але (розд. 12) єдине дійсне число, що міститься між числами вигляду $r + s$ (обмеження **додатними** числами r і s, звісно, несуттєве) та числами $r' + s'$, є сума $\varrho + \sigma$. Отже, $\tau = \varrho + \sigma$, що і потрібно було довести. □

Поширення “властивості адитивності” на випадок будь-якого скінченного числа доданків проводиться за методом математичної індукції.

Якщо на осі (**спрямованої** прямої) (рис. 21.1) вибрати початкову точку O та еталон довжини OE, то *кожній точці* X *цієї прямої відповідає деяке дійсне число* — її **абсциса** x, що дорівнює довжині відрізка OX, якщо X лежить у додатному напрямку від O, або цій довжині зі знаком мінус в іншому випадку.

Природно постає питання, чи буде справедливе й обернене: *чи кожне дійсне число* x *відповідає деякій точці на прямий?* У геометрії це питання розв’язується за допомогою аксіоми про **неперервність** прямої, що вважає пряму множиною точок і доводить властивість, аналогічну властивості неперервності множини дійсних чисел (розд. 10).

Отже, між усіма дійсними числами та точками спрямованої прямої (осі) можна вказати взаємно однозначну відповідність. Дійсні числа можна зображати точками на осі, яку тому називають **числовою віссю**. Таким зображенням ми надалі постійно користуватимемося.

nebayduzhi.math@gmail.com

Глава 1

ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ

1.1. Варіанта та її границя

22. Змінна величина, варіанта

У фізиці та інших науках про природу читачеві траплялося безліч різних **величин**: час, довжина, об'єм, вага тощо. Будь-яка з них, залежно від обставин, то набувала різних значень, то лише одне. У першому випадку ми мали справу зі **змінною** величиною, а в другому — зі **сталою**.

У математиці, однак, ми відволікаємось від фізичного змісту величини, цікавлячись лише **числом**, яким вона виражена; фізичний зміст величини знову набуває важливості лише коли застосовують математику в інших галузях. Отже, для нас змінна величина (або коротше — змінна) є **абстрактною** або **числовою** змінною. Її позначають будь-яким символом (літерою, наприклад x), якому приписують числові значення.

Змінна вважається заданою, якщо вказана **множина** $\mathcal{X} = \{x\}$ **значень**, яких вона може набувати. Сталу величину (коротше — **сталу**) зручно розглядати як окремий випадок змінної; він відповідає припущенню, що множина $\mathcal{X} = \{x\}$ складається з **одного** елемента.

Говорячи про поняття **границі** змінної x недостатньо знати лише, з якої числової множини $\mathcal{X}$ отримує значення ця змінна; необхідно ще знати, які саме значення (серед яких можуть бути і такі, що повторюються) і в якому порядку вона їх набуває. Відкладаючи розгляд питання про **направлену** змінну та її границю, у загальному вигляді, у цьому розділі ми розглянемо найпростіший і водночас важливий окремий тип такої змінної величини. (Дивіться третій том, розд. 752.)

Почнемо з поняття числової **послідовності**. Уявимо собі **натуральний ряд**:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots,\ n',\ \ldots, \tag{22.1}$$

у якому числа розташовані в порядку зростання, так що більше число n' **йде за** меншим числом n (або менше число n **стоїть перед** більшим числом n'). Якщо тепер замінити в ряду (22.1), за яким-небудь законом, кожне натуральне число n деяким дійсним числом x_n, то вийде числова **послідовність**:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n'},\ \ldots, \tag{22.2}$$

члени або **елементи** якої x_n, занумеровані всіма натуральними числами і **розташовані в порядку зростання номерів**. При $n' > n$ член $x_{n'}$ **іде за** членом x_n (x_n **стоїть перед** $x_{n'}$), незалежно від того, чи буде саме число $x_{n'}$ більше, менше або навіть дорівнювати числу x_n. (Аналогічно визначається поняття **послідовності** точок на прямій або об'єктів будь-якої іншої природи.)

*Змінну x, яка набуває деякої **послідовності** (22.2) значень, ми, слідуючи за Мере (фр. Charles Méray, Ша́рль Мере́), будемо називати **варіантою**.* Це і є той тип змінної, розглядом якого ми тут обмежуємося.

У шкільному курсі математики читачеві траплялися змінні саме типу варіанти. Йому знайома, наприклад, **послідовність** вигляду

$$\underset{1}{a},\ \underset{2}{a+d},\ \underset{3}{a+2d},\ \ldots,\ \underset{n}{a+(n-1)d},\ \ldots$$

(арифметична прогресія) або вигляду

$$\underset{1}{a},\ \underset{2}{aq},\ \underset{3}{aq^2},\ \ldots,\ \underset{n}{aq^{n-1}},\ \ldots$$

(геометрична прогресія). Змінний член цих прогресій є **варіанта**.

У зв'язку з визначенням довжини кола зазвичай розглядають змінний периметр правильного вписаного в коло многокутника, отримуваного з шестикутника послідовним подвоєнням числа сторін; отже, ця варіанта набуває **послідовності** значень:

$$\underset{1}{p_6 = 6R},\quad \underset{2}{p_{12} = 12R\sqrt{2-\sqrt{3}}},$$
$$\underset{3}{p_{24} = 24R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}},\quad \underset{4}{p_{48}},\quad \ldots$$

Згадаємо ще про десяткове наближення (скажімо, за недостачею) до числа $\sqrt{2}$, з дедалі більшою точністю; воно набуває **послідовності** значень:

$$\underset{1}{1{,}4};\quad \underset{2}{1{,}41};\quad \underset{3}{1{,}414};\quad \underset{4}{1{,}4142};\quad \ldots$$

і також є **варіантою**.

Змінну x, що пробігає послідовність (22.2), часто позначають через x_n, ототожнюючи її зі змінним ("загальним") членом цієї послідовності.

Іноді варіанту x задають вказуючи **безпосередньо** вираз для x_n; наприклад, для арифметичної або геометричній прогресії маємо, відповідно,
$x_n = a+(n-1)d$ або $x_n = aq^{n-1}$. Користуючись цим виразом, можна відразу обчислювати **будь-яке** значення варіанти за заданим номером, не обчислюючи попередніх значень.

Для периметра правильного вписаного многокутника такий загальний вираз можливий лише, якщо ввести число π; взагалі периметр p_m правильного вписаного m-кутника задається формулою

$$p_m = 2mR\sin\frac{\pi}{m}\,.$$

В інших випадках нам може бути невідомий вираз для загального члена x_n послідовності (22.2). Проте, *послідовність* (22.2)*, а з нею і варіанта, що відповідає їй, вважається заданою, якщо ми все ж таки маємо* ***правило****, за яким можна обчислити* ***будь-яке*** *значення варіанти, маючи тільки номер елемента.* Тому, знаючи правило для наближеного обчислення коренів, ми можемо вважати заданою всю послідовність десяткових наближень до $\sqrt{2}$, хоча виразу для його загального члена ми не знаємо.

Якщо варіанта задана, то цим не тільки охарактеризована цілком уся множина значень, яких вона набуває, а й визначено **порядок**, у якому варіанта набуває цих значень; кожному номеру відповідає своє значення варіанти, а з двох значень те вважається наступним, номер якого більший.

Ще раз підкреслимо, що значення варіанти не повинні бути обов'язково різними. Наприклад, якщо задати варіанту однієї з формул:

$$x_n = 1;\quad x_n = (-1)^{n+1};\quad x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}\,,$$

то відповідні послідовності будуть:

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{1}{6}, & \dots \\
\frac{1}{1}, & \frac{-1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{-1}{4}, & \frac{1}{5}, & \frac{-1}{6}, & \dots \\
\frac{0}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{0}{3}, & \frac{\frac{1}{2}}{4}, & \frac{0}{5}, & \frac{\frac{1}{3}}{6}, & \dots
\end{array}$$

У першому випадку ми маємо просто сталу величину, уся "множина" значень, яких вона набуває, зводиться до одного. У другому — ця множина складається з двох значень, 1 та -1, які вона набуває по черзі. Нарешті, у третьому випадку множина значень нескінченна, але це не заважає значенням змінної через одне дорівнювати 0; і ми вважаємо, що значення 0 на п'ятому місці іде не лише за значенням 1 на другому місці, а й за значенням 0 на першому місці.

23. Границя варіанти

Читач зі шкільного курсу також знайомий уже з цим поняттям. Ось точне **означення** границі.

Стале число a називається ***границею*** *варіанти $x = x_n$, якщо для кожного додатного числа ε, хоч би яке мале воно було, існує такий номер N, що всі значення x_n, у яких номер $n > N$, задовольняють нерівність*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{23.1}$$

Той факт, що a є границею варіанти, записують так:

$$\lim x_n = a \quad \text{або} \quad \lim x = a$$

(lim — скорочення латинського слова limes, що означає “границя”). Кажуть також, що змінна **прямує** до a, і пишуть

$$x_n \to a \quad \text{або} \quad x \to a.$$

Іноді число a називають **границею послідовності** (22.2), і кажуть, що ця послідовність **збігається до** a.

Те саме означення коротко може бути сформульовано так.

Число a називається границею варіанти $x = x_n$, якщо її значення відрізняються від a як завгодно мало, починаючи з деякого місця.

Нерівність (23.1), де ε довільне, і є точний запис твердження, що x_n від a “відрізняється як завгодно мало”, а номер N якраз і вказує на те “місце, починаючи з якого” ця нерівність виконується.

Важливо усвідомити, що номер N, взагалі кажучи, не може бути вказаний раз і назавжди: **він залежить від вибору числа** ε. Для того, щоб підкреслити це, ми інколи замість N будемо писати N_ε. Коли число ε **зменшується**, відповідний номер $N = N_\varepsilon$, взагалі кажучи, **збільшується**: що більшої близькості значень варіанти x_n до a ми вимагаємо, то дальші значення її (в послідовності (22.2)) доводиться розглядати.

Виняток становить той випадок, коли **всі** значення варіанти x_n, дорівнюють сталому числу a. Очевидно, що тоді $a = \lim x_n$, але цього разу нерівність (23.1) буде виконуватися для **будь-кого** $\varepsilon > 0$ водночас для **всіх** значень x_n. Аналогічна обставина виконується для варіанти x_n, значення якої стають рівними a, **починаючи з деякого місця**.

Нерівність (23.1), як ми знаємо (розд. 17), рівносильна таким:

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon; \quad \text{або} \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon; \tag{23.2}$$

цим ми часто будемо користуватися згодом.

nebayduzhi.math@gmail.com

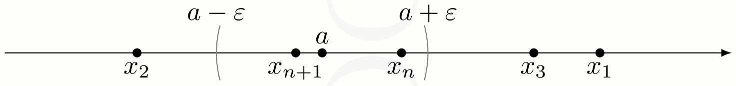


Рис. 23.1

Якщо зобразити числа a, $a\pm\varepsilon$ і значення x_n нашої варіанти точками на числовій осі (рис. 23.1), то отримаємо наочне геометричне тлумачення границі варіанти. Хоч би який малий відрізок (довжини 2ε) з центром у точці a взяти, **усі** точки x_n, починаючи з деякої з них, повинні потрапити **всередину** цього відрізка (так що поза ним може залишитися хіба що скінченне число цих точок). Точка, що зображує границю a, є осередком **згустку** точок, що зображають значення варіанти.

24. Нескінченно малі величини

Випадок, коли варіанта прямує до нуля: $x_n \to 0$, становить особливий інтерес.

*Варіанта x_n, що прямує до нуля, називається **нескінченно малою величиною**, або просто **нескінченно малою**.*

Якщо в означенні границі варіанти (розд. 23) покласти $a = 0$, то нерівність (23.1) набуде вигляду

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \quad (\text{коли } n > N_\varepsilon).$$

Отже, наведене вище означення нескінченно малої можна докладніше сформулювати без згадки терміна “границя”.

*Варіанта x_n називається **нескінченно малою**, якщо її абсолютна величина стає і залишається **меншою** від як завгодно малого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$, починаючи з деякого місця.*

Не цілком вдалий (так історично склалося) термін “нескінченно мала” величина не повинен вводити читача в оману: жодне окремо взяте значення цієї величини, якщо воно не нуль, не може вважатися, як “мале”. Суть справи в тому, що це — **змінна** величина (крім нецікавого випадку, коли вона тотожно дорівнює нулю), яка тільки в **процесі своєї зміни** здатна стати меншою від довільно взятого числа ε.

Якщо повернутися до загального випадку варіанти x_n, що прямує до a, то різниця

$$\alpha_n = x_n - a$$

між змінною та її границею, очевидно, буде нескінченно малою: адже, зважаючи на (23.1),

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon \quad (\text{коли } n > N_\varepsilon).$$

Навпаки, якщо α_n — нескінченно мала, то $x_n \to a$. Це приводить нас до такого твердження.

Для того щоб варіанта x_n мала своєю границею стале число a, ***необхідно і достатньо****, щоб різниця між ними $\alpha_n = x_n - a$ була нескінченно малою.*

У зв'язку з цим можна було б дати і для поняття "границя" інше означення (рівносильне старому).

Стале число a називається ***границею*** *варіанти x_n, якщо різниця між ними є нескінченно малою величиною.*

Зрозуміло, якщо виходити з цього означення границі, то для нескінченно малої потрібно використовувати друге з наведених вище означень. Інакше вийшло б порочне коло: границя визначалася б через нескінченно малу, а нескінченно мала — через границю!

Отже, якщо варіанта $x_n \to a$, то вона може бути представлена у вигляді

$$x_n = a + \alpha_n,$$

де α_n — нескінченно мала, і, навпаки, якщо варіанта x_n, допускає такий запис, то вона має границю a. Цим часто користуються на практиці для визначення границі змінної.

25. Приклади

1) Розглянемо варіанти

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x_n = -\frac{1}{n}, \quad x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

їм відповідають такі послідовності значень:

$$\begin{array}{rrrrl} 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \ldots, \\ -1, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{3}, & -\frac{1}{4}, & \ldots, \\ 1, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & -\frac{1}{4}, & \ldots. \end{array}$$

Усі три змінні нескінченно малі, тобто мають границю 0. Справді, для них

$$|x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

як тільки $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Отже, за N_ε можна, наприклад, взяти найбільше ціле число, що міститься в $\frac{1}{\varepsilon}$, тобто $E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Взагалі, через $E(p)$ позначається найбільше ціле число,

nebayduzhi.math@gmail.com

що не перевищує p, або, коротше, **цілу частину** числа p; E — початкова літера французького слова Entier, що означає “цілий”.

Зазначимо, що перша змінна весь час більша за свою границю 0, друга — весь час менша за неї, третя ж — поперемінно стає то більшою, то меншою за неї.

2) Якщо покласти

$$x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n},$$

то змінна пробігає таку послідовність значень:

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{6},\ \ldots$$

І в цьому випадку $x_n \to 0$, оскільки

$$|x_n| \leqslant \frac{3}{n} < \varepsilon$$

для $n > \frac{3}{\varepsilon}$, так що за N_ε можна взяти $E\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)$.

Ми стикаємося тут із цікавою особливістю: змінна то **наближається** до своєї границі 0, то **віддаляється** від неї (по черзі).

3) Нехай тепер

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n};$$

з цією варіантою ми вже мали справу в пр. 22.1. Тут також $x_n \to 0$, бо

$$|x_n| \leqslant \frac{2}{n} < \varepsilon,$$

як тільки $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$.

Зазначимо, що для всіх непарних значень n змінна виявляється рівною своїй границі.

Ці прості приклади цікаві тим, що вони характеризують різноманіття можливостей, які охоплюються наведеним вище означенням границі варіанти. Несуттєво, чи лежать значення змінної **з одного боку** від границі чи ні; несуттєво, чи наближається змінна **з кожним кроком** до своєї границі; несуттєво, нарешті, чи досягає змінна своєї границі, тобто чи набуває значень, рівних границі. Істотно лише те, про що йдеться в означенні: змінна має відрізнятися від границі скільки завгодно мало, починаючи з деякого місця, тобто для досить далеких своїх значень.

4) Візьмемо складніший приклад варіанти:

$$x_n = \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4};$$

доведемо, що її границею буде число $\frac{1}{3}$.

З цією метою розглянемо різницю

$$x_n - \frac{1}{3} = \frac{-5n+10}{3(3n^2+2n-4)}$$

і оцінимо її абсолютне значення; для $n > 2$ маємо:

$$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| = \frac{5n-10}{3(3n^2+2n-4)} < \frac{5n}{3(3n^2-4)} < \frac{5n}{3 \cdot 2n^2} < \frac{1}{n},$$

так що цей вираз менший за ε, якщо $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Цим доведено, що $x_n \to \frac{1}{3}$.

5) Розглянемо варіанту, задану формулою

$$x_n = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (a > 1),$$

і доведемо, що $x_n \to 1$.

Якщо скористатися нерівністю (19.3), то можна написати:

$$|x_n - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n} < \varepsilon, \quad \text{як тільки} \quad n > N_\varepsilon = E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right).$$

Можна, однак, міркувати й інакше, Нерівність

$$|x_n - 1| = a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$$

рівносильна такій:

$$\frac{1}{n} < \log_a(1+\varepsilon) \quad \text{або} \quad n > \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)},$$

так що вона виконується при $n > N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}\right)$.

Відповідно до обраного способу міркування ми дійшли до **різних** виразів для N_ε. Наприклад при $a = 10$, $\varepsilon = 0{,}01$ отримуємо $N_{0{,}01} = \frac{9}{0{,}01} = 900$ за першим способом і $N_{0{,}01} = E\left(\frac{1}{0{,}004\,32\ldots}\right) = 231$ — за другим. Другим способом ми отримали **найменше** з можливих значень для $N_{0{,}01}$, бо вже $10^{\frac{1}{231}} = 1{,}010\,017\ldots$ відрізняється від 1 більше ніж на $\varepsilon = 0{,}01$. Те саме буде і в загальному випадку, бо, як легко побачити, для

$$n \leqslant \frac{1}{\log_a(1+\varepsilon)} \quad \text{необхідно} \quad a^{\frac{1}{n}} - 1 \geqslant \varepsilon.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Зауважимо, що ми зовсім не зацікавлені саме в **найменшому** можливому значенні N_ε, якщо йдеться тільки про встановлення факту прямування до границі. Повинно бути гарантоване виконання нерівності (23.1), починаючи хоч із якогось місця, далекого чи близького — несуттєво.

6) Важливий приклад нескінченно малої дає варіанта

$$\alpha_n = q^n, \quad \text{де} \quad |q| < 1.$$

Для доведення того, що $\alpha_n \to 0$, розглянемо нерівність

$$|\alpha_n| = |q|^n < \varepsilon;$$

вона **рівносильна** таким:

$$n \cdot \lg |q| < \lg \varepsilon \quad \text{або} \quad n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}\,.$$

Зауваження:

– $\lg x$ тут (і далі) означає $\log_{10} x$;

– Слід мати на увазі, що $|q| < 1$ і $\lg |q| < 0$; тому, якщо поділити обидві частини нерівності на це число, знак нерівності повинен бути змінений на протилежний.

Отже, якщо покласти (маючи $\varepsilon < 1$)

$$N_\varepsilon = E\left(\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}\right),$$

то, коли $n > N_\varepsilon$, згадана нерівність напевно виконається.

Аналогічно, легко переконатися в тому, що і варіанта

$$\beta_n = A \cdot q^n,$$

де, як і раніше, $|q| < 1$, а A — стале число, також нескінченно мала.

7) Розглянемо, далі, нескінченну спадну геометричну прогресію

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1},\ \ldots \quad (|q| < 1)$$

і спробуємо визначити її **суму**.

Сумою нескінченної прогресії, як відомо, називається границя, до якої прямує сума s_n її n членів, коли n зростає до ∞. Але

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{a}{1 - q} \cdot q^n,$$

тому варіанта s_n відрізняється від сталого числа $\frac{a}{1-q}$ на величину $\alpha_n = -\frac{a}{1-q}\cdot q^n$, яка, як ми тільки що бачили, нескінченно мала. Отже, за другим означенням границі, шукана сума прогресії

$$s = \lim s_n = \frac{a}{1-q}\,.$$

Отже, це число є **сумою** нескінченної множини членів прогресії, яку записують так:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \frac{a}{1-q}\,.$$

8) Нехай є два числа a і b. Та нехай $x_0 = a$, $x_1 = b$, а наступні значення варіанти x_n визначимо рівністю

$$x_n = \frac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2} \quad (n \geqslant 2).$$

Ця варіанта x_n, справді, задана, оскільки, вважаючи тут $n = 2,\ 3,\ \dots,$ можна **послідовно** знайти всі її значення, до будь-якого номера включно.

Якщо від обох частин написаної рівності відняти по x_{n-1}, то отримаємо

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1} - x_{n-2}) \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \dots).$$

Отже, у послідовності різниць

$$x_1 - x_0 = b - a, \quad x_2 - x_1,\ \dots,\ x_{n-1} - x_{n-2}, \quad x_n - x_{n-1}, \quad \dots$$

кожна (починаючи з другої) отримується з попередньої множенням на $-\frac{1}{2}$, тобто ми маємо тут геометричну прогресію зі знаменником $-\frac{1}{2}$. Оскільки сума n її членів є $x_n - a$, то, користуючись відомою нам (дивіться приклад 7) формулою для суми геометричної прогресії, одразу отримуємо:

$$\lim(x_n - a) = \frac{b-a}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}(b-a),$$

звідки вже легко зробити висновок, що

$$\lim x_n = a + \frac{2}{3}(b-a) = \frac{a+2b}{3}\,.$$

9) На зразок геометричної прогресії можна розглянути **довільну** послідовність чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

nebayduzhi.math@gmail.com

і, по порядку додаючи їх, утворити “часткові суми”:

$$A_1 = a_1, \quad A_2 = a_1 + a_2, \quad A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots,$$
$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \dots$$

Якщо, для $n \to \infty$, A_n прямує до (скінченної або нескінченної) границі A, то це число називають **сумою** всіх взятих чисел a_n і пишуть

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = A.$$

Ліву частину цієї рівності називають **нескінченним рядом**, а число A — його **сумою**. Якщо ряд має **скінченну** суму, то кажуть, що ряд **збіжний**.

Нехай, наприклад, маємо ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \dots$$

Тут

$$a_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \dots,$$
$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad \dots,$$

так що в цьому разі

$$A_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Очевидно, $A_n \to 1$, так що запропонований ряд збігається і його сума дорівнює одиниці.

Якщо ряд не має скінченної суми, про нього кажуть, що він **розбіжний**: такий, наприклад, ряд

$$1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

26. Деякі теореми про варіанту, що має границю

Нехай варіанта x_n має границю a. При будь-якому $p < a$ (або $q > a$) легко підібрати число $\varepsilon > 0$ так, щоб було

$$a - \varepsilon > p \quad (\text{або } a + \varepsilon < q);$$

для цього достатньо взяти ε менше від різниці $a - p$ (або $q - a$). Але, за означенням границі (розд. 23), знайдеться такий номер N, що для $n > N$ виконуватиметься нерівність (23.2)

$$x_n > a - \varepsilon \quad (x_n < a + \varepsilon)$$

а отже й нерівність

$$x_n > p \quad (\text{або } x_n < q).$$

Теорема 26.1. *Якщо варіанта x_n прямує до границі a, і $a > p$ $(a < q)$, то й усі значення змінної,* ***починаючи з деякого****, теж будуть $> p$ $(< q)$.*

Це просте твердження має низку корисних наслідків.

Теорема 26.2. *Якщо варіанта прямує до границі $a > 0$ (< 0), то й сама змінна $x_n > 0$ (< 0),* ***починаючи з деякого місця****.*

Для доведення достатньо застосувати попереднє твердження, взявши $p = 0$ $(q = 0)$.

Можна довести точніший результат.

Теорема 26.3. *Якщо варіанта x_n прямує до границі a,* ***відмінної від нуля****, то абсолютні значення принаймні* ***досить далеких*** *x_n перевищать деяке додатне число r:*

$$|x_n| > r > 0 \quad (\textit{для } n > N).$$

Справді, при $a > 0$ (< 0) можна взяти

$$0 < p < a \quad (a < q < 0)$$

і покласти $r = p$ $(r = |q|)$.

Теорема 26.4. *З іншого боку, якщо варіанта x_n має границю a, то вона* ***обмежена****, тобто абсолютні значення* ***усіх*** *її членів не перевищують деякого скінченного числа:*

$$|x_n| \leqslant M \quad (M = \text{const};\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Доведення. Візьмемо число $M' > |a|$, так що $-M' < a < M'$, і покладемо $p = -M'$, а $q = M'$. Знайдеться такий номер N, що для $n > N$ буде

$$-M' < x_n < M' \quad \text{або} \quad |x_n| < M'.$$

Ця нерівність, напевно, виконується для $n = N + 1,\ N + 2,\ \ldots$, так що її можуть не задовольняти лише перші N значень нашої варіанти (або деякі з них).

Тому якщо покласти M рівним найбільшому з чисел

$$|x_1|,\ |x_2|,\ \ldots,\ |x_N|,\ M',$$

то вже для **усіх** значень x_n матимемо: $|x_n| \leqslant M$, що й потрібно було довести. ☐

Зауваження 1. Можна дати означення обмеженості змінної x_n у рівносильній формі, вимагаючи виконання нерівностей

$$k \leqslant x_n \leqslant g \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

де k і g — два скінченні числа. Справді, з цих нерівностей, якщо покласти M рівним найбільшому з чисел $|k|$, $|g|$, маємо $|x_n| \leqslant M$; навпаки, якщо виконується остання нерівність, то вона може бути записана у формі $-M \leqslant x_n \leqslant M$, так що $-M$ відіграє роль k, а M — роль g.

Зауваження 2. Твердження теор. 26.4 не може бути обернене: не всяка обмежена варіанта має границю. Якщо покласти, наприклад, $x_n = (-1)^{n+1}$, то ця варіанта, звісно, обмежена: $|x_n| \leqslant 1$, але границі вона не має, весь час коливаючись від $+1$ до -1.

На закінчення, спираючись на твердження теор. 26.1, доведемо **єдиність границі**.

Теорема 26.5 (Про єдиність границі)**.** *Варіанта x_n не може водночас прямувати до двох різних границь.*

Доведення. Справді, припустимо протилежне: нехай водночас $x_n \to a$ і $x_n \to b$, причому $a < b$. Візьмемо будь-яке число r **між** a і b

$$a < r < b.$$

Оскільки $x_n \to a$ і $a < r$, знайдеться такий номер N', що для $n > N'$ буде виконуватися нерівність: $x_n < r$. З іншого боку, оскільки $x_n \to b$ і $b > r$, знайдеться і номер N'', такий що для $n > N''$ виявиться: $x_n > r$. Якщо взяти номер n більшим ніж N' і N'', то відповідне значення змінної буде водночас і менше, і більше від r, що неможливо.

Ця суперечність доводить наше твердження. □

27. Нескінченно великі величини

Нескінченно малим величинам, у деякому розумінні, протиставляються **нескінченно великі величини** (або просто **нескінченно великі**).

Варіанта x_n називається ***нескінченно великою****, якщо її абсолютне значення стає і залишається* ***більше*** *якого завгодно великого наперед заданого числа $E > 0$, починаючи з деякого місця:*

$$|x_n| > E \quad (\text{для } n > N_E).$$

Як і з нескінченно малими, тут також слід підкреслити, що жодне окремо взяте значення нескінченно великої величини не може бути кваліфіковане як “велике”; ми маємо тут справу зі **змінною** величиною, яка лише **в процесі своєї зміни** здатна стати більшою від довільно взятого числа E.

Прикладами нескінченно великих можуть бути варіанти

$$x_n = n; \quad x_n = -n; \quad x_n = (-1)^{n+1}n,$$

які пробігають натуральний ряд чисел, але перша зі знаком плюс, друга зі знаком мінус, третя ж — з навперемінними знаками.

Ось ще один приклад нескінченно великої величини:

$$x_n = Q^n \quad \text{для} \quad |Q| > 1.$$

Справді, хоч би яке було $E > 0$, нерівність

$$|x_n| = |Q|^n > E$$

виконується, коли

$$n \cdot \lg|Q| > \lg E \quad \text{або} \quad n > \frac{\lg E}{\lg|Q|}$$

($\lg|Q| > 0$, якщо $|Q| > 1$), так що за N_E можна взяти число

$$E\left(\frac{\lg E}{\lg|Q|}\right).$$

Якщо варіанта x_n нескінченно велика і (принаймні для досить великих n) зберігає певний знак ($+$ або $-$), то, відповідно до знака, кажуть, що варіанта x_n має ***границю*** *$+\infty$ або $-\infty$, і пишуть:*

$$\lim x_n = +\infty, \quad x_n \to +\infty$$

або

$$\lim x_n = -\infty, \quad x_n \to -\infty.$$

Можна було б дати для цих випадків і незалежне означення, замінивши нерівність $|x_n| > E$ нерівністю

$$x_n > E \quad \text{або} \quad x_n < -E,$$

звідки вже випливає, відповідно, що $x_n > 0$ чи $x_n < 0$.

Очевидно, що нескінченно велика величина x_n в **загальному випадку** характеризується співвідношенням: $|x_n| \to +\infty$.

З наведених вище прикладів нескінченно великих величин очевидно, що варіанта $x_n = n$ прямує до $+\infty$, а варіанта $x_n = -n$ прямує до $-\infty$. Що ж до третьої варіанти: $x_n = (-1)^{n+1}$, то про неї не можна сказати ні що вона прямує до $+\infty$, ні що вона прямує до $-\infty$.

І останнє, щодо варіанти $x_n = Q^n$: можна сказати, що якщо $Q > 1$, то вона прямує до $+\infty$; а якщо $Q < -1$, то у неї границі немає.

З невласними числами $\pm\infty$ ми вже стикалися в розд. 11; слід пам'ятати, що їх застосування має цілком умовний зміст, і остерігатися робити над цими "числами" арифметичні операції. Замість $+\infty$ часто пишуть просто ∞.

nebayduzhi.math@gmail.com

Введення нескінченних границь не порушує теор. 26.5 **про єдиність границі**; справді, як зазначено в теор. 26.4, варіанта, що має скінченну границю a, обмежена і, отже, ніяк не може водночас прямувати до **нескінченної** границі.

На закінчення згадаємо про простий зв'язок, який існує між нескінченно великими та нескінченно малими величинами.

Теорема 27.1 (Зв'язок між нескінченно великими та нескінченно малими величинами)**.** *Якщо варіанта x_n нескінченно велика, то обернена до неї величина $\alpha_n = \dfrac{1}{x_n}$ буде нескінченно мала.*

Доведення. Візьмемо будь-яке число $\varepsilon > 0$. Оскільки $|x_n| \to \infty$, то для числа $E = \frac{1}{\varepsilon}$ знайдеться такий номер N, що

$$|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{коли} \quad n > N.$$

Тоді для тих же значень n очевидно буде

$$|\alpha_n| < \varepsilon,$$

що й доводить наше твердження. □

Аналогічно можна довести і обернене твердження.

Твердження 27.1. *Якщо варіанта α_n (що не дорівнює 0) нескінченно мала, то обернена до неї величина $x_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ буде нескінченно велика.*

1.2. Теореми про границі, які полегшують знаходження границь

28. Граничний перехід у рівності і нерівності

З'єднуючи дві варіанти x_n і y_n знаками рівності або нерівності, ми завжди маємо на увазі, що йдеться про їх **відповідні** значення, тобто про значення **з одним і тим же номером**.

Теорема 28.1. *Якщо дві варіанти x_n і y_n за всіх їх змін рівні: $x_n = y_n$, причому кожна з них має скінченну границю:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то дорівнюють і ці границі: $a = b$.

Доведення. Це безпосередньо випливає з єдиності границі (теор. 26.5). □

Цією теоремою користуються зазвичай, коли роблять **граничний перехід у рівності**: з $x_n = y_n$ роблять висновок, що $\lim x_n = \lim y_n$.

Теорема 28.2. *Якщо для двох варіант x_n та y_n завжди виконується нерівність $x_n \geqslant y_n$, причому кожна з них має скінченну границю:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то й $a \geqslant b$.

Доведення. Припустимо протилежне: нехай $a < b$. Розмірковуючи так само, як і в теор. 26.5, візьмемо число r між a і b, тож $a < r < b$. Тоді, з одного боку, знайдеться такий номер N', що для $n > N'$ буде $x_n < r$, з іншого — знайдеться і такий номер N'', що для $n > N''$ виявиться $y_n > r$. Якщо N більше від обох чисел N', N'', то для номерів $n > N$ будуть водночас виконуватися обидві нерівності

$$x_n < r, \quad y_n > r, \quad \text{звідки } x_n < y_n,$$

що суперечить припущенню. Теорему доведено. □

Ця теорема говорить, що ми можемо робити **граничний перехід в нерівності (з'єднаній з рівністю)**: з $x_n \geqslant y_n$ можна зробити висновок, що $\lim x_n \geqslant \lim y_n$.

Звісно, знак $>$ скрізь може бути замінений знаком $<$.

nebayduzhi.math@gmail.com

Ми звертаємо увагу читача на те, що зі **строгої** нерівності $x_n > y_n$, взагалі кажучи, **не** випливає **строга** ж нерівність $\lim x_n > \lim y_n$, а тільки, як і раніше: $\lim x_n \geqslant \lim y_n$. Наприклад, $\frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$ для всіх n, але

$$\lim \frac{1}{n} = \lim \left(-\frac{1}{n}\right).$$

Для доведення існування та знаходження величини границі варіанти іноді буває корисна така теорема.

Теорема 28.3. *Якщо для варіант x_n, y_n, z_n завжди виконуються нерівності*

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n,$$

причому варіанти x_n і z_n прямують до спільної границі a:

$$\lim x_n = \lim z_n = a,$$

то й варіанта y_n має ту ж саму границю:

$$\lim y_n = a.$$

Доведення. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. За цим ε насамперед знайдеться такий номер N', що для $n > N'$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Потім, знайдеться такий номер N'', що для $n > N''$

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon.$$

Нехай N буде більше від обох чисел N' та N''; тоді, для $n > N$, виконуються обидві попередні подвійні нерівності, і тому

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon.$$

Остаточно, для $n > N$

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \quad \text{або} \quad |y_n - a| < \varepsilon.$$

Отже, справді, $\lim y_n = a$. □

З цієї теореми, зокрема, випливає: *якщо для всіх n*

$$a \leqslant y_n \leqslant z_n$$

і відомо, що $z_n \to a$, то й $y_n \to a$. Втім, це дуже легко довести безпосередньо.

Теореми теор. 28.1, теор. 28.2 та теор. 28.3 легко поширюються і на випадок нескінченних границь.

29. Леми про нескінченно малі

У подальших теоремах нам доведеться розглядати водночас дві варіанти (або більше), поєднуючи їх між собою знаками арифметичних дій. При цьому, як і вище, ми відносимо ці знаки до **відповідних** значень варіант. Наприклад, говорячи про суму двох варіант x_n і y_n, що пробігають нарізно послідовності значень

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

і

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$$

ми маємо на увазі варіанту $x_n + y_n$, що набуває послідовності значень

$$x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3,\ \ldots,\ x_n + y_n,\ \ldots$$

У доведенні теорем, що стосуються результатів арифметичних дій над змінними, важливу роль будуть відігравати наступні дві леми про нескінченно малі.

Лема 29.1. *Сума будь-якого скінченного числа нескінченно малих також величина нескінченно мала.*

Доведення. Проведемо доведення для випадку **двох** нескінченно малих α_n і β_n (загальний випадок вичерпується аналогічно).

Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням нескінченно малої, за числом ε для нескінченно малої α_n знайдеться такий номер N', що для $n > N'$ буде

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так само і для нескінченно малої β_n знайдеться такий номер N'', що для $n > N''$ буде

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Якщо взяти натуральне число N більшим від обох чисел N' і N'', то для $n > N$ водночас виконуються обидві ці нерівності, так що

$$|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, величина $\alpha_n + \beta_n$, справді, нескінченно мала. □

Лема 29.2. *Добуток обмеженої змінної x_n на нескінченно малу α_n є величина нескінченно мала.*

Доведення. Нехай для всіх значень n

$$|x_n| \leqslant M.$$

Якщо задане довільне число $\varepsilon > 0$, то за числом $\frac{\varepsilon}{M}$ для нескінченно малої α_n знайдеться такий номер N, що для $n > N$ буде

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Тоді для тих самих значень n очевидно

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Звідси випливає, що $x_n \cdot \alpha_n$ є нескінченно мала. $\square$

30. Арифметичні дії над змінними

Наступні теореми важливі тому, що за їх допомогою в багатьох випадках стає непотрібним щоразу посилатися до **означення** поняття “границі”, знаходити за заданим ε відповідне N, і так далі. Цим обчислення границь значно полегшується.

Теорема 30.1. *Якщо варіанти x_n і y_n мають скінченні границі:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то й сума (різниця) їх також має скінченну границю, причому

$$\lim(x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

Доведення. З умови теореми випливає, що

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \tag{30.1}$$

де α_n і β_n — нескінченно малі. Тоді

$$x_n \pm y_n = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

Тут $\alpha_n \pm \beta_n$ є нескінченно мала за лем. 29.1; отже, користуючись другим означенням границі, можна стверджувати, що варіанта $x_n \pm y_n$ має границю, рівну $a \pm b$, що й потрібно було довести. $\square$

Ця теорема та її доведення переносяться на випадок будь-якого скінченного числа доданків.

nebayduzhi.math@gmail.com

Теорема 30.2. *Якщо варіанти x_n і y_n мають скінченні границі:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

то й добуток їх також має скінченну границю, і

$$\lim x_n y_n = ab.$$

Доведення. Виходячи з тих самих рівностей (30.1), маємо цього разу

$$x_n y_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

Вираз у дужках, як випливає з лем. 29.1 і лем. 29.2, є величина нескінченно мала. Звідси і випливає, що варіанта, справді, має границю ab. ☐

Ця теорема може бути поширена на випадок будь-якого скінченного числа множників (наприклад методом математичної індукції).

Теорема 30.3. *Якщо варіанти x_n і y_n мають скінченні границі:*

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b,$$

причому b відмінна від 0, то й відношення їх має скінченну границю, а саме

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Доведення. Оскільки $b \neq 0$, згідно з твердженням теор. 26.3, починаючи з деякого місця, не тільки $y_n \neq 0$, але навіть

$$|y_n| > r > 0,$$

де r — стала. Обмежимося тими значеннями номера n, для яких це виконується; тоді відношення $\frac{x_n}{y_n}$ очевидно має сенс.

Виходячи, як і раніше, з рівностей (30.1), маємо

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+\alpha_n) - a(b+\beta_n)}{(b+\beta_n)b} = \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Вираз у дужках, з лем. 29.1 і лем. 29.2, є величина нескінченно мала. Множник ж при ньому, на підставі сказаного на початку, буде **обмеженою** змінною:

$$\left|\frac{1}{by_n}\right| = \frac{1}{|b||y_n|} < \frac{1}{|b|r}.$$

Отже, за лем. 29.2, весь добуток справа буде нескінченно малий, а це є різниця між варіантою $\frac{x_n}{y_n}$ і числом $\frac{a}{b}$. Отже, границя $\frac{x_n}{y_n}$ є $\frac{a}{b}$, що й потрібно було довести. ☐

nebayduzhi.math@gmail.com

31. Невизначені вирази

Вище ми розглядали вирази

$$x_n \pm y_n, \quad x_n y_n, \quad \frac{x_n}{y_n} \tag{31.1}$$

і, припускаючи, що варіанти x_n і y_n прямують до скінченних границь (з яких, у разі частки, границя y_n не повинна була дорівнювати нулю), знаходили границі кожного з цих виразів.

Не були розглянуті випадки, коли границі змінних x_n і y_n (одна або обидві) **нескінченні** або, якщо йдеться про частку, коли границя знаменника **нуль**. З цих випадків ми тут розглянемо лише чотири, які становлять деякі важливі та цікаві особливості.

1) Розглянемо спочатку частку $\frac{x_n}{y_n}$ і припустимо, що **обидві змінні x_n і y_n водночас прямують до нуля**. Тут ми вперше стикаємося з особливою обставиною: хоча нам відомі границі x_n і y_n, але про границю їх частки, **не знаючи самих цих варіант**, жодного загального твердження ми зробити не можемо. *Ця границя, залежно від закону зміни обох змінних, може мати різні значення або навіть зовсім не існувати.* Далі ми розглянемо прості приклади, що пояснюють це.

Нехай, скажімо, $x_n = \frac{1}{n^2}$ і $y_n = \frac{1}{n}$; обидві варіанти прямують до нуля. Їх частка $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n}$ також **прямує до нуля**. Якщо ж, навпаки, покласти $x_n = \frac{1}{n}$ і $y_n = \frac{1}{n^2}$, то хоча вони, як і раніше, прямують до нуля, цього разу їх частка $\frac{x_n}{y_n} = n$ **прямує до** ∞. Узявши будь-яке відмінне від нуля число a і побудувавши дві нескінченно малі $x_n = \frac{a}{n}$ і $y_n = \frac{1}{n}$, бачимо, що їх частка **має границю** a (оскільки тотожно дорівнює a).

Нарешті, якщо $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ (обидві мають границею нуль), то відношення $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^{n+1}$ **виявляється зовсім не має границі**.

Отже, тільки знання границь варіант x_n і y_n, **у цьому випадку**, не дає ще змоги судити про поведінку їх частки: необхідно знати самі варіанти, тобто закон їх зміни, і **безпосередньо** досліджувати відношення $\frac{x_n}{y_n}$. Для того, щоб *характеризувати цю особливість, кажуть, що коли* $x_n \to 0$ *і* $y_n \to 0$, *вираз* $\frac{x_n}{y_n}$ *є* ***невизначеністю*** *виду* $\frac{0}{0}$.

2) У випадку, коли **водночас** $x_n \to \pm\infty$ і $y_n \to \pm\infty$, маємо схожу ситуацію. **Не знаючи самих варіант**, загального твердження про поведінку їх відношення зробити неможливо. Цей факт ілюструється прикладами, цілком аналогічними до

nebayduzhi.math@gmail.com

наведених у 1):

$$\begin{array}{lll} x_n = n \to \infty, & y_n = n^2 \to \infty, & \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{n} \to 0; \\ x_n = n^2 \to \infty, & y_n = n \to \infty, & \dfrac{x_n}{y_n} = n \to \infty; \\ x_n = an \to \infty \ (a \neq 0), & y_n = n \to \infty, & \dfrac{x_n}{y_n} = a \to a; \\ x_n = \left(2 + (-1)^{n+1}\right) \cdot n \to \infty, & y_n = n \to \infty, & \dfrac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^{n+1}, \end{array}$$

причому остання варіанта зовсім не має границі.

І в цьому випадку кажуть, що *вираз* $\frac{x_n}{y_n}$ *має* ***невизначеність*** *виду* $\frac{\infty}{\infty}$.

Звернемося до розгляду добутку $x_n \cdot y_n$.

3) **Якщо** x_n **прямує до нуля, тоді як** y_n **прямує до** $\pm\infty$, то, досліджуючи поведінку добутку $x_n y_n$, ми стикаємося з такою ж особливістю, як і в пунктах 1) і 2). Про це свідчать приклади:

$$\begin{array}{lll} x_n = \dfrac{1}{n^2} \to 0, & y_n = n \to \infty, & x_n y_n = \dfrac{1}{n} \to 0; \\ x_n = \dfrac{1}{n} \to 0, & y_n = n^2 \to \infty, & x_n y_n = n \to \infty; \\ x_n = \dfrac{a}{n} \to 0 \ (a \neq 0), & y_n = n \to \infty, & x_n y_n = a \to a; \\ x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \to 0, & y_n = n \to \infty, & x_n y_n = (-1)^{n+1}, \end{array}$$

причому остання варіанта зовсім не має границі.

У зв'язку з цим, якщо $x_n \to 0$ і $y_n \to \infty$, то кажуть, що *вираз* $x_n y_n$ *є* ***невизначеністю*** *виду* $0 \cdot \infty$.

Розглянемо, нарешті, суму $x_n + y_n$.

4) Тут виявляється особливим випадок, коли x_n і y_n прямують до нескінченності **різних знаків**; саме тоді про суму $x_n + y_n$ нічого визначеного сказати не можна, **не знаючи самих варіант** x_n і y_n. Різні можливості, подані тут, ілюструються

прикладами:

$$\begin{aligned}
&x_n = 2n \to +\infty, && y_n = -n \to -\infty, && x_n + y_n = n \to +\infty;\\
&x_n = n \to +\infty, && y_n = -2n \to -\infty, && x_n + y_n = -n \to +\infty;\\
&x_n = n + a \to +\infty, && y_n = -n \to -\infty, && x_n + y_n = a \to a;\\
&x_n = n + (-1)^{n+1} \to +\infty, && y_n = -n \to -\infty, && x_n + y_n = (-1)^{n+1},
\end{aligned}$$

причому остання варіанта зовсім не має границі.

Зважаючи на це, якщо $x_n \to +\infty$ і $y_n \to -\infty$, кажуть, що *вираз* $x_n + y_n$ *має* ***невизначеність*** *виду* $\infty - \infty$.

Отже, поставивши собі завданням визначити границі арифметичних виразів (31.1) використовуючи границі варіант x_n і y_n, з яких вони складені, ми знайшли чотири випадки, коли це зробити неможливо: **невизначеності** виду

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty$$

(Звісно, символи ці **позбавлені всякого числового сенсу**. Кожен з них є лише короткою умовною характеристикою виразів одного із чотирьох видів невизначеності.) У цих випадках доводиться, враховуючи закон зміни варіант x_n і y_n, безпосередньо досліджувати цікавий для нас вираз. Подібне дослідження дістало назву **розкриття невизначеності**. Не завжди воно так просто, як у наведених вище схематичних прикладах. Нижче ми вкажемо кілька дещо цікавіших прикладів цього роду.

32. Приклади на знаходження границь

1) Нехай $p(n)$ буде многочлен, цілий щодо n, зі сталими коефіцієнтами:

$$p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k.$$

Спробуємо знайти його границю. Якби **всі** коефіцієнти цього многочлена були додатні (від'ємні), то відразу було б ясно, що границею $p(n)$ буде $+\infty$ $(-\infty)$. Але в разі коефіцієнтів різних знаків одні члени прямують до $+\infty$, інші до $-\infty$, і очевидна **невизначеність** виду $\infty - \infty$.

Для розкриття цієї невизначеності представимо $p(n)$ у вигляді:

$$p(n) = n^k \left(a_0 + \frac{a_1}{n^1} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{n^k} \right).$$

Оскільки всі доданки в дужках, починаючи з другого, в міру зростання n будуть нескінченно малі, то вираз у дужках має границю a_0; перший же множник прямує до $+\infty$. Отже весь вираз прямує до $+\infty$ або $-\infty$, залежно від знака a_0.

Усунення “невизначеності” **перетворенням** цього виразу (чим ми тут і скористалися) часто застосовується для розкриття невизначеності.

2) Якщо $q(n)$ — це такий самий многочлен

$$q(n) = b_0 n^t + b_1 n^{t-1} + \dots + b_{t-1} n + b_k,$$

то частка $\dfrac{p(n)}{q(n)}$ в міру зростання n буде мати невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Перетворюючи і тут кожен з многочленів так, як це зроблено в 1), отримаємо:

$$\frac{p(n)}{q(n)} = n^{k-t} \cdot \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{n} + \dots + \dfrac{a_k}{n^k}}{b_0 + \dfrac{b_1}{n} + \dots + \dfrac{b_t}{n^t}}$$

Другий множник тут має скінченну границю $\dfrac{a_0}{b_0}$. Якщо степені обох многочленів рівні: $k = t$, така ж буде і границя відношення $\dfrac{p(n)}{q(n)}$. (Так можна було б отримати границю $\frac{1}{3}$ в пр. 25.4.) Якщо $k > t$, то перший множник прямує до $+\infty$, так що це відношення прямує до $\pm\infty$, залежно від знака $\dfrac{a_0}{b_0}$. Нарешті, якщо $k < t$, то перший множник, а з ним і весь вираз, прямує до нуля.

3) Знайти об’єм V трикутної піраміди $SABC$ (рис. 32.1).

Розділивши висоту H піраміди на n рівних частин, проведемо через точки ділення площини, паралельні площині основи. У перерізі отримуємо трикутники, подібні до основи. Побудуємо на них систему вхідних і вихідних призм; з перших складеться тіло з об’ємом V_n, а з других — тіло з об’ємом V'_n, причому очевидно, що

$$V_n < V < V'_n$$

Але різниця $V'_n - V'$ є не що інше, як об’єм нижньої вихідної призми з основою $\triangle ABC$ і висотою $\dfrac{H}{n}$. Позначимо площу $\triangle ABC$ через Q: $Q = S_{\triangle ABC}$. Отже, різниця

$$V'_n - V_n = Q \cdot \frac{H}{n} \to 0,$$

коли n зростає, а тоді тим більше прямують до нуля і різниці $V - V_n$ та $V'_n - V$, тобто

$$V = \lim V_n = \lim V'_n.$$

Знайдемо тепер вираз для V'_n. Ми маємо тут тіло, складене з ряду вихідних призм; з властивості перерізів піраміди, площі їх основ, відповідно, будуть дорівнювати:

$$\frac{1^2}{n^2}Q, \quad \frac{2^2}{n^2}Q, \quad \dots, \quad \frac{i^2}{n^2}Q, \quad \dots, \quad \frac{n^2}{n^2}Q = Q,$$

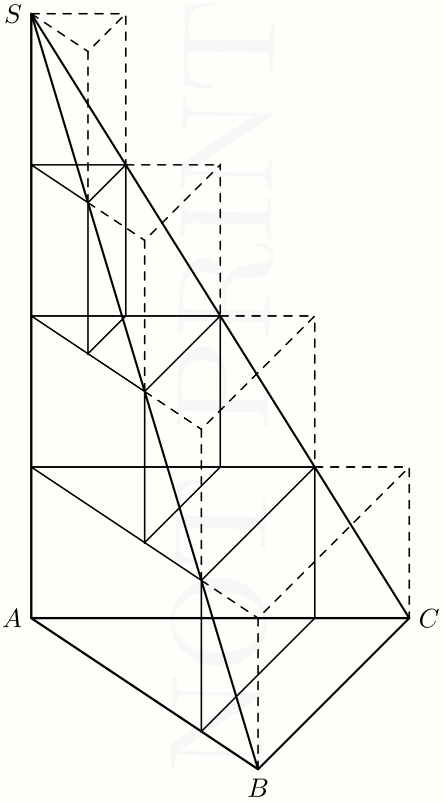


Рис. 32.1

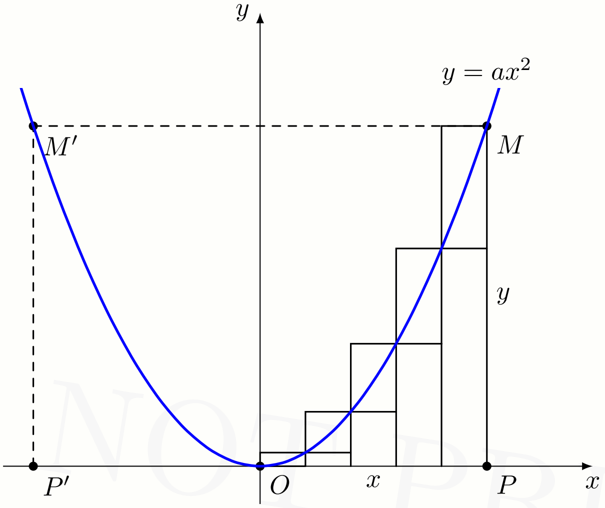


Рис. 32.2

тоді як висота в усіх одна й та сама: $\dfrac{H}{n}$. Тому

$$V'_n = \frac{Q}{n^2}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \cdot \frac{H}{n} = \frac{QH}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{QH}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2},$$

так що

$$V = \lim V'_n = \frac{QH}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{QH}{3}.$$

(Тут ми використовуємо відому формулу для суми квадратів перших n натуральних чисел.)

4) Знайти площу Q фігури OPM, що утворена частиною OM параболи $y = ax^2$ $(a > 0)$, відрізком OP осі x та відрізком PM (рис. 32.2). Розіб'ємо відрізок OP на n рівних частин і побудуємо на них ряд вхідних і вихідних прямокутників. Площі Q_n і Q'_n складених із цих ступінчастих фігур відрізняються площею $\frac{x}{n} \cdot y$ найбільшого прямокутника. Звідси, як і в 3), різниця $Q'_n - Q_n \to 0$ і, оскільки

$$Q_n < Q < Q'_n,$$

то очевидно, що

$$Q = \lim Q_n = \lim Q'_n.$$

Оскільки висоти окремих прямокутників — це ординати точок параболи з абсцисами

$$\frac{1}{n}x, \quad \frac{2}{n}x, \quad \dots, \quad \frac{i}{n}x, \quad \dots, \quad \frac{n}{n}x = x,$$

і, за рівнянням кривої, величина ординати дорівнює, відповідно,

$$a \cdot \frac{1^2}{n^2}x^2, \quad a \cdot \frac{2^2}{n^2}x^2, \quad \dots, \quad a \cdot \frac{i^2}{n^2}x^2, \quad \dots, \quad a \cdot \frac{n^2}{n^2}x^2,$$

то для Q'_n отримуємо вираз

$$Q'_n = \frac{ax^2}{n^2}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \cdot \frac{x}{n} = \frac{ax^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

Звідси

$$Q = \lim Q'_n = \frac{ax^3}{3} = \frac{x \cdot ax^2}{3} = \frac{xy}{3}.$$

Спираючись на це, легко отримати, що площа параболічного сегмента $M'OM$ дорівнює $\frac{4}{3}xy$, тобто двом третинам площі описаного прямокутника $M'P'PM$. (Цей результат був відомий ще Архімедесу).

Загальне **означення** площі криволінійної фігури буде наведене лише в розд. 338 (другий том); там же застосований тут метод **обчислення** площі буде узагальнений на інші криволінійні фігури.

5) Довести, що для $0 < k < 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \left[(n+1)^k - n^k\right] = 0.$$

Ми маємо тут невизначеність виду $\infty - \infty$. Перетворимо, виносячи n^k за дужки:

$$0 < (n+1)^k - n^k = n^k \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1\right] < n^k \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right] = \frac{1}{n^{1-k}}.$$

Оскільки $\frac{1}{n^{1-k}} \to 0$, то й $(n+1)^k - n^k \to 0$, що й потрібно було довести.

6) Знайти границю варіанти

$$x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right),$$

що є (згідно з попереднім прикладом) невизначеністю виду $\infty \cdot 0$.

Помножуючи і ділячи на суму коренів $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, перетворимо цей вираз на невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$:

$$x_n = \sqrt{n} \cdot \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}};$$

нарешті, ділимо чисельник і знаменник на $\sqrt{n}$:

$$x_n = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}.$$

Очевидно

$$1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n};$$

оскільки вираз праворуч прямує до 1, то це ж справедливо і щодо кореня. Остаточно,

$$\lim x_n = \frac{1}{2}.$$

7) Знайти границі варіант:

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, \quad y_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

і, нарешті,

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Варіанти x_n і y_n мають невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$ (оскільки обидва корені $> n$, то вони прямують до ∞). Перетворимо, ділячи чисельник і знаменник на n:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}, \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Оскільки обидва корені в знаменнику мають границю 1 (порівняйте з попереднім прикладом), то $x_n \to 1$ і $y_n \to 1$.

Вираз для z_n має своєрідну форму: кожен доданок цієї суми залежить від n, **але й число їх зростає разом з** n (цю ж особливість, втім, мали й вирази для V'_n і Q'_n в 3), 4)). Оскільки кожен доданок менший від першого і більший від останнього, то

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < z_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{тобто } x_n < z_n < y_n.$$

Але (згідно з уже знайденим) варіанти x_n і y_n прямують до спільної границі 1; отже, за теор. 28.3, до тієї ж границі прямує і варіанта z_n.

8) Нехай дано m додатних чисел

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_m.$$

Нехай A — **найбільше** з них. Довести, що

$$\lim \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = A.$$

Висновок цей випливає з очевидних нерівностей (дивіться пр. 25.5).

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} &= \sqrt[n]{A^n + (\dots)} \geqslant A; \\ \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} &\leqslant \sqrt[n]{A^n + A^n + \dots + A^n} = A \cdot \sqrt[n]{m}; \\ A \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} &\leqslant A \cdot \sqrt[n]{m} \to A \cdot 1. \end{aligned}$$

9) Ми бачили в розд. 27, що якщо $a > 1$, то степінь $a^n \to +\infty$ (зі зростанням n). Дослідимо тепер поведінку відношення

$$\frac{a^n}{n^k}$$

(де $k > 0$), що має невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Отримаємо одну допоміжну нерівність (порівняйте з нерівністю Я. Бернуллі (19.3)). Поклавши $a = 1 + \lambda,\ \lambda > 0$, маємо за формулою бінома Ньютена:

$$a^n = (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \ldots > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2.$$

Оскільки для $n > 2$ очевидно $n - 1 > \frac{n}{2}$, то остаточно

$$a^n > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 > \frac{n^2}{4}\lambda^2 = \frac{(a-1)^2}{4}n^2. \tag{32.1}$$

Для $k = 1$, отримуємо відразу

$$\frac{a^n}{n} > \frac{(a-1)^2}{4}n,$$

так що

$$\lim \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

Оскільки цей результат справедливий для будь-якого $a > 1$, то, узявши $k > 1$, можемо написати (принаймні для досить великих n)

$$\frac{a^n}{n^k} = \left[\frac{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}{n}\right]^k > \frac{\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n}{n},$$

звідки

$$\lim \frac{a^n}{n^k} = +\infty \quad (a > 1).$$

Доведений так для $k \geqslant 1$, цей результат **тим більше** буде справедливий і для $k < 1$.

10) Можна скористатися тією ж нерівністю (32.1), щоб довести, що

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

Саме, взявши $a = \sqrt[n]{n}$, отримаємо

$$n > \frac{n^2}{4}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2,$$

звідки

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

що й приводить до необхідного результату.

11) Тепер ми можемо отримати й іншу цікаву границю

$$\lim \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1).$$

Тут ми знову маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, бо, як легко показати, $\log_a n \to +\infty$.

Справді, якщо взяти довільне число $\varepsilon > 0$, то оскільки $a^\varepsilon > 1$, для досить великих n буде (теор. 26.1)

$$\sqrt[n]{n} < a^\varepsilon.$$

Логарифмуючи за основою a, отримаємо

$$\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon,$$

звідки і випливає твердження.

33. Теорема Штольца та її застосування

Для знаходження границь невизначених виразів $\frac{x_n}{y_n}$ типу $\frac{\infty}{\infty}$ часто буває корисна наступна теорема, що належить Штольцу (австр. Otto Stolz, О́тто Што́льц). В окремому випадку, коли $y_n = n$, ми знаходимо цю теорему ще в Коші (фр. Augustin-Louis Cauchy, Оґюста́ Коші́).

Теорема 33.1 (Теорема Штольца). *Нехай варіанта* $y_n \to +\infty$, *причому — хоча б починаючи з деякого місця — зі зростанням* n *і* y_n *зростає:* $y_{n+1} > y_n$. *Тоді*

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

якщо тільки існує границя справа (скінченна або навіть нескінченна).

Доведення. Припустимо спочатку, що ця границя дорівнює **скінченному** числу L:

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = L.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Тоді для будь-якого заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що для $n > N$ буде

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

або

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < L + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значить, хоч би яке $n > N$ взяти, всі дроби

$$\frac{x_{N+1} - x_N}{y_{N+1} - y_N}, \quad \frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \quad \dots, \quad \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}}, \quad \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

лежать між цими межами. Оскільки знаменники їх, зважаючи на зростання y_n разом з номером n, додатні, то між тими ж межами міститься і дріб

$$\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N},$$

чисельник якого — це сума всіх чисельників, написаних вище дробів, а знаменник — сума всіх знаменників.

Зауваження. За властивістю медіанти двох дробів,

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d}, \quad c > 0, \quad d > 0,$$

маємо

$$\frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}.$$

Це випливає з:

$$\frac{a+b}{c+d} - \frac{a}{c} = \frac{bc - ad}{c(c+d)} = \frac{d}{c+d} \cdot \frac{bc - ad}{cd} = \frac{d}{c+d}\left(\frac{b}{d} - \frac{a}{c}\right) > 0$$

і

$$\frac{b}{d} - \frac{a+b}{c+d} = \frac{bc - ad}{d(c+d)} = \frac{c}{c+d} \cdot \frac{bc - ad}{cd} = \frac{c}{c+d}\left(\frac{b}{d} - \frac{a}{c}\right) > 0.$$

Отже, для $n > N$

$$\left|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Напишемо тепер тотожність (яку легко безпосередньо перевірити):

$$\frac{x_n}{y_n} - L = \frac{x_N - L \cdot y_N}{y_n} + \left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right)\left(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - L\right),$$

де $0 < \dfrac{y_N}{y_n} < 1$, оскільки y_n зростає.

Отже,

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - L\right| \leqslant \left|\frac{x_N - L \cdot y_N}{y_n}\right| + \left|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - L\right|.$$

Другий доданок праворуч, як ми бачили, для $n > N$ стає $< \frac{\varepsilon}{2}$; перший же доданок, зважаючи на те, що $y_n \to +\infty$, також буде $< \frac{\varepsilon}{2}$, скажімо, для $n > N'$. Якщо при цьому взяти $N' > N$, то для $n > N'$ очевидно

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - L\right| < \varepsilon,$$

що й доводить наше твердження.

Випадок нескінченної границі зводиться до вже розглянутої скінченної границі. Нехай, наприклад,

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty.$$

Звідси насамперед випливає, що (для досить великих n)

$$x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1},$$

отже, разом з y_n і $x_n \to +\infty$, причому варіанта x_n зростає зі зростанням номера n. У такому разі доведену теорему можна застосувати до **оберненого** відношення $\frac{y_n}{x_n}$:

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = \lim \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0$$

(бо тут границя вже **скінченна**), звідки й випливає, що

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty,$$

що й потрібно було довести. □

Звернемося знову до **прикладів**.

12) Ми бачили вже в пр. 32.9, що для $a > 1$

$$\lim \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

Цей результат за допомогою теореми Штольца випливає відразу:

$$\lim \frac{a^n}{n} = \lim \left(a^n - a^{n-1}\right) = \lim a^n \left(1 - \frac{1}{a}\right) = +\infty.$$

Те саме стосується і пр. 32.11.

13) Застосуємо теорему Штольца для доведення наступного цікавого твердження (Коші).

Теорема 33.2 (Теорема Коші). *Якщо варіанта a_n має границю (скінченну або нескінченну), то ту саму границю має і варіанта*

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

(“середнє арифметичне” перших n значень варіанти a_n).

Доведення. Справді, вважаючи в теоремі Штольца

$$x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad y_n = n,$$

маємо:

$$\lim b_n = \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \frac{(a_1 + \dots + a_n) - (a_1 + \dots + a_{n-1})}{n - (n-1)} = \lim a_n.$$

□

Наприклад, якщо ми знаємо (дивіться пр. 32.10), що $\sqrt[n]{n} \to 1$, то й

$$\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \to 1.$$

14) Розглянемо тепер варіанту (вважаючи k натуральним)

$$z_n = \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}},$$

яка є невизначеністю виду $\frac{\infty}{\infty}$.

Вважаючи в теоремі Штольца

$$x_n = 1^k + 2^k + \dots + n^k, \quad y_n = n^{k+1},$$

матимемо

$$\lim z_n = \lim \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}.$$

Але

$$(n-1)^{k+1} = n^{k+1} - (k+1)n^k + \dots,$$

так що

$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = (k+1)n^k + \dots$$

та (дивіться пр. 32.2)

$$\lim z_n = \lim \frac{n^k}{(k+1)n^k + \dots} = \frac{1}{k+1}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

15) На закінчення визначимо границю варіанти

$$u_n = n\left(z_n - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}\,,$$

що має в першій формі невизначеність виду $\infty \cdot 0$, а в другій — невизначеність виду $\infty - \infty$. Зробивши віднімання дробів, отримаємо цього разу невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$:

$$u_n = \frac{(k+1)(1^k + 2^k + \dots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)n^k}.$$

Вважаючи x_n рівним чисельнику цього дробу, а y_n — знаменнику, застосуємо ще раз ту ж саму теорему. Отримаємо

$$\lim u_n = \lim \frac{(k+1)n^k - (n^{k+1} - (n-1)^{k+1})}{(k+1)\left(n^k - (n-1)^k\right)}.$$

Але

$$(k+1)n^k - (n^{k+1} - (n-1)^{k+1}) = \frac{(k+1)k}{2} n^{k-1} + \dots\,,$$

а

$$n^k - (n-1)^k = kn^{k-1} + \dots\,,$$

отже (дивіться пр. 32.2), остаточно,

$$\lim u_n = \lim \frac{\frac{(k+1)k}{2} n^{k-1} + \dots}{(k+1)\left(kn^{k-1} + \dots\right)} = \frac{1}{2}\,.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

1.3. Монотонна варіанта

34. Границя монотонної варіанти

Теореми про існування границь варіант, наведені досі, мали такий характер: припускаючи, що для одних варіант границі існують, отримували існування границь для інших варіант, так чи інакше пов'язаних із першими. Питання про ознаки існування скінченної границі для **заданої** варіанти, безвідносно до інших змінних, не ставилося. Залишаючи розв'язання цього питання в загальному вигляді до розд. 39 – розд. 42, ми розглянемо тут один простий і важливий окремий клас змінних, для яких воно розв'язується легко.

Варіанта x_n називається **зростаючою**, якщо

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots,$$

тобто якщо з $n' > n$ випливає $x_{n'} > x_n$. Її називають **неспадною**, якщо

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots,$$

тобто якщо з $n' > n$ випливає $x_{n'} \geqslant x_n$. Можна і в останньому випадку називати змінну зростаючою, якщо надати цьому терміну ширший зміст.

Аналогічно дається поняття **спадної** варіанти, у вузькому чи широкому значенні слова: так називається варіанта, для якої, відповідно,

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots$$

або

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \ldots$$

так що з $n' > n$ випливає $x_{n'} < x_n$ або лише $x_{n'} \leqslant x_n$.

Змінні всіх цих типів, що змінюються в одному напрямку, поєднуються під загальною назвою: **монотонні**. Зазвичай про варіанту говорять, що вона "монотонно зростає" або "монотонно спадає".

Щодо до монотонних варіант справедлива така, фундаментальної важливості, теорема.

Теорема 34.1. *Якщо монотонно зростаюча варіанта x_n обмежена зверху:*

$$x_n \leqslant M \quad (M = \text{const}; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

*то вона необхідно має **скінченну** границю; якщо вона не обмежена зверху, то вона прямує до $+\infty$.*

Так само завжди має границю і монотонно спадна варіанта x_n. Її границя скінченна, якщо вона обмежена знизу:

$$x_n \geqslant m \quad (m = \text{const}; \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

інакше її границя $-\infty$.

Доведення. Обмежимося випадком **зростаючої**, хоча б у широкому розумінні, варіанти x_n (випадок спадної варіанти доводиться аналогічно).

Припустимо спочатку, що ця змінна обмежена зверху. Тоді, за теор. 11.1, для множини $\{x_n\}$ її значень повинна існувати і (скінченна) **точна** верхня межа:

$$a = \sup\{x_n\};$$

як ми покажемо, саме **це число** a **і буде границею варіанти** x_n .

Згадаємо характерні властивості точної верхньої межі (розд. 11). По-перше, для всіх значень n буде

$$x_n \leqslant a.$$

По-друге, хоч би яке взяти число $\varepsilon > 0$, знайдеться такий номер N, що

$$x_N > a - \varepsilon.$$

Оскільки, зважаючи на монотонність нашої варіанти (тут ми вперше на це спираємося), для $n > N$ буде $x_n \geqslant x_N$, тобто і $x_n > a - \varepsilon$, то для цих значень номера n виконуються нерівності

$$0 \leqslant a - x_n < \varepsilon \quad \text{або} \quad |x_n - a| < \varepsilon,$$

звідки й випливає, що $\lim x_n = a$.

Нехай тепер варіанта x_n, не обмежена зверху. Тоді, хоч яке було б велике число $E > 0$, знайдеться хоч одне значення нашої змінної, більше за E; нехай це буде x_N: $x_N > E$. Зважаючи на монотонність варіанти x_n, для $n > N$ і тим паче

$$x_n > E,$$

а це й означає, що $\lim x_n = +\infty$. □

Легко зрозуміти, що всі висновки залишаються справедливими і для варіанти, яка лише починаючи з деякого місця стає монотонною (бо без впливу на границю варіанти будь-яке число перших її значень можна відкинути).

Звернемося до прикладів застосування теореми.

35. Приклади

1) Розглянемо варіанту (вважаючи $c > 0$)

$$x_n = \frac{c^n}{n!},$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. (Вона для $c > 1$ має невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$.)

Оскільки

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{c}{n+1},$$

то, як тільки $n > c - 1$, змінна стає спадною; водночас знизу вона обмежена, наприклад нулем. Отже, за теоремою, варіанта x_n має **скінченну** границю, яку ми позначимо через a.

Щоб знайти її, перейдемо до границі в написаній вище рівності; оскільки x_{n+1} пробігає ту ж послідовність значень, що і x_n (з точністю до першого члена) і має ту саму границю a, то ми отримаємо

$$a = a \cdot 0,$$

звідси $a = 0$ і, остаточно,

$$\lim \frac{c^n}{n!} = 0.$$

2) Вважаючи знову $c > 0$, визначимо тепер варіанту x_n так:

$$x_1 = \sqrt{c}\,, \quad x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}\,, \quad x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}\,, \quad ...$$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}}}_{\text{n коренів}}.$$

Отже, x_{n+1} випливає з x_n за формулою

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}\,.$$

Зрозуміло, що варіанта x_n монотонно зростає. Водночас вона обмежена зверху, наприклад, числом $\sqrt{c}+1$. Справді, $x_1 = \sqrt{c}$ менше від цього числа; якщо припустити тепер, що якесь значення $x_n < \sqrt{c} + 1$, то і для наступного значення отримуємо

$$x_{n+1} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1.$$

Отже, наше твердження справедливе за методом математичної індукції.

За основною теоремою, варіанта x_n має деяку **скінченну** границю a. Для знаходження її перейдемо до границі в рівності

$$x_{n+1}^2 = c + x_n$$

і ми отримаємо, що a задовольняє квадратне рівняння

$$a^2 = c + a.$$

Рівняння це має корені різних знаків; але границя, що цікавить нас, не може бути від'ємною, отже, дорівнює саме **додатному** кореню:

$$a = \frac{\sqrt{4c+1}+1}{2}.$$

3) Взявши будь-яке $x_0,\ 0 < x_0 < 1$, визначимо варіанту x_n рекурентним співвідношенням

$$x_{n+1} = x_n(2 - x_n).$$

Припустимо, що $0 < x_n < 1$ (ця умова для $n = 0$ виконана). Покажемо, що

$$0 < x_n < x_{n+1} < 1.$$

Справді, оскільки $2 - x_n > 1$, то $x_{n+1} > x_n$; але $x_n(2 - x_n) = 1 - (1 - x_n)^2$, звідки $x_{n+1} < 1$. Отже, методом математичної індукції доведено, що варіанта x_n монотонно зростає і залишається меншою від одиниці; тому вона має скінченну границю $a \neq 0$. Переходячи до границі в рекурентному співвідношенні, знайдемо, що $a = 1$. Отже, $\lim x_n = 1$.

Надамо читачеві самому розібратися в тому, що станеться, якщо взяти x_0 поза проміжком $(0, 1)$.

Зауваження. Нехай c — будь-яке додатне число, і візьмемо $x_n = cy_n$. Написане вище рекурентне співвідношення заміниться таким:

$$y_{n+1} = y_n(2 - cy_n).$$

Взявши початкове значення y_0, таке що $0 < y_0 < \frac{1}{c}$, отримаємо, що y_n монотонно зростає і прямує до $\frac{1}{c}$. За цією схемою на обчислювальних машинах і обчислюється число, обернене до c.

4) Нехай маємо два додатні числа a і b $(a > b)$. Складемо їх середнє арифметичне та середнє геометричне:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$

Відомо, що перше середнє більше за друге; водночас обидва вони містяться **між** початковими числами:

$$a > a_1 > b_1 > b.$$

Це відразу випливає з нерівності

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\left(a-2\sqrt{ab}+b\right)=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{2}>0$$

для $a \neq b$.

Для чисел a_1 і b_1 знову складемо їх середні значення:

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\quad b_2=\sqrt{a_1b_1},$$

причому

$$a_1>a_2>b_2>b_1,$$

і так далі. Якщо числа a_n і b_n вже визначені, то a_{n+1} і b_{n+1} визначаються за формулами

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

і, як і вище,

$$a_n>a_{n+1}>b_{n+1}>b_n.$$

Отже, складаються дві варіанти a_n і b_n, з яких перша виявляється **спадною**, а друга — **зростаючою** (назустріч одна одній). Водночас

$$a>a_n>b_n>b,$$

так що обидві варіанти обмежені і, отже, обидві прямують до скінченних границь:

$$\alpha=\lim a_n \quad \text{і} \quad \beta=\lim b_n.$$

Якщо в рівності

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$$

перейти до границь, то отримаємо

$$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2},$$

звідки $\alpha=\beta$.

Отже, обидві послідовності, і середніх арифметичних a_n, і середніх геометричних b_n, прямують до спільної границі $\mu=\mu(a,b)$ (ще позначають як $amg(a,b)$); слідуючи за Ґауссом (нім. Carl Friedrich Gauß, Ка́рл Ґа́усс), його називають **середнім арифметико-геометричним** (**arithmetic-geometric mean**) початкових чисел a і b. Вираз числа $\mu(a,b)$ через ці останні поки нам недоступний — для нього потрібен так званий **еліптичний інтеграл** (дивіться другий том, розд. 293, розд. 315). Варто зазначити, що $\mu(k\cdot a,\ k\cdot b)=k\cdot\mu(a,b),\ k\geqslant 0$.

5) Використовуючи знову два додатні числа a і b $(a>b)$, цього разу будемо послідовно складати середні арифметичні та середні гармонічні.

$$\begin{aligned}
&a_1=\frac{a+b}{2},\quad b_1=\frac{2ab}{a+b},\\
&a_2=\frac{a_1+b_1}{2},\quad b_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1},\\
&\ldots\\
&a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Число c називається **середнім гармонічним** двох додатних чисел a і b, якщо **обернене** до нього число $\frac{1}{c}$ є середнім арифметичним для обернених чисел $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$:

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),\quad\text{звідки}\quad c=\frac{2ab}{a+b}.$$

З відомої вже нам нерівності $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ (де $a\neq b$) отримуємо:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2>ab,\ \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)>ab,\ \text{і, нарешті,}\ \frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b},$$

так що середнє арифметичне більше від середнього гармонічного; до того ж обидва середні містяться між початковими числами. Застосовуючи це до a_n і b_n, знайдемо:

$$a_n>a_{n+1}>b_{n+1}>b_n.$$

Цілком аналогічно до того, як це зроблено в попередньому прикладі, переконаємося в тому, що обидві варіанти a_n і b_n прямують до спільної границі c, яку можна було б назвати **середнім арифметико-гармонічним** чисел a і b:

$$\lim a_n=c,\quad \lim b_n=c.$$

Однак тут границя має просте вираження через a і b. Власне, бачимо, що $a_1b_1=ab$; оскільки, аналогічно, і $a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n$, то робимо висновок, що для всіх значень n

$$a_nb_n=ab.$$

Переходячи тут до границі, отримуємо

$$c=\sqrt{ab},$$

nebayduzhi.math@gmail.com

тобто **середнє арифметико-гармонічне** двох чисел просто є їхнє **середнє геометричне**.

Нарешті, наведемо складніший приклад.

6) Візьмемо деяке дійсне число c, нехай $x_1 = \frac{c}{2}$, а наступні значення варіанти x_n визначимо формулою:

$$x_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{x_n^2}{2}. \tag{35.1}$$

Дослідимо питання границі цієї варіанти за двох різних припущень щодо c.

Зауважимо, що, якби ми наперед знали, що існує скінченна границя

$$a = \lim x_n, \tag{35.2}$$

то знайти її не було б складно. Варто лише перейти до границь в рівності (35.1), яка визначає нашу варіанту, щоб отримати

$$a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \quad \text{або} \quad a^2 - 2a + c = 0.$$

З цього квадратного рівняння знаходимо

$$a = 1 \underset{(+)}{-} \sqrt{1-c}. \tag{35.3}$$

Звідси відразу видно, що варіанта x_n **не може** мати скінченної границі, коли $c > 1$.

а) Припустимо спочатку, що $0 < c \leqslant 1$. Тоді ясно, що $x_n > 0$. Віднімаючи від (35.1) почленно аналогічну рівність

$$x_n = \frac{c}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2},$$

матимемо

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{2}.$$

Очевидно $x_2 > x_1 = \frac{c}{2}$; а з попередньої рівності випливає, що тільки-но $x_n > x_{n-1}$, відразу ж і $x_{n+1} > x_n$. Отже, методом математичної індукції можна довести, що варіанта x_n монотонно зростає.

Аналогічно доводиться обмеженість (зверху) нашої варіанти:

$$x_n < 1.$$

Ця нерівність очевидна для $n = 1$; якщо ж вона справедлива для якого-небудь значення n, то буде справедлива і для $n+1$ (35.1). Значить, границя (35.2) справді існує, а тоді вона виражається формулою (35.3), і саме зі знаком мінус при корені, оскільки границя ця не може бути більшою від одиниці.

б) Нехай тепер $-3 \leqslant c < 0$. Очевидно, що для всіх n:

$$x_n \geqslant \frac{c}{2}.$$

Покажемо, що в цьому випадку $x_n < 0$. Це справедливо для $n = 1$; якщо ж допустити справедливість цього твердження для якого-небудь значення n, то

$$|x_n| \leqslant \frac{|c|}{2}, \quad x_n^2 \leqslant \frac{|c|^2}{4} < |c| \quad \left(\text{оскільки } \frac{|c|}{4} < 1\right),$$

і x_{n+1} матиме знак $\frac{c}{2}$, тобто буде від'ємний, що й потрібно було довести.

На цей раз варіанта x_n **не буде монотонна**. Однак, якщо покласти в (35.1) $n = 2k$ і $2k-2$, а потім $n = 2k+1$ і $2k-1$, і в обох випадках почленно відняти, то отримаємо:

$$\begin{aligned} x_{2k+1} - x_{2k-1} &= \frac{x_{2k}^2 - x_{2k-2}^2}{2}, \\ x_{2k+2} - x_{2k} &= \frac{x_{2k+1}^2 - x_{2k-1}^2}{2}. \end{aligned} \tag{35.4}$$

Звідси можна індуктивно зробити висновок, що завжди

$$x_{2k+1} > x_{2k-1} \quad \text{і} \quad x_{2k+2} < x_{2k}.$$

Справді, $x_3 > x_1 = \frac{c}{2}$; тоді $|x_3| < |x_1|$, $x_3^2 < x_1^2$, і за другою з формул (35.4) (для $k = 1$) буде $x_4 < x_2$. Отже, $|x_4| > |x_2|$, $x_4^2 > x_2^2$, і за першою з формул (35.4) (для $k = 2$) вийде $x_5 > x_3$, і так далі.

Отже, у цьому випадку, монотонними будуть **порізно взяті** варіанти x_{2k-1} і x_{2k} ($k = 1, 2, 3, \ldots$); оскільки вони містяться між скінченними межами $\frac{c}{2}$ і 0, то обидві мають скінченні границі

$$a' = \lim x_{2k-1}, \quad a'' = \lim x_{2k}.$$

Залишається показати, що $a' = a''$. З цією метою спрямуємо n в (35.1) до нескінченності, спочатку через парні значення, а потім через непарні. Ми отримаємо на границі два співвідношення:

$$a' = \frac{c}{2} + \frac{(a'')^2}{2}, \quad a'' = \frac{c}{2} + \frac{(a')^2}{2}. \tag{35.5}$$

Віднімаючи, виключимо c:

$$(a' - a'')(a' + a'' + 2) = 0,$$

Як ми покажемо зараз, якщо $c > -3$, другі дужки дорівнювати 0 не можуть, тому необхідно $a' = a''$. Справді, інакше, підставляючи $a'' = -a' - 2$ в друге із співвідношень (35.5), ми отримали б для a' квадратне рівняння

$$a'^2 + 2a' + (4 + c) = 0,$$

яке, саме для $c > -3$, дійсних коренів мати не може.

Нарешті, якщо $c = -3$, другі дужки дорівнюють 0 водночас з першими, бо в цьому випадку і $a' = -1$, і $a'' = -1$.

Отже, у всіх випадках $a' = a''$. Позначивши спільне значення цих границь через a, маємо для a вираз (35.3) очевидно знову зі знаком мінус при корені, бо границя від'ємної варіанти x_n не може бути додатною.

Наведені приклади дають підстави для наступного **зауваження.** Доведена теорема — це типова “теорема існування”: в ній доводиться існування границі, але не дається ніякого засобу для її обчислення. Проте вона має дуже важливе значення. З одного боку, у теоретичних питаннях часто потрібне лише існування границі. З іншого боку, у багатьох випадках можливість попередньо переконатися в існуванні границі важлива тим, що відкриває шляхи для її фактичного обчислення. У прикладах 1), 2), 3), 5), 6) *саме знання факту існування границі дало змогу, за допомогою переходу до границі в деяких рівностях, отримати точне значення границі.*

У цьому плані особливо повчальний приклад 6б. Адже для $c < -3$ вираз (35.3) зберігає сенс, але це зовсім не означає, що він продовжує давати границю варіанти x_n; навпаки, вона тут не існує: наприклад, як нескладно перевірити, для $c = -4$ наша варіанта пробігає послідовність значень:

$$-2, \quad 0, \quad -2, \quad 0, \quad -2, \quad 0, \quad \ldots$$

і ніякої границі немає.

У прикладі 4) ми виразу для границі не маємо, але, знаючи, що границя існує, ми легко можемо її обчислити з будь-якою точністю, бо вона міститься між варіантами a_n і b_n, які до неї прямують з обох сторін.

У наступному розділі ми познайомимося з ще одним важливим прикладом застосування теореми про монотонну варіанту.

36. Число e

Ми використовуємо тут граничний перехід для знаходження нового **числа**, що досі нам не траплялося.

Розглянемо варіанту

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

і спробуємо застосувати до неї теор. 34.1.

Оскільки зі **зростанням** показника n основа степеня тут **зменшується**, то “монотонний” характер варіанти безпосередньо не помітно. Для того щоб переконатися в ньому, застосуємо розкладання за формулою бінома:

$$\begin{aligned} x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots \\ \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} = \\ = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\ \cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots \\ \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{36.1}$$

Якщо від x_n перейти тепер до x_{n+1}, тобто збільшити n на одиницю, то насамперед додасться новий, $(n+2)$-й (**додатний**) член; кожен же з написаних $n+1$ членів **збільшиться**, бо будь-який множник у дужках виду $1-\frac{s}{n}$ заміниться **більшим** множником $1-\dfrac{s}{n+1}$. Звідси й випливає, що

$$x_{n+1} > x_n,$$

тобто варіанта x_n **зростаюча**.

Тепер покажемо, що вона ще й **обмежена зверху**. Опустивши у виразі (36.1) усі множники в дужках, ми цим збільшимо його, так що

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = y_n$$

Замінивши, далі, кожен множник у знаменниках дробів (починаючи з 3) числом 2, ми ще **збільшимо** отриманий вираз. Отже,

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Але прогресія (що починається членом $\frac{1}{2}$) має суму, яка < 1, тому $y_n < 3$, та $x_n < 3$.

Звідси вже випливає, за теор. 34.1, що варіанта x_n має скінченну границю. За прикладом Ойлера (швейц. Leonhard Euler, Леона́рд О́йлер), цю границю завжди позначають буквою e. Це число

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{36.2}$$

має виняткову важливість як для самого аналізу, так і для його застосування. Ось перші 15 знаків його розкладу в десятковий дріб:

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\ldots$$

У наступному розділі ми покажемо зручний спосіб для наближеного обчислення числа e, а також покажемо, що e — **ірраціональне** число.

Деякі властивості числа e, які ми отримаємо згодом (54.7), роблять особливо вигідним вибір саме цього числа за основу системи логарифмів. Логарифми з основою e називаються **натуральними** і позначаються знаком ln без вказування основи; у теоретичних дослідженнях користуються тільки натуральними логарифмами. Ці логарифми іноді помилково називають логарифмами Нейпіа на честь шотландського математика Нейпіа (шот. John Napier, Джóн Нéйпіа) — винахідника логарифмів. Сам Нейпіа не мав уявлення про основу системи логарифмів (бо будував їх своєрідно, на іншому принципі), але його логарифми відповідають логарифмам з основою, близькою до $\frac{1}{e}$. Близьку до e основу мають логарифми його сучасника Бюрґі (швейц. Jost Bürgi, Йóст Бю́рґі).

Згадаємо, що звичайні, **десяткові**, логарифми пов'язані з натуральними відомою формулою:

$$\lg x = \ln x \cdot M,$$

де M є **модуль переходу** і дорівнює

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} = 0{,}434\,294\ldots;$$

це легко отримати, якщо прологарифмувати з основою 10 тотожність

$$x = e^{\ln x}.$$

37. Наближене обчислення числа e

Повернемося до рівності (36.1). Якщо **зафіксувати** k і, вважаючи $n > k$, відкинути всі члени останньої частини, що йдуть за $(k+1)$-м, то отримаємо **нерівність**

$$x_n > 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Збільшуючи тут n до нескінченності, перейдемо до границі; оскільки всі дужки мають границю 1, то:

$$e \geqslant 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} = y_k.$$

Ця нерівність виконується для будь-якого натурального k. Отже, маємо

$$x_n < y_n \leqslant e,$$

звідки ясно, за теор. 28.3, що й

$$\lim y_n = e.$$

Зауважимо також, що y_n є $(n+1)$-а **часткова сума** для нескінченного ряду (дивіться пр. 25.9)

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots,$$

і написане щойно граничне співвідношення показує, що e — це його **сума**; кажуть також, що число e **розкладається** в цей ряд, і пишуть

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \tag{37.1}$$

Варіанта y_n для наближеного обчислення числа e набагато зручніша, ніж x_n. Оцінимо степінь близькості y_n до e. З цією метою розглянемо спочатку різницю між будь-яким значенням y_{n+m} $(m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$, що йде **після** y_n, і самим y_n. Маємо

$$\begin{aligned} y_{n+m} - y_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+m)!} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+m)}\right\}. \end{aligned}$$

Якщо в дужках $\{\}$ замінити всі множники в знаменниках дробів на $n+2$, то отримаємо **нерівність**

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!}\left\{1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right\},$$

яка лише посилиться, якщо замінити дужки сумою **нескінченної** прогресії:

$$y_{n+m} - y_n < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}.$$

Зберігаючи тут n незмінним, станемо збільшувати m до нескінченності; варіанта y_{n+m} (занумерована значком m) набуває послідовності значень

$$y_{n+1},\ y_{n+2},\ y_{n+3},\ \dots,\ y_{n+m},\ \dots,$$

що очевидно збігається до e. Тому, переходячи до границі, отримуємо

$$e - y_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

або, нарешті,

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n!n},$$

nebayduzhi.math@gmail.com

бо (це легко перевірити) $\dfrac{n+2}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n}$.

Якщо через θ позначити відношення різниці $e - y_n$ до $n!n$ (а $\dfrac{1}{n!n}$ очевидно міститься між 0 і 1), то можна написати також

$$e - y_n = \frac{\theta}{n!n}.$$

Замінюючи тут y_n розгорнутим виразом, ми і прийдемо до важливої формули:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n}, \tag{37.2}$$

яка послужить відправним пунктом для обчислення e. Відкидаючи останній, "додатковий", член і замінюючи кожен із залишених членів його десятковим наближенням, ми отримаємо наближене значення для e.

Тепер за допомогою формули (36.1) обчислимо e, скажімо, з точністю до 10^{-7}. Передусім потрібно з'ясувати, яким взяти число n (що є в нашому розпорядженні), щоб досягти цієї точності.

Обчислюючи послідовно числа, обернені до факторіалів (дивіться табличку, що додається), ми бачимо, що для $n = 10$ "додатковий" член формули (36.1) буде вже

$$\frac{\theta}{n!n} = \frac{\theta}{10!10} < 0{,}000\,000\,03.$$

Тож, відкидаючи його, ми робимо похибку, значно меншу від поставленої межі. Зупинимося на цьому значенні n. Кожен з інших членів запишемо у вигляді десяткового дробу, округлюючи на восьмому знаку так, щоб абсолютне значення похибки було менше від половини одиниці на восьмому місці, тобто менше за $0{,}5 \cdot 10^{-8}$. Ми звели результати обчислень у табличку. Поруч із наближеним числом поставлено знак ($+$ або $-$), що вказує на знак **поправки**, яку необхідно додати для відновлення точного числа.

$$\begin{array}{rl}
 & 2{,}000\,000\,00 \\
\dfrac{1}{2!} = & 0{,}500\,000\,00 \\
\dfrac{1}{3!} = & 0{,}166\,666\,67- \\
\dfrac{1}{4!} = & 0{,}041\,666\,67- \\
\dfrac{1}{5!} = & 0{,}008\,333\,33+ \\
\dfrac{1}{6!} = & 0{,}001\,388\,89- \\
\dfrac{1}{7!} = & 0{,}000\,198\,41+ \\
\dfrac{1}{8!} = & 0{,}000\,024\,80+ \\
\dfrac{1}{9!} = & 0{,}000\,002\,76- \\
\dfrac{1}{10!} = & 0{,}000\,000\,28- \\
\hline
 & 2{,}718\,281\,81
\end{array}$$

Отже, як бачимо, поправка на відкидання додаткового члена менша від $\dfrac{3}{10^8}$. Враховуючи тепер ще й поправки на округлення (з їх знаками), легко побачити, що сумарна поправка до отриманого наближеного значення числа e лежить між

$$-\frac{3}{10^8} \quad \text{і} \quad +\frac{5}{10^8}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Звідси саме число e міститься між дробами

$$2{,}718\,281\,78 \quad \text{і} \quad 2{,}718\,281\,86,$$

так що можна вважати

$$e = 2{,}718\,281\,8_{\pm 0{,}000\,000\,1}\,.$$

Зазначимо також, що та ж сама формула (37.2) може служити і для доведення **ірраціональності** числа e.

Розмірковуючи від протилежного, спробуємо припустити, що e дорівнює раціональному дробу $\frac{m}{n}$; тоді, якщо саме для цього n написати формулу (37.2), будемо мати

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n} \quad (0 < \theta < 1).$$

Помноживши обидві частини цієї рівності на $n!$, після скорочення знаменників усіх дробів, **крім останнього**, ми отримаємо зліва **ціле число**, а справа — **ціле число з дробом** $\frac{\theta}{n}$. Отримана суперечність і доводить те, що потрібно.

38. Лема про вкладені проміжки

На закінчення зупинимося на зіставленні двох монотонних варіант, що змінюються “назустріч” одна одній.

Теорема 38.1. *Нехай дані монотонно зростаюча варіанта x_n і монотонно спадна варіанта y_n, причому завжди*

$$x_n < y_n. \tag{38.1}$$

Якщо їхня різниця $y_n - x_n$ прямує до 0, то обидві варіанти мають спільну скінченну границю:

$$c = \lim x_n = \lim y_n.$$

Доведення. Справді, для всіх значень n маємо: $y_n \leqslant y_1$, а значить, зважаючи на (38.1), і $x_n < y_1$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$. Зростаюча змінна x_n, виявляється обмеженою зверху, отже, вона має скінченну границю

$$c = \lim x_n.$$

Аналогічно, для спадної змінної y_n будемо мати

$$y_n > x_n \geqslant x_1,$$

так що і вона прямує до скінченної границі

$$c' = \lim y_n.$$

Але, за теор. 30.1, різниця границь

$$c' - c = \lim y_n - \lim x_n = \lim(y_n - x_n),$$

а це за умовою дорівнює 0, так що $c' = c$. Що й потрібно було довести. □

Доведеному твердженню можна надати іншу форму, в якій воно найчастіше застосовується.

Назвемо **проміжком** $[a, b]$ $(a < b)$ множину всіх чисел (або, як кажуть, "точок") x, що задовольняють нерівності

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Числа ("точки") a і b називаються, відповідно, **лівим і правим кінцями** проміжку, а їх різниця $b - a$ — **довжиною** проміжку. Нескладно побачити, що на числовій осі **проміжку** відповідає **відрізок** (тієї ж довжини).

Домовимося говорити, що проміжок $[a', b']$ міститься в проміжку $[a, b]$ або **вкладений** у нього, якщо всі точки першого проміжку належать до другого або, що те саме, якщо

$$a \leqslant a' < b' \leqslant b.$$

Геометричний зміст цього зрозумілий.

Лема 38.1 (Про вкладені проміжки). *Нехай є нескінченна послідовність вкладених один в одного проміжків*

$$[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots,\ [a_n, b_n],\ \ldots,$$

так що кожен наступний міститься в попередньому, причому довжини цих проміжків прямують до 0 *зі зростанням* n*:*

$$\lim(b_n - a_n) = 0.$$

Тоді кінці a_n *та* b_n *проміжків (з різних боків) прямують до спільної границі*

$$c = \lim a_n = \lim b_n,$$

яка становить єдину точку, спільну для всіх проміжків.

Доведення. Це лише перефразування доведеної вище теореми: за умовою,

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n,$$

так що лівий кінець a_n і правий кінець b_n n-го проміжку відіграють тут роль монотонних варіант x_n, і y_n.

Оскільки a_n прямує до c зростаючи, а b_n — спадаючи, то

$$a \leqslant c \leqslant b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

тобто точка c справді належить до усіх наших проміжків. Водночас іншої, відмінної від c, точки c' з тією ж властивістю бути не може, бо інакше ми мали б

$$b_n - a_n \geqslant |c' - c| > 0,$$

і довжина n-го проміжку не могла б прямувати до 0. □

Згодом нам не раз доведеться спиратися на це твердження, яке ми називатимемо “лемою про вкладені проміжки”.

nebayduzhi.math@gmail.com

1.4. Принцип збіжності. Часткові границі

39. Принцип збіжності

Нехай задана варіанта x_n, що пробігає послідовність значень

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n'},\ \ldots \tag{39.1}$$

Займемося, нарешті, питанням про **загальну ознаку існування скінченної границі** цієї варіанти. Саме означення границі для цієї мети служити не може, бо в ньому фігурує вже та границя, про існування якої йдеться. Нам потрібна ознака, яка використала б лише те, що нам дано, а саме послідовність (39.1) значень варіанти.

Поставлену задачу розв'язує наступна чудова теорема, що належить чеському математику Бользано (чех. Bernard Bolzano, Берна́рд Больза́но) та французькому математику Коші (фр. Augustin-Louis Cauchy, Оґюста́ Коші́); її називають принципом збіжності.

Теорема 39.1 (Принцип збіжності)**.** *Для того щоб варіанта x_n взагалі мала* ***скінченну*** *границю, необхідно і достатньо, щоб для кожного числа $\varepsilon > 0$ існував такий номер N, щоб нерівність*

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon \tag{39.2}$$

виконувалося, як тільки $n > N$ і $n' > N$.

Як бачить читач, суть справи тут у тому, щоб значення змінної безмежно наближалися **одне до одного** в міру зростання їх номерів. Звернемося до доведення.

Доведення. **Необхідність.** Нехай варіанта x_n має певну скінченну границю, скажімо, a. За означенням границі (розд. 23), хоч би яке було число $\varepsilon > 0$, для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ знайдеться такий номер N, що для $n > N$ завжди виконується нерівність

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Візьмемо тепер будь-які два номери $n > N$ і $n' > N$; для них водночас буде

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{і} \quad |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

звідки

$$|x_n - x_{n'}| = |(x_n - a) + (a - x_{n'})| \leqslant |x_n - a| + |a - x_{n'}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Цим необхідність умови доведена.

nebayduzhi.math@gmail.com

Достатність. Нехай умова теореми виконана; потрібно показати, що тоді для варіанти x_n існує певна скінченна границя.

З цією метою зробимо в множині всіх дійсних чисел переріз за таким правилом. До нижнього класу A віднесемо кожне таке дійсне число α, для якого, починаючи з деякого номера, виконується нерівність

$$x_n > \alpha.$$

У верхній клас A' віднесемо всі інші (тобто ті, що не потрапили до A) дійсні числа α'.

Насамперед переконаємося, що ці класи непорожні. Для цього використовуємо умову теореми. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$ та відповідний до нього (в указаному там сенсі) номер N. Якщо $n > N$ та $n' > N$, то виконується (39.2), звідки

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon. \tag{39.3}$$

Тепер ми бачимо, що кожне число $x_{n'} - \varepsilon$ (де $n' > N$) окремо належить до класу A, бо для досить великих n (саме, для $n > N$) x_n його перевищує. З іншого боку, оскільки (для тих самих n) x_n виявляється меншим, ніж будь-яке з чисел вигляду $x_{n'} + \varepsilon$ (для $n' > N$), то жодне таке число очевидно не може належати до A і, отже, належить до класу A'.

Правило, що визначає класи A та A', сформульоване так, що з нього безпосередньо ясно, що **кожне** дійсне число потрапляє в один і лише один із цих класів. Разом з тим кожне число α (з A) менше від кожного числа α' (з A'); адже, для $\alpha > \alpha'$, варіанта x_n, починаючи з деякого місця, перевищила б і α', всупереч означенню чисел α'. Отже, зроблене розбиття множини дійсних чисел на класи є, справді, переріз.

За основною теоремою Дідікінда (теор. 10.1), існує таке дійсне число a (в зазначеній теоремі воно було позначене через β), яке є межовим між числами обох класів:

$$\alpha \leqslant a \leqslant \alpha'.$$

Але, як ми зазначили, для будь-якого $n' > N$ число $x_{n'} - \varepsilon$ є одне з α, а число $x_{n'} + \varepsilon$ — одне з α'. Тому, зокрема,

$$x_{n'} - \varepsilon \leqslant a \leqslant x_{n'} + \varepsilon \quad \text{або} \quad |a - x_{n'}| = |x_{n'} - a| \leqslant \varepsilon$$

для будь-якого $n' > N$. За означенням границі розд. 23, це й означає, що

$$a = \lim x_n.$$

Теорему доведено. □

Застосування цієї ознаки ми не раз ще побачимо далі.

40. Часткові послідовності та часткові границі

Розглянемо тепер, разом з послідовністю (39.1), будь-яку вилучену з неї **часткову** послідовність (або **підпослідовність**)

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \dots,\ x_{n_k},\ \dots, \tag{40.1}$$

де n_k є деяка послідовність **зростаючих** натуральних чисел:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots \tag{40.2}$$

Тут роль **номера**, що пробігає послідовно всі натуральні значення, відіграє вже не n, а k; n_k — це варіанта, що набуває натуральних значень і, очевидно, що прямує до ∞ в міру зростання k.

Теорема 40.1. *Якщо послідовність* (39.1) *має певну границю* a *(скінченну чи ні), то ту ж границю має і часткова послідовність* (40.1).

Доведення. Зупинимося, наприклад, на випадку скінченного a. Нехай для заданого $\varepsilon > 0$ знайшлося таке N, що для $n > N$ вже виконується нерівність:

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Зважаючи на те, що $n_k \to \infty$, існує і таке K, що для $k > K$ буде $n_k > N$. Тоді, для тих же значень k, виконуватиметься нерівність

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

що й доводить наше твердження. □

(Зауважимо також, що в цьому міркуванні ми не спиралися на нерівності (40.2), тобто не користувалися монотонністю варіанти n_k. Отже, наше твердження залишається справедливим, хоч би за яким законом прямувала до $+\infty$ цілочисельна варіанта n_k.)

Якщо для варіанти x_n, або, що те саме, для послідовності (39.1) немає певної границі, це ще не значить, що не існує границі для деякої **часткової** послідовності (40.1) або для відповідної до неї варіанти $x'_k = x_{n_k}$. Таку границю називають **частковою** границею для варіанти x_n, або послідовності (39.1).

Нехай, наприклад, $x_n = (-1)^{n+1}$; границі ця варіанта немає. Якщо ж змусити n пробігати лише одні непарні чи одні тільки парні значення, то **часткові** послідовності

$$x_1 = 1, \quad x_3 = 1, \quad \dots, \quad x_{2k-1} = 1, \quad \dots$$

і

$$x_2 = -1, \quad x_4 = -1, \quad \dots, \quad x_{2k} = -1, \quad \dots$$

nebayduzhi.math@gmail.com

матимуть границі, відповідно, 1 або -1. Ці числа і є **часткові** границі варіанти x_n. Аналогічно, варіанта $x_n = (-1)^{n+1}n$ має **часткові** границі $+\infty$ і $-\infty$, а варіанта $x_n = n^{(-1)^{n+1}}$ — **часткові** границі $+\infty$ і 0.

Легко побудувати приклади варіанти, для якої існує нескінченна множина різних часткових границь; ось один із них. Задамо варіанту x_n таким правилом: якщо номер n написаний в десятковій системі: $\alpha\beta\ldots\nu$ (де $\alpha\beta\ldots\nu$ — цифри), то вважаємо

$$x_n = 0,\alpha\beta\ldots\nu.$$

Наприклад $x_{13} = 0{,}13$, $x_{4035} = 0{,}4035$ і так далі. Кожен **скінченний** десятковий дріб, між 0,1 і 1, трапляється в послідовності значень нашої варіанти безліч разів: наприклад 0,217 — на 217-му місці, а також на 2170-му, 21700-му і так далі.

Звідси відразу випливає, що кожен **скінченний** десятковий дріб між 0,1 і 1 є **частковою** границею для нашої варіанти. Але якщо взяти і **будь-яке інше** дійсне число α в цих межах, то варто лише представити його у вигляді нескінченного десяткового дробу (розд. 9):

$$\alpha = 0,c_1c_2\ldots c_k\ldots \quad (c_1 \geqslant 1),$$

щоб стало ясно, що **часткова** послідовність

$$x_{c_1} = 0,c_1, \quad x_{c_1c_2} = 0,c_1c_2\ldots, \quad x_{c_1c_2\ldots c_k} = 0,c_1c_2\ldots c_k\ldots$$

має саме це число α своєю границею. Отже, у розглянутому випадку частковими границями послідовності заповнюється весь проміжок $[0{,}1;\ 1]$.

Чи завжди для варіанти x_n, існують **часткові** границі? На це питання легко відповісти ствердно в разі, коли множина x_n не обмежена. Нехай, наприклад, вона не обмежена **зверху**; тоді для кожного натурального k знайдеться в ряду (39.1) член x_{n_k}, більший за k:

$$x_{n_k} > k \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

(причому легко влаштувати так, щоб номери n_k зростали разом з k). **Часткова** послідовність

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots,$$

очевидно буде мати границю $+\infty$; це і є **часткова** границя для нашої варіанти.

Ствердну відповідь можна дати і в разі обмеженої варіанти; але це вимагає тонших міркувань, які ми наведемо в наступному розділі.

41. Лема Бользано – Ваярштрасса

Лема 41.1 (Лема Бользано – Ваярштрасса).
(чех. Bernard Bolzano, Бернáрд Бользáно;

нім. Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, Ка́рл Ва́йрштрасс)
З будь-якої ***обмеженої*** *послідовності* (39.1) *завжди можна витягнути таку часткову послідовність* (40.1), *яка збігалася б до скінченної границі.*

(Це формулювання не виключає можливості ***рівних*** *чисел у складі цієї послідовності, що зручно в застосунках.)*

Доведення. Нехай усі числа x_n, укладені між межами a та b. Розділимо цей проміжок $[a,b]$ навпіл, тоді хоч в одній половині буде міститися **безліч** елементів цієї послідовності, бо інакше і на всьому проміжку $[a,b]$ цих елементів містилося б скінченне число, що неможливо. Отже, нехай $[a_1,b_1]$ буде та з половин, яка містить безліч чисел x_n (або, якщо обидві половини такі, — будь-яка з них).

Аналогічно, з проміжку $[a_1,b_1]$ виділимо його половину $[a_2,b_2]$ — за умови, щоб у ній містилася **нескінченна безліч** чисел x_n, і так далі. Продовжуючи цей процес до нескінченності, на k-й стадії його виділимо проміжок $[a_k,b_k]$, що також містить **нескінченну множину** чисел x_n.

Кожен із побудованих проміжків (починаючи з другого) міститься в попередньому, становлячи його половину. Крім того, довжина k-го проміжку, дорівнює

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k},$$

та прямує до нуля зі зростанням k. Застосовуючи тут лему про вкладені проміжки (лем. 38.1), робимо висновок, що a_k і b_k прямують до спільної границі c.

Тепер побудову часткової послідовності x_{n_k} зробимо індуктивно. За x_{n_1} візьмемо будь-який (наприклад, перший) з елементів x_n нашої послідовності, що містяться в $[a_1,b_1]$. За x_{n_2} візьмемо будь-який (наприклад, перший) з елементів x_n, **після** x_{n_1} і що містяться в $[a_2,b_2]$, і так далі. Взагалі, за x_{n_k} візьмемо будь-який (наприклад перший) елемент, що **йде за раніше обраними** x_{n_1}, x_{n_2}, …, $x_{n_{k-1}}$ і що містяться в $[a_k,b_k]$. Можливість такого вибору, який робиться послідовно, обумовлюється саме тим, що кожен із проміжків $[a_k,b_k]$ містить **нескінченну множину** чисел x_n, тобто містить елементи x_n зі скільки завгодно великими номерами.

Далі, оскільки

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k \quad \text{і} \quad \lim a_k = \lim b_k = c,$$

то, за теор. 28.3, і $\lim x_{n_k} = c$, що й потрібно було довести. □

Метод, застосований у доведенні цієї леми, полягає в послідовному діленні навпіл цих проміжків. Цей метод відомий як *метод Больцано*; він часто буде нам корисний і в інших випадках.

Лема Больцано – Ваярштрасса значно полегшує доведення багатьох складних теорем, ніби вбираючи в себе основну складність міркування. Як приклад, доведемо знову "*принцип збіжності*" (теор. 39.1) за допомогою цієї леми; ми маємо на увазі **достатність** теореми, яка потребувала від нас у розд. 39 значних зусиль.

Доведення. Отже, нехай умова виконана, і за заданим $\varepsilon > 0$ знайдено такий номер N, що для $n > N$ і $n' > N$ виконуються нерівності (39.2) або (39.3). Якщо фіксувати n', то з (39.3) ясно, що варіанта x_n у будь-якому разі, буде обмежена: її значення для $n > N$ містяться між числами $x_{n'} - \varepsilon$ і $x_{n'} + \varepsilon$, і нескладно ці межі розсунути так, щоб охопити і перші N значень: x_1, x_2, …, x_N.

Тоді, за допомогою щойно доведеної леми Бользано – Ваярштрасса, можна виділити часткову послідовність, що збігається до скінченної границі

$$\lim x_{n_k} = c.$$

Покажемо, що до цієї границі прямує взагалі і варіанта x_n. Можна вибрати k таким великим, щоб було

$$|x_{n_k} - c| < \varepsilon$$

і водночас $n_k > N$. Отже, в (39.2) можна взяти $n' = n_k$:

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon,$$

і, зіставляючи обидві ці нерівності, остаточно знаходимо

$$|x_n - c| < 2\varepsilon \quad (\text{для } n > N),$$

що й доводить наше твердження. (Число 2ε такою ж мірою “довільно мале” число, як і ε. Якщо завгодно, можна було спочатку взяти не ε, а $\frac{\varepsilon}{2}$, тоді ми тут отримали б ε. Надалі подібних вказівок ми вже робити не будемо.) □

42. Найбільша та найменша границі

Отже, для будь-якої варіанти x_n, обмежена вона чи ні, існують часткові границі. Ми покажемо зараз, що серед цих **часткових границь** необхідно знайдуться найбільша і найменша; вони називаються **найбільшою і найменшою границями** самої варіанти x_n і позначаються, відповідно,

$$\overline{\lim}\, x_n \quad \text{і} \quad \underline{\lim}\, x_n.$$

Теорема 42.1. *Найбільша та найменша границі для варіанти x_n завжди існують. Їх рівність — це необхідна і достатня умова для існування границі варіанти (у звичайному сенсі).*

(Ця теорема, доведення якої не використовує леми Бользано – Ваярштрасса, перекриває останню.)

Доведення. Почнемо з розгляду питання про найбільшу границю. Ми вже бачили вище в розд. 40, якщо варіанта x_n не обмежена **зверху**, то з послідовності (39.1) її значень можна виділити таку часткову послідовність x_{n_k}, що

$$\lim x_{n_k} = +\infty.$$

Отже, у цьому випадку $+\infty$ — **одна** з часткових границь варіанти, і очевидно **найбільша** з усіх можливих, так що

$$\overline{\lim}\, x_n = +\infty.$$

Припустимо тепер, що варіанта x_n обмежена зверху:

$$x_n \leqslant M \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Розглянемо точну верхню границю значень x_n для $n > k$:

$$M_k = \sup_{n>k}\{x_n\} = \sup\{x_{k+1},\ x_{k+2},\ \dots\} \leqslant M.$$

У разі зростання k значення M_k може хіба що **зменшуватися**, отже, за теоремою про монотонну варіанту (теор. 34.1), принаймні існує границя (коли k зростає до нескінченності)

$$\lim M_k,$$

скінченна або рівна $-\infty$.

Випадок, коли ця границя є $-\infty$, також вичерпується просто. Для будь-кого $E > 0$ знайдеться такий номер $k = N$, що

$$M_N < -E;$$

але для $n > N$ очевидно $x_n \leqslant M_N$, тому для вказаних значень n

$$x_n < -E.$$

А це означає, що існує границя (у звичайному розумінні)

$$\lim x_n = -\infty,$$

яка водночас буде **і найбільша, і найменша** (за наявності звичайної границі варіанти всі часткові границі збігаються зі звичайною границею, розд. 40).

Залишається розглянути найважливіший випадок, коли існує **скінченна** границя:

$$\lim M_k = M^*;$$

ми покажемо, що це число M^* і буде найбільшою границею для варіанти x_n.

З цією метою розглянемо **дві характерні властивості** числа M^*.

Якщо довільно взяти число $\varepsilon > 0$, то знайдеться таке $k = N'$, що $M_{N'} < M^* + \varepsilon$; оскільки, для $n > N'$ $x_n \leqslant M_{N'}$, то й $x_n < M^* + \varepsilon$. Отже, маємо такі властивості числа M^*.

Перша властивість числа M^*: *хоч би яке було $\varepsilon > 0$, існує такий номер N', що для всіх $n > N'$ буде*

$$x_n < M^* + \varepsilon.$$

З іншого боку, для довільного $\varepsilon > 0$ і **будь-якого** k буде

$$M_k \geqslant M^* > M^* - \varepsilon.$$

Але тоді, за властивістю **точної** верхньої границі (розд. 11), серед значень x_n з номерами $n = k+1,\ k+2,\ k+3,\ \ldots$ знайдеться таке значення $x_{n'}$, що і $x_{n'} > M^* - \varepsilon$.

Замінюючи **довільно** взяте k на N, сформулюємо другу властивість.

Друга властивість числа M^*: *хоч би які були $\varepsilon > 0$ і номер N, знайдеться значення $x_{n'}$ з номером $n' > N$ таке, що*

$$x_{n'} > M^* - \varepsilon.$$

Підкреслимо різницю у формулюваннях обох властивостей. У першому випадку нерівність виконується для всіх значень x_n **суцільно**, починаючи з деякого. У другому випадку нерівність задовольняють лише **окремі** значення x_n, серед яких, однак, є **значення зі скільки завгодно великими номерами**.

Насамперед, спираючись на ці властивості, доведемо, що **число M^* є частковою границею для варіанти x_n.** Для цього потрібно виділити часткову послідовність x_{n_i}, що збігається до M^*.

Візьмемо послідовність додатних чисел $\varepsilon_i \to 0$. Поклавши $n_1 = 1$, припустимо, що номери

$$n_1 = 1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_{i-1}$$

вже вибрані, і покажемо, як вибрати n_i. За першою властивістю для $\varepsilon = \varepsilon_i$ знайдемо відповідний номер $N' = N_i$, такий, що для **всіх** $n > N_i$ буде $x_n < M^* + \varepsilon_i$. Тепер звернемося до другої властивості, вважаючи як і раніше $\varepsilon = \varepsilon_i$, а за N взявши найбільший з номерів n_{i-1} та N_i; цьому вибору чисел ε і N відповідає номер $n' = n_i$. Для нього, з одного боку,

$$x_{n_i} > M^* - \varepsilon_i,$$

з іншого ж, оскільки $n_i > N_i$, водночас буде і

$$x_{n_i} < M^* + \varepsilon_i.$$

Зазначимо, крім того, що $n_i > n_{i-1}$.

Для елементів x_{n_i} нашої послідовності, що була побудована індуктивно, матимемо

$$|x_{n_i} - M^*| < \varepsilon_i \quad (i = 2,\ 3,\ 4,\ \dots),$$

так що справді $x_{n_i} \to M^*$.

Нарешті, покажемо, що **жодна часткова границя не може перевищити M^*.** Справді, нехай для деякої часткової послідовності x_{n_i} маємо $x_{n_i} \to a$, так що a є одна з часткових границь. За першою властивістю для досить далеких номерів (вже більших, ніж N') буде

$$x_{n_i} < M^* + \varepsilon.$$

Переходячи тут до границі, отримаємо $a \leqslant M^* + \varepsilon$ і, зважаючи на довільність ε, остаточно,

$$a \leqslant M^*.$$

Отже, M^* справді буде **найбільша** з усіх часткових границь, тобто

$$M^* = \overline{\lim}\, x_n.$$

Аналогічно можна показати, що існує **найменша** границя. Не повторюючи всіх міркувань, наголосимо на таких двох обставинах.

Якщо ця найменша границя дорівнює $+\infty$, то існує границя у звичайному значенні слова

$$\lim x_n = +\infty.$$

Якщо ж найменша границя є скінченне число M_*,

$$M_* = \underline{\lim}\, x_n,$$

то воно має властивості, аналогічні до зазначених вище для M^*.

Перша властивість числа M_*: *хоч би яке було $\varepsilon > 0$, існує такий номер N'', що для $n > N''$ буде*

$$x_n > M_* - \varepsilon.$$

Друга властивість числа M_*: *хоч би які були $\varepsilon > 0$ і номер N, знайдеться значення $x_{n''}$ з номером $n'' > N$, таке, що*

$$x_{n''} < M_* + \varepsilon.$$

Звернемося до підтвердження останнього твердження теореми. Якщо існує границя у звичайному значенні слова

$$\lim x_n$$

(скінченна чи нескінченна), то всі можливі часткові границі з нею зливаються (розд. 40), отже *необхідність* висловленої умови очевидна.

Припустимо тепер, що

$$\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n.$$

Якщо їх спільне значення є $+\infty$ або $-\infty$, то, як ми бачили, існує границя варіанти у звичайному значенні і має те саме значення.

Нехай, нарешті, обидві границі скінченні:

$$M^* = M_* = a.$$

Тоді, зіставляючи перші властивості чисел M^* і M_*, знайдемо за наперед заданим $\varepsilon > 0$ такий номер N, що для $n > N$ буде

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \quad \text{тобто} \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

А це й означає, що a є границя варіанти x_n у звичайному значенні. Теорему доведено.

□

Зауважимо, що за допомогою цієї теореми дуже просто доводиться **достатність** умови Бользано – Коші (розд. 39). Саме (якщо зберегти колишні позначення), з нерівностей

$$x_{n'} - \varepsilon < x_n < x_{n'} + \varepsilon \quad (\text{для } n \text{ і } n' > N)$$

безпосередньо випливає, що найбільша і найменша границі варіанти x_n **скінченні** і різняться не більше, ніж на 2ε, а отже, однакові. Звідси і випливає існування скінченної границі у звичайному сенсі.

Глава 2

ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.1. Поняття функції

43. Змінна та область її зміни

У розд. 22 вже було дане загальне поняття **змінної**. Змінна x задається множиною $\mathcal{X} = \{x\}$ тих значень, яких вона здатна набути (в питанні, що розглядається). Ця множина $\mathcal{X}$, у якій кожне значення x трапляється тільки один раз, називається *областю зміни* змінної x. Взагалі, областю зміни змінної може бути будь-яка числова множина.

Ми вже згадували, що **числа** геометрично тлумачаться як **точки** на (числовій) осі. Область $\mathcal{X}$ зміни змінної x на цій осі зображується у вигляді деякої множини точок. У зв'язку з цим зазвичай самі **числові значення** змінної називають **точками**.

Часто доводиться мати справу зі змінною n, для якої область зміни — множина $\mathcal{N}$ всіх натуральних чисел. Для варіанти $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$ областю зміни буде множина дробів вигляду $\frac{1}{m}$ (для $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) з приєднанням числа 0; для сталої величини вся область зміни зведеться до одного числа.

Однак в аналізі зазвичай вивчають змінні, що змінюються, як то кажуть, **неперервним** або **суцільним** чином: їх прообраз — це фізичні величини такі як: час, шлях, який проходить рухома точка тощо. Областю зміни подібної змінної служить числовий **проміжок**. Найчастіше це буде **скінченний** проміжок, обмежений двома дійсними числами a і b ($a < b$) — його кінцями, які самі можуть бути віднесені до його складу або ні. Залежно від цього ми розрізнятимемо:

замкнений проміжок (разом з обома кінцями):

$$[a, b]: \quad a \leqslant x \leqslant b;$$

напіввідкриті проміжки (лише з одним кінцем):

$$(a, b]\colon \quad a < x \leqslant b,$$

$$[a, b)\colon \quad a \leqslant x < b;$$

відкритий проміжок (без жодного кінця):

$$(a, b)\colon \quad a < x < b.$$

Довжиною проміжку завжди називається число $b - a$.

Геометричний аналог числового проміжку є, як легко зрозуміти, відрізок числової осі, причому кінці відрізка належать до нього або ні, залежно від типу проміжку.

Доводиться розглядати і **нескінченні** проміжки, у яких одним із кінців або обидва є "невласні числа" $-\infty$, $+\infty$. Позначення їх аналогічні до наведених вище. Наприклад, $(-\infty, +\infty)$ є множина всіх дійсних чисел; $(a, +\infty)$ означає множину чисел x, що задовольняють нерівність $x > a$; проміжок $(-\infty, b]$ визначається нерівністю $x \leqslant b$. Геометрично нескінченні проміжки зображуються у вигляді нескінченної в обидва боки прямої або променя.

44. Функціональна залежність між змінними. Приклади

Головний предмет вивчення в математичному аналізі є, однак, не зміна однієї змінної самої по собі, а **залежність** між двома або кількома змінними, коли вони **разом змінюються**. Тут ми обмежимося найпростішим випадком двох змінних.

У різних галузях науки та життя (в самій математиці, у фізиці, у техніці) читачеві не раз траплялися такі змінні, що **змінюються разом**. Вони не можуть водночас набувати будь-якої пари значень (зі своїх областей зміни): якщо одній з них (**незалежній змінній**) надано конкретне значення, то цим визначається і значення іншої (**залежної змінної** чи **функції**). Наведемо кілька прикладів.

1) Площа Q круга — це функція від його радіуса R; її значення може бути обчислене за заданим значенням радіуса за допомогою відомої формули:

$$Q = \pi R^2.$$

2) У разі вільного падіння важкої матеріальної точки (коли нема опору) час t (с), що відлічується від початку руху, і пройдений за цей час шлях s (м) пов'язані рівнянням:

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

nebayduzhi.math@gmail.com

де $g = 9{,}81\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ є прискорення сили тяжіння. Звідси і визначається значення s, що відповідає взятому моменту t: шлях s — функція від часу t, що минув від початку руху.

3) Розглянемо деяку масу (ідеального) газу, що міститься під поршнем циліндра. Припускаючи, що температура зберігається незмінною, об'єм V (л) та тиск p (атм) цієї маси газу описується законом Бойля – Маріотта (англ. Robert Boyle, Ро́берт Бо́йл; фр. Edme Mariotte, Е́дме Маріо́тт):

$$pV = c = \text{const}\,.$$

Якщо довільно змінювати V, то p як функція від V буде всякий раз однозначно визначатися за формулою

$$p = \frac{c}{V}.$$

4) Нарешті, зупинимося ще на залежності тиску повітря p (атм) від висоти місця h (м) над рівнем моря. У фізиці виводиться **барометрична формула**:

$$p = p_0 e^{-kh},$$

де p_0 — тиск на рівні моря, а k — деяка стала. За цією формулою значення p, як функції від h, і визначається, як тільки задане значення h.

Зауважимо відразу, що сам вибір незалежної змінної з числа двох розглянутих іноді буває неважливим або пов'язаним з міркуваннями простої зручності. У більшості випадків він диктується **цілеспрямованістю** дослідження.

Наприклад, якщо в останньому прикладі зв'язок між тиском p і висотою h використовується для того, щоб дати змогу пілоту по спостережуваному тиску робити висновок про досягнуту висоту, то природно змінити ролі змінних і барометричну формулу подати у вигляді

$$h = \frac{1}{k}\ln\frac{p_0}{p}.$$

45. Означення поняття функції

Ми зазвичай не будемо розглядати фізичний зміст аналізованих величин. Дамо точне загальне означення поняття **функції** — одного з основних понять математичного аналізу.

Нехай дані дві змінні x і y з областями зміни $\mathcal{X}$ і $\mathcal{Y}$. Припустимо, що за умовою змінна x може набути довільне значення з області $\mathcal{X}$ без будь-яких обмежень. Тоді *змінна y називається функцією від змінної x в області її зміни $\mathcal{X}$, якщо за деяким правилом чи законом кожному значенню x із $\mathcal{X}$ ставиться у відповідність одне певне значення y (з $\mathcal{Y}$).*

nebayduzhi.math@gmail.com

Незалежна змінна x називається також аргументом функції.

У цьому означенні істотні два моменти: по-перше, означення області $\mathcal{X}$ зміни аргументу x (її називають *областю визначення* функції) і, по-друге, визначення правила чи закону відповідності значень x та y. (Область $\mathcal{Y}$ зміни функції y зазвичай не вказується, бо сам закон відповідності вже визначає множину значень, що набуваються функцією.)

Можна розширити означення поняття функції, допускаючи, щоб кожному значенню x з $\mathcal{X}$ відповідало не одне, а кілька значень y (і навіть нескінченна множина значень). У подібних випадках функцію називають **многозначною**, на відміну від **однозначної** функції, означеної вище. Втім, у курсі аналізу дійсної змінної уникають многозначних функцій. Надалі, кажучи про функції, якщо не обумовлено інше, ми розумітимемо однозначну функцію.

Щоб указати на те, що y є функція від x, пишуть:

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = F(x) \quad \text{тощо.}$$

(Вимовляється цей запис так: “ігрек дорівнює еф від ікс”, “ігрек дорівнює фі від ікс”, і так далі.) Букви f, φ, F, ... характеризують саме те правило, за яким отримується значення y, що відповідає заданому x. Тому, якщо водночас розглядаються **різні** функції від одного і того ж аргументу x, пов’язані з **різними** законами відповідності, їх не слід позначати однією й тією ж буквою.

Хоча саме літера “f” (в різних алфавітах) пов’язана зі словом “функція”, але для позначення функціональної залежності, зрозуміло, може застосовуватися будь-яка інша літера; іноді навіть повторюють ту ж літеру y: $y = y(x)$.

У деяких випадках пишуть аргумент як значок при функції, наприклад y_x. Це схоже на звичне нам позначення **варіанти** x_n, яка є (як ми тепер можемо сказати) функцією від “незалежної змінної” n, що пробігає ряд натуральних чисел $\mathcal{N} = \{n\}$. Аналогічно з позначенням N_ε для номера N (в означенні границі варіанти, розд. 23), яке підкреслює його залежність від ε, і так далі.

Якщо, розглядаючи функцію, скажімо, $y = f(x)$, ми хочемо вказати її **окреме** значення, яке відповідає вибраному окремому значенню x, рівному x_0, то для позначення його використовують символ: $f(x_0)$. Наприклад, якщо

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(t) = \frac{10}{t}, \quad h(u) = \sqrt{1-u^2}, \quad \dots,$$

то $f(1)$ означає числове значення функції $f(x)$, коли $x = 1$, тобто число $\frac{1}{2}$; аналогічно, $g(5)$ означає **число** 2, $h\left(\frac{3}{5}\right)$ — **число** $\frac{4}{5}$ тощо.

Звернемося тепер до самого **правила** чи **закону відповідності** між значеннями змінних, що становить суть поняття функціональної залежності. Правило це може бути дуже різноманітне, оскільки воно нічим не було обмежене.

Найпростіше і найприродніше видається втілення цього правила у вигляді **аналітичного виразу** або **формули**, що містить вказівку на ті операції чи дії над сталими числами та над значенням x, які треба зробити, щоб отримати відповідне значення y. Цей **аналітичний спосіб** задання функції найважливіший для математичного аналізу (ми ще повернемося до нього в наступному розділі). З ним читач краще знайомий зі шкільного курсу математики; нарешті, саме аналітичним способом ми користувалися в наведених у розд. 44 прикладах.

Однак було б помилково думати, що це єдиний спосіб, яким може бути задана функція. У самій математиці нерідкі випадки, коли функція визначається без допомоги формули. Така, наприклад функція $E(x)$ — "ціла частина числа x" (розд. 25). Так

$$E(1) = 1, \quad E(2{,}5) = 2, \quad E\left(\sqrt{13}\right) = 3, \quad E(-\pi) = -4 \quad \text{і так далі,}$$

хоча жодної формули, що виражає $E(x)$, ми не маємо.

Такі й численні "арифметичні функції", тобто функції від натурального аргументу, що набувають також лише натуральних значень. Наприклад, "факторіал числа n":

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \quad (0! = 1),$$

а також функція $\tau(n)$, що становить **число дільників числа** n, або функція $\varphi(n)$, що вказує, **скільки в ряду** $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$ **є чисел, взаємно простих з** n. Попри своєрідний характер правил, якими задаються ці функції, вони дають змогу обчислювати значення функцій з такою ж визначеністю, як і формули. Наприклад, маємо:

$$\begin{aligned} &\tau(10) = 4, \quad \tau(12) = 6, \quad \tau(16) = 5, \quad \ldots \\ &\varphi(10) = 4, \quad \varphi(12) = 4, \quad \varphi(16) = 8, \quad \ldots \end{aligned}$$

У природних науках і в техніці залежність між величинами часто отримується експериментально або за допомогою спостережень. Наприклад, якщо піддати воду довільно вибраному тиску p (атм), то експериментально можна визначити відповідну до нього температуру θ ($^\circ C$) кипіння води: θ є функція від p. Однак ця функціональна залежність задається не будь-якою формулою, а лише таблицею, де наведені тільки зіставлені отримані з експерименту дані. Приклади **табличного способу** задання функції легко знайти в будь-якому технічному довіднику.

Зрештою, згадаємо ще, що в деяких випадках, за допомогою самописних приладів, функціональна залежність між фізичними величинами задається безпосередньо **графіком**. Наприклад, "індикаторна діаграма", що отримується за допомогою індикатора, дає залежність між об'ємом V і тиском p водяної пари в циліндрі парової машини, що працює; "барограма", яку записує барограф — прилад для безперервного запису зміни атмосферного тиску, і так далі.

Ми не вдаємося в подробиці щодо табличного та графічного способів задання функціональної залежності, бо ними в математичному аналізі не доводиться користуватися.

nebayduzhi.math@gmail.com

46. Аналітичний спосіб задання функції

Зробимо кілька роз'яснювальних зауважень щодо задання функції **аналітичним виразом** або **формулою**, які відіграють у математичному аналізі винятково важливу роль.

1) Передусім, які **аналітичні операції** або **дії** можуть входити в ці формули? На першому місці тут розуміються всі вивчені в елементарній алгебрі та тригонометрії операції: арифметичні дії, піднесення до степеня (і добування кореня), логарифмування, перехід від кутів до їх тригонометричних величин і назад (дивіться далі розд. 48 – розд. 51). Однак, і це важливо підкреслити, до них у міру розвитку наших відомостей з аналізу будуть приєднуватися й інші операції, перша — граничний перехід, з яким читач уже знайомий.

Отже, повний зміст терміна "аналітичний вираз" або "формула" розкриватиметься лише поступово.

2) Друге зауваження стосується **області визначення** функції аналітичним виразом чи формулою.

Кожний аналітичний вираз, що містить аргумент x, має, так би мовити, **природну** область застосування: це множина **всіх** тих значень x, для яких він зберігає сенс, тобто має *цілком певне, скінченне, дійсне значення.* Пояснимо це на найпростіших прикладах.

Для виразу $\frac{1}{1+x^2}$ такою областю буде вся множина дійсних чисел. Для виразу $\sqrt{1-x^2}$ ця область зведеться до **замкненого** проміжку $[-1,1]$, за межами якого значення його перестає бути дійсним. Навпаки, для виразу $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ця область природно буде **відкритим** проміжком $(-1,1)$, бо на кінцях його знаменник дорівнює 0. Іноді область значень, для яких вираз зберігає сенс, складається з розрізнених проміжків: для $\sqrt{x^2-1}$ це будуть проміжки $(-\infty,-1]$ і $[1,+\infty)$, для $\frac{1}{x^2-1}$ — проміжки $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ і $(1,+\infty)$; і так далі. (Для нас, зрозуміло, не становлять інтересу такі вирази, які за жодного значення x взагалі не мають сенсу.)

В останньому прикладі розглянемо суму нескінченної геометричної прогресії (геометричної послідовності)

$$1+x+x^2+\dots+x^{n-1}+\dots=\lim_{n\to\infty}(1+x+x^2+\dots+x^{n-1}).$$

Якщо $|x|<1$, то, як ми знаємо (пр. 25.7), ця границя існує і має значення $\frac{1}{1-x}$. Для $|x|>1$ границя або дорівнює $+\infty$, або зовсім не існує. Отже, для наведеного аналітичного виразу природною областю застосування буде **відкритий** проміжок $(-1,1)$.

Далі нам доведеться розглядати як складніші, так і загальніші аналітичні вирази, і ми не раз будемо займатися дослідженням властивостей функцій, що задаються подібним виразом у **всій** області, де він зберігає сенс, тобто вивчення самого **аналітичного апарату**.

Однак можливий і інший стан речей, на що ми вважаємо необхідним заздалегідь звернути увагу читача. Уявимо, що яке-небудь конкретне питання, в якому змінна x в **суті справи** обмежена областю зміни $\mathcal{X}$, привело до розгляду функції $f(x)$, що допускає аналітичний вираз. Хоча може статися, що цей вираз має сенс і **поза областю** $\mathcal{X}$, виходити за її межі, зрозуміло, все ж таки не можна. Тут аналітичний вираз відіграє підлеглу, допоміжну роль.

Наприклад, якщо, досліджуючи вільне падіння важкої точки з висоти h над поверхнею землі, ми вдамося до формули

$$s = \frac{gt^2}{2}$$

(пр. 44.2), то безглуздо було б розглядати від'ємні значення t або значення t, більші ніж $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, бо, як легко побачити, за час $t = T$ точка вже впаде на землю. І це незважаючи на те, що сам вираз $\frac{gt^2}{2}$ зберігає сенс для всіх дійсних t.

3) Може статися, що функція визначається не однією і тією самою формулою для всіх значень аргументу, а для одних — однією формулою, а для інших — іншою. Прикладом такої функції на проміжку $(-\infty, +\infty)$ може бути функція, яка визначається наступними трьома формулами:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad |x| > 1 \quad (\text{тобто якщо } x > 1 \text{ або } x < -1) \\ -1, & \text{якщо} \quad |x| < 1 \quad (\text{тобто якщо } \ -1 < x < 1), \\ 0, & \text{якщо} \quad x = \pm 1. \end{cases}$$

Згадаємо ще про функцію Діріхлє (нім. Peter Dirichlet, Пі́та Діріхле́), яка визначається так:

$$\mathrm{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ раціональне;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ ірраціональне.} \end{cases}$$

Нарешті, разом із Кронекаром (нім. Leopold Kronecker, Леопо́льд Кро́некар) розглянемо функцію, яку він назвав "сигнум x" (си́гнум-фу́нкція, зна́кова фу́нкція, з латині: signum — знак) і позначив через $\operatorname{sgn} x$ ($\operatorname{sign} x$):

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x > 0; \\ -1, & \text{якщо} \quad x < 0; \\ 0, & \text{якщо} \quad x = 0. \end{cases}$$

Втім, не слід думати, що є **принципова** відмінність між функцією, що задається однією формулою для всіх значень x, і функцією, означення якої використовує кілька формул. Зазвичай функція, що задається кількома формулами (щоправда, ціною деякого ускладнення виразу), може бути задана і однією формулою.

Наприклад, якщо використати операцію граничного переходу, то перша з наведених вище функцій, $f(x)$, може бути задана однією формулою (для **всіх** x одразу):

$$f(x) = \lim \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

Справді, для $|x| > 1$ степінь $x^{2n} \to +\infty$, а обернений вираз прямує до 0 (розд. 27), так що

$$\lim \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = \lim \frac{1 - \dfrac{1}{x^{2n}}}{1 + \dfrac{1}{x^{2n}}} = 1.$$

Для $|x| < 1$ степінь $x^{2n} \to 0$ (пр. 25.6), і в цьому випадку

$$\lim \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = -1.$$

Нарешті, для $x = \pm 1$ буде очевидно $x^{2n} = 1$, звідки

$$\frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = 0,$$

і, застосовуючи граничний перехід, отримуємо 0. Усе це повністю узгоджується з колишнім означенням.

47. Графік функції

Хоча в математичному аналізі функції графічно **не визначають**, але до **графічної ілюстрації** функції завжди вдаються. Наочність графіка робить графік незамінним **допоміжним** засобом дослідження властивостей функції.

Нехай на деякому проміжку $\mathcal{X}$ задана функція $y = f(x)$. Уявимо собі на площині дві взаємно перпендикулярні осі координат — вісь x і вісь y. Розглянемо пару **відповідних** значень x та y, де x взято з проміжку $\mathcal{X}$, а $y = f(x)$; образом цієї пари на площині служить **точка** $M(x, y)$, з абсцисою x та ординатою y. Коли змінна x змінюється в межах свого проміжку, ця точка описує деяку **криву** AB (рис. 47.1), яка є геометричним образом нашої функції і називається її **графіком**. За цих умов саме рівняння $y = f(x)$ називають **рівнянням кривої** AB.

Наприклад, на рис. 47.2 та рис. 47.3 зображені графіки функцій

$$\begin{aligned} y &= +\sqrt{1 - x^2}, \ |x| \leqslant 1; \\ y &= -\sqrt{1 - x^2}, \ |x| \leqslant 1; \\ y &= +\sqrt{x^2 - 1}, \ |x| \geqslant 1; \\ y &= -\sqrt{x^2 - 1}, \ |x| \geqslant 1; \end{aligned}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

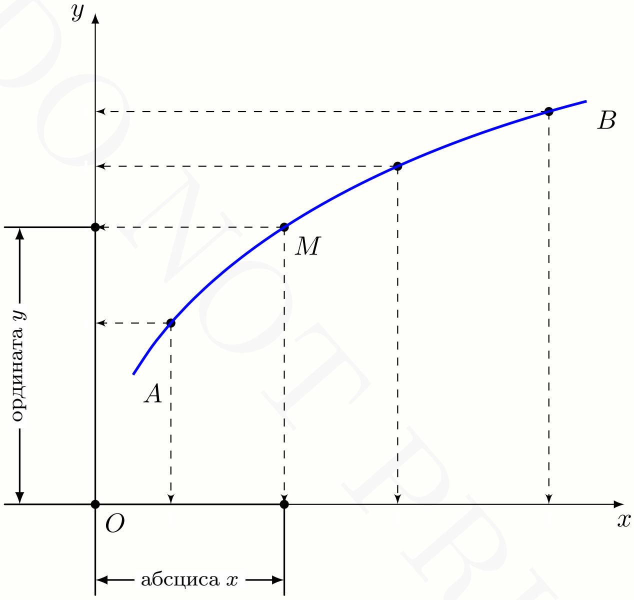


Рис. 47.1

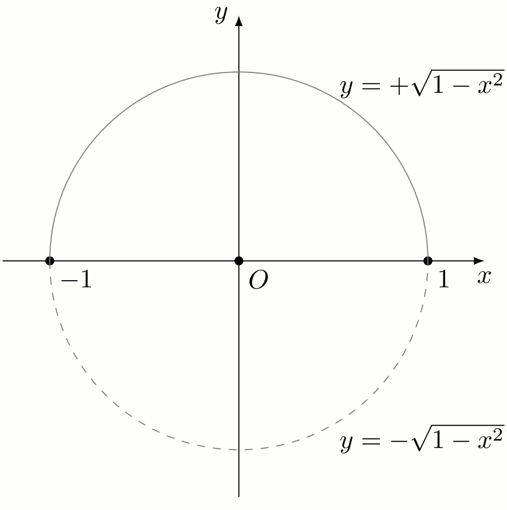


Рис. 47.2

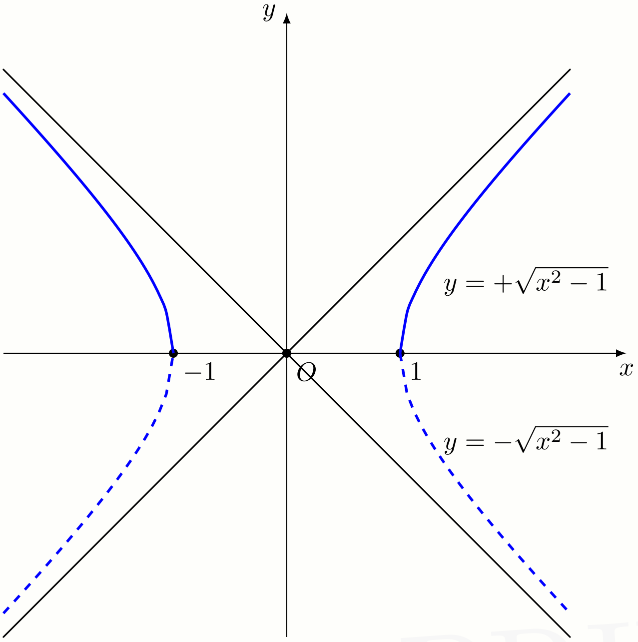


Рис. 47.3

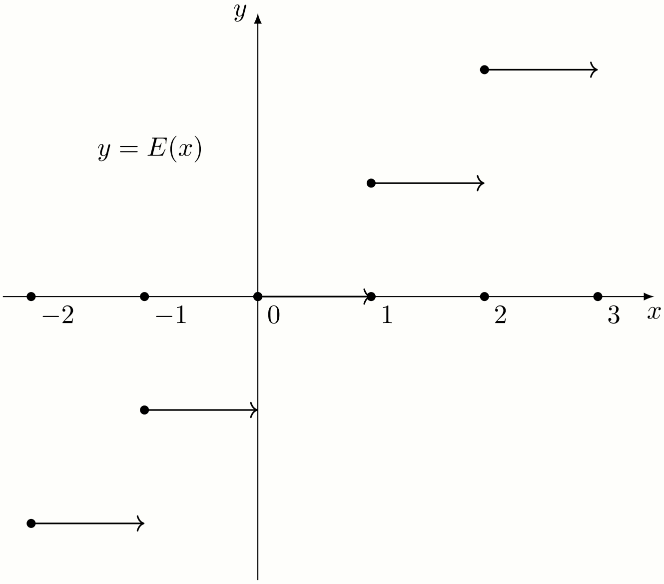


Рис. 47.4

nebayduzhi.math@gmail.com

читач впізнає в них **коло** та **рівнобічну гіперболу**. Багато інших прикладів графічного зображення функцій читач знайде в найближчих розділах.

Будується графік зазвичай **за точками**.

Беруть на проміжку $\mathcal{X}$ ряд близьких між собою значень x, обчислюють за формулою $y = f(x)$ **відповідні** значення y:

x =	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y =	y_1	y_2	y_3	...	y_n

та наносять на креслення точки

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3),\ \dots,\ (x_n, y_n).$$

Через ці точки від руки або за допомогою лекала проводять **криву**, яка (звісно, лише з деяким наближенням) і дає шуканий графік. Що плавніший хід графіка і що частіше взяті точки на ньому, то точніше накреслена крива відтворює цей графік.

Слід зауважити, що хоча геометричний образ функції завжди можна собі “уявити”, але не завжди цей образ буде **кривою** у звичайному, інтуїтивному сенсі.

Побудуємо, наприклад, графік функції $y = E(x)$. Оскільки на проміжках $\dots,\ [-2, -1),\ [-1, 0),\ [0, 1),\ [1, 2),\ [2, 3),\ \dots$ функція зберігає сталі значення $\dots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots$, то графік складатиметься з ряду окремих горизонтальних відрізків, позбавлених своїх **правих** кінців (рис. 47.4). Ця обставина символізується **стрілками**, які своїми вістрями вказують на точки, що не належать до графіка.

Для функції Діріхлє $\mathrm{D}(x)$ графік складається з множини точок з **ірраціональними** абсцисами на осі x і множини точок з **раціональними** абсцисами на прямій $y = 1$; його і зобразити неможливо.

48. Найважливіші класи функцій

Наведемо тут деякі класи функцій, що дістали назву **елементарних**.

1) *Ціла та дробова раціональні функції.*

Функція, що подається цілим відносно літери x многочленом

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

($a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots$ — сталі), називається **цілою раціональною функцією**.

Відношення двох таких многочленів:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1a^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

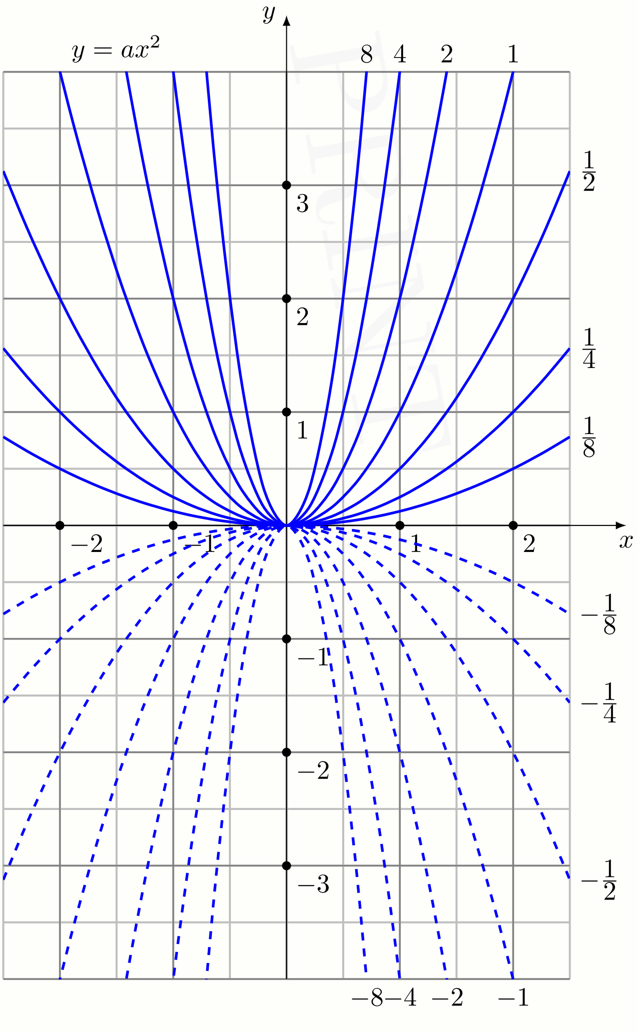

$y = ax^2$
y
x
8
4
2
1
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{8}$
$-\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$
−8
−4
−2
−1
3
2
1
−1
−2
−3
−2
−1
1
2

Рис. 48.1

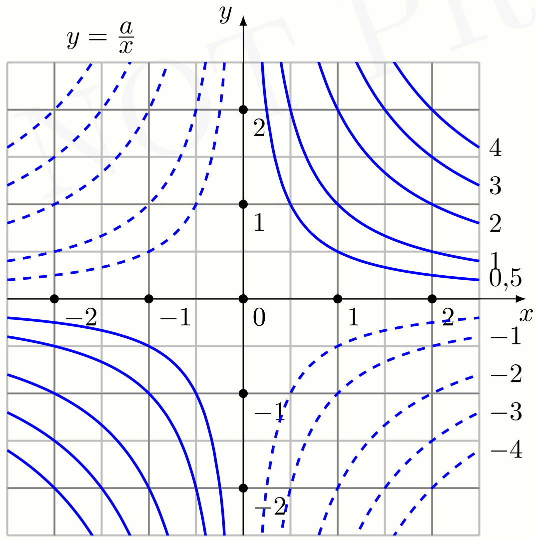


Рис. 48.2

називається **дробовою раціональною функцією**. Вона визначена для всіх значень x, крім тих, у яких знаменник дорівнює нулю.

Наприклад на рис. 48.1 дані графіки функції $y = ax^2$ (**параболи**) для різних значень коефіцієнта a, а на рис. 48.2 — графіки функції $y = \frac{a}{x}$ (**рівнобічні гіперболи**), також для різних значень a.

2) *Степенева функція.* Так називається функція вигляду

$$y = x^{\mu},$$

де μ — будь-яке стале дійсне число. Для цілого μ виходить раціональна функція. Для μ дробового ми маємо тут **радикал**. Наприклад, нехай m — натуральне число і

$$y = x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x};$$

ця функція визначена для всіх значень x, якщо m — непарне; і лише для невід'ємних значень, якщо m парне (у цьому випадку ми маємо на увазі **арифметичне значення** радикалу). Нарешті, якщо μ — ірраціональне число, ми припускатимемо $x > 0$ ($x = 0$ допускається лише для $\mu > 0$).

На рис. 48.3 і рис. 48.4 подані графіки степеневої функції для різних значень μ.

3) *Показникова функція*, тобто функція вигляду

$$y = a^{x},$$

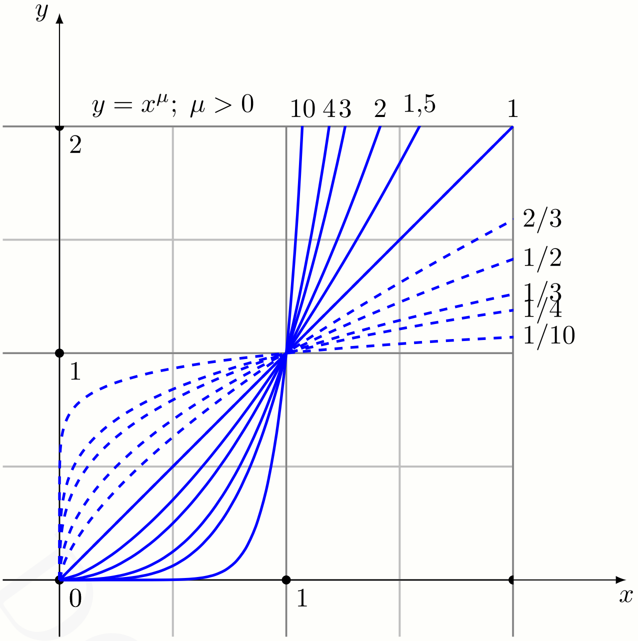


Рис. 48.3

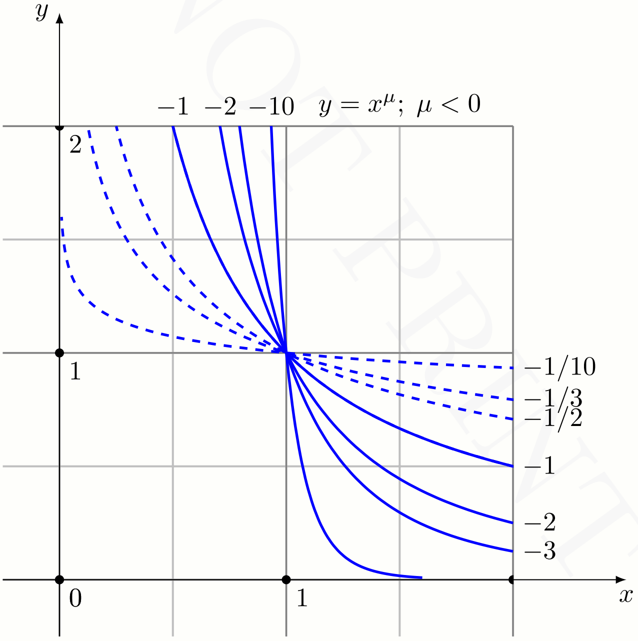


Рис. 48.4

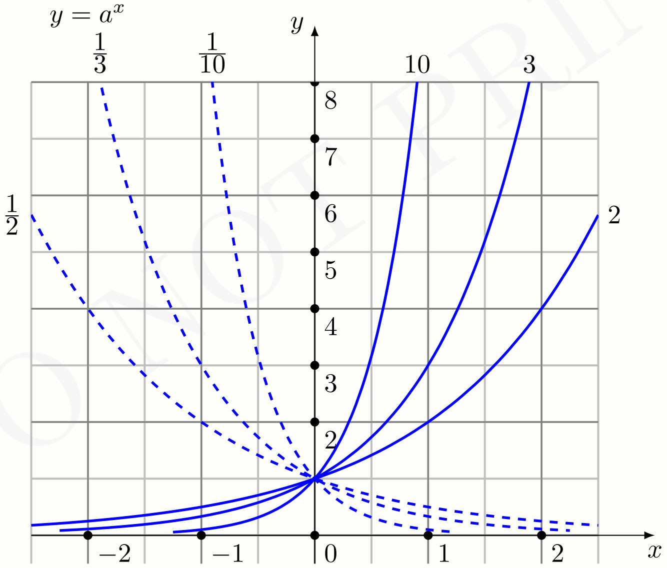


Рис. 48.5

де a — додатне число (відмінне від одиниці); x набуває будь-якого дійсного значення.

Графіки показникової функції для різних значень a подані на рис. 48.5.

4) *Логарифмічна функція*, тобто функція вигляду

$$y = \log_a x,$$

де a, як і вище, — додатне число (відмінне від одиниці); x набуває лише додатних значень.

На рис. 48.6 подані графіки цієї функції для різних значень a.

5) *Тригонометричні функції*:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x,$$
$$y = \operatorname{ctg} x, \quad y = \sec x, \quad y = \csc x$$

Дуже важливо раз і назавжди засвоїти, що *аргументи тригонометричних функцій, якщо їх розглядати як міри кутів, завжди виражають ці кути в* ***радіанах*** (якщо не обумовлено інше). Для $\operatorname{tg} x$ і $\sec x$ винятком є значення вигляду

$$(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

а для $\operatorname{ctg} x$ і $\csc x$ — значення вигляду

$$k\pi \quad (k \text{ — ціле}).$$

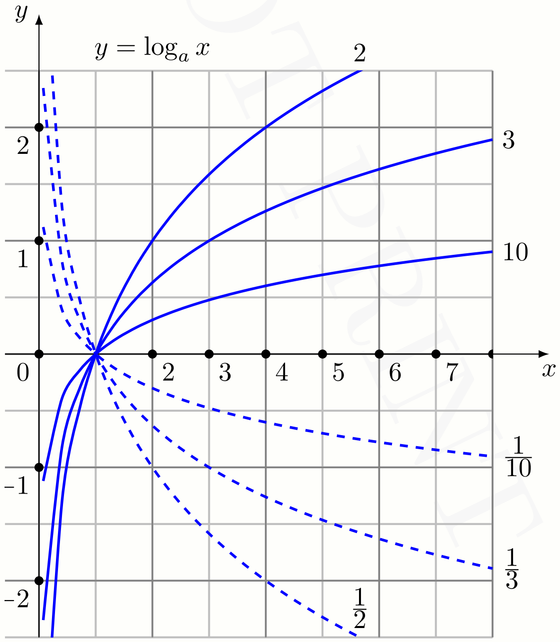


Рис. 48.6

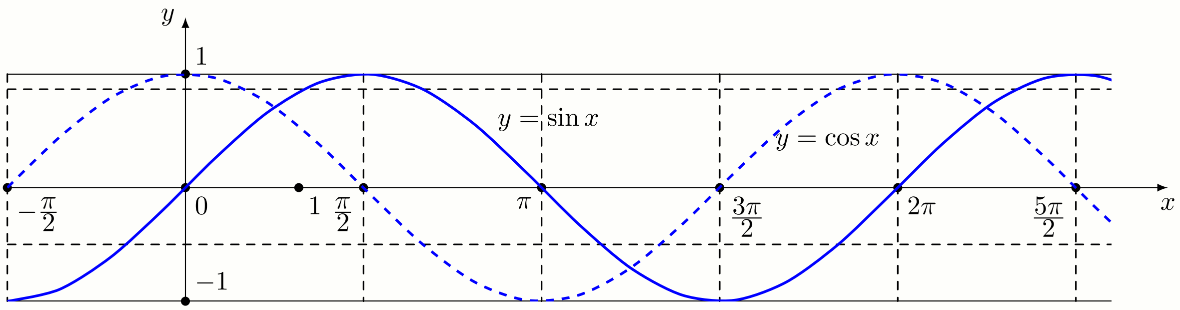


Рис. 48.7

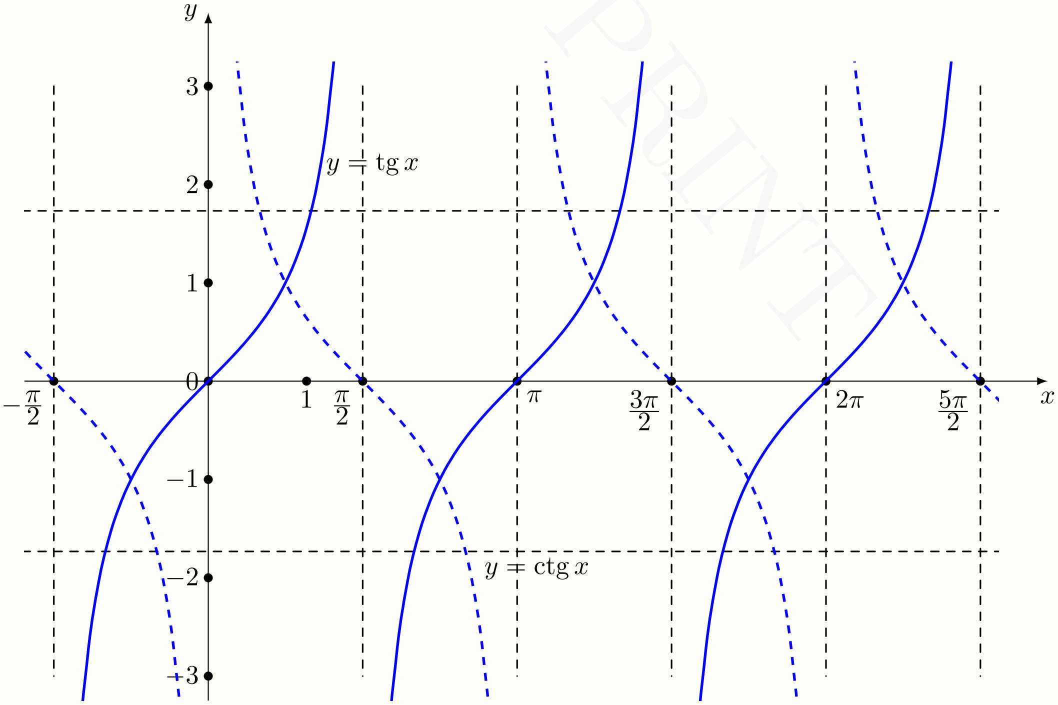


Рис. 48.8

Графіки функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ дані на рис. 48.7 та рис. 48.8. Графік синуса зазвичай називають *синусоїдою*.

Іноді, особливо в технічних питаннях, цікаві гіперболічні функції.

6) *Гіперболічні функції.* Так називаються функції:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{th} x &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \\ \operatorname{cth} x &= \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad \ldots \end{aligned}$$

(**гіперболічний** синус, косинус, тангенс, котангенс, ...); вони визначені для всіх значень x, за винятком $\operatorname{cth} x$, який втрачає сенс, коли $x = 0$. *Ці функції проявляють чудову аналогію з тригонометричними функціями.*

nebayduzhi.math@gmail.com

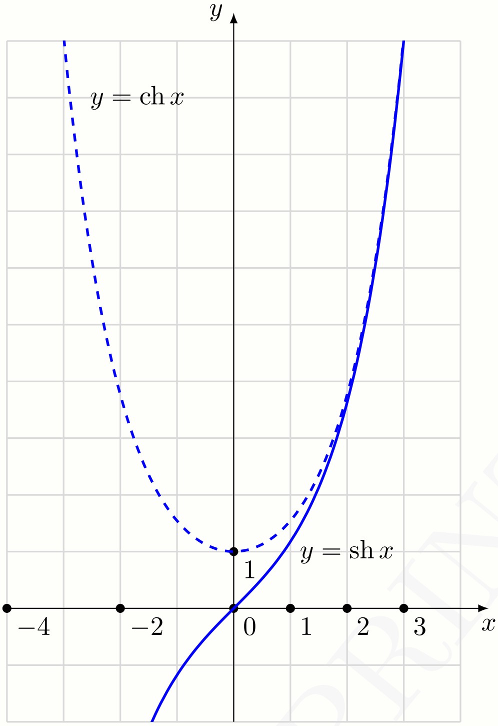


Рис. 48.9

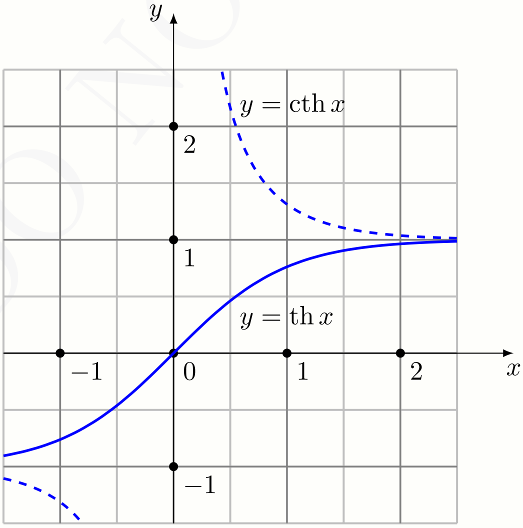


Рис. 48.10

Легко отримати формули (зверніть увагу на знаки!)

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,\\ \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y,\end{aligned}$$

з яких для $y = x$, зокрема, випливає:

$$\begin{aligned}&\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,\\ &\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,\\ &\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x.\end{aligned}$$

Наприклад, перша з цих формул зводиться до тотожності, що легко перевіряється:

$$\frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Також перевіряються й інші.

Графіки гіперболічних функцій зображені на рис. 48.9 та рис. 48.10.

49. Поняття оберненої функції

Перш ніж перейти до обернених тригонометричних функцій, зробимо пояснення щодо обернених функцій взагалі.

Припустимо, що функція $y = f(x)$ задана в деякій області $\mathcal{X}$, і нехай $\mathcal{Y}$ буде множина всіх значень, яких ця функція набуває, коли x змінюється в межах області $\mathcal{X}$. (У нашій практиці як $\mathcal{X}$, так і $\mathcal{Y}$ зазвичай становитимуть **проміжки**.)

Виберемо якесь значення $y = y_0$ з області $\mathcal{Y}$, тоді в області $\mathcal{X}$ необхідно знайдеться таке значення $x = x_0$, для якого наша функція набуває саме значення y_0. Так що

$$f(x_0) = y_0;$$

подібних значень x_0 може виявитися і кілька. Отже, кожному значенню y з $\mathcal{Y}$ ставиться у відповідність одне або кілька значень x; цим визначається в області $\mathcal{Y}$ **однозначна** або **многозначна** функція $x = g(y)$, яка і називається **оберненою** до функції $y = f(x)$.

Розглянемо приклади.

1) Нехай $y = a^x$ $(a > 1)$, де x змінюється на проміжку $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$. Значення y заповнюють проміжок $\mathcal{Y} = (0, +\infty)$, причому кожному y з цього проміжку відповідає, як ми знаємо (розд. 20), у $\mathcal{X}$ одне певне $x = \log_a y$. У цьому випадку обернена функція виявляється **однозначною**.

2) Навпаки, для функції $y = x^2$, якщо x змінювати на проміжку $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$, обернена функція буде **двозначна**: кожному значенню y з проміжку $\mathcal{Y} = [0, +\infty)$,

відповідають два значення $x = \pm\sqrt{y}$ з $\mathcal{X}$. Замість цієї двозначної функції зазвичай розглядають окремо дві **однозначні** функції $x = +\sqrt{y}$ і $x = -\sqrt{y}$ ("гілки" двозначної функції). Їх можна порізно також вважати оберненими до функції $y = x^2$, припускаючи лише, що область зміни x обмежена, відповідно, проміжком $[0, +\infty)$ або проміжком $(-\infty, 0]$.

3) Аналогічно, якщо взяти $y = \operatorname{ch} x$, де область зміни x знову є проміжок $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$, то, розв'язуючи рівняння

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \quad \text{або} \quad e^{2x} - 2y \cdot e^x + 1 = 0$$

відносно e^x, знайдемо (для $y \geqslant 1$) два значення

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1},$$

звідки

$$x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

Знову — **двозначна** функція, яка розпадається на дві **однозначні** гілки, що відповідають порізно зміні x від 0 до $+\infty$ і від $-\infty$ до 0.

4) Якщо ж $y = \operatorname{sh} x$, то для будь-якого y з рівняння

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \quad \text{або} \quad e^{2x} - 2y \cdot e^x - 1 = 0$$

знайдемо лише **одне** значення для e^x:

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

бо друге значення з мінусом при корені, як від'ємне, не можливе і має бути відкинуте. Звідси

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right),$$

тому тут обернена функція **однозначна**.

Зауважимо, що з графіка функції $y = f(x)$ легко здогадатися, буде обернена до неї функція $x = g(y)$ однозначна чи ні. Буде однозначна, якщо будь-яка пряма, паралельна осі x, перетинає цей графік лише в **одній** точці. Навпаки, якщо деякі з таких прямих перетинають графік у **кількох** точках, обернена функція буде многозначна. В цьому випадку з графіка ж легко розбити проміжок зміни x на частини так, щоб кожній частині вже відповідала однозначна "гілка" цієї функції. Наприклад, тільки дивлячись на параболу рис. 48.1, яка служить графіком функції $y = x^2$, ясно, що обернена до неї функція двозначна і що для отримання однозначних "гілок" досить окремо розглядати праву та ліву частини цієї параболи, тобто додатні та від'ємні значення x. (Нижче в розд. 83 ми ще повернемося до питання існування та однозначності оберненої функції.)

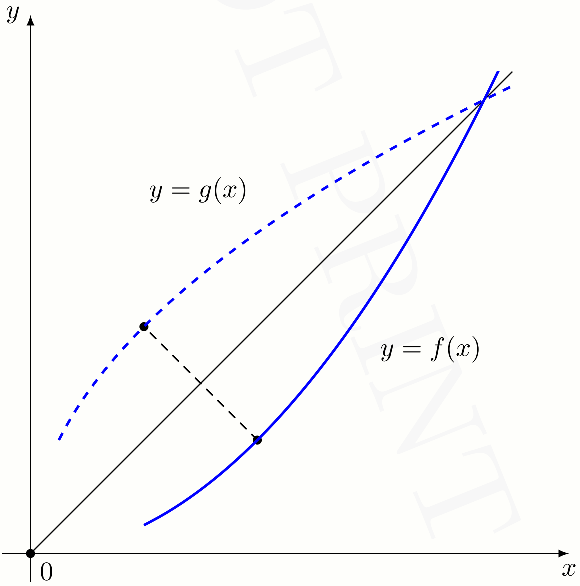


Рис. 49.1

Якщо функція $x = g(y)$ обернена до функції $y = f(x)$, то очевидно графіки обох функцій однакові. Можна, однак, вимагати, щоб і аргумент оберненої функції позначався буквою x, тобто замість функції $x = g(y)$ розглядати $y = g(x)$. Тоді лише доведеться горизонтальну вісь назвати віссю y, а вертикальну — віссю x; графік все ще залишиться тим самим. Якщо ж побажати, щоб (нова) вісь x була, як завжди, горизонтальна, а (нова) вісь y — вертикальна, то ці осі потрібно буде переставити одну на місце іншої, що вже змінить і графік. Для виконання цього найпростіше повернути площину креслення xOy на 180° навколо бісектриси першого координатного кута (рис. 49.1).

Отже, графік $y = g(x)$ виходить як **дзеркальне відображення** графіка $y = f(x)$ відносно цієї бісектриси. Дивлячись на рис. 48.5 і рис. 48.6, наприклад, одразу видно, що вони саме так одержані один з одного. Так само, виходячи з висловлених міркувань, легко пояснити симетричність (відносно бісектриси) кожного з рис. 48.3 та рис. 48.4.

50. Обернені тригонометричні функції

На додаток до тих класів елементарних функцій, наведених в розд. 48, розглянемо тепер обернені тригонометричні функції.

nebayduzhi.math@gmail.com

7) *Обернені тригонометричні функції*:

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x,$$
$$y = \operatorname{arcctg} x, \quad (y = \operatorname{arcsec} x, \quad y = \operatorname{arccsc} x).$$

Зупинимося спочатку на першій з них. Функція $y = \sin x$ визначена на проміжку $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$, причому її значення заповнюють лише проміжок $\mathcal{Y} = [-1, 1]$. Паралель осі x перетинає синусоїду, тобто графік функції $y = \sin x$ (рис. 48.7), у **нескінченній множині** точок; інакше кажучи, кожному значенню y із проміжку $[-1, 1]$ відповідає **нескінчена множина** значень x. Тому обернена функція, яку позначають як:

$$x = \operatorname{Arcsin} y,$$

буде (нескінченно) многозначна. Ми вже підкреслювали свого часу (пр. 48.5), що аргумент x тригонометричної функції виражає кут у **радіанах**. Зрозуміло, що й тут значення обернених тригонометричних функцій, якщо їх розглядати як міру кута (або дуги), всі виражені в **радіанах**.

Зазвичай розглядають лише одну "гілку" цієї функції, що відповідає зміні x між $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$; кожному y з $[-1, 1]$ у цих межах відповідає **одне** значення x; його позначають через

$$x = \arcsin y$$

і називають **головним значенням** арксинуса.

Повертаючи синусоїду навколо бісектриси першого координатного кута (рис. 50.1), отримуємо графік **многозначної** функції $y = \operatorname{Arcsin} x$; суцільною лінією виділено графік **головної гілки** $y = \arcsin x$, яка **однозначно** визначена на проміжку $[-1, 1]$ значень x і до того ж задовольняє нерівності

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

що характеризує її серед інших гілок.

Згадуючи з елементарної тригонометрії, як виражаються **всі** значення кута, що мають заданий синус, через одне з цих значень, легко написати формули, що дають **всі** значення арксинуса:

$$\operatorname{Arcsin} x = (-1)^k \arcsin x + \pi k \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots).$$

Виходячи з теореми додавання для синуса

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

можна отримати теорему додавання для арксинуса. Саме, покладемо тут $\alpha = \arcsin x,\ \beta = \arcsin y$ (де x і y лежать між -1 і 1); тоді

$$\sin \alpha = x, \quad \sin \beta = y; \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - x^2}, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - y^2},$$

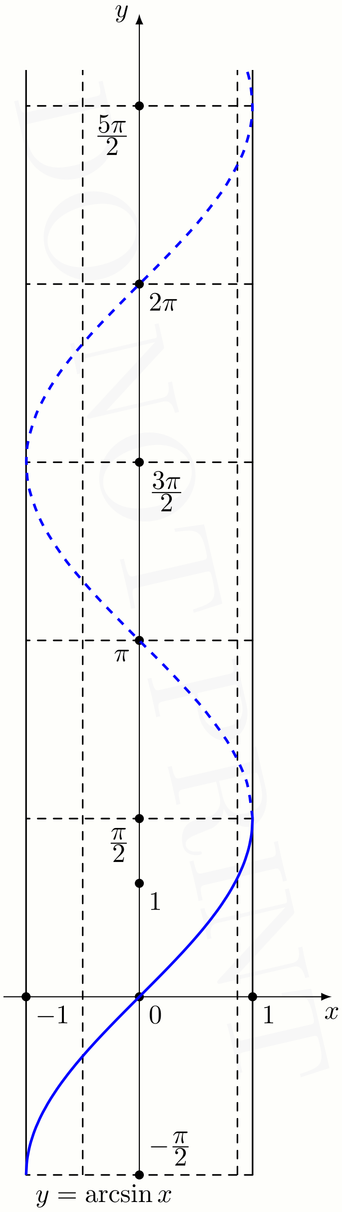


Рис. 50.1

причому корені беруться зі знаком плюс, бо кути α і β, за характерною властивістю головного значення арксинуса, лежать між $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$, тому косинуси їх додатні. Отже,

$$\sin(\alpha+\beta) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2},$$

звідки

$$\alpha+\beta = \arcsin x + \arcsin y = \operatorname{Arcsin}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right).$$

Формула може бути написана простіше:

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

лише в тому разі, **якщо і** $\alpha+\beta$ **не виходить із проміжка** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ця умова автоматично виконується, якщо аргументи x і y (а з ними α і β) мають **різні** знаки. У разі однакових знаків висловлена умова, як легко побачити, рівносильна такому:

$$x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Подібні міркування застосовні до функції $y = \cos x$ $(-\infty < x < +\infty)$. І тут обернена функція

$$y = \operatorname{Arccos} x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

виявляється (нескінченно) многозначною (дивіться рис. 48.7). Для виділення **однозначної** гілки її підпорядковують умові:

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi;$$

це є **головна гілка** арккосинуса.

Функція $\arccos x$ пов'язана з $\arcsin x$ очевидним співвідношенням

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x;$$

справді, не тільки косинус кута $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ дорівнює $\sin(\arcsin x) = x$, але й сам кут міститься саме між 0 та π. Інші значення $\operatorname{Arccos} x$ виражаються через головне його значення за формулою

$$\operatorname{Arccos} x = 2k\pi \pm \arccos x \quad (k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots).$$

Функція $y = \operatorname{tg} x$ визначена для всіх значень x, окрім значень $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, де $k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots$. Значення y заповнюють тут проміжок $(-\infty, +\infty)$, причому кожному y знову відповідає нескінченна множина значень x (дивіться рис. 48.8). Тому обернена функція $x = \operatorname{Arctg} y$, задана на проміжку $(-\infty, +\infty)$, буде (нескінченно) многозначна. На рис. 50.2 зображений графік функції $y = \operatorname{Arctg} x$,

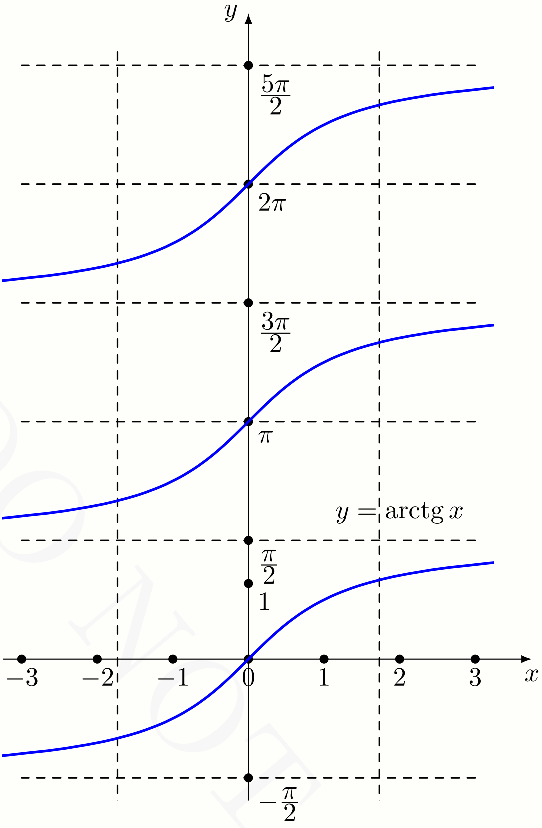

y
$\frac{5\pi}{2}$
2π
$\frac{3\pi}{2}$
π
$y = \operatorname{arctg} x$
$\frac{\pi}{2}$
1
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
$-\frac{\pi}{2}$

Рис. 50.2

отриманий поворотом на 180° навколо бісектриси першого координатного кута графіка функції $y = \operatorname{tg} x$. За **головне значення** арктангенса, $\operatorname{arctg} x$, беруть те із значень цієї многозначної функції, яке задовольняє нерівності

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}\,.$$

Таким способом визначається однозначна функція — **головна гілка** арктангенса, задана для всіх значень x. Інші значення арктангенса, як легко показати, виходять так:

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + k\pi \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Формула додавання для тангенса:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}\,,$$

якщо покласти $\alpha = \operatorname{arctg} x,\ \beta = \operatorname{arctg} y$, дає (для $xy \neq 1$)

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{x + y}{1 - xy}\,,$$

так що

$$\alpha + \beta = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{Arctg}\frac{x + y}{1 - xy}\,.$$

І в цьому разі рівність можна звести до простого вигляду

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x + y}{1 - xy}\,,$$

тільки якщо $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, тобто якщо $xy < 1$.

Нескладно показати прямий зв'язок між функціями $\operatorname{arctg} x$ і $\arcsin x$:

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

або

$$\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < +1).$$

Наприклад, якщо покласти $\alpha = \operatorname{arctg} x$, так що $\operatorname{tg}\alpha = x$, то $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, причому корінь береться зі знаком плюс, тому що $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; звідси і випливає, що $\alpha = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Згадаємо ще про функцію $\operatorname{Arcctg} x$ $(-\infty < x < +\infty)$; її **головне значення** визначається нерівностями

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$$

і пов'язане з $\operatorname{arctg} x$ співвідношенням

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Інші значення арккотангенса мають вигляд

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + k\pi \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots).$$

На функціях *arcsec* x $(-\infty < x \leqslant -1$ і $1 \leqslant x < +\infty)$ і *arccsc* x $(-\infty < x \leqslant -1$ і $1 \leqslant x < +\infty)$ зупинятися не будемо, надаючи читачеві можливість самому в них розібратися.

51. Композиція функцій. Останні зауваження

Познайомимося з поняттям **композиції** (або **суперпозиції**, або **накладання**) функцій, яка полягає в тому, що замість аргументу заданої функції підставляється деяка функція від іншого аргументу. Наприклад, композиція функцій $y = \sin x$ і $z = \lg y$ дає функцію $z = \lg \sin x$; аналогічно виходять і функції

$$\sqrt{1 - x^2}, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad \text{тощо.}$$

У загальному вигляді, припустимо, що функція $z = \varphi(y)$ визначена в деякій області $\mathcal{Y} = \{y\}$, а функція $y = f(x)$ визначена в області $\mathcal{X} = \{x\}$, **причому значення її всі містяться в області** $\mathcal{Y}$. Тоді змінна z, як кажуть, **через посередництво** y, і сама є функцією від x:

$$z = \varphi(f(x)).$$

За заданим x із $\mathcal{X}$ спочатку знаходять відповідне до нього (за правилом, що характеризується знаком f) значення y з $\mathcal{Y}$, а потім знаходять відповідне до **цього** значення y (за правилом, що характеризується знаком φ) значення z; його і вважають таким, що відповідає обраному x. Отримана *функція від функції або складена функція (або складна функція)* і є результат *композиції* функцій $f(x)$ і $\varphi(y)$.

Припущення, що значення функції $f(x)$ не виходять за межі тієї області $\mathcal{Y}$, у якій визначена функція $\varphi(y)$, **дуже суттєве**: якщо його опустити, то може вийти і безглуздість. Наприклад, вважаючи $z = \lg y$, а $y = \sin x$, ми можемо розглядати лише такі значення x, для яких $\sin x > 0$, бо інакше вираз $\lg \sin x$ не мав би сенсу.

Ми вважаємо за корисне тут же підкреслити, що характеристика **складеної** функції пов'язана не з природою функціональної залежності z от x, а лише зі **способом задання** цієї залежності. Наприклад, нехай $z = \sqrt{1 - y^2}$ для y на відрізку $[-1, 1]$, а $y = \sin x$ для x в $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тоді

$$z = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Тут функція $\cos x$ виявилася **заданою** у вигляді композиції функцій.

Тепер, коли повністю з'ясовано поняття композиції функцій, ми можемо дати точну характеристику **найпростішому** з тих класів функцій, що вивчаються в аналізі: це насамперед перелічені вище **елементарні функції** 1)-7) (розд. 48, розд. 50), а потім — усі ті, які з них отримуються за допомогою чотирьох арифметичних дій та композицій послідовно застосованих **скінченне** число разів. Про них говорять, що вони виражаються через елементарні функції в **скінченному вигляді**; іноді їх усіх також називають **елементарними**.

Згодом, опанувавши складніший аналітичний апарат (нескінченні ряди, інтеграли), ми познайомимося і з іншими функціями, що також відіграють важливу роль в аналізі, але вже виходять за межі класу елементарних функцій.

nebayduzhi.math@gmail.com

2.2. Границя функції

52. Означення границі функції

Розглянемо числову множину $\mathcal{X} = \{x\}$. *Точка a називається* ***точкою згущення*** *цієї множини, якщо за будь-якої близькості від a містяться значення x із $\mathcal{X}$, відмінні від a.*

Щоб висловити це означення в точніших термінах, введемо поняття **окіл** точки a: так називається будь-який відкритий проміжок $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ з центром в точці a. Тепер можна сказати, що *точка a буде* ***точкою згущення*** *множини $\mathcal{X}$, якщо в кожному її околі містяться відмінні від a значення x з $\mathcal{X}$.*

Сама ж точка згущення може належати або не належати до $\mathcal{X}$.

Нехай в області $\mathcal{X}$, для якої a є точкою згущення, задана деяка функція $f(x)$. Нас буде цікавити поведінка цієї функції, коли x наближається до a. Говорять, що *функція $f(x)$ має* ***границю*** *число A,* ***коли*** *x* ***прямує*** *до a (або в точці a), якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що*

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \ \textit{якщо}\ |x - a| < \delta, \tag{52.1}$$

де x взяте з $\mathcal{X}$ і **відмінне** від a. (Саме з того, що a — це точка згущення для $\mathcal{X}$, випливає, що такі значення x в околі $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ точки a напевно існують.) Позначають цей факт так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A. \tag{52.2}$$

Якщо область $\mathcal{X}$ така, що в будь-якому малому околі точки a, але **справа** від a, знайдуться відмінні від a значення x із $\mathcal{X}$ (у цьому разі точку a називають ***правою*** *точкою згущення* для $\mathcal{X}$), то можна спеціалізувати щойно наведене означення границі функції, обмеживших лише значеннями $x > a$. У цьому разі границя функції, якщо вона існує, називається *границею функції $f(x)$,* ***коли*** *x* ***прямує до*** *a* ***справа****, або, коротше, границею (у точці a)* ***справа*** і позначається символом

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \quad \text{або} \quad f(a+0).$$

Якщо $a = 0$, то замість $a + 0$ пишуть просто $+0$.

Аналогічно можна казати про **ліву** точку згущення і *про границю функції,* ***коли*** *x* ***прямує до*** *a* ***зліва****, або про границю (в точці a)* ***зліва***:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \quad \text{або} \quad f(a-0).$$

Якщо $a = 0$, то замість $a - 0$ пишуть просто -0.

Якщо точка a водночас і права, і ліва точка згущення для $\mathcal{X}$, то, як легко довести, *для існування границі (52.2) необхідно і достатньо існування порізно границь*

nebayduzhi.math@gmail.com

справа і зліва і їх рівність:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = A.$$

Коли x прямує до скінченної границі a, функція може мати і нескінченну границю. Саме, *функція $f(x)$ має границю $+\infty$ $(-\infty)$, коли x* ***прямує*** *до a, якщо для кожного числа $E > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що*

$$f(x) > E \quad (f(x) < -E),\ \textit{якщо}\ |x-a| < \delta \tag{52.3}$$

(де, як і завжди, x взяте з $\mathcal{X}$ і **відмінне** від a).

Запис цих фактів подібний до (52.2):

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\ (-\infty).$$

У цьому разі можуть бути повторені зроблені вище зауваження щодо однобічних границь справа та зліва.

Якщо множина $\mathcal{X} = \{x\}$ містить скільки завгодно великі (за абсолютною величиною) додатні (від'ємні) значення x, то кажуть, що $+\infty$ $(-\infty)$ є точкою згущення для $\mathcal{X}$.

Припускаючи це: *функція $f(x)$ має границю A, коли x* ***прямує*** *до $+\infty$ $(-\infty)$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\Delta > 0$, що*

$$|f(x) - A| < \varepsilon,\ \textit{якщо}\ x > \Delta\ (x < -\Delta) \tag{52.4}$$

(де x береться з $\mathcal{X}$). І пишуть:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad \text{або} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A. \tag{52.5}$$

Зрештою, легко перефразувати все сказане на випадок $A = +\infty$ або $-\infty$.

Сутність всіх цих означень одна й та сама: функція $f(x)$ повинна бути як завгодно "близька" до своєї границі A, коли незалежна змінна x досить "близька" до своєї границі a. Але змінна "близька" до своєї **скінченної** границі, якщо різниця між ними (за абсолютною величиною) мала, а до **нескінченної**, якщо вона сама (за абсолютною величиною) велика і до того ж зберігає знак границі.

Зрозуміло, що числа δ (або Δ) завжди залежать від ε (або E).

Зауважимо на закінчення, що, якщо функція $f(x)$ прямує до 0, її називають **нескінченно малою**; її називають **нескінченно великою**, якщо $|f(x)|$ прямує до ∞. Якщо $|f(x)|$ прямує до ∞, коли $x \to a$, то кажуть також, що в точці a функція **дорівнює нескінченності**.

53. Зведення до випадку варіанти

Якщо розглядати варіанту як функцію від незалежної змінної n, що змінюється в межах натурального ряду, то границя цієї функції для $n \to \infty$, як вона означена в розд. 52, очевидно збігається з границею варіанти, означеною у розд. 23 та розд. 27 (роль Δ там відіграє N). Отже, *границя варіанти — це окремий випадок границі функції.*

Однак і, навпаки, у **деякому сенсі** границя функції може бути зведена до границі варіанти.

Нехай множина $\mathcal{X} = \{x\}$ має точку згущення a (тут a може бути як скінченним числом, так і нескінченністю того чи іншого знака). Тоді з $\mathcal{X}$ (нескінченною кількістю способів) можна отримати таку послідовність

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n,\ \dots \tag{53.1}$$

значень x (відмінних від a), яка мала б своєю **границею** a.

Справді, якщо a скінченне, то, взявши додатну варіанту δ_n, що прямує до нуля, в кожному околі $(a - \delta_n,\ a + \delta_n)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ точки a знайдемо по точці $x = x_n$ із $\mathcal{X}$, відмінній від a: оскільки $|x_n - a| < \delta_n$, то $x_n \to a$. Для $a = +\infty$ $(-\infty)$ візьмемо додатну варіанту $\Delta_n \to +\infty$ і для кожного Δ_n знайдемо значення $x = x_n$ із $\mathcal{X}$, для якого $x_n > \Delta_n$ $(x_n < -\Delta_n)$; зрозуміло, $x_n \to +\infty$ $(-\infty)$ тощо.

Послідовності (53.1) значень аргументу відповідає послідовність значень функції

$$f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ \dots,\ f(x_n),\ \dots \tag{53.2}$$

Твердження 53.1. *Легко побачити, що за наявності рівності* (52.2) *ця послідовність завжди має границю* A.

Доведення. Зупинимося, наприклад, на випадку скінченних a і A.

Якщо задане довільне число $\varepsilon > 0$, то спочатку візьмемо те число $\delta > 0$, яке йому відповідає за означенням границі (52.2). За числом δ, зважаючи на збіжність послідовності (53.1) до a, знайдеться (розд. 23) такий номер N, що для $n > N$ виконуватиметься нерівність $|x_n - a| < \delta$, а отже (дивіться (52.1)) і $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Цим і доведено збіжність послідовності (53.2) до A. □

Виявляється, що справедливе і обернене твердження.

Твердження 53.2. *Припустимо тепер, що* ***хоч би яку послідовність*** (53.1) *(з* $\mathcal{X}$*) із границею* a *пробігала незалежна змінна* x*, відповідна послідовність* (53.2) *значень функції завжди має границю* A*. Тоді це число* A *буде границею функції* $f(x)$ *згідно з означенням в розд. 52.*

Доведення. Обмежимося і тут випадком скінченних a і A. Міркуючи від протилежного, припустимо, що A не буде границею функції. Тоді для **деякого** числа $\varepsilon > 0$ не існувало б відповідного δ; тобто, хоч би яке мале δ взяти, завжди знайдеться хоч одне значення змінної $x = x'$ (відмінне від a), для якого

$$|x' - a| < \delta, \ \textit{та проте} \ |f(x') - A| \geqslant \varepsilon.$$

Візьмемо послідовність додатних чисел $\{\delta_n\}$, які прямують до нуля. На підставі щойно сказаного, для кожного числа $\delta = \delta_n$ знайдеться таке значення $x' = x'_n$, що

$$|x'_n - a| < \delta_n, \ \textit{та проте} \ |f(x'_n) - A| \geqslant \varepsilon.$$

Отже, з цих значень складається деяка послідовність

$$x'_1, \ x'_2, \ x'_3, \ \ldots, \ x'_n, \ \ldots$$

для якої

$$|x'_n - a| < \delta_n \quad (n = 1, \ 2, \ 3, \ \ldots);$$

оскільки $\delta_n \to 0$, то $x'_n \to a$.

За припущенням твердження, відповідна послідовність значень функції

$$f(x'_1), \ f(x'_2), \ f(x'_3), \ \ldots, \ f(x'_n), \ \ldots$$

повинна прямувати до A, а це неможливо через те, що для всіх $n = 1, \ 2, \ 3, \ \ldots$ маємо $|f(x'_n) - A| \geqslant \varepsilon$. Отримана суперечність і доводить наше твердження. □

Отже, ми, по суті, приходимо **до другого означення поняття границі функції**, яке в розд. 52 було виражене, так би мовити, “мовою ε-δ”. Тепер ми можемо висловити його “мовою послідовностей”, *розуміючи рівність* (52.2) *так, що для будь-якої послідовності* (53.1), *що має границю a, відповідна послідовність* (53.2) *має границю A.*

Твердження 53.3. *На закінчення зазначимо, що достатньо припустити одне лише* ***існування*** *границі для кожної послідовності* (53.2), *що відповідає будь-якій збіжній до a послідовності* (53.1), *щоб звідси вже випливав* ***збіг*** *усіх цих границь.*

Доведення. Справді, припустимо, що для двох послідовностей:

$$x'_1, \ x'_2, \ \ldots, \ x'_n, \ \ldots \quad \text{і} \quad x''_1, \ x''_2, \ \ldots, \ x''_n, \ \ldots,$$

які прямують до a, мали б

$$f\,(x'_n) \to A' \quad \text{і} \quad f\,(x''_n) \to A'',$$

де $A' \neq A''$. Тоді, перемежовуючи члени обох послідовностей, складемо нову послідовність:

$$x_1',\ x_1'',\ x_2',\ x_2'',\ \ldots,\ x_n',\ x_n'',\ \ldots;$$

вона, очевидно, прямує до a, оскільки для досить великих n і x_n', і x_n'' відрізняються від a довільно мало. Водночас відповідна послідовність значень функції:

$$f(x_1'),\ f(x_1''),\ f(x_2'),\ f(x_2''),\ \ldots,\ f(x_n'),\ f(x_n''),\ \ldots;$$

всупереч припущенню, немає зовсім границі, оскільки часткові послідовності з її членів, які стоять на парних або непарних місцях, прямують до **різних** границь (розд. 40). Отримана суперечність і доводить, що послідовності вигляду (53.2) насправді прямують до тієї самої границі. ☐

54. Приклади

1) Доведемо, що

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad (\text{для } a > 1).$$

Для будь-якого $E > 0$, достатньо взяти $\Delta = \log_a E$, щоб $x > \Delta$ тягло за собою $a^x > E$, що і доводить наше твердження. З більш **частковим** випадком $\lim a^n = +\infty$ $(a > 1)$ ми вже мали справу в розд. 27.

Аналогічно доводиться, що

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad (\text{для } a > 1).$$

Саме, хоч би яким було $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$, якщо взяти $\delta = \log_a \frac{1}{\varepsilon} = -\log_a \varepsilon$, то для $x < -\delta$ необхідно $a^x < \varepsilon$.

Якщо ж $0 < a < 1$, то за допомогою перетворення

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$$

легко отримати результати

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \quad (\text{для } 0 < a < 1).$$

2) Покажемо, що для $a > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \qquad \lim_{x\to+0} \log_a x = -\infty.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Для будь-якого заданого $E > 0$, як тільки $x > a^E$, будемо мати: $\log_a x > E$, і аналогічно, як тільки $0 < x < a^{-E}$, виконується нерівність: $\log_a x < -E$. Цим і доведено обидва співвідношення.

3) Маємо, далі,

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Зупинимося, наприклад, на першій границі. Для будь-якого $\varepsilon > 0$, достатньо взяти $x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$, щоб було: $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, так що

$$0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \varepsilon.$$

4) Більш тонким є співвідношення:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty \quad (\text{для } a > 1).$$

Згадаємо, що окремий випадок цього ми вже мали:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$$

(пр. 32.9); очевидно водночас буде і

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n+1} = +\infty.$$

Отже, за заданим $E > 0$ знайдеться таке натуральне число N, що для $n > N$ виконується нерівність

$$\frac{a^n}{n+1} > E.$$

Нехай тепер $x > N + 1$; якщо покласти $n = E(x)$, то

$$n > N \quad \text{і} \quad n \leqslant x < n + 1,$$

так що

$$\frac{a^x}{x} \geqslant \frac{a^n}{x} > \frac{a^n}{n+1} > E,$$

що і доводить наше твердження.

Звідси, як і в пр. 32.9, легко отримати

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty \quad (a > 1,\ k > 0).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

5) Аналогічно, спираючись на попередній результат (пр. 32.11)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_a n}{n}=0 \quad (a>1),$$

можна довести, що взагалі

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}=0 \quad (a>1),$$

де x набуває будь-яких додатних дійсних значень.

Замінюючи тут x на x^k $(k>0)$, легко показати, що і

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=0 \quad (a>1,\ k>0),$$

Справді, якщо, для довільного $\varepsilon>0$ взяти Δ таке, щоб для $x>\Delta$ виконувалася нерівність

$$\frac{\log_a x}{x}<k\cdot\varepsilon,$$

то для $x>\Delta_1=\Delta^{\frac{1}{k}}$ буде $x^k>\Delta$ і

$$\frac{\log_a x}{x^k}<\varepsilon.$$

Якщо замінити тут x на $\frac{1}{x}$, то отриманий результат перепишеться у вигляді

$$\lim_{x\to+0}x^k\log_a x=0 \quad (a>1,\ k>0).$$

6) З доведеного в пр. 25.5 граничного співвідношення

$$\lim_{n\to+\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$$

можна отримати загальніше

$$\lim_{x\to0}a^x=1.$$

Зауважимо, що очевидно й

$$\lim_{n\to+\infty}a^{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=1.$$

Тому, хоч би яке було $\varepsilon>0$, можна знайти таке натуральне число n_0, що (якщо, скажімо, $a>1$)

$$1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n_0}}<a^{\frac{1}{n_0}}<1+\varepsilon.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

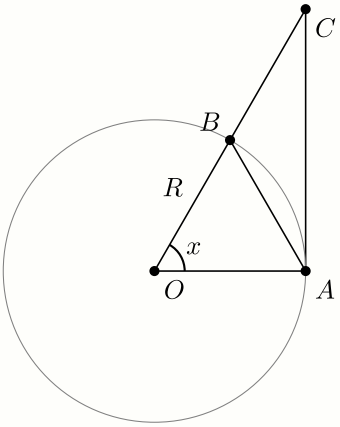


Рис. 54.1

Якщо тепер

$$|x| < \frac{1}{n_0} \quad \text{або} \quad -\frac{1}{n_0} < x < \frac{1}{n_0},$$

то

$$a^{-\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n_0}},$$

звідки

$$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon \quad \text{або} \quad |a^x - 1| < \varepsilon,$$

що і доводить висловлене твердження.

7) Тепер ми доведемо ще один (**важливий і для подальшого**) результат:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{54.1}$$

Попередньо, однак, нам доведеться довести деякі корисні нерівності:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \tag{54.2}$$

З цією метою в колі радіуса R розглянемо **гострий** кут $\angle AOB$, хорду AB та дотичну AC до кола в точці A (рис. 54.1). Тоді маємо такі нерівності для площ:

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сектор } OAB} < S_{\triangle AOC}\,.$$

Ми користуємося тими відомостями про площі елементарних фігур, що викладаються в шкільному курсі.

Якщо через x позначити **радіальну міру** кута $\angle AOB$, то довжина дуги $\overset{\frown}{AB}$ виразиться добутком $R \cdot x$, а ці нерівності перепишуться так:

$$\frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2}R^2 \cdot x < \frac{1}{2}R^2 \cdot \operatorname{tg} x.$$

Звідси і приходимо до нерівностей (54.2).

Припускаючи, що $0 < x < \frac{\pi}{2}$, розділимо $\sin x$ на кожен із членів нерівностей (54.2). Ми отримаємо:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x,$$

звідки

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Але

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2\cdot\frac{x}{2} = x,$$

так що

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

Звідси випливає нерівність

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x|,$$

яка очевидно збережеться, і якщо знак x зміниться, тобто буде справедлива для всіх $x \neq 0$, як тільки $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Отримана нерівність і розв'язує питання. Справді, якщо задане довільне число $\varepsilon > 0$, то δ достатньо вибрати найменшим з чисел ε і $\frac{\pi}{2}$; для $|x| < \delta$ (де $\delta \leqslant \frac{\pi}{2}$ та $\delta \leqslant \varepsilon$)

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon.$$

За означенням границі функції (розд. 52), це означає, що функція $\frac{\sin x}{x}$ для $x \to 0$ має границю 1, тому співвідношення (54.1) справедливе.

7a) Граничне співвідношення (54.1), відповідно до розд. 53, можна тлумачити і так, що, як тільки x пробігає послідовність $\{x_n\}$, що прямує до нуля, варіанта $\frac{\sin x_n}{x_n}$ буде прямувати до 1.

Застосуємо це зауваження до пошуку границі **варіанти**

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n},$$

де φ — будь-яке відмінне від 0 число.

Очевидно

$$\sin\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2} = 2^2\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\sin\frac{\varphi}{2^2} = \ldots = 2^n\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\ldots\cos\frac{\varphi}{2^n}\cdot\sin\frac{\varphi}{2^n},$$

так що вираз, що цікавить нас, представиться у вигляді

$$\frac{\sin\varphi}{2^n\cdot\sin\frac{\varphi}{2^n}} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}\cdot\frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\frac{\varphi}{2^n}}.$$

Оскільки $x_n = \frac{\varphi}{2^n}$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{\varphi}{2^n}}{\frac{\varphi}{2^n}} = 1,$$

і границя нашої варіанти виявляється рівна числу $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$.

8) Зараз ми вивчатиме також **дуже важливу** границю. Саме, в розд. 36 було означене число e як границя варіанти

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{54.3}$$

Тепер ми доведемо загальніший результат:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{54.4}$$

а також і

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{54.5}$$

Скористаємося цього разу **другим означенням** границі (“мовою послідовностей”, розд. 53).

Насамперед, нагадаємо, що поряд з (54.3) справедлива і рівність

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}. \tag{54.6}$$

якщо $\{n_k\}$ є довільна послідовність натуральних чисел, що зростають разом із **номером** k до нескінченності (розд. 40).

Нехай тепер x пробігає якусь послідовність $\{x_k\}$ значень, які прямують до $+\infty$; можна навіть вважати, що всі $x_k > 1$. Нехай $n_k = E(x_k)$, так що

$$n_k \leqslant x_k < n_k + 1 \quad \text{і} \quad n_k \to +\infty.$$

Оскільки при цьому

$$\frac{1}{n_k+1} < \frac{1}{x_k} \leqslant \frac{1}{n_k},$$

то

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}.$$

Два крайні вирази можуть бути перетворені так:

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}}, \quad \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\cdot\left(1+\frac{1}{n_k}\right),$$

nebayduzhi.math@gmail.com

причому, зважаючи на (54.6),

$$\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \to e, \quad \text{а також} \quad \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \to e,$$

тоді як очевидно, що

$$1+\frac{1}{n_k} \to 1, \quad 1+\frac{1}{n_k+1} \to 1;$$

отже, обидва згадані вирази прямують до спільної границі e, а тоді і вираз між ними також прямує до e (теор. 28.3):

$$\lim \left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e.$$

Цим і завершується доведення співвідношення (54.4) “мовою послідовностей”.

Для доведення (54.5) припустимо тепер, що послідовність $\{x_k\}$ прямує до $-\infty$ (причому можна вважати всі $x_k < -1$). Якщо покласти $x_k = -y_k$, тоді $y_k \to +\infty$ (і усі $y_k > 1$). Очевидно,

$$\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = \left(1-\frac{1}{y_k}\right)^{-y_k} = \left(\frac{y_k-1}{y_k}\right)^{-y_k} = \left(\frac{y_k}{y_k-1}\right)^{y_k} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k} = \left(1+\frac{1}{y_k-1}\right)^{y_k-1} \cdot \left(1+\frac{1}{y_k-1}\right).$$

Оскільки, за доведеним, перший множник останнього виразу прямує до e, другий же очевидно прямує до 1, то й вираз ліворуч також прямує до e. Формула (54.5) доведена.

Замінимо тепер у виразі $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ змінну x на $\frac{1}{\alpha}$; якщо надати α послідовність додатних або від'ємних значень, які прямують до 0 (але не рівних 0), то $x = \frac{1}{\alpha}$ прямуватиме до $\pm\infty$. Тому формули (54.4) та (54.5) можна переписати у вигляді

$$e = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{54.7}$$

Цей чудовий результат є основою всіх використань числа e.

9) Цікавий, нарешті, і приклад, коли границі функції **не існує**: функція $\sin x$, коли x прямує до $+\infty$ $(-\infty)$, зовсім **не має границі**.

У цьому найпростіше переконатися, використовуючи послідовності. Досить помітити, що двом послідовностям

$$\left(\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi\right) \quad \text{і} \quad \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

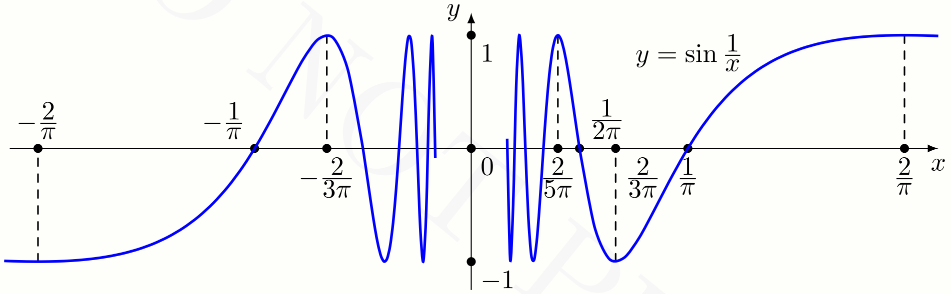


Рис. 54.2

значень x, що прямують до $+\infty$, відповідають послідовності значень функції, що прямують до **різних** границь:

$$\sin\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi=-1\to -1,\quad \sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=1\to 1.$$

(Те ж можна виразити й інакше: якщо взяти послідовність

$$\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

значень x, що прямує до $+\infty$, тоді їй відповідає послідовність значень функції:

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi=(-1)^n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

що **зовсім не має** границі.)

Якщо згадати "коливальний" характер синусоїди, то стане наочним, що в цьому випадку нема границі.

Аналогічно, і функція $\sin\frac{1}{\alpha}$, коли α прямує до 0 (справа або зліва), **границі не має**. Це, по суті, лише інша форма наведеного вище прикладу: варто лише у функції $\sin x$ замінити x на $\frac{1}{\alpha}$. Очевидно, якщо α пробігає послідовність значень, що наближаються до 0 справа (зліва), то $x=\frac{1}{\alpha}$ прямує до $+\infty$ ($-\infty$), і навпаки.

Напишемо знову у виразі $\sin\frac{1}{\alpha}$ замість літери α літеру x (щоб повернутися до **звичного** позначення абсциси) і розглянемо повчальний графік функції

$$y=\sin\frac{1}{x}\quad (x\neq 0),$$

обмежуючись значеннями x від 0 до $\frac{2}{\pi}$ (і від $-\frac{2}{\pi}$ до 0).

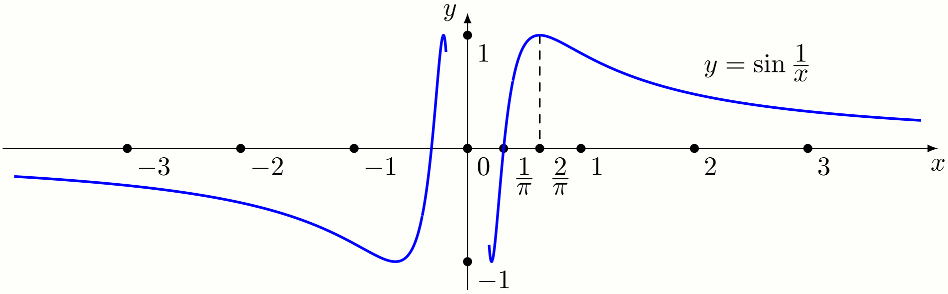


Рис. 54.3

Виділимо значення x, що послідовно спадають до 0:

$$\frac{2}{\pi},\ \frac{1}{\pi},\ \frac{2}{3\pi},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{2}{5\pi},\ \frac{1}{3\pi},\ \frac{2}{7\pi},\ \ldots,\ \frac{2}{(2n-1)\pi},\ \frac{1}{n\pi},\ \frac{2}{(2n+1)\pi},\ \ldots;$$

їм відповідають значення $\frac{1}{x}$, що зростають до $+\infty$:

$$\frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ \frac{5\pi}{2},\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{2},\ \ldots,\ \frac{(2n-1)\pi}{2},\ n\pi,\ \frac{(2n+1)\pi}{2},\ \ldots;$$

У проміжках між вказаними значеннями (коли x **спадає**) наша функція поперемінно спадає від 1 до 0 і від 0 до -1, а потім зростає від -1 до 0 та від 0 до 1, і так далі.

Отже, функція $\sin\frac{1}{x}$ робить нескінченну кількість коливань, подібно до функції $\sin x$, але, тоді як для останньої ці коливання розподіляються на **нескінченний** проміжок, тут вони всі вміщаються на **скінченному** проміжку, згущуючись до 0.

Графік зображено на рис. 54.2 (зрозуміло, не повністю — нескінченну кількість коливань відтворити неможливо!). Оскільки $\sin\frac{1}{x}$ змінює знак, коли x змінює знак, то ліва половина графіка симетрична до правої відносно початку.

10) Якщо (для $x \neq 0$) розглянути функцію $x \cdot \sin\frac{1}{x}$, яка відрізняється множником x від щойно вивченої функції $\sin\frac{1}{x}$, то цього разу границя функції, коли $x \to 0$, існує:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0,$$

що відразу ясно з нерівності

$$\left| x \cdot \sin\frac{1}{x} \right| \leqslant |x|.$$

Коли x наближається до 0, наша функція, як і раніше, робить нескінченну кількість коливань, але їх амплітуда (завдяки множенню на x) спадає, прямуючи до 0, чим і забезпечується існування границі.

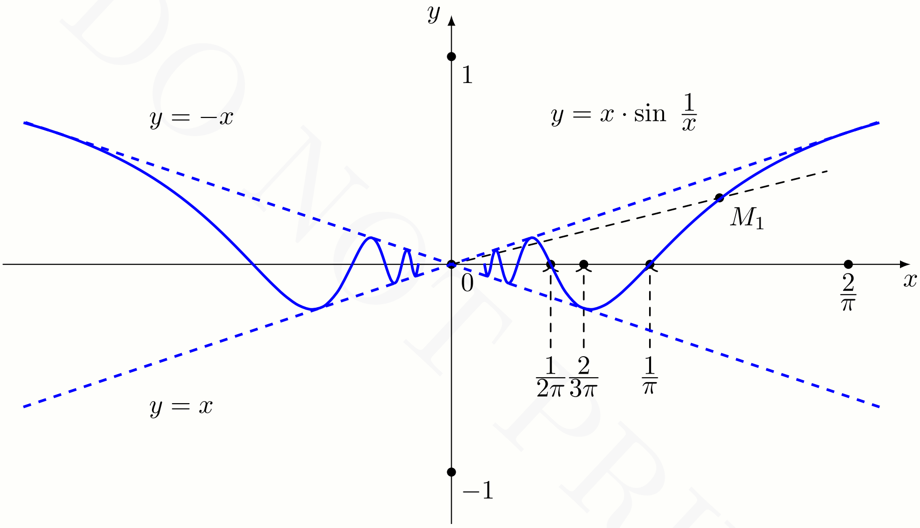


Рис. 54.4

Графік функції

$$y = x \cdot \sin\frac{1}{x}$$

зображений на рис. 54.4; він уміщається між двома бісектрисами $y = x$ і $y = -x$ координатних кутів.

(На рис. 54.2, рис. 54.3 і рис. 54.4 для ясності довелося по осі x узяти більший масштаб, що створює спотворення.)

Зауваження. Ми мали низку границь

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0,$$

об'єднаних однією особливістю: жодна з цих функцій **не визначена** в точці $x = 0$. Але це нiскільки не заважає говорити про їх границі, коли $x \to 0$, бо, згідно з точним змістом даного в розд. 52 означення, якраз значення $x = 0$ тут й **не розглядається**.

Аналогічно, та обставина, що функція $\sin\frac{1}{x}$ не має сенсу, коли $x = 0$, не заважає **ставити питання** про її границю, коли $x \to 0$; але цього разу виявляється, що границя не існує.

55. Поширення теорії границь

Природно постає питання про поширення **теорії границь**, розвиненої в попередніх розділах стосовно випадку варіанти, на загальний випадок довільної функції.

Для цього існують два шляхи.

1. Передусім можна **перефразувати тут викладені там міркування**. Як приклад, ми фактично виконаємо це щодо теор. 26.1.

Розглянемо функцію $f(x)$, задану в деякій області $\mathcal{X}$, з точкою згущення a. (Число a може бути і нескінченним, але ми для визначеності обмежимося випадком **скінченного** a.)

Теорема 55.1. *Якщо функція $f(x)$ в точці $x = a$ має скінченну границю A, і $A > p$ $(A < q)$, то для досить близьких до a значень x (відмінних від a) і сама функція задовольняє нерівність*

$$f(x) > p \quad (f(x) < q). \tag{55.1}$$

Доведення. Вибравши додатне число $\varepsilon < A - p$ $(q - A)$, матимемо

$$A - \varepsilon > p \quad (A + \varepsilon < q).$$

Але, за означенням границі, для цього ε знайдеться таке δ, що, як тільки $|x - a| < \delta$ (де x узяте з $\mathcal{X}$ і відмінне від a), відразу ж

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Тоді, для тих же значень x, і (55.1) буде виконуватися. ☐

Читач бачить, що ніяких нових ідей для доведення залучати не довелося.

Звідси безпосередньо можуть бути отримані доведення й теор. 26.2, теор. 26.3, теор. 26.5. Наприклад, вважаючи в теор. 55.1 $p = 0$ $(q = 0)$, отримаємо таке твердження.

Теорема 55.2. *Якщо для $x \to a$ функція $f(x)$ має скінченну додатну (від'ємну) границю, то і сама функція додатна (від'ємна), принаймні для значень x, досить близьких до a, але відмінних від a.*

Справедливе і твердження, аналогічне до теор. 26.4, але у вужчій формі.

Теорема 55.4. *Якщо функція $f(x)$ в точці $x = a$ має скінченну границю A, то* ***для значень*** x***, досить близьких до*** a*, функція буде обмежена:*

$$|f(x)| \leqslant M' \quad (M' = \text{const}, \ |x - a| < \delta).$$

Нагадаємо, що спочатку і для варіанти x_n, яка має скінченну границю, нерівність $|x_n| \leqslant M'$ отримано тільки для $n > N$, але, оскільки, лише **скінченне** число значень варіанти може не задовольняти цю нерівність, то нескладно було, збільшивши в разі потреби M', добитися виконання нерівності для **всіх** x_n. Тут же цього, взагалі кажучи, зробити неможливо, бо значень x, для яких $f(x) > M'$, може виявитися і нескінченна множина. Наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{x}$ прямує до одиниці для $x > 0$, $x \to 1$; очевидно, $f(x) < 2$, якщо $|x - 1| < \frac{1}{2}$, проте для всіх значень x функція $f(x)$ зовсім не буде обмежена.

2. Переходячи до інших теорем, у яких змінні зв'язуються знаками рівності, нерівності або арифметичних дій, ми передусім повинні обумовити, що, сполучаючи дві або декілька функцій $f(x)$, $g(x)$, ... (визначених в одній і тій самій області $\mathcal{X}$) такими знаками, ми завжди маємо на увазі, що їх значення відповідають одному і тому ж значенню x.

Усі ці теореми можна було б довести аналогічним чином заново, але — і це важливо підкреслити — **насправді немає необхідності цього робити**. Якщо, говорячи про границю функції, розглядати послідовності, то, **оскільки для послідовностей теореми доведені, то вони справедливі і для функцій**.

Як приклад, зупинимося на теоремах теор. 30.1, теор. 30.2, теор. 30.3.

Теорема 55.5. *Нехай в області $\mathcal{X}$ (з точкою згущення a) задані дві функції $f(x)$ і $g(x)$, і вони обидві мають скінченні границі, коли x прямує до a:*

$$\lim f(x) = A, \quad \lim g(x) = B.$$

Тоді й функції

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \tag{55.2}$$

також мають скінченні границі (щодо частки — припускаючи, що $B \neq 0$), саме

$$\lim(f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \quad \lim f(x) \cdot g(x) = A \cdot B, \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Доведення. "Мовою послідовностей" ці співвідношення розшифровуються так: якщо $\{x_n\}$ є будь-яка послідовність значень x із $\mathcal{X}$, що має границю a, то

$$f(x_n) \to A, \quad g(x_n) \to B.$$

Якщо до цих двох варіант застосувати вже доведені теореми, то отримуємо відразу:

$$\lim(f(x_n) \pm g(x_n)) = A \pm B, \quad \lim f(x_n) \cdot g(x_n) = A \cdot B, \quad \lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B}.$$

а це ("мовою послідовностей") і висловлює саме те, що треба було довести. (Щодо частки можна було б помітити (аналогічно до того, як ми це зробили для варіанти), що для x, досить близьких до a, знаменник $g(x) \neq 0$, тому дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ має сенс, принаймні для цих значень x.) ☐

nebayduzhi.math@gmail.com

Так само на загальний випадок, що ми розглядаємо тепер, автоматично переноситься й усе сказане в розд. 31 стосовно "невизначених виразів", що умовно характеризуються символами:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty.$$

Як і в найпростішому випадку, коли ми маємо справу з функціями натурального аргументу, тут для "розкриття невизначеності" вже недостатньо знати лише границі функцій $f(x)$ і $g(x)$, а треба врахувати ще і закон їх зміни.

Читач легко перевірить, що в пр. 54.4 та пр. 54.5 ми мали справу з невизначеністю виду $\frac{\infty}{\infty}$ і $0\cdot\infty$, а в пр. 54.7 — з невизначеністю виду $\frac{0}{0}$. В наступному розділі ми наведемо інші приклади, вже із застосуванням найпростіших теорем теорії границь.

Ми ще повернемося до цього питання і в 4.4, де будуть наведені загальні методи розкриття невизначеностей уже із застосуванням диференціального числення.

56. Приклади

1) Узагальнюючи пр. 32.1 та пр. 32.2, розглянемо поведінку многочлена

$$p(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_{k-1}x+a_k,$$

а потім — і частки двох таких многочленів

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_{k-1}x+a_k}{b_0x^l+b_1x^{l-1}+\dots+b_{l-1}x+b_l},$$

коли $x\to\pm\infty$.

Після перетворення многочлена до вигляду

$$p(x)=x^k\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\dots+\frac{a_k}{x^k}\right)$$

легко вже побачити, що

$$\lim_{x\to\pm\infty}p(x)=\pm\infty \quad (\text{невизначеність виду: } \infty-\infty)\,;$$

причому знак границі для k парного визначається лише знаком a_0, а для k непарного — залежить ще й від знака x.

2) Аналогічно знаходимо, що

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\pm\infty, \text{ або } \frac{a_0}{b_0}, \text{ або } 0 \quad \left(\text{невизначеність виду: } \frac{\infty}{\infty}\right),$$

залежно від того, чи буде $k > l$, $k = l$ або $k < l$. Знак границі (у першому випадку) визначається по знаках a_0 і b_0, а також (якщо $k - l$ непарне) — по знаку x.

3) Доведемо для будь-якого додатного раціонального показника r формулу

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r - 1}{x} = r \qquad \left(\text{невизначеність виду: } \frac{0}{0}\right).$$

(Нижче в пр. 77.5 вона буде узагальнена для будь-якого дійсного показника.)

Розпочнемо з простого випадку, коли показник є натуральне число: $r = n$. За біномом Ньютена

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} = \frac{nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + x^n}{x} = n + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x + \cdots + x^{n-1};$$

оскільки для $x \to 0$ усі члени в останній сумі, окрім першого, прямують до 0, то справді маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n - 1}{x} = n.$$

Нехай тепер $r = \frac{1}{m}$ (де m — натуральне), і розглянемо вираз

$$\frac{\sqrt[m]{1+x} - 1}{x}.$$

Покладемо $\sqrt[m]{1+x} - 1 = y$, звідки $x = (1+y)^m - 1$. Оскільки

$$1 - |x| < \sqrt[m]{1+x} < 1 + |x|, \quad \text{то } \lim_{x\to 0}\sqrt[m]{1+x} = 1,$$

так що разом із x і $y \to 0$. А тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x} - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{(1+y)^m - 1} = \frac{1}{m}.$$

Нарешті, загальний випадок $r = \frac{n}{m}$ доводиться застосуванням тієї ж допоміжної змінної y:

$$\frac{(1+x)^{\frac{n}{m}} - 1}{x} = \frac{(1+y)^n - 1}{(1+y)^m - 1} = \frac{(1+y)^n - 1}{y}\cdot\frac{y}{(1+y)^m - 1},$$

звідки

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{n}{m}} - 1}{x} = \frac{n}{m}.$$

4) Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1-\dfrac{x}{m}}{x^2}.$$

За допомогою тієї ж підстановки $\sqrt[m]{1+x}-1=y$ перетворимо вираз до вигляду

$$\frac{y-\dfrac{1}{m}((1+y)^m-1)}{((1+y)^m-1)^2}=\frac{-\dfrac{m-1}{2}y^2+\dots}{m^2y^2+\dots}=\frac{-\dfrac{m-1}{2}+\dots}{m^2+\dots},$$

звідки відразу ясно, що

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1-\dfrac{x}{m}}{x^2}=-\frac{m-1}{2m^2}.$$

5) Границя (пр. 54.7)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

часто використовується для знаходження інших границь.

а)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\quad\left(\text{невизначеність виду: }\frac{0}{0}\right).$$

Очевидно

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2;$$

оскільки вираз у дужках прямує до 1, то спільна границя буде $\frac{1}{2}$.

б)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\quad\left(\text{невизначеність виду: }\frac{0}{0}\right).$$

І тут перетворення веде до вже вивчених границь:

$$\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Зауважимо, що $\cos x\to 1$, коли $x\to 0$, а $\dfrac{1-\cos x}{x^2}\to\dfrac{1}{2}$, як це випливає з попереднього результату а).

в)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x)=0\quad(\text{невизначеність виду: }\infty-\infty).$$

Тут зручніше перейти до змінної $\alpha=\frac{\pi}{2}-x$; очевидно $\alpha\to 0$, коли $x\to\frac{\pi}{2}$. Маємо

$$\sec x-\operatorname{tg}x=\csc\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha}{\sin\alpha}\cdot\alpha\to 0.$$

57. Границя монотонної функції

Питання про саме існування границі функції

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

особливо просто розв'язується для функцій окремого типу, що становлять узагальнення поняття монотонної варіанти (розд. 34).

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякій області $\mathcal{X} = \{x\}$. Функція називається такою, що **зростає (спадає)** в цій області, якщо для будь-якої пари значень, що належать до неї

$$\text{з}\quad x' > x \quad \text{випливає}\quad f(x') > f(x) \quad \Big(f(x') < f(x)\Big).$$

Якщо ж

$$\text{з}\quad x' > x \quad \text{випливає лише}\quad f(x') \geqslant f(x) \quad \Big(f(x') \leqslant f(x)\Big).$$

то функцію називають **неспадною (незростаючою)**. Іноді зручніше і в цьому випадку називати функцію зростаючою (спадною) — але в **широкому** сенсі.

Функції всіх цих типів мають загальну назву — **монотонні**. Для монотонної функції виконується теорема, цілком аналогічна до тієї теореми про монотонну варіанту, яка була доведена в розд. 34.

Теорема 57.1. *Нехай функція $f(x)$ монотонно зростає, хоч би в широкому сенсі, в області $\mathcal{X}$, що має точку згущування — число a, яке більше від усіх значень x (воно може бути скінченним або рівним $+\infty$). Якщо водночас функція обмежена зверху:*

$$f(x) \leqslant M \quad (\text{для всіх } x \text{ з } \mathcal{X}),$$

то функція в точці $x = a$ має скінченну границю; інакше — вона прямує до $+\infty$.

Доведення. Припустимо спочатку, що функція $f(x)$ обмежена зверху, тобто обмежена зверху множина $\{f(x)\}$ значень функції, що відповідають зміні x в області $\mathcal{X}$. Тоді для цієї множини існує (розд. 11) скінченна **точна** верхня межа A. Доведемо, що це число A і буде шуканою границею.

Взявши довільне числом $\varepsilon > 0$, з властивості точної верхньої межі, знайдемо таке значення $x' < a$, що $f(x') > A - \varepsilon$. Зважаючи на монотонність функції, для $x > x'$ буде: $f(x) > A-\varepsilon$. Оскільки, з іншого боку, завжди $f(x) \leqslant A < A+\varepsilon$, то для згаданих значень x виконається нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Це і доводить наше твердження, варто лише для скінченного a покласти $x' = a-\delta$ (тобто $\delta = a - x'$), а для $a = +\infty$ узяти $\Delta = x'$.

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо функція $f(x)$ зверху не обмежена, то, хоч би яке було число E, знайдеться таке x', що $f(x') > E$; тоді для $x > x'$ ми маємо $f(x) > E$ і так далі. □

Залишаємо читачеві довести цю теорему для випадку, коли граничне значення a **менше** від усіх значень x, так само як і для випадку **монотонно спадної** функції.

Легко побачити, що теорема про монотонну варіанту в розд. 34 просто окремий випадок цієї теореми. Незалежною змінною там був значок n, областю зміни якого служив натуральний ряд $\mathcal{N} = \{n\}$, з точкою згущення $+\infty$.

У подальшому нам частіше доведеться користуватися областю $\mathcal{X}$, яка є **суцільний проміжок** $[a', a)$, де $a' < a$ і a — скінченне число або $+\infty$, або проміжок $(a, a']$, де $a' > a$ і a — скінченне число або $-\infty$.

58. Загальна ознака Бользано – Коші

Перейдемо тепер до розгляду загального випадку — функції $f(x)$, заданої в області $\mathcal{X} = \{x\}$, для якої a є точкою згущення. Для існування **скінченної** границі цієї функції, коли x прямує до a, може бути дана така ж ознака, як і для варіанти (розд. 39). Формулювання її ми дамо паралельно для скінченного числа a і для $a = +\infty$.

Теорема 58.1 (Загальна ознака Бользано – Коші)**.** *Для того щоб функція $f(x)$ мала скінченну границю, коли x прямує до a, необхідно і достатньо, щоб для кожного числа $\varepsilon > 0$ існувало таке число $\delta > 0$ $(\Delta > 0)$, щоб нерівність*

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

виконувалася, як тільки

$$|x - a| < \delta \quad \text{і} \quad |x' - a| < \delta \quad (x > \Delta \quad \text{і} \quad x' > \Delta).$$

Доведення. Доведення проведемо припускаючи, що a — скінченне число.

Необхідність. Нехай існує скінченна границя

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Тоді за заданим $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для $|x - a| < \delta$. Нехай і $|x' - a| < \delta$, так що і

$$|A - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Звідси отримуємо

$$|f(x) - f(x')| = |(f(x) - A) + (A - f(x'))| \leqslant |f(x) - A| + |A - f(x')| < \varepsilon,$$

припускаючи, що водночас

$$|x - a| < \delta \quad \text{і} \quad |x' - a| < \delta.$$

Достатність може бути доведена за допомогою міркувань, цілком аналогічних до тих, які були застосовані щодо варіанти (теор. 39.1). Простіше, однак, не повторюючи цих міркувань, просто звести питання до вже розглянутого випадку. Шлях для цього нам відкриває **друге означення** поняття границі функції "мовою послідовностей" (розд. 53).

Отже, нехай умова, сформульована в теоремі, виконана, і для довільного $\varepsilon > 0$ знайдено відповідне $\delta > 0$.

Якщо $\{x_n\}$ є будь-яка послідовність значень x з $\mathcal{X}$, що збігається до a, то, за означенням границі послідовності, знайдеться такий номер N, що для $n > N$ буде: $|x_n - a| < \delta$. Візьмемо разом з n і інший номер $n' > N$, так що водночас

$$|x_n - a| < \delta \quad \text{і} \quad |x_{n'} - a| < \delta.$$

Тоді, за самим вибором числа δ,

$$|f(x_n) - f(x_{n'})| < \varepsilon.$$

Отже, ця нерівність виконується за єдиної вимоги, щоб обидва номери n і n' були $> N$. Це означає, що для варіанти $f(x_n)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ виконується умова розд. 39 і, отже, послідовність

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \dots,\ f(x_n),\ \dots$$

має скінченну границю. □

Ми бачили в розд. 53 (дивіться зауваження наприкінці), що цього вже достатньо, щоб остання границя була одна і та ж, хоч би як вибирати послідовність $\{x_n\}$, що збігається до a; ця границя і буде границя функції, існування якої належало довести.

(Легко вивести достатність висловленої умови і з леми Бользано – Ваярштрасса (лем. 41.1) на зразок того, як це зроблено для варіанти в кінці розд. 41.)

59. Найбільша та найменша границі функції

Навіть якщо нема певної границі функції $f(x)$, коли x прямує до a, для окремих послідовностей значень $x_n \to a$ границя

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

все ж таки може існувати; її називають **частковою** границею функції.

Наприклад, для функції $\sin x$, коли $x \to \pm\infty$, (чи для $\sin\frac{1}{x}$, коли $x \to 0$) ці часткові границі заповнюють увесь проміжок від -1 до $+1$.

Теорема 59.1. *Серед часткових границь функції завжди знайдеться як* ***найбільша****, так і* ***найменша****; їх позначають так:*

$$\varlimsup_{x\to a} f(x) \quad \text{та} \quad \varliminf_{x\to a} f(x).$$

Рівність найбільшої та найменшої границь є умова, необхідна і достатня, для існування певної границі функції, у звичайному значенні слова.

Ми обмежимося формулюванням цієї теореми, не наводячи доведення. Воно може бути виконане так само, як і в розд. 42.

2.3. Класифікація нескінченно малих і нескінченно великих величин

60. Порівняння нескінченно малих

Припустимо, що в якомусь дослідженні водночас розглядається ряд нескінченно малих величин:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \dots,$$

які, взагалі кажучи, будуть функції від однієї і тієї ж змінної, скажімо x, що прямує до скінченної або нескінченної границі a.

У багатьох випадках цікавить **порівняння** названих нескінченно малих між собою за характером їх наближення до нуля. В основу порівняння двох нескінченно малих α і β кладеться поведінка їх відношення. (Ми вважатимемо, що змінна, на яку ми ділимо, не дорівнює 0, принаймні для значень x, досить близьких до a.) Дамо два означення.

1. *Якщо відношення $\frac{\beta}{\alpha}$ (а з ним і $\frac{\alpha}{\beta}$) має **скінченну і відмінну від нуля границю**, то нескінченно малі α і β вважаються величинами **одного порядку**.*

2. *Якщо ж відношення $\frac{\beta}{\alpha}$ саме нескінченно мале (а оборотне відношення $\frac{\alpha}{\beta}$ — нескінченно велике), то нескінченно мала β вважається величиною **вищого порядку**, ніж нескінченно мала α, і водночас нескінченно мала α буде **нижчого порядку**, ніж нескінченно мала β.*

Наприклад, нескінченно малі такі як

$$\sin x, \quad \operatorname{tg} x, \quad \sqrt[m]{1+x}-1,$$

будуть **одного порядку з** нескінченно малою $\alpha = x \to 0$, бо, як ми знаємо (пр. 54.7, пр. 56.3),

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x} = \frac{1}{m}.$$

Навпаки, нескінченно малі

$$\sqrt[m]{1+x}-1-\frac{x}{m}, \quad 1-\cos x, \quad \operatorname{tg} x - \sin x \tag{60.1}$$

будуть очевидно вищого порядку, ніж x (пр. 56.4, пр. 56.5).

Звісно, може статися, що відношення двох нескінченно малих не прямує ні до якої границі; наприклад, якщо взяти (пр. 54.9, пр. 54.10)

$$\alpha = x \quad \text{і} \quad \beta = x\sin\frac{1}{x},$$

то їх відношення, рівне $\sin\frac{1}{x}$, границі не має, коли $x \to 0$. У такому разі говорять, що дві нескінченно малі **незрівнянні** між собою.

Зауважимо, що якщо нескінченно мала β виявляється **вищого порядку**, ніж нескінченно мала α, то цей факт записують так:

$$\beta = o(\alpha).$$

Наприклад, можна писати:

$$1 - \cos x = o(x), \quad \operatorname{tg} x - \sin x = o(x).$$

Отже, символ $o(\alpha)$ служить загальним позначенням для нескінченно малої вищого порядку, ніж α. Цим зручним позначенням ми надалі користуватимемося.

61. Шкала нескінченно малих

Інколи є потреба в точнішій порівняльній характеристиці поведінки нескінченно малих, у вираженні їх порядків **числами**. У цьому разі насамперед за "еталон" вибирають одну з тих, що фігурують у цьому дослідженні нескінченно малих (скажімо, α); її називають **основною**. Звісно, вибір основної нескінченно малої певною мірою довільний, але зазвичай беруть найпростішу з усіх. Якщо ці величини, як ми припустили, є функціями від x і стають нескінченно малими, коли x прямує до a, то залежно від того, чи буде a нулем, скінченним і відмінним від нуля числом, чи нескінченністю, природно за основну нескінченно малу взяти, відповідно,

$$x, \quad x - a, \quad \frac{1}{x}.$$

Далі, зі степенів основної нескінченно малої α (ми вважатимемо $\alpha > 0$) з різними **додатними** показниками, α^k, складають якби шкалу для оцінювання нескінченно малих складнішої природи. (Легко побачити, що для $k > 0$ величина α^k буде нескінченна мала разом з α.)

3. *Будемо вважати нескінченно малу β величиною k-го порядку (відносно* ***основної нескінченно малої*** *α), якщо β і α^k $(k > 0)$ будуть величини одного порядку,* тобто якщо відношення $\dfrac{\beta}{\alpha^k}$ має скінченну і відмінну від нуля границю.

Тепер, наприклад, можна, не задовольняючись твердженням, що нескінченно малі (60.1) (коли $x \to 0$) будуть величини вищого порядку, ніж $\alpha = x$, сказати точно, що перші дві з них є нескінченно малі **другого** порядку, а остання — **третього** порядку відносно $\alpha = x$, бо (пр. 56.4, пр. 56.5)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - 1 - \dfrac{x}{m}}{x^2} = -\frac{m-1}{2m^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Щоб взяти складніший приклад, розглянемо вираз

$$\beta = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x};$$

коли $x \to +\infty$, він буде нескінченно малий, що стає зрозуміло, якщо записати його у вигляді

$$\beta = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) - \left(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}.$$

Продовжуючи це перетворення, знайдемо:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)} = \\ &= \frac{-2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}.\end{aligned}$$

Нехай $\alpha = \frac{1}{x}$, тепер уже нескладно побачити, що

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\beta}{\alpha^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2\left(\sqrt{x}\right)^3}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Всюди тут ми користуємося тим, що $\lim\limits_{z\to0}\sqrt{1+z} = 1$; це доведено в пр. 56.3 (для кореня будь-якого степеня m).

Отже, тут порядок виражається числом $\frac{3}{2}$.

Не слід думати, звісно, що для всякої нескінченно малої β (навіть якщо можна **порівняти** з усіма степенями α^k) може бути встановлений певний порядок.

Цікаві приклади, щодо цього, можна отримати з формул, отриманих в пр. 54.4 і пр. 54.5 (для $a > 1$ і $k > 0$):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0. \tag{61.1}$$

Передусім звідси

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{\log_a x} = \infty$$

Замінивши тепер тут x на $\frac{1}{x}$ і поклавши ще в першому з цих співвідношень $a = \frac{1}{c}$, $0 < c < 1$, ми отримаємо:

$$\lim_{x\to+0} \frac{c^{\frac{1}{x}}}{x^k} = 0, \qquad \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{\log_a x}}{x^k} = \infty.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Отже, нескінченно мала $c^{\frac{1}{x}}$ $(0 < c < 1)$ буде **вищого порядку, ніж усі степені** x^k $(k > 0)$, тоді як нескінченно мала $\dfrac{1}{\log_a x}$ $(a > 1)$ є **нижчого порядку, ніж усі ці степені**.

62. Еквівалентні нескінченно малі

Зупинимося тепер на одному особливо важливому окремому випадку нескінченно малих одного порядку.

4. *Будемо називати нескінченно малі α і β* ***еквівалентними*** *(позначатиме: $\alpha \sim \beta$), якщо їх різниця $\gamma = \beta - \alpha$ є величина вищого порядку, ніж* ***кожна*** *з α і β:*

$$\gamma = o(\alpha) \quad \text{і} \quad \gamma = o(\beta).$$

Втім, досить, щоб γ була вищого порядку, ніж **одна** з цих нескінченно малих, бо якщо, наприклад, γ вищого порядку, ніж α, то вона буде також вищого порядку, ніж β. Справді, з того, що $\lim \dfrac{\gamma}{\alpha} = 0$, випливає, що й

$$\lim \frac{\gamma}{\beta} = \lim \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} = \lim \frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{1 + \frac{\gamma}{\alpha}} = 0.$$

Розглянемо дві еквівалентні нескінченно малі α і β, так що $\beta = \alpha + \gamma$, де $\gamma = o(\alpha)$. Якщо **приблизно** покласти $\beta \doteq \alpha$ (знак $\doteq$ означає **наближена рівність**), то, коли обидві величини зменшуються, прямує до нуля не лише **абсолютна** похибка від цієї заміни, $|\gamma|$, але і відносна похибка, $\left|\dfrac{\gamma}{\alpha}\right|$. Іншими словами, *для досить малих значень α і β можна зі скільки завгодно великою* ***відносною*** *точністю покласти $\beta = \alpha$.* На цьому заснована, за наближених вираховувань, заміна складних нескінченно малих еквівалентними їм простими.

Доведемо корисний критерій еквівалентності двох нескінченно малих, який, по суті, дає **друге означення** цього поняття, рівносильне даному раніше.

Теорема 62.1. *Для того щоб дві нескінченно малі α і β були еквівалентні, необхідно і достатньо, щоб було*

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

Доведення. Нехай спочатку виконується це співвідношення, так що

$$\delta = \frac{\beta}{\alpha} - 1 \to 0.$$

Тоді

$$\gamma = \beta - \alpha = \delta \cdot \alpha$$

nebayduzhi.math@gmail.com

буде величина вищого порядку, ніж α, бо

$$\lim \frac{\gamma}{\alpha} = \lim \delta = 0.$$

Навпаки, нехай тепер α і β еквівалентні, тобто $\gamma = \beta - \alpha$ є нескінченно мала вищого порядку, ніж α. Внаслідок цього маємо

$$\frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{\gamma}{\alpha} \to 0, \quad \text{звідки} \quad \frac{\beta}{\alpha} \to 1,$$

що й потрібно було довести. □

За допомогою цього критерію, наприклад, одразу видно, що, коли $x \to 0$, нескінченно малі $\sin x$ і $\operatorname{tg} x$ еквівалентні x, а $\sqrt[m]{1+x} - 1$ еквівалентний $\frac{1}{m}x$. Звідси — наближені формули:

$$\sin x \doteq x, \quad \operatorname{tg} x \doteq x,$$

$$\sqrt[m]{1+x} - 1 \doteq \frac{1}{m}x, \text{ зокрема } \sqrt{1+x} - 1 \doteq \frac{1}{2}x.$$

Доведена властивість еквівалентних нескінченно малих приводить до використання їх у розкритті невизначеності виду $\frac{0}{0}$, тобто знаходженні границі відношення двох нескінченно малих $\frac{\beta}{\alpha}$. *Кожна з них може бути замінена, без впливу на існування і величину границі, будь-якою еквівалентною їй нескінченно малою.*

Справді, якщо $\overline{\alpha} \sim \alpha$ і $\overline{\beta} \sim \beta$, тобто

$$\lim \frac{\overline{\alpha}}{\alpha} = 1 \quad \text{і} \quad \lim \frac{\beta}{\overline{\beta}} = 1,$$

то відношення

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\overline{\beta}} \cdot \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} \cdot \frac{\overline{\alpha}}{\alpha},$$

що відрізняється від відношення $\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$ множниками, які прямують до одиниці, має границю водночас з ним (і причому ту ж саму).

Якщо вдасться вибрати $\overline{\alpha}$ і $\overline{\beta}$ досить простими, то це може відразу значно спростити задачу. Наприклад,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\left(x+x^2\right)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

З доведеного випливає також, що *дві нескінченно малі, що еквівалентні третій, еквівалентні між собою.*

63. Виділення головної частини

Якщо вибрана основна нескінченно мала α, то **найпростішими** нескінченно малими природно вважати величини вигляду $c \cdot \alpha^k$, де c — сталий коефіцієнт і $k > 0$. Нехай нескінченно мала β буде k-го порядку відносно α, тобто

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c,$$

де c — скінченне і відмінне від нуля число. Тоді

$$\lim \frac{\beta}{c\alpha^k} = 1,$$

і нескінченно малі β і $c\alpha^k$ виявляються еквівалентними: $\beta \sim c\alpha^k$.

*Ця **найпростіша** нескінченно мала $c\alpha^k$, що еквівалентна даній нескінченно малій β, називається її **головною частиною** (або **головним членом**).*

Користуючись встановленими вище результатами, крім уже вказаних простих прикладів, легко виділити головні частини виразів:

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad \operatorname{tg} x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$$

Тут $x \to 0$, і саме $\alpha = x$ є основною нескінченно малою.

Нарешті, якщо $x \to +\infty$ і за основну прийнята нескінченно мала $\alpha = \frac{1}{x}$, то маємо

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} \sim -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Усі ці результати знову приводять до наближених формул.

Нехай $\beta \sim c\alpha^k$, тобто $\beta = c\alpha^k + \gamma$, де $\gamma = o(\alpha^k)$. Можна уявити собі, що з нескінченно малої γ знову виділено головний член: $\gamma = c'\alpha^{k'} + \delta$, де $k' > k$, а $\delta = o(\alpha^{k'})$, і так далі.

Наприклад, якщо покласти (вважаючи $x \to 0$)

$$\sqrt[m]{1+x} - 1 = \frac{1}{m}x + \gamma,$$

то, як ми вже мали (пр. 56.4),

$$\lim_{x \to 0} \frac{\gamma}{x^2} = -\frac{m-1}{2m^2},$$

так що головна частина γ є $-\frac{m-1}{2m^2}$. Звідси

$$\sqrt[m]{1+x} - 1 = \frac{1}{m}x - \frac{m-1}{2m^2}x^2 + o(x^2).$$

Зокрема,

$$\sqrt{1+x}-1=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2).$$

Цей процес послідовного виділення з нескінченно малої простих нескінченно малих усе більших порядків можна продовжувати і далі.

Ми обмежуємося в цьому розділі встановленням загальних понять, ілюструючи їх лише кількома прикладами. У подальшому ми вкажемо **систематичний спосіб** як для побудови головної частини даної нескінченно малої величини, так і для подальшого виділення з неї простих нескінченно малих, про що тільки що йшлося (дивіться розд. 104, розд. 124).

На закінчення зупинимося ще на такому питанні: якщо для двох нескінченно малих β і γ відомі їх головні члени $c\alpha^k$ і $c'\alpha^{k'}$, що можна сказати про головну частину їх суми $\beta+\gamma$?

Коли $k\neq k'$, головним членом її очевидно буде той із членів $c\alpha^k$ і $c'\alpha^{k'}$, у якому показник менший. Нехай тепер $k=k'$; тоді головною частиною для $\beta+\gamma$ буде сума $(c+c')\alpha^k$ — **припускаючи, однак, що** $c+c'\neq 0$. У разі ж, коли обидва головні члени взаємно знищуються, сума виявляється нескінченно малою вищого порядку, ніж кожен із доданків.

Так буде, наприклад, для нескінченно малих

$$\beta=\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x \quad \text{і} \quad \gamma=\sqrt{1-x}-1\sim-\frac{1}{2}x,$$

коли $x\to 0$. Якщо виділити в них ще наступні члени:

$$\beta=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2),\quad \gamma=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2),$$

тоді видно, що

$$\beta+\gamma=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2=-\frac{1}{4}x^2+o(x^2),$$

так що $\beta+\gamma$ буде нескінченно мала **другого** порядку, а її головний член дорівнює $-\frac{1}{4}x^2$.

64. Задачі

Для ілюстрації викладених міркувань наведемо кілька задач, у яких вони використовуються.

1) Нехай прямолінійна відстань на місцевості вимірюється за допомогою мірної рейки завдовжки l м. Оскільки фактично рейка прикладається не точно вздовж вимірюваної прямої, то результат виміру виявляється дещо більший від справжньої довжини. Зробимо **найневигідніше** припущення, а саме, що рейка прикладається

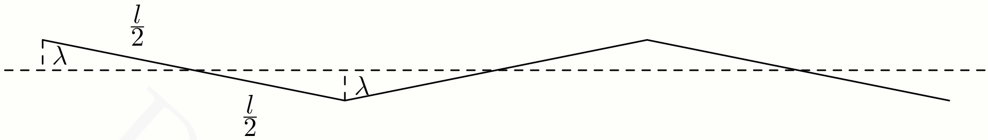


Рис. 64.1

зигзагом, так що її кінці містяться від прямої **почережно** то в один, то в інший бік на відстань λ м (рис. 64.1). Потрібно оцінити похибку.

За одноразового прикладання рейки абсолютна похибка дорівнює різниці між довжиною l рейки та її проєкцією на вимірювану пряму; проєкція ж ця буде:

$$2\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2-\lambda^2}=l\sqrt{1-\frac{4\lambda^2}{l^2}}.$$

Скориставшись наближеною формулою

$$\sqrt{1+x}\doteq 1+\frac{1}{2}x$$

для $x=-\frac{4\lambda^2}{l^2}$ (що виправдано, зважаючи на мализну величини λ відносно l), замінимо вираз для проєкції таким:

$$l\left(1-\frac{2\lambda^2}{l^2}\right)=l-\frac{2\lambda^2}{l}.$$

У такому разі згадана похибка є $\frac{2\lambda^2}{l}$, а **відносна** похибка очевидно буде $\frac{2\lambda^2}{l^2}$. Та ж відносна похибка збережеться і за багаторазового прикладання рейки.

Якщо для цієї похибки встановлена межа δ, тобто повинно бути $\frac{2\lambda^2}{l^2}<\delta$, то звідси $\lambda<l\sqrt{\frac{\delta}{2}}$.

Наприклад, вимірюючи двометровою рейкою ($l=2$), для досягнення відносної точності 0,001 досить, щоб відхилення λ не перевищувало
$2\sqrt{0{,}0005}\doteq 0{,}045$ м $=4{,}5$ см.

2) Знайти формулу для довжини l відкритого ременя, насунутого на пару шківів радіусів R і r, з відстанню d між центрами (рис. 64.2).

Із зображення маємо

$$\frac{l}{2}=\overset{\frown}{AC}+Cc+\overset{\frown}{ca}.$$

Але $\overset{\frown}{AC}=R\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, $\overset{\frown}{ac}=r\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, де через α позначені рівні кути $\angle BOC$ і $\angle boc$; а з $\triangle ODo$ маємо

$$Cc=Do=\sqrt{d^2-(R-r)^2}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

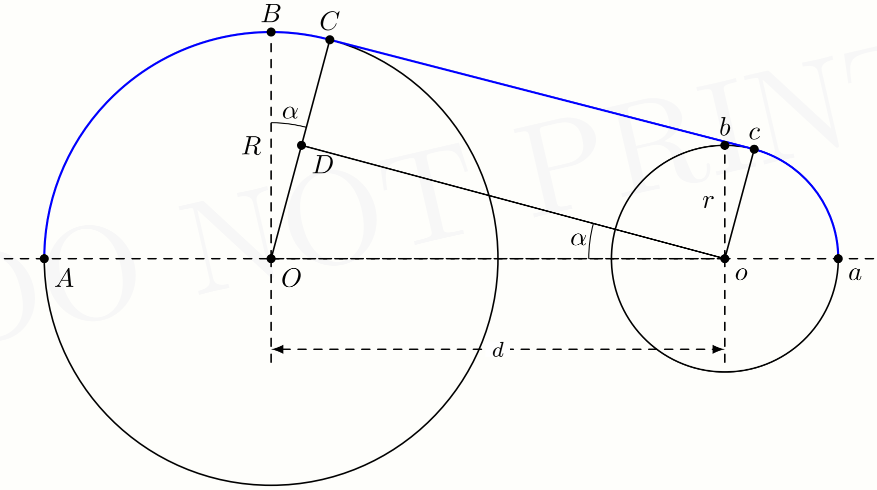


Рис. 64.2

Отже,

$$l = \pi(R+r) + 2\alpha(R-r) + 2\sqrt{d^2-(R-r)^2}.$$

Для спрощення цієї формули згадаємо, що

$$\alpha \doteq \sin\alpha = \frac{OD}{Oo} = \frac{R-r}{d},$$

припускаючи, що $R-r$ мале відносно d. Використаємо ці ж припущення для

$$\sqrt{d^2-(R-r)^2} = d\sqrt{1-\left(\frac{R-r}{d}\right)^2} \doteq d\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{R-r}{d}\right)^2\right].$$

Після підстановки цих значень і перетворень, отримаємо остаточну формулу:

$$l \doteq \pi(R+r) + 2d + \frac{(R-r)^2}{d}.$$

3) У розбитті дуги кола на місцевості має значення така задача: знайти відношення стріли $f = DB$ дуги ABC кола до стріли $f_1 = D_1B_1$ половини AB_1B цієї дуги (рис. 64.3).

Якщо покласти радіус кола рівним r, $\angle AOB = \varphi$, то $\angle AOB_1 = \frac{\varphi}{2}$ і

$$f = DB = r(1-\cos\varphi),$$

$$f_1 = r\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

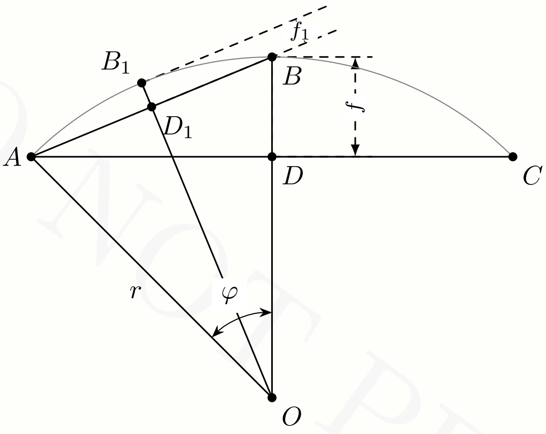


Рис. 64.3

Отже, шукане відношення дорівнює

$$\frac{f}{f_1} = \frac{1 - \cos\varphi}{1 - \cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Цей вираз занадто складний, щоб ним зручно було користуватися на практиці. Знайдемо його границю для $\varphi \to 0$ (бо для досить малих φ цей вираз можна наближено замінити його границею). Для цього замінюємо чисельник і знаменник їх головними частинами й одразу знаходимо.

$$\lim \frac{f}{f_1} = \lim \frac{\frac{1}{2}\varphi^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varphi\right)^2} = 4.$$

Отже, для дуг, що відповідають невеликому центральному куту, приблизно можна вважати, що стріла пів дуги вчетверо менше від стріли дуги. Це дає змогу послідовно будувати проміжні точки дуги, для якої дані кінці та середина.

65. Класифікація нескінченно великих

Зауважимо, що для нескінченно великих величин може бути розвинена подібна ж класифікація. Як і в розд. 60, вважатимемо нескінченно великі величини функціями від однієї і тієї ж змінної x, які прямують до $+\infty$, коли x прямує до a.

1. *Дві нескінченно великі y і z вважаються величинами одного порядку, якщо їх відношення $\frac{z}{y}$ (а з ним і $\frac{y}{z}$) має* ***скінченну і відмінну від нуля*** *границю.*

2. *Якщо ж відношення $\frac{z}{y}$ саме стає нескінченно великим (а обернене відношення $\frac{y}{z}$ — нескінченно малим), то z вважається нескінченно великою величиною* ***вищого порядку****, ніж y, і водночас y буде нескінченно великою* ***нижчого порядку****, ніж z.*

У разі, коли відношення $\frac{z}{y}$ не прямує до жодної границі, нескінченно великі y і z будуть **незрівнянні**.

Розглядаючи водночас ряд нескінченно великих величин, одну з них (скажімо, y) вибирають за основну і з її степенями порівнюють інші нескінченно великі. Наприклад, якщо (як ми припустили вище) всі вони функції від x і прямують до $+\infty$, коли $x \to a$, то за основну нескінченно велику звичайно беруть $|x|$, якщо $a = \pm\infty$; $\dfrac{1}{|x-a|}$ — для a скінченного.

3. Нескінченно велика z називається величиною k-го **порядку** (**відносно основної нескінченно великої** y), якщо z і y^k будуть одного порядку, тобто якщо відношення $\frac{z}{y^k}$ має скінченну і відмінну від нуля границю.

Ми не станемо наводити тут прикладів, бо їх легко отримати, замінивши розглянуті вище нескінченно малі величини оберненими до них. Згадаємо тільки, що нескінченно велика a^x $(a > 1)$ для $x \to +\infty$ буде **вищого порядку**, а нескінченно велика $\log_a x$ $(a > 1)$ — **нижчого порядку**, ніж будь-який степінь x^k (з додатним показником k); це випливає з формул (61.1).

2.4. Неперервність (і розриви) функцій

66. Означення неперервності функції в точці

З поняттям границі функції тісно пов'язано інше важливе поняття математичного аналізу — поняття **неперервності функції**.

Розглянемо функцію $f(x)$, визначену в деякій області $\mathcal{X} = \{x\}$, для якої x_0 є точкою згущення; і нехай **сама точка x_0 належить до області визначення функції**, так що в цій точці функція має певне значення $f(x_0)$.

Коли вивчали поняття границі функції, коли x прямує до x_0 (розд. 52, розд. 53)

$$\lim_{x\to x_0} f(x),$$

неодноразово підкреслювалося, що змінна x **не набуває** значення x_0; це значення могло навіть не належати до області визначення функції, а якщо й належало, то значення $f(x_0)$ в утворенні згаданої границі не враховувалося.

Проте особливу важливість має саме випадок, коли

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{66.1}$$

Говорять, що *функція $f(x)$ **неперервна** в точці $x = x_0$, якщо виконується це співвідношення; якщо ж воно порушене, то кажуть, що в цій точці функція має **розрив***. (Ця термінологія пов'язана з **інтуїтивним** уявленням про неперервність і розриви кривої: функція неперервна, якщо неперервний її графік, точки розриву функції відповідають точкам розриву графіка. Насправді, однак, поняття неперервності для кривої само **вимагає обґрунтування**, і найпростіший шлях до нього лежить якраз через неперервність функцій!)

У разі неперервності функції $f(x)$ у точці x_0 (і очевидно тільки в цьому разі), в обчисленні границі функції $f(x)$, коли $x \to x_0$, стає неважливим, чи буде x у своєму прямуванні до x_0 набувати, зокрема, і значення x_0 чи ні.

Означення неперервності функції можна сформулювати в інших термінах. Перехід від значення x_0 до іншого значення x можна собі уявити так, що значенню x_0 наданий **приріст** $\Delta x_0 = x - x_0$. (В аналізі прийнято прирости величин $x,\ y,\ t,\ \ldots$ позначати як $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta t,\ \ldots$. Ці позначення належить розглядати як **суцільні** символи, не відділяючи Δ від x, тощо.) Нове значення функції $y = f(x) = f(x_0 + \Delta x_0)$ відрізняється від старого $y_0 = f(x_0)$ на **приріст**

$$\Delta y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0).$$

Для того щоб функція f(x) була неперервна в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб її приріст Δy_0 в цій точці прямував до 0 разом із приростом Δx_0 незалежної змінної. Іншими словами: *неперервна функція характеризується тим, що нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий же приріст функції.*

nebayduzhi.math@gmail.com

Повертаючись до основного означення (66.1), розкриємо його зміст "мовою ε-δ" (розд. 52). Зміст неперервності функції $f(x)$ в точці x_0 зводиться до такого: *хоч би яке було число* $\varepsilon > 0$*, для нього знайдеться таке число* $\delta > 0$*, що нерівність*

$$|x - x_0| < \delta \quad \textit{тягне за собою} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Отже, остання нерівність повинна виконуватися в **досить малому** околі $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ точки x_0.

Нарешті, "мовою послідовностей" неперервність висловлюється так: *для будь-якої послідовності значень* x *із* $\mathcal{X}$*:*

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

що збігається до x_0*, відповідна послідовність значень функції*

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ \ldots,$$

збігається до $f(x_0)$*.*

Зауваження. Нехай точка $x = x_0$ (точка згущення для області $\mathcal{X}$), у якій визначена функція $f(x)$, сама не належить до $\mathcal{X}$, так що в цій точці функція **не визначена**. Якщо, однак, **існує** скінченна границя

$$\lim_{x \to x_0} f(x),$$

то варто лише доповнити означення функції, поклавши $f(x_0)$ рівним цій границі, щоб функція виявилася **неперервною** і в точці $x = x_0$. **Це в подібних випадках ми зазвичай і будемо надалі мати на увазі.**

Навпаки, якщо згадана границя **не існує**, то попри те, що в самій точці $x = x_0$, функція не визначена, все ж говорять, що функція в цій точці має розрив: вона матиме тут розрив, хоч би яке додаткове значення приписати функції в точці $x = x_0$.

Зазвичай ми надалі розглядатимемо функції, визначені на **проміжку** $\mathcal{X}$; усі його точки — це точки згущення, тож стосовно будь-якої з них можна ставити питання про неперервність функції. Для спрощення мови, домовляються говорити, що функція неперервна на **проміжку** $\mathcal{X}$, якщо вона неперервна **в кожній точці** проміжку окремо.

67. Арифметичні операції над неперервними функціями

Перш ніж перейти до **прикладів** неперервних функцій, доведемо просте твердження, яке дасть змогу легко розширити число неперервних функцій.

Теорема 67.1. *Якщо дві функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на одному і тому ж проміжку $\mathcal{X}$ і обидві неперервні в точці x_0, то в тій же точці будуть неперервні й функції*

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)},$$

остання за умови, що $g(x_0) \neq 0$.

Доведення. Це безпосередньо випливає з теорем про границі суми, різниці, добутку і частки двох функцій, що мають нарізно границі (розд. 55).

Зупинимося, наприклад, на частці двох функцій. Припущення про неперервність функцій $f(x)$ і $g(x)$ в точці x_0 рівносильне наявності рівностей

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Але звідси, за теоремою про границю частки (бо границя знаменника не нуль), маємо:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

а ця рівність і означає, що функція $\frac{f(x)}{g(x)}$ неперервна в точці x_0. □

68. Приклади неперервних функцій

1) **Ціла і дробова раціональні функції.** Функція $f(x) = x$ очевидно неперервна на всьому проміжку $(-\infty, +\infty)$: якщо $x_n \to x_0$, то $f(x_n) = x_n \to x_0 = f(x_0)$. Так само неперервна і функція, що зводиться тотожно до сталої.

Звідси, на підставі теореми попереднього розділу, випливає вже неперервність будь-якого одночленного виразу

$$ax^m = a \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ разів}}$$

як **добутку** неперервних функцій, а потім — і многочлена (цілої раціональної функції)

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

як **суми** неперервних функцій. У всіх згаданих випадках маємо неперервність на всьому проміжку $(-\infty, +\infty)$.

Очевидно, нарешті, що й **частка** двох многочленів (дробова раціональна функція):

$$\frac{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1} x + a_k}{b_0 x^l + b_1 x^{l-1} + \cdots + b_{l-1} x + b_l}$$

також буде неперервна скрізь, окрім тих значень x, коли знаменник дорівнює нулю.

2) **Показникова функція.** Доведемо неперервність показникової функції a^x для будь-якого значення $x = x_0$. Іншими словами, доведемо, що

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}.$$

(При цьому досить обмежитися припущенням: $a > 1$.)

Ми бачили в пр. 54.6, що

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1.$$

Оскільки 1 є якраз значення a^0 нашої функції, то ця рівність і виражає неперервність показникової функції в точці $x = 0$. Звідси вже легко перейти до будь-якої точки; справді,

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1),$$

але коли $x \to x_0$, то очевидно $x - x_0 \to 0$, тож, за доведеним,

$$a^{x-x_0} \to 1 \quad \text{і} \quad a^x \to a^{x_0},$$

що й потрібно було довести.

3) **Гіперболічні функції.** Їх неперервність безпосередньо випливає з доведеної неперервності показникової функції, бо всі вони раціонально виражаються через функцію e^x.

4) **Тригонометричні функції.** Зупинимося спочатку на функції $\sin x$. Вона також неперервна скрізь, тобто виконується рівність

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

Для доведення зауважимо, що з нерівності (54.2)

$$\sin x < x,$$

для $0 < x < \frac{\pi}{2}$, легко вивести, що нерівність

$$|\sin x| \leqslant |x|$$

справедлива вже для **всіх** значень x (для $|x| \geqslant \frac{\pi}{2} > 1$ це випливає з того, що $|\sin x| \leqslant 1$). Далі, маємо:

$$\sin x - \sin x_0 = 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2},$$

так що

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\cdot\frac{|x-x_0|}{2}$$

і, остаточно,

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0|, \tag{68.1}$$

хоч би які були значення x і x_0.

Якщо задане будь-яке $\varepsilon > 0$, то візьмемо $\delta = \varepsilon$; для $|x - x_0| < \delta$ буде

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon,$$

що й доводить неперервність $\sin x$. Аналогічно доводиться і неперервність функції $\cos x$ для будь-якого значення x.

Звідси, за теоремою попереднього розділу, випливає вже неперервність функцій

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Для перших двох функцій виняток становлять значення вигляду $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, у яких $\cos x$ дорівнює 0, для останніх двох — значення вигляду $k\pi$, у яких $\sin x$ дорівнює 0.

69. Однобічна неперервність. Класифікація розривів

Вище за допомогою рівності (66.1) ми означили поняття неперервності функцій $f(x)$ в точці x_0. При цьому, обчислюючи границю (66.1), ми могли наближати x до x_0 і справа, і зліва. Дамо тепер означення **однобічної** неперервності або **однобічного** розриву функції в заданій точці.

Говорять, що функція $f(x)$ неперервна в точці **справа** (**зліва**), якщо виконується граничне співвідношення:

$$f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \quad \Bigl(f(x_0-0) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)\Bigr). \tag{69.1}$$

Якщо ж те або інше з цих співвідношень не виконується, то *функція $f(x)$ має в точці x_0 розрив, відповідно,* ***справа*** *або* ***зліва****.*

Щодо лівого (правого) кінця проміжку $\mathcal{X}$ (припускаючи, що цей кінець є число **скінченне**), на якому функція визначена, може йтися очевидно тільки про неперервність або розрив **справа** (**зліва**). Якщо ж x_0 є **внутрішня** точка проміжку $\mathcal{X}$, тобто не є ні одним з його кінців, то для того, щоб виконувалася рівність (66.1), що виражає неперервність функції в точці x_0 у звичайному сенсі, необхідно і достатньо, щоб виконувалися відразу обидві рівності (69.1) (розд. 52). Іншими словами, *неперервність функції в точці x_0 рівносильна її неперервності в цій точці водночас* ***справа і зліва****.*

Зупинимося детальніше на питанні про неперервність і розрив функції $f(x)$ у точці x_0, скажімо, справа. Припускаючи, що функція $f(x)$ на деякому проміжку $[x_0,\ x_0+h]$ $(h > 0)$ праворуч від цієї точки **визначена**, бачимо, що для неперервності

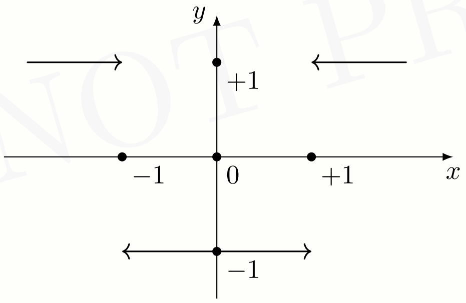


Рис. 70.1

необхідно і достатньо: по-перше, щоб існувала скінченна границя $f(x_0+0)$ функції $f(x)$, коли x прямує до x_0 справа, і, по-друге, щоб ця границя дорівнювала значенню $f(x_0)$ функції в точці x_0.

Тому легко зрозуміти, за яких обставин для функції $f(x)$ у точці x_0 справа з'являється **розрив**. Може статися, що хоча скінченна границя $f(x_0+0)$ і існує, але вона не дорівнює значенню $f(x_0)$; такий розрив називають **звичайним** або розривом **першого роду** (в цьому разі говорять також, що функція $f(x)$ в точці x_0 справа має **стрибок**, за величиною рівний $f(x_0+0)-f(x_0)$). Але може бути і так, що границя $f(x_0+0)$ нескінченна, або її зовсім немає; тоді говорять про розрив **другого роду**.

У наступному розділі ми наведемо приклади цих розривів.

Зауваження. Якщо в точці $x=x_0$, функція $f(x)$ не визначена (дивіться зауваження в розд. 66), то відновити неперервність функції в цій точці можна лише, якщо існують обидві скінченні границі $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ і вони **рівні** між собою.

Якщо яка-небудь із цих границь нескінченна або зовсім не існує, то говорять про наявність розриву **другого роду** з відповідного боку.

70. Приклади розривних функцій

1) Розглянемо функцію $y=E(x)$ (графік її зображений на рис. 47.4). Якщо x_0 — не ціле число і $E(x_0)=m$, тобто $m<x_0<m+1$, то і для всіх значень x на проміжку $(m,m+1)$ буде $E(x)=m$, так що неперервність функції в точці x_0 безпосередньо ясна.

Інша річ, якщо x_0 дорівнює цілому числу m. **Праворуч** від цієї точки функція неперервна, бо правіше саме для значень x на $(m,\ m+1)$ буде $E(x)=m$, так що і $E(m+0)=m=E(m)$. Навпаки, лівіше від $x=m$, для значень x на $(m-1,\ m)$, очевидно $E(x)=m-1$; звідси і $E(m-0)=m-1$, що не дорівнює значенню $E(m)$, і **ліворуч** в точці $x=m$ функція має звичайний розрив або стрибок!

2) Візьмемо функцію, розглянуту в розд. 46:

$$y = f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$$

(Її графік зображений на рис. 70.1). Вона має прості розриви в точках $x = \pm 1$ і **справа**, і **зліва**, бо:

$$f(\pm 1) = 0, \quad f(-1-0) = f(1+0) = 1, \quad f(-1+0) = f(1-0) = -1.$$

3) Для функції

$$f(x) = \frac{1}{x^3} \quad (x \neq 0)$$

точка $x = 0$ — точка розриву другого роду з обох боків; саме в ній функція і справа, і зліва прямує до ∞:

$$f(+0) = +\infty, \quad f(-0) = -\infty.$$

4) Функція

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

розглянута в пр. 54.9, у точці $x = 0$ має розрив другого роду з обох боків, тому що **не існує** границі цієї функції, коли x прямує до 0 справа, а також **не існує** границі цієї функції, коли x прямує до 0 зліва.

5) Навпаки, якщо взяти функцію (пр. 54.10)

$$f(x) = x\cdot\sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

для якої, як ми бачили, **існує** границя

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0,$$

то, поклавши, згідно із зауваженням у розд. 66, $f(0) = 0$, ми відновимо неперервність і для $x = 0$.

6) Розглянемо дві функції, які задані рівностями:

$$f_1(x) = a^{\frac{1}{x}} \quad (a > 1), \quad f_2(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

для $x \neq 0$, а також покладемо $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$.

Для першої з них маємо:

$$f_1(+0) = \lim_{x\to+0} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to+\infty} a^z = +\infty,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

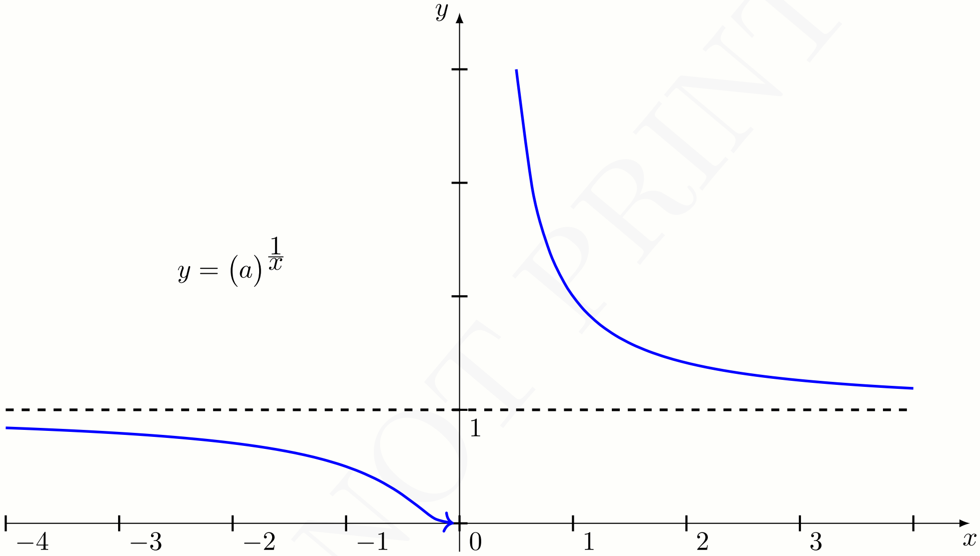


Рис. 70.2

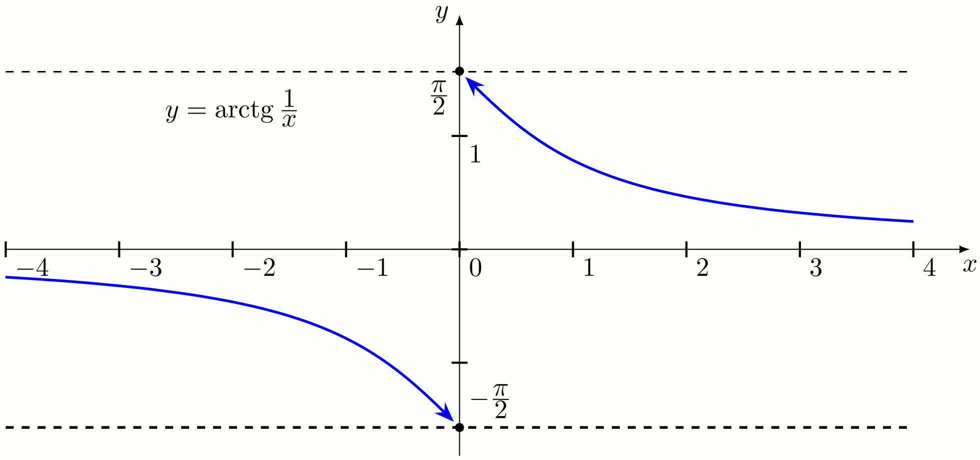


Рис. 70.3

nebayduzhi.math@gmail.com

$$f_1(-0) = \lim_{x\to -0} a^{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to -\infty} a^z = 0,$$

так що в точці $x = 0$ справа — розрив другого роду, а зліва — неперервність.

Для другої —

$$f_2(+0) = \lim_{x\to +0} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \lim_{z\to +\infty} \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2},$$

$$f_2(-0) = -\frac{\pi}{2},$$

і в точці $x = 0$ з обох боків маємо стрибки.

Графіки цих функцій зображені на рис. 70.2 та рис. 70.3.

7) Згадаймо ще про функцію Діріхлє (розд. 46):

$$\mathrm{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ раціональне;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ ірраціональне.} \end{cases}$$

Оскільки за будь-якої близькості від раціональної точки знайдуться точки ірраціональні, і навпаки, то хоч би яке було x_0 на проміжку $(-\infty, +\infty)$, границі $\mathrm{D}(x)$ для $x \to x_0$ не існує, так що в **кожній** точці є розрив другого роду (з обох боків).

8) Розглянемо, нарешті, функцію $f(x)$, яка означена на проміжку $[0, 1]$ так:

— якщо x **раціональне** і виражається нескоротним дробом $\frac{p}{q}$, то $f(x) = \frac{1}{q}$;

— для x **ірраціонального** покладемо $f(x) = 0$;

— на додаток, покладемо $f(0) = 1$.

Ми стверджуємо, що в кожній раціональній точці функція має прості розриви, тоді як у кожній ірраціональній точці вона неперервна. (Цю функцію розглядав Ріман (нім. Bernhard Riemann, Бéрнхард Рíман).)

Справді, нехай x_0 буде будь-яка точка на проміжку $[0, 1]$. Якщо взяти довільне число $\varepsilon > 0$, то існує лише скінченне число натуральних чисел q, що не перевищують $\frac{1}{\varepsilon}$, а значить на проміжку знайдеться лише **скінченне** число раціональних точок $\frac{p}{q}$, для яких $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} \geqslant \varepsilon$. Точку x_0 можна оточити таким околом $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, щоб у нього не потрапила жодна з цих точок (крім, можливо, самої точки x_0). Тоді, лиш тільки $|x - x_0| < \delta$ $(x \neq x_0)$, буде x раціональна чи ні, принаймні $|f(x)| < \varepsilon$. Значить, для будь-якої точки x_0 існують

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = 0.$$

Якщо x_0 — ірраціональна точка, то $f(x_0) = 0$, тобто в цій точці функція неперервна; якщо ж x_0 раціональна, то $f(x_0)$ відмінна від 0, і є розрив (звичайний), з обох боків.

nebayduzhi.math@gmail.com

71. Неперервність і розриви монотонної функції

Розглянемо функцію $f(x)$, визначену на проміжку $\mathcal{X}$. Цей проміжок може бути як скінченним, так і нескінченним замкненим або відкритим (з одного або з обох кінців). Нехай ця функцію $f(x)$ монотонно зростає (спадає), хоча б у широкому значенні (розд. 57), коли x пробігає значення на проміжку $\mathcal{X}$. Доведемо наступну теорему для таких функцій.

Теорема 71.1. *Монотонно зростаюча (спадна) функція $f(x)$ може мати на проміжку $\mathcal{X}$ тільки розриви першого роду, тобто стрибки.*

Доведення. Візьмемо будь-яку точку x_0 проміжку $\mathcal{X}$, і нехай вона не лівий кінець цього проміжку. Розглядаючи ту частину проміжку, яка лежить ліворуч від x_0, застосуємо до неї теор. 57.1 про границю монотонної функції; оскільки для $x < x_0$ очевидно $f(x) \leqslant f(x_0)$, то існує скінченна границя

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \leqslant f(x_0).$$

Якщо вона дорівнює значенню $f(x_0)$, то **зліва** в точці x_0 функція неперервна; інакше маємо стрибок.

Аналогічно можемо довести, що в кожній точці x_0 проміжку $\mathcal{X}$, що не є правий його кінець, **справа** теж або функція неперервна, або вона має стрибок. □

За допомогою доведеної теореми легко довести критерій неперервності монотонної функції, зручний на практиці.

Теорема 71.2. *Якщо значення монотонно зростаючої (спадної) на проміжку $\mathcal{X}$ функції $f(x)$ містяться на проміжку $\mathcal{Y}$ і* ***суцільно заповнюють його*** *(так що кожне значення y з $\mathcal{Y}$ набувається функцією хоч раз), то ця функція неперервна на $\mathcal{X}$.*

(Умова, щоб значення $f(x)$ заповнювали суцільний проміжок $\mathcal{Y}$, наведена тут як **достатня** умова для неперервності монотонної функції; згодом (розд. 82) ми переконаємося, що вона і **необхідна**.)

Доведення. Спробуємо припустити, що в якійсь точці x_0 із $\mathcal{X}$ функція має **розрив**, наприклад, зліва; як ми бачили, цей розрив може бути тільки стрибком. У цьому разі існує границя $f(x_0 - 0)$, але вона **менша** за значення $f(x_0)$. Оскільки для $x < x_0$ буде $f(x) \leqslant f(x_0 - 0)$, а для $x \geqslant x_0$ очевидно $f(x) \geqslant f(x_0)$, то функція не може набувати значень y, що лежать **між** числами $f(x_0 - 0)$ і $f(x_0)$, що належать до проміжку $\mathcal{Y}$. Це суперечить умові теореми; отже, насправді функція $f(x)$ розривів не має. □

У наступному розділі читач знайде ряд прикладів застосування цієї корисної теореми.

72. Неперервність елементарних функцій

Для низки елементарних функцій неперервність була доведена в розд. 68. Користуючись теор. 71.2, легко передусім знову встановити неперервність функції a^x або $\sin x$.

Функція $y = a^x$ $(a > 1)$ монотонно зростає, коли x змінюється на проміжку $(-\infty, +\infty)$. Її значення додатні та заповнюють весь проміжок $(0, +\infty)$, що видно з існування логарифма $x = \log_a y$ для будь-якого $y > 0$ (розд. 20). Отже, показникова функція неперервна на всьому проміжку $(-\infty, +\infty)$.

Аналогічно, неперервність функції $y = \sin x$, скажімо, на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, випливає з її монотонності на цьому проміжку, та ще з того факту (отриманого геометрично), що вона набуває кожного значення між -1 і $+1$. Те саме стосується і будь-якого проміжку вигляду

$$\left[k\pi - \frac{\pi}{2},\ k\pi + \frac{\pi}{2}\right] \quad (k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \dots).$$

Однак цікавіші для нас **нові результати**, які так само легко можуть бути отримані, якщо застосувати вказану теорему. Продовжимо перелік основних елементарних функцій, розпочатий у розд. 68.

5) **Логарифмічна функція:** $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Обмежуючись випадком $a > 1$, бачимо, що ця функція зростає на проміжку $(0, +\infty)$. До того ж вона очевидно набуває будь-якого значення y з проміжку $(-\infty, +\infty)$, а саме для $x = a^y$. Звідси її неперервність.

6) **Степенева функція:** $y = x^\mu$ $(\mu \gtrless 0)$, в міру зростання x від 0 до $+\infty$, зростає, якщо $\mu > 0$, і спадає, якщо $\mu < 0$. І вона набуває **будь-якого** додатного значення y (для $x = y^{\frac{1}{\mu}}$), отже, і вона неперервна.

Якщо $\mu > 0$, то значення 0 **належить** як до проміжку зміни x, так і до проміжку зміни y; для $\mu < 0$ значення 0 **не входить**. Далі, якщо μ — ціле число $\pm n$ або раціональне $\pm\frac{p}{q}$ з **непарним** знаменником, то степінь x можна розглядати і для $x < 0$; неперервність її для цих значень доводиться аналогічно.

7) **Обернені тригонометричні функції:**

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x.$$

Перші дві неперервні на проміжку $[-1, +1]$, а останні — на проміжку $(-\infty, +\infty)$. Доведення залишаємо читачеві.

Отже, можна сказати, що *основні елементарні функції виявляються неперервними в усіх точках, де вони мають сенс* (тобто у відповідних **природних** областях їх визначення).

73. Композиція неперервних функцій

Великі класи неперервних функцій можуть бути побудовані за допомогою композиції (розд. 51) функцій, неперервність яких відома.

В основі цього лежить така теорема.

Теорема 73.1. *Нехай функція $\varphi(y)$ визначена на проміжку $\mathcal{Y}$, а функція $f(x)$ визначена на проміжку $\mathcal{X}$, причому значення останньої функції не виходять за межі $\mathcal{Y}$, коли x змінюється на $\mathcal{X}$. Якщо $f(x)$ неперервна в точці x_0 з $\mathcal{X}$, а $\varphi(y)$ неперервна у* ***відповідній*** *точці $y_0 = f(x_0)$ з $\mathcal{Y}$, то й композиція функцій $\varphi(f(x))$ буде функцією, неперервною в точці x_0.*

Доведення. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. Оскільки $\varphi(y)$ неперервна в точці $y = y_0$, то для ε знайдеться таке $\sigma > 0$, що

$$\text{з} \quad |y - y_0| < \sigma \quad \text{випливає} \quad |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon.$$

З іншого боку, оскільки $f(x)$ неперервна в точці $x = x_0$, то для цього σ знайдеться таке $\delta > 0$, що

$$\text{з} \quad |x - x_0| < \delta \quad \text{випливає} \quad |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \sigma.$$

З того, як ми вибирали число σ, випливає

$$|\varphi(f(x)) - \varphi(y_0)| = |\varphi(f(x)) - \varphi(f(x_0))| < \varepsilon.$$

Цим "мовою ε-δ" і доведена неперервність функції $\varphi(f(x))$ в точці x_0. ☐

Наприклад, якщо степеневу функцію x^μ $(x > 0)$ подати у вигляді складеної функції:

$$x^\mu = e^{\mu \ln x},$$

що побудована як композиція логарифмічної та показникової функцій, то з неперервності останніх двох функцій вже буде випливати неперервність степеневої функції.

74. Розв'язування одного функціонального рівняння

Для полегшення викладу в найближчому розділі, займемося зараз такою задачею (яка становить і самостійний інтерес).

Знайти всі **неперервні** на проміжку $(-\infty, +\infty)$ функції $f(x)$, що задовольняють умову

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \tag{74.1}$$

хоч би які були значення x та y.

nebayduzhi.math@gmail.com

Рівняння (74.1) — це найпростіший приклад так званих **функціональних рівнянь**, що формулюють деяку властивість функції, за якою вона і має бути знайдена. Нам потрібно знайти всі **неперервні розв'язки** рівняння (74.1).

Легко побачити, що лінійні однорідні функції вигляду

$$f(x) = c \cdot x \quad (c = \mathrm{const}), \tag{74.2}$$

задовольняють це рівняння:

$$c \cdot (x + y) = c \cdot x + c \cdot y,$$

Але питання саме в тому, щоб знайти **всі** інші неперервні функції, які мають властивість (74.1).

Для того, щоб встановити, що розв'язком рівняння (74.1) є **тільки** функції вигляду (74.2), припустимо, що деяка **неперервна** функція $f(x)$ задовольняє рівняння (74.1), і покажемо, що тоді вона має вигляд (74.2).

Насамперед за допомогою методу математичної індукції легко узагальнити співвідношення (74.1) і показати, що воно виконується для будь-якої кількості доданків:

$$f(\underbrace{x + y + \dots + z}_{n}) = f(x) + f(y) + \dots + f(z). \tag{74.3}$$

Припустимо, що це справедливо для будь-якого числа $n \geqslant 2$ доданків, тоді воно виявиться справедливим і для $n + 1$ доданків:

$$f(\underbrace{x + y + \dots + z}_{n} + u) = f(\underbrace{x + y + \dots + z}_{n}) + f(u) = (f(x) + f(y) + \dots + f(z)) + f(u).$$

Нехай $x = y = \ldots = z$ в (74.3), тоді маємо:

$$f(n \cdot x) = n \cdot f(x), \tag{74.4}$$

Замінивши тут x на $\frac{1}{n}x$ (n — натуральне), ми отримаємо

$$f\left(n \cdot \frac{1}{n} \cdot x\right) = n \cdot f\left(\frac{1}{n} \cdot x\right), \text{ звідки } f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n} \cdot f(x),$$

а потім, якщо підставити mx (m — натуральне) замість x і використовувати попередню рівність, прийдемо до співвідношення

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n} \cdot f(x). \tag{74.5}$$

Покладемо тепер в основному рівнянні (74.1) $x = y = 0$; отримаємо

$$f(0) = 2f(0), \quad \text{так що} \quad f(0) = 0. \tag{74.6}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо ж взяти $y = -x$, та застосувавши (74.6), знайдемо:

$$f(-x) = -f(x),$$

так що функція $f(x)$ змінює знак, коли x змінює знак. А тоді з (74.4) та (74.5) легко отримати:

$$f(-nx) = -n \cdot f(x) \tag{74.7}$$

і аналогічно взагалі

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right) = -\frac{m}{n} \cdot f(x). \tag{74.8}$$

Отримані співвідношення (74.4) – (74.8) можуть бути об'єднані в рівності

$$f(r \cdot x) = r \cdot f(x),$$

що виконується для будь-якого дійсного значення x, хоч би яке було **раціональне** число r.

Якщо взяти тут $x = 1$ і позначити $f(1)$ через $c = \mathrm{const}$, то отримаємо

$$f(r) = c \cdot r$$

для будь-якого раціонального числа r. (Тут r стає незалежною змінною!) Отже, ми, власне кажучи, встановили вже вигляд функції f, але поки що лише для **раціональних** значень аргументу. Ми використали тільки той факт, що функція задовольняє умову (74.1), і не спиралися на її неперервність.

Нехай тепер ϱ буде будь-яке **ірраціональне** значення аргументу. Легко побудувати послідовність раціональних чисел, що прямує до нього,

$$r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_n,\ \dots$$

(можна, наприклад, взяти відрізки відповідного нескінченного десяткового дробу). Ми щойно бачили, що

$$f(r_n) = c \cdot r_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Перейдемо тут до границі для $n \to +\infty$; справа ми отримаємо $c \cdot \varrho$, зліва ж, використовуючи припущення про неперервність функції f, вийде

$$\lim f(r_n) = f(\varrho),$$

так що, остаточно

$$f(\varrho) = c \cdot \varrho.$$

Отже, справді, наша функція для всіх дійсних значеннях аргументу виражається формулою (74.2). Ця формула дає найзагальніший розв'язок рівняння (74.1) у неперервних функціях.

75. Функціональна характеристика показникової, логарифмічної та степеневої функцій

1) Розглянемо функціональне рівняння

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y). \tag{75.1}$$

Очевидно

$$f(x) = a^x \quad (a > 0) \tag{75.2}$$

задовольняє це рівняння, хоч би які були два дійсні числа x і y. Це виражає загальновідоме правило множення степенів:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Виявляється, що функціональною властивістю (75.1), разом із властивістю **неперервності**, показникова функція означується цілком. Точніше кажучи:

єдина функція, визначена та ***неперервна*** *на всьому проміжку* $(-\infty, +\infty)$*, що задовольняє на ньому умову* (75.1)*, — це показникова функція* (якщо не брати до уваги функцію, яка тотожно дорівнює 0).

Іншими словами, формула (75.2), за вказаним винятком, дає найзагальніший розв'язок **функціонального рівняння** (75.1) у неперервних функціях.

Для доведення цього розглянемо довільну функцію $f(x)$, визначену і неперервну для всіх x і таку, що задовольняє умову (75.1). **Тривіальний випадок, коли $f(x) \equiv 0$, розглядати не будемо.**

Отже, існує деяке $x = x_0$, де ця функція відмінна від 0. Підставимо в (75.1) $y = x - x_0$, отримаємо

$$f(x) \cdot f(x - x_0) = f(x_0) \neq 0;$$

звідси ясно, що $f(x)$ **відмінна від 0 для всіх** x. Далі, замінюючи в (75.1) x і y на $\frac{x}{2}$, знайдемо:

$$f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2,$$

так що $f(x)$ **завжди строго додатна**.

Користуючись цим, прологарифмуємо рівність (75.1), наприклад, за натуральною основою e:

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y).$$

Якщо взяти

$$\varphi(x) = \ln f(x),$$

то $\varphi(x)$ буде неперервною функцією (як результат композиції неперервних функцій, розд. 73), яка задовольняє умову:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

nebayduzhi.math@gmail.com

аналогічній до (74.1). У такому разі, як ми показали, необхідно

$$\varphi(x) = \ln f(x) = c \cdot x \quad (c = \text{const}),$$

звідки, нарешті,

$$f(x) = e^{cx} = (e^c)^x = a^x$$

(якщо покласти $a = e^c$), що й потрібно було довести.

2) Розглянемо функціональне рівняння

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y). \tag{75.3}$$

Функція

$$f(x) = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1) \tag{75.4}$$

задовольняє це рівняння, хоч би які були два **додатні** числа x і y. Це виражає правило логарифмування добутку:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

І тут — це рівняння, спільно з неперервністю, цілком характеризує саме логарифмічну функцію:

єдина функція, визначена та неперервна на проміжку $(0, +\infty)$, *що задовольняє на ньому умову* (75.3), *— це логарифмічна функція* (за тим ж винятком), так що формула (75.4) дає найзагальніший розв'язок **функціонального рівняння** (75.3) у неперервних функціях.

Для доведення візьмемо довільну функцію $f(x)$, неперервну для $x > 0$, що задовольняє це рівняння. Введемо нову змінну ξ, що змінюється на проміжку $(-\infty, +\infty)$, і нехай

$$x = e^{\xi}, \quad \varphi(\xi) = f(e^{\xi}),$$

звідки

$$\xi = \ln x, \quad f(x) = \varphi(\ln x).$$

Неперервна (розд. 73) функція $\varphi(\xi)$ задовольняє умову (дивіться (75.3))

$$\varphi(\xi + \eta) = f(e^{\xi+\eta}) = f(e^{\xi} \cdot e^{\eta}) = f(e^{\xi}) + f(e^{\eta}) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$$

типу (74.1). Значить,

$$\varphi(\xi) = c \cdot \xi \quad \text{і} \quad f(x) = c \cdot \ln x.$$

Якщо не розглядати випадок $c = 0$ (тоді $f(x) \equiv 0$), то отриманий результат може бути написаний і у вигляді

$$f(x) = \log_a x,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

де $a = e^{\frac{1}{c}}$. Цим усе доведено.

3) Розглянемо функціональне рівняння

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y). \tag{75.5}$$

Функція

$$f(x) = x^{\mu} \tag{75.6}$$

задовольняє це **функціональне рівняння**, хоч би які були два числа x і y, оскільки

$$(xy)^{\mu} = x^{\mu} \cdot y^{\mu}.$$

Це рівняння, разом із **неперервністю**, в цьому випадку також характеризує степеневу функцію в тому сенсі, що:

єдина функція, визначена та неперервна на проміжку $(0, +\infty)$, *що задовольняє на ньому умову* (75.5), *— це степенева функція* (за звичайним винятком).

Справді, якщо дана неперервна для $x > 0$ функція $f(x)$, що задовольняє умову (75.5), то вдамося до тієї ж підстановки, що і в 2). Тоді функція $\varphi(\xi)$ задовольнятиме умову (дивіться (75.5))

$$\varphi(\xi + \eta) = f(e^{\xi+\eta}) = f(e^{\xi} \cdot e^{\eta}) = f(e^{\xi}) \cdot f(e^{\eta}) = \varphi(\xi) \cdot \varphi(\eta)$$

типу (75.1). Ми вже знаємо, що тоді (якщо відкинути тривіальний випадок)

$$\varphi(\xi) = a^{\xi} \quad (a > 0).$$

Звідси

$$f(x) = a^{\ln x} = x^{\mu}$$

(якщо покласти $\mu = \ln a$), що й потрібно було довести.

76. Функціональна характеристика тригонометричного та гіперболічного косинусів

4) Розглянемо функціональне рівняння д'Аламбера (фр. Jean le Rond d'Alembert, Жáн д'Аламбéр)

$$f(y + x) + f(y - x) = 2 \cdot f(x) \cdot f(y). \tag{76.1}$$

Функції

$$f(x) = \cos(a \cdot x) \quad \text{та} \quad f(x) = \operatorname{ch}(a \cdot x) \quad (a \geqslant 0) \tag{76.2}$$

задовольняють це рівняння, хоч би які були два дійсні числа x і y. Якщо $a = 0$, то $f(x) \equiv 1$. Це випливає з теорем додавання для обох косинусів:

$$\cos(y \pm x) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y,$$

$$\operatorname{ch}(y \pm x) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$$

(дивіться розд. 48, 6). **Функціональне рівняння** (76.1), разом з **неперервністю** функції, і цього разу повністю характеризує обидва косинуси:

єдині функції, визначені та неперервні на проміжку $(-\infty, +\infty)$*, що задовольняють на ньому умову* (76.1)*, — це тригонометричний і гіперболічний косинуси* (76.2) (якщо, як і вище, не вважати функцію, що тотожно дорівнює нулю).

Отже, нехай $f(x)$ буде неперервна для всіх x функція, що задовольняє умову (76.1). Взявши $x = 0$ і якесь із значень y , для яких $f(y) \neq 0$, отримаємо, що

$$f(0) = 1. \tag{76.3}$$

Для $y = 0$ в такому разі виходить

$$f(-x) = f(x), \tag{76.4}$$

отже, функція $f(x)$ виявляється **парною**.

Оскільки неперервна функція $f(x)$ в точці $x = 0$ буде додатна, то знайдеться таке, скажімо, додатне число c, що $f(x)$ буде додатна на всьому проміжку $[0, c]$. Надалі дослідження піде **різними шляхами** залежно від того, чи буде (α) $f(c) \leqslant 1$ чи (β) $f(c) > 1$. Займемося спочатку випадком (α).

Оскільки $0 < f(c) \leqslant 1$, то знайдеться таке θ $\left(0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, що

$$f(c) = \cos\theta. \tag{76.5}$$

Напишемо основне співвідношення (76.1) так:

$$f(y + x) = 2f(x) \cdot f(y) - f(y - x),$$

станемо в ньому послідовно брати

$$\begin{aligned} x &= c, \quad y = c; \\ x &= c, \quad y = 2c; \\ x &= c, \quad y = 3c \end{aligned}$$

і так далі. Ми отримаємо (з урахуванням (76.3) та (76.5))

$$\begin{aligned} f(2c) &= 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta; \\ f(3c) &= 2\cos\theta \cdot \cos 2\theta - \cos\theta = \cos 3\theta; \\ f(4c) &= 2\cos\theta \cdot \cos 3\theta - \cos 2\theta = \cos 4\theta \end{aligned}$$

і так далі. Користуючись методом математичної індукції, легко доведемо для будь-якого натурального m формулу

$$f(mc) = \cos m\theta. \tag{76.6}$$

Якщо ж в рівнянні (76.1) покласти $x = y = \frac{1}{2}c$, то отримаємо (з урахуванням (76.3) та (76.5))

$$\left[f\left(\frac{1}{2}c\right)\right]^2 = \frac{f(0)+f(c)}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)^2;$$

оскільки $f(x)$ залишається додатною між 0 і c, а функція $\cos x$ — між 0 і θ, то, знаходячи додатні корені в обох частинах, прийдемо до рівності:

$$f\left(\frac{1}{2}c\right) = \cos\frac{1}{2}\theta.$$

Так само, поклавши в (76.1) $x = y = \dfrac{1}{2^2}c$, знайдемо, що

$$f\left(\frac{1}{2^2}c\right) = \cos\frac{1}{2^2}\theta,$$

і так далі. Так послідовно (математична індукція!) отримаємо і загальне співвідношення

$$f\left(\frac{1}{2^n}c\right) = \cos\frac{1}{2^n}\theta \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{76.7}$$

Нарешті, повторюючи той процес, за допомогою якого ми, вирушаючи від (76.5), прийшли до (76.6), ми від (76.7) прийдемо до рівності

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right) = \cos\frac{m}{2^n}\theta. \tag{76.8}$$

Отже, для додатних значень x вигляду $\frac{m}{2^n}$ маємо:

$$f(cx) = \cos\theta x. \tag{76.9}$$

Але оскільки будь-яке додатне число x можна представити як **границю** значень цього вигляду, то за допомогою граничного переходу (і спираючись на **неперервність** функцій $f(x)$ і $\cos x$), встановимо, що формула (76.9) справедлива для всіх $x > 0$. Для $x < 0$ вона буде справедлива виходячи з (76.4), а для $x = 0$ — виходячи із (76.3). Якщо замінити в (76.9) x на $\frac{x}{c}$ і взяти $\dfrac{\theta}{c} = a$, то отримаємо остаточно:

$$f(x) = \cos ax.$$

У випадку (β) маємо: $f(c) > 1$; тоді знайдеться таке θ, що

$$f(c) = \operatorname{ch}\theta.$$

Повторюючи дослівно всі наведені тільки що міркування і спираючись на співвідношення для гіперболічного косинуса, що збігаються за формою з відповідними співвідношеннями для тригонометричного косинуса, ми для цього випадку знайдемо, що

$$f(x) = \operatorname{ch} ax \quad (a > 0).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Для $a = 0$ за обома формулами отримали б: $f(x) \equiv 1$.

Функціональні рівняння (74.1), (75.1), (75.3), (75.5) та (76.1) вперше розглянув Коші, він дав їх розв'язок у неперервних функціях.

77. Використання неперервності функцій для обчислення границь

Неперервність функцій різними способами може бути використана для обчислення границь. (Фактично ми іноді це робили і раніше; в пр. 56.3 ми попутно довели неперервність $\sqrt[m]{x}$ для $x = 1$ і використали її, а в пр. 56.5 так само вчинили стосовно $\cos x$ для $x = 0$.) Таким прикладам присвячуємо цей розділ.

1) Маємо, для будь-якого дійсного x,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Справді, цей вираз (вважаючи $x \neq 0$) можна записати у вигляді

$$\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x.$$

Оскільки $\frac{x}{n} \to 0$, то варіанта у квадратних дужках прямує до e (54.7), а тоді, через **неперервність** степеневої функції (тут $x = \mathrm{const}$), вираз прямує до e^x.

2) Знайти границю

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_k)} - x\right) \quad \text{(невизначеність виду: } \infty-\infty\text{)},$$

де $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k$ — сталі числа.

Скористаємося тотожністю

$$y - z = \frac{y^k - z^k}{y^{k-1} + y^{k-2}z + \dots + z^{k-1}},$$

підставимо

$$y = \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_k)} \quad \text{і} \quad z = x.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&\sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_k)}-x=\\
=&\frac{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_k)-x^k}{\left(\sqrt[k]{\dots}\right)^{k-1}+\left(\sqrt[k]{\dots}\right)^{k-2}\cdot x+\dots+x^{k-1}}=\\
=&\frac{(x^k+(a_1+\dots+a_k)x^{k-1}+(\dots)x^{k-2}+\dots)-x^k}{x^{k-1}\left(\frac{\left(\sqrt[k]{\dots}\right)^{k-1}}{x^{k-1}}+\frac{\left(\sqrt[k]{\dots}\right)^{k-2}}{x^{k-2}}+\dots+1\right)}=\\
=&\frac{x^{k-1}\left((a_1+\dots+a_k)+\frac{(\dots)}{x}+\frac{(\dots)}{x^2}+\dots\right)}{x^{k-1}\left(\left[\sqrt[k]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\dots\left(1+\frac{a_k}{x}\right)}\right]^{k-1}+\dots+1\right)}=\\
=&\frac{(a_1+\dots+a_k)+\frac{(\dots)}{x}+\dots}{\left[\sqrt[k]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\dots\left(1+\frac{a_k}{x}\right)}\right]^{k-1}+\dots+1}.
\end{aligned}$$

Підкорінний вираз прямує до 1, коли $x\to+\infty$, отже, сам корінь має границю 1 — зважаючи на неперервність кореня, як окремого випадку **степеневої** функції. Оскільки многочлен $(k-1)$-го степеня (від кореня), що стоїть у знаменнику, також неперервна функція, то знаменник прямує до k, а границя всього дробу буде

$$\frac{a_1+\dots+a_k}{k}.$$

3) Повернемося до пр. 33.13. Нехай $a_n>0$ і $a_n\to a$; обмежимося поки припущенням, що $0<a<+\infty$. Застосуємо згадане твердження до послідовності $\{\ln a_n\}$.

Оскільки $\ln a_n\to\ln a$ (через неперервність **логарифмічної** функції), то

$$\lim\ln\sqrt[n]{a_1\dots a_n}=\lim\frac{\ln a_1+\dots+\ln a_n}{n}=\ln a.$$

У такому разі, через неперервність **показникової** функції,

$$\sqrt[n]{a_1\dots a_n}=e^{\ln\sqrt[n]{a_1\dots a_n}}\to e^{\ln a}=a.$$

За допомогою границь пр. 54.1 та пр. 54.2, цей результат поширюється і на випадок $a=0$ і $a=+\infty$.

Отже, ми отримуємо таке перетворення згаданого твердження.

Якщо додатна варіанта a_n *має границю (скінченну або нескінченну), то ту ж границю має і варіанта*

$$b_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}.$$

4) Застосувавши це твердження до послідовності

$$a_1,\ \frac{a_2}{a_1},\ \frac{a_3}{a_2},\ \dots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}},\ \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \dots,$$

прийдемо до цікавого наслідку:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

припускаючи лише, що існує **друга** з цих границь.

Як приклад, знайдемо границю

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Вважаючи $a_n = \frac{n!}{n^n}$, матимемо

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{n+1}{(n+1)\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}.$$

Отже:

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

5) Встановимо низку **важливих границь**, які знадобляться нам далі:

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\log_a(1+\lambda)}{\lambda} = \log_a e \qquad \left(\text{невизначеність виду: } \frac{0}{0}\right), \tag{77.1}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{a^\lambda - 1}{\lambda} = \ln a \qquad \left(\text{невизначеність виду: } \frac{0}{0}\right), \tag{77.2}$$

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{(1+\lambda)^\mu - 1}{\lambda} = \mu \qquad \left(\text{невизначеність виду: } \frac{0}{0}\right). \tag{77.3}$$

Маємо

$$\frac{\log_a(1+\lambda)}{\lambda} = \log_a(1+\lambda)^{\frac{1}{\lambda}};$$

оскільки вираз, який стоїть праворуч під знаком логарифма, прямує до e, коли $\lambda \to 0$ (54.7), то (через неперервність **логарифмічної** функції) його логарифм прямує до $\log_a e$, що й потрібно було довести.

Зазначимо окремий випадок доведеної формули, коли йдеться про **натуральний** логарифм ($a = e$):

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} = 1.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

У простоті цього результату і є, по суті, ті переваги, які має натуральна система логарифмів.

Розглянемо формулу (77.2), покладемо $a^\lambda - 1 = \beta$; тоді через неперервність **показникової** функції, $\beta \to 0$, коли $\lambda \to 0$.

Маємо далі $\lambda = \log_a(1+\beta)$, тож, якщо скористатися вже доведеним результатом:

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{a^\lambda - 1}{\lambda} = \lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\log_a(1+\beta)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a,$$

що й потрібно було довести.

Якщо, зокрема, взяти $\lambda = \frac{1}{n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$, то вийде цікава формула:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a \quad (\text{невизначеність виду: } \infty\cdot 0). \tag{77.4}$$

Нарешті, для доведення формули (77.3), покладемо $(1+\lambda)^\mu - 1 = \beta$; через неперервність **степеневої** функції, $\beta \to 0$, коли $\lambda \to 0$. Логарифмуючи рівність $(1+\lambda)^\mu = 1+\beta$, отримаємо, що

$$\mu\cdot\ln(1+\lambda) = \ln(1+\beta).$$

За допомогою цього співвідношення перетворимо наш вираз так:

$$\frac{(1+\lambda)^\mu - 1}{\lambda} = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{\beta}{\ln(1+\beta)}\cdot\mu\cdot\frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda}.$$

За доведеним, обидва

$$\frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \to 1 \quad \text{і} \quad \frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda} \to 1,$$

так що весь добуток має границю μ, що й потрібно було довести.

Границя, розглянута в пр. 56.3, виходить звідси, як окремий випадок, коли $\mu = r$.

78. Степенево-показникові вирази

Розглянемо тепер **степенево-показниковий** вираз u^v, де u і v — функції від однієї і тієї ж змінної x, з областю зміни $\mathcal{X}$, що має точку згущення x_0; зокрема, це можуть бути дві варіанти u_n і v_n.

Нехай існують скінченні границі:

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = a \quad \text{і} \quad \lim_{x\to x_0} v(x) = b,$$

причому $a > 0$. Потрібно знайти границю u^v.

Представимо його у вигляді

$$u^v = e^{v \cdot \ln u}.$$

Функції v та $\ln u$ мають границі

$$\lim_{x \to x_0} v = b \quad \text{і} \quad \lim_{x \to x_0} \ln u = \ln a$$

(тут використана неперервність **логарифмічної** функції), так що

$$\lim_{x \to x_0} v \ln u = b \ln a.$$

Звідси, через неперервність **показникової** функції, остаточно:

$$\lim_{x \to x_0} u^v = e^{b \cdot \ln a} = a^b.$$

Границю виразу u^v можна отримати і в інших випадках, **коли відома границя** c **добутку** $v \ln u$ — скінченна або нескінченна. Для скінченного c шукана границя буде очевидно e^c; якщо ж $c = -\infty$ або $+\infty$, то ця границя, відповідно, буде 0 або $+\infty$ (дивіться пр. 54.1).

Визначення границі $c = \lim(v \ln u)$ лише за заданими границями a і b можливе завжди, крім випадків, коли цей добуток (для $x \to x_0$) є невизначеність виду $\infty \cdot 0$. Легко побачити, що виняткові випадки відповідають таким комбінаціям значень a і b:

$$\begin{aligned} &a = 1, && b = \pm\infty; \\ &a = 0, && b = 0; \\ &a = +\infty, && b = 0. \end{aligned}$$

У цих випадках кажуть, що вираз u^v є невизначеність виду 1^∞, 0^0, ∞^0. (Щодо самих цих символів можна було б повторити сказане в розд. 31.) Для розв'язання питання про границю виразу u^v тут мало знати лише границі функцій u та v, а потрібно безпосередньо врахувати **закон**, за яким вони прямують до своїх границь.

Варіанта $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, для $n \to \infty$, або загальніший вираз $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, для $\alpha \to 0$, що мають границю e, дають приклад невизначеності виду 1^∞. Вище, в пр. 77.4, ми розглядали варіанту $\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, що становить невизначеність виду 0^0. Нарешті, в пр. 32.10, вираз $\sqrt[n]{n}$ теж був невизначений — виду ∞^0.

Наведемо ще кілька прикладів розкриття невизначеностей нових видів.

79. Приклади

1) Знайти

$$\lim_{x \to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} \quad (\text{невизначеність виду: } \infty^0).$$

Позначаючи цей вираз через y, маємо (дивіться пр. 54.2 і пр. 54.5)

$$\ln y = \frac{\ln(\ln x)}{x} = \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} \to 0 \quad \left(\text{невизначеність виду: } \frac{\infty}{\infty}\right),$$

так що $y \to e^0 = 1$.

2) Знайти

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} \quad (\text{невизначеність виду: } 0^0)\,.$$

Тут (пр. 54.7, пр. 54.5)

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x = \frac{\sin x}{x} \cdot x \ln x \to 0,$$

отже, знову $y \to 1$.

3) Тепер легко **узагальнити** пр. 76.1: якщо варіанта $x_n \to x$ (де x — скінченне число), то

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^x \quad (\text{невизначеність виду: } 1^\infty)\,.$$

Для доведення достатньо подати запропонований вираз у вигляді

$$\left[\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n}}\right]^{x_n};$$

основа степеня прямує тут до e, показник же — до x.

4) Це можна використати в прикладі:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\cos\frac{x}{n} + \lambda \sin\frac{x}{n}\right)^n = e^{\lambda x} \quad (\text{невизначеність виду: } 1^\infty)\,.$$

Вважаючи вираз у дужках рівним $1 + \frac{x_n}{n}$, маємо

$$x_n = n\left(\cos\frac{x}{n} - 1 + \lambda \sin\frac{x}{n}\right) = \lambda x \frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} - x\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \to \lambda x$$

і так далі.

5) Аналогічно розв'язується приклад $(a, b > 0)$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab} \quad (\text{невизначеність виду: } 1^\infty)\,.$$

Тут

$$x_n = n\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) + n\left(\sqrt[n]{b} - 1\right)\right),$$

отже, на підставі одного окремого наслідку з формули (77.2),

$$x_n \to \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln \sqrt{ab},$$

і шукана границя, справді, виявляється рівною $e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$.

6) Нарешті, розглянемо границю

$$\lim_{x\to 0}\Big(\cos x\Big)^{\dfrac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\dfrac{-1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{\dfrac{-1}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}} \qquad (1^\infty)\,.$$

Читач бачить, що в разі невизначеності виду 1^∞ зручно звести вираз безпосередньо до e.

Як уже зазначено, **загальні** методи розкриття невизначеностей усіх видів будуть надані в 4.4.

nebayduzhi.math@gmail.com

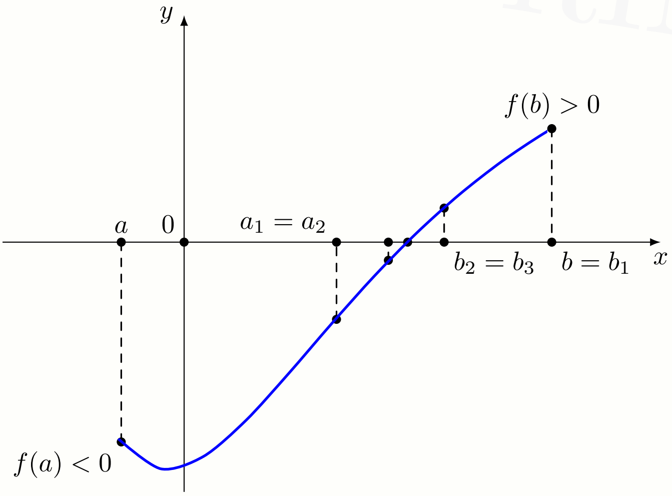


Рис. 80.1

2.5. Властивості неперервних функцій

80. Теорема про проходження функцією через нуль

Займемося тепер вивченням основних властивостей функції, неперервної на деякому проміжку. Цікаві й самі по собі, ці властивості в подальшому викладі часто служитимуть основою для різних висновків.

Почнемо з такої простої теореми, що належить Бользано і Коші.

Теорема 80.1 (Перша теорема Бользано – Коші)**.** *Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкненому проміжку $[a, b]$ і на кінцях цього проміжку набуває значень* ***різних знаків****. Тоді між a і b необхідно знайдеться точка c, у якій функція дорівнює 0:*

$$f(c) = 0 \quad (a < c < b).$$

Теорема має дуже простий геометричний зміст: якщо неперервна крива переходить з одного боку осі x на інший, то вона **перетинає** цю вісь (рис. 80.1).

Доведення. **1-е доведення** ми проведемо за методом Бользано (розд. 41) — послідовним діленням проміжку. Для визначеності припустимо, що $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$. Розділимо проміжок $[a, b]$ навпіл точкою $\dfrac{a+b}{2}$, може статися, що функція дорівнює нулю в цій точці, тоді теорема доведена: можна вважати $c = \dfrac{a+b}{2}$. Нехай же $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \neq 0$; тоді на кінцях одного із проміжків $\left[a,\ \dfrac{a+b}{2}\right]$, $\left[\dfrac{a+b}{2},\ b\right]$ функція буде мати значення **різних знаків** (і до того ж від'ємне значення на лівому кінці і додатне — на правому). Позначивши цей проміжок через $[a_1, b_1]$ маємо

$$f(a_1) < 0 \quad \text{і} \quad f(b_1) > 0.$$

Розділимо навпіл проміжок $[a_1, b_1]$ і знову відкинемо той випадок, коли $f(x)$ дорівнює нулю в середині $\dfrac{a_1 + b_1}{2}$ цього проміжку, бо тоді теорема доведена. Позначимо через $[a_2, b_2]$ ту з половин проміжку, для якої

$$f(a_2) < 0 \quad \text{і} \quad f(b_2) > 0.$$

Продовжимо цей процес побудови проміжків. Отримаємо: **або** після скінченного числа кроків ми натрапимо на точку, в якій функція дорівнює нулю, і доведення теореми завершується; **або** отримаємо нескінченну послідовність вкладених один в одного проміжків. Зупинимося на цьому останньому випадку. Тоді для n-го проміжку $[a_n, b_n]$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ будемо мати

$$f(a_n) < 0 \quad \text{і} \quad f(b_n) > 0, \tag{80.1}$$

причому довжина його, очевидно, дорівнює

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}. \tag{80.2}$$

Побудована послідовність проміжків задовольняє умову **леми про вкладені проміжки** (лем. 38.1), бо, зважаючи на (80.2), $\lim(b_n - a_n) = 0$; тому існує точка c з проміжку $[a, b]$, для якої

$$\lim a_n = \lim b_n = c.$$

Покажемо, що саме ця точка задовольняє вимогу теореми.

Переходячи до границі в нерівностях (80.1) і використовуючи **неперервність** функції (зокрема, у точці $x = c$), отримаємо, що водночас

$$f(c) = \lim f(a_n) \leqslant 0 \quad \text{і} \quad f(c) = \lim f(b_n) \geqslant 0,$$

так що, справді, $f(c) = 0$. Теорема доведена. ☐

Ми дамо нижче друге доведення теореми Коші, побудоване на іншій ідеї. Але спочатку доведемо допоміжне твердження.

Лема 80.1. *Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці $x = x_0$ та значення $f(x_0)$* ***відмінне від*** *0, то для всіх досить близьких до x_0 значень x функція $f(x)$ зберігає той самий знак, який вона має в точці x_0.*

Доведення. Це випливає з твердження теор. 55.2, причому в цьому випадку роль границі A функції (саме через **неперервність**) відіграє $f(x_0)$. ☐

2-е доведення теор. 80.1.

Доведення. Нагадаємо, що ми вважаємо $f(a) < 0$ і $f(b) > 0$. Розглянемо всі точки $x = \overline{x}$ проміжку $[a, b]$, де $f(\overline{x}) < 0$. До них, наприклад, належать точка a і (за лемою) прилеглі до неї точки. Множина $\{\overline{x}\}$ обмежена зверху числом b. Нехай тепер $c = \sup\{\overline{x}\}$ (розд. 11); ми стверджуємо, що $f(c) = 0$.

Справді, припустимо протилежне; тоді або $f(c) < 0$, або $f(c) > 0$. Якщо $f(c) < 0$ (тоді свідомо $c < b$, бо $f(b) > 0$), то, за лемою, і **праворуч** c знайшлися б значення $\overline{x}$, для яких $f(\overline{x}) < 0$, а це суперечило б означенню c, як **верхньої межі** для $\{\overline{x}\}$. Якщо ж $f(c) > 0$, то, знову на підставі леми, мали б $f(x) > 0$ і **ліворуч** поблизу c, саме на деякому досить малому проміжку $(c - \delta, c]$, а тоді там зовсім не було б значень $\overline{x}$, що також неможливо, бо c, за означенням, є **точна** верхня межа множини $\{\overline{x}\}$.

Теорема доведена. ☐

Зауважимо, що вимога **неперервності** функції $f(x)$ на замкненому проміжку $[a, b]$ суттєва: функція, що має розрив хоч в одній точці, може перейти від від'ємного значення до додатного і не набуваючи значення 0. Так буде, наприклад, з функцією $f(x) = E(x) - \frac{1}{2}$, яка ніде не набуває значення 0, хоча $f(0) = -\frac{1}{2}$, а $f(1) = \frac{1}{2}$ (стрибок в точці $x = 1$).

81. Застосування до розв'язування рівнянь

Доведена теорема застосовується для розв'язування рівнянь.

Насамперед з її допомогою **доводиться існування** розв'язку. Наприклад, для всіх очевидний корінь $x = 4$ рівняння

$$2^x = 4x,$$

але важче помітити існування ще одного кореня. А тимчасом функція $f(x) = 2^x - 4x$ в точці $x = 0$ набуває значення $f(0) = 1 > 0$, а в точці $x = \frac{1}{2}$ — значення $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} - 2 < 0$. Отже, оскільки вона неперервна, вона дорівнює 0 в деякій точці між 0 та $\frac{1}{2}$.

Інший приклад: розглянемо, взагалі, алгебраїчне рівняння непарного степеня (з дійсними коефіцієнтами):

$$f(x) \equiv a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0.$$

Для x, абсолютне значення якого досить велике, многочлен має знак старшого члена, тобто для додатних x — знак a_0, а для від'ємних x — протилежний знак. Оскільки многочлен — це неперервна функція, то, змінюючи знак, він у проміжній точці необхідно дорівнює 0. Звідси: *всяке алгебраїчне рівняння непарного степеня (з дійсними коефіцієнтами) має принаймні один дійсний корінь.*

Теоремою Бользано – Коші можна користуватися не лише для доведення існування кореня, але й для наближеного його обчислення. Пояснимо це прикладом.

Нехай $f(x) = x^4 - x - 1$. Оскільки $f(1) = -1$, $f(2) = 13$, то многочлен має корінь **між** 1 та 2. Розділимо цей проміжок $[1, 2]$ на 10 рівних частин точками $1{,}1;\ 1{,}2;\ 1{,}3;\ \ldots$ і станемо послідовно обчислювати:

$$f(1{,}1) = -0{,}63\ldots; \quad f(1{,}2) = -0{,}12\ldots; \quad f(1{,}3) = +0{,}55\ldots; \quad \ldots$$

Бачимо, що корінь міститься між 1,2 та 1,3. Розділивши і цей проміжок на 10 частин, знайдемо:

$$f(1{,}21) = -0{,}06\ldots; \quad f(1{,}22) = -0{,}004\ldots; \quad f(1{,}23) = +0{,}058\ldots; \quad \ldots$$

Тепер ясно, що корінь лежить між 1,22 та 1,23; отже, ми вже знаємо значення кореня з точністю до 0,01 і так далі. (Втім, практично цей шлях невигідний. У 4.5 будуть вказані набагато ефективніші способи.)

Також цікаво зіставити викладені вище два доведення однієї і тієї ж теореми. Друге з них лише “доводить існування” розв’язку рівняння $f(x) = 0$ і нічого не каже про те, як знайти корінь. Перше ж будує певний шлях до реального обчислення кореня: послідовним поділом проміжку навпіл (чим ми для простоти обмежилися) можна насправді затиснути шуканий корінь у проміжок довільно малої довжини, тобто обчислити цей корінь з довільною точністю.

82. Теорема про проміжне значення

Доведена теор. 80.1 безпосередньо узагальнюється так.

Теорема 82.1 (Друга теорема Бользано – Коші)**.** *Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому проміжку $\mathcal{X}$ (замкненому або ні, скінченному або нескінченному). Якщо у двох точках $x = a$ та $x = b$ $(a < b)$ цього проміжку функція набуває нерівних значень*

$$f(a) = A \quad \textit{i} \quad f(b) = B,$$

то, хоч би яке було число C, що лежить між A і B, знайдеться така точка $x = c$ між a та b, що

$$f(c) = C.$$

Очевидно, що перша теорема Бользано – Коші — це частковий випадок цієї теореми: якщо A і B — різних знаків, то за C можна взяти і 0.

Доведення. Вважатимемо, наприклад,

$$A < B, \quad \text{так що} \quad A < C < B.$$

Розглянемо на проміжку $[a, b]$ допоміжну функцію $\varphi(x) = f(x) - C$. Ця функція неперервна на проміжку $[a, b]$ і на кінцях його має різні знаки:

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0 \quad \text{і} \quad \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Тоді, застосуємо першу теорему Бользано – Коші; і між a і b знайдеться точка $x = c$, де $\varphi(c) = 0$, тобто

$$f(c) - C = 0 \quad \text{або} \quad f(c) = C,$$

що й потрібно було довести. □

Отже, ми отримали важливу властивість функції $f(x)$, неперервної на проміжку: *переходячи від одного свого значення до іншого, функція хоч раз набуває* ***кожного*** *проміжного числа.*

Іншими словами цю властивість можна висловити і так: *значення, яких набуває неперервна функція $f(x)$, коли x змінюється на якомусь проміжку $\mathcal{X}$,* ***суцільно*** *заповнюють деякий проміжок $\mathcal{Y}$.*

Справді, нехай

$$m = \inf\{f(x)\} \quad \text{і} \quad M = \sup\{f(x)\}$$

і y_0 є **довільне число** між m і M:

$$m < y_0 < M.$$

(Нагадуємо читачеві, що якщо множина $\{f(x)\}$ не обмежена зверху (знизу), то ми домовилися в розд. 11 вважати $M = +\infty$ $(m = -\infty)$.)

Необхідно знайдуться **значення функції** $y_1 = f(x_1)$ і $y_2 = f(x_2)$ (x_1 і x_2 взяті з проміжку $\mathcal{X}$), такі, що

$$m \leqslant y_1 < y_0 < y_2 \leqslant M;$$

це випливає з самого означення **точних** меж числової множини. Але тоді, за доведеною теоремою, **між** x_1 і x_2 існує таке значення $x = x_0$ (очевидно воно також належить до $\mathcal{X}$), що $f(x_0)$ точно дорівнює y_0; отже, це число входить до множини $\mathcal{Y}$.

Отже, $\mathcal{Y}$ є **проміжок** з кінцями m і M (які самі можуть належати чи не належати до нього; порівняйте з розд. 84).

Ми бачили в теор. 71.2, що в разі монотонної функції згадана властивість, навпаки, тягне за собою неперервність. Однак не слід думати, що це буде завжди; легко побудувати свідомо розривні функції, які все ж таки цю властивість мають. Наприклад, значення функції (пр. 70.4):

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0,$$

коли x змінюється на якомусь проміжку, що містить **точку розриву** $x = 0$, заповнюють проміжок $[-1, +1]$.

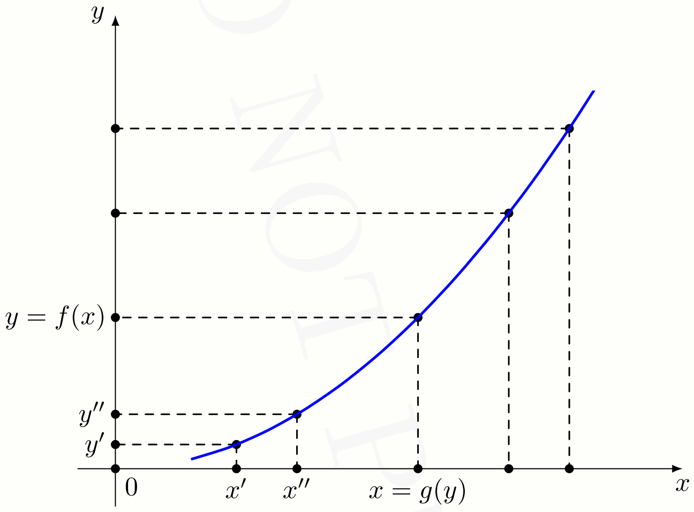


Рис. 83.1

83. Існування оберненої функції

Застосуємо вивчені в попередньому розділі властивості неперервної функції, щоб довести, за деяких припущень, існування **однозначної** оберненої функції та її **неперервність** (порівняйте з розд. 49).

Теорема 83.1. *Нехай функція $y = f(x)$ визначена, монотонно зростає (спадає) (у* ***строгому*** *значенні слова, це тут суттєво) і неперервна на деякому проміжку $\mathcal{X}$. Тоді на відповідному проміжку $\mathcal{Y}$ значень цієї функції існує* ***однозначна*** *обернена функція $x = g(y)$, також монотонно зростаюча (спадна) і неперервна.*

Доведення. Обмежимося випадком зростаючої функції. Ми бачили вище, що значення неперервної функції заповнюють суцільно деякий проміжок $\mathcal{Y}$, так що для **кожного** значення y_0 з цього проміжку знайдеться **хоч одне** таке значення x_0 (з $\mathcal{X}$), що

$$f(x_0) = y_0.$$

Але оскільки ця функція монотонна, то таке значення може знайтися **тільки одне**: якщо $x_1 > x_0$ $(x_1 < x_0)$, то, відповідно, $f(x_1) > f(x_0)$ $(f(x_1) < f(x_0))$.

Зіставляючи саме це значення x_0 з довільно взятим y_0 з $\mathcal{Y}$, ми отримаємо **однозначну** функцію

$$x = g(y),$$

обернену до функції $y = f(x)$.

Легко побачити, що ця функція $g(y)$, подібно до $f(x)$, також монотонно **зростає**. Нехай

$$y' < y'' \quad \text{і} \quad x' = g(y'),\ x'' = g(y'');$$

тоді, за означенням функції $g(y)$, водночас

$$y' = f(x') \quad \text{і} \quad y'' = f(x'').$$

Якби було $x' > x''$, то, через зростання функції $f(x)$, було б і $y' > y''$, що суперечить умові. Не може бути і $x' = x''$, бо тоді було б і $y' = y''$, що також суперечить умові. Отже, можлива тільки нерівність $x' < x''$, так що $g(y)$, справді, зростає.

Нарешті, щоб довести неперервність функції $x = g(y)$, достатньо послатися на теор. 71.2, умови якої виконані: функція монотонна, та її значення, очевидно, заповнюють суцільно проміжок $\mathcal{X}$. (Хоч би яке x із $\mathcal{X}$ взяти, варто лише покласти $y = f(x)$, щоб для **цього** y функція $g(y)$ набувала саме взятого x.).

Усі твердження теореми геометрично очевидні, їх легко "прочитати" на рис. 83.1. □

За допомогою доведеної теореми можна заново встановити ряд уже відомих нам результатів.

Якщо застосувати її до функції x^n (n — натуральне число) на проміжку $\mathcal{X} = [0, +\infty)$, то прийдемо до існування та неперервності (арифметичного) кореня $x = \sqrt[n]{y}$ для y з $\mathcal{Y} = [0, +\infty)$. Для функції $y = a^x$ на проміжку $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$, доведемо існування і неперервність логарифма $x = \log_a y$ на проміжку $\mathcal{Y} = (0, +\infty)$. Нарешті, розглядаючи функції $y = \sin x$ і $y = \operatorname{tg} x$, першу — на проміжку $\mathcal{X}_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а другу — на відкритому проміжку $\mathcal{X}_2 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, переконаємось в існуванні та неперервності обернених до них функцій $x = \arcsin y$ і $x = \operatorname{arctg} y$, відповідно, на проміжках $\mathcal{Y}_1 = [-1, +1]$ і $\mathcal{Y}_2 = (-\infty, +\infty)$.

(Тут вважається, що попередньо вже доведено неперервність функцій x^n, a^x, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ — без використання **існування** обернених до них функцій (інакше вийшло б порочне коло). Такі доведення були дані в розд. 68; міркування ж з розд. 72 очевидно тут непридатні.)

Розглянемо такий приклад.

Нехай для x із $\mathcal{X} = (-\infty, +\infty)$

$$y = x - \varepsilon \cdot \sin x \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Легко показати, що ця функція буде монотонно зростаючою (у вузькому значенні). Саме, якщо $x'' > x'$ і y', y'' — відповідні значення y, то

$$y'' - y' = (x'' - x') - \varepsilon(\sin x'' - \sin x').$$

Але (дивіться (68.1))

$$|\sin x'' - \sin x'| \leqslant x'' - x',$$

звідки й випливає, що

$$y'' - y' > 0, \quad \text{тобто } y'' > y'.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Застосувавши до цього випадку теорему, переконуємося в тому, що і x є **однозначна** функція від y і так далі.

Наведений приклад цікавий тим, що він застосовується в одній задачі теоретичної астрономії. Знамените рівняння Кеплара (нім. Johannes Kepler, Йоха́нес Ке́плар)

$$E = M + \varepsilon \cdot \sin E \tag{83.1}$$

пов'язує **середню аномалію** M планети з її ексцентричною аномалією E (ε — ексцентриситет планетної орбіти). І ми довели, що, хоч би яким було значення середньої аномалії, рівняння Кеплара справді однозначно визначає значення ексцентричної аномалії.

84. Теорема про обмеженість функції

Якщо функція $f(x)$ визначена (отже, набуває **скінченних** значень) для всіх значень x на деякому скінченному проміжку, то це не тягне за собою з необхідністю **обмеженості** функції, тобто обмеженості множини значень $\{f(x)\}$, яких вона набуває. Наприклад, нехай функція $f(x)$ визначена так:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{якщо} \quad 0 < x \leqslant 1, \quad \text{і} \quad f(0) = 0.$$

Ця функція набуває тільки скінченних значень, але вона не обмежена, бо, коли x наближається до 0, вона може набувати скільки завгодно великих значень. Зауважимо також, що на напіввідкритому проміжку $(0, 1]$ вона неперервна, але в точці $x = 0$ має розрив.

Інакше справа з функціями, **неперервними на замкненому проміжку**.

Теорема 84.1 (Перша теорема Ваярштрасса)**.** *Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на* ***замкненому*** *проміжку $[a, b]$, то вона обмежена, тобто існують такі сталі та скінченні числа m і M, що*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Доведення. Доведення поведемо від протилежного: припустимо, що функція $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ виявляється **необмеженою**.

У такому разі для кожного натурального числа n знайдеться на проміжку $[a, b]$ таке значення $x = x_n$, що

$$|f(x_n)| \geqslant n. \tag{84.1}$$

За лемою Бользано – Ваярштрасса (лем. 41.1), з послідовності $\{x_n\}$ можна отримати часткову послідовність $\{x_{n_k}\}$, що збігається до скінченної границі:

$$x_{n_k} \to x_0 \quad (k \to +\infty),$$

nebayduzhi.math@gmail.com

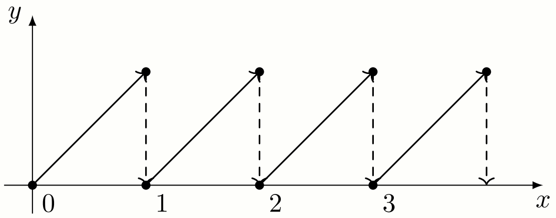


Рис. 85.1

причому очевидно $a \leqslant x_0 \leqslant b$. Внаслідок неперервності функції в точці x_0 тоді має бути і

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0),$$

а це неможливо, бо з (84.1) випливає, що

$$|f(x_{n_k})| \to +\infty.$$

Отримана суперечність і доводить теорему. □

85. Найбільше та найменше значення функції

Ми знаємо, що **нескінченна** числова множина, навіть обмежена, може не мати у своєму складі **найбільшого (найменшого)** елемента. Якщо функція $f(x)$ визначена і навіть обмежена на деякому проміжку зміни x, то у складі множини її значень $\{f(x)\}$ може не виявитися **найбільшого (найменшого)**. У цьому разі точна верхня (нижня) межа значень функції $f(x)$ **не досягається** на названому проміжку.

Так буде, наприклад, із функцією (рис. 85.1)

$$f(x) = x - E(x).$$

Точною верхньою межею значень цієї функції на будь-якому проміжку $[0, b]$ $(b \geqslant 1)$ буде 1, але вона не досягається $(f(x) < 1)$, тому найбільшого значення функція не має.

Читачеві, ймовірно, зрозумілий зв'язок цієї обставини з наявністю в розглянутої функції **розривів**, коли x дорівнює натуральним значенням. Справді, для **неперервних на замкненому проміжку** функцій маємо таку теорему.

Теорема 85.1 (Друга теорема Ваярштрасса)**.** *Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкненому проміжку $[a, b]$, то вона **досягає** на цьому проміжку своїх точних верхньої і нижньої меж.*

*Іншими словами, на проміжку $[a, b]$ знайдуться такі точки $x = x_0$, $x = x_1$, що значення $f(x_0)$, $f(x_1)$ будуть, відповідно, **найбільшим і найменшим** з усіх значень функції $f(x)$.*

1-е доведення.

Доведення. Покладемо
$$M = \sup\{f(x)\};$$
за попередньою теоремою, це число скінченне.

Припустимо протилежне, що завжди $f(x) < M$, тобто що межа M не досягається. У такому разі можна розглянути допоміжну функцію

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Оскільки, за припущенням, знаменник тут ніколи не дорівнює нулю, то ця функція буде неперервна, а отже (за попередньою теоремою) обмежена: $\varphi(x) \leqslant \mu$ $(\mu > 0)$. Але звідси легко отримати, що тоді

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{\mu},$$

тобто число $M - \frac{1}{\mu}$, що **менш** ніж M, виявляється верхньою межею для множини значень функції $f(x)$, чого бути не може, бо M **є точна** верхня межа цієї множини. Отримана суперечність доводить теорему: на проміжку $[a, b]$ знайдеться таке значення x_0, що $f(x_0) = M$ буде **найбільшим** з усіх значень $f(x)$.

Аналогічно може бути доведено твердження щодо **найменшого** значення. □

2-ге доведення.

Доведення. Можна і тут виходити з леми Бользано – Ваярштрасса (лем. 41.1). Обмежимося твердженням про найбільше значення. Якщо, як і щойно,
$$M = \sup\{f(x)\},$$
то за властивістю **точної** верхньої межі (розд. 11), для будь-якого n знайдеться таке $x = x_n$ в $[a, b]$, що
$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}. \tag{85.1}$$

Тоді з послідовності $\{x_n\}$ може бути вилучена часткова послідовність $\{x_{n_k}\}$, що збігається до деякого значення x_0 з $[a, b]$: $x_{n_k} \to x_0$, тож, зважаючи на неперервність функції, і
$$f(x_{n_k}) \to f(x_0).$$
Водночас із (85.1) маємо
$$f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{x_{n_k}};$$

перейдемо до границь і маємо

$$f(x_0) \geqslant M.$$

Але $f(x_0)$ не може бути більшим від **верхньої** межі M множини значень функції і, отже,

$$f(x_0) = M,$$

що й потрібно було довести. □

Зазначимо, що обидва наведені доведення — це чисті “доведення існування”. Засобів для обчислення, наприклад, значення $x = x_0$ ніяких не надається. Згодом (у 4.1), щоправда, за додаткових припущень щодо функції, ми навчимося фактично знаходити значення незалежної змінної, в яких функція набуває найбільшого чи найменшого значення.

Якщо функція $f(x)$ обмежена на якомусь проміжку $\mathcal{X}$, то її **коливанням** на цьому проміжку називається різниця

$$\omega = M - m.$$

Інакше можна означити коливання ω як точну верхню межу множини всіляких різниць $f(x'') - f(x')$, де x' і x'' набувають незалежно одне від одного довільних значень з проміжку $\mathcal{X}$:

$$\omega = \sup_{x', x'' \text{ з } \mathcal{X}} \{f(x'') - f(x')\}.$$

Коли йдеться про **неперервну** функцію $f(x)$ на **замкненому скінченному** проміжку $\mathcal{X} = [a, b]$, то, як випливає з доведеної теореми, коливанням буде просто **різниця між найбільшим і найменшим значеннями функції** на цьому проміжку.

У цьому разі проміжок $\mathcal{Y}$ значень функції — це **замкнений** проміжок $[m, M]$ і коливання дає його довжину.

86. Поняття рівномірної неперервності

Нагадаємо означення неперервності функції $f(x)$ у точці x_0. Якщо функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку $\mathcal{X}$ (замкненому чи ні, скінченному чи нескінченному) і неперервна в точці x_0 цього проміжку, то

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

або (“мовою ε-δ”, розд. 66): *хоч би яке було число $\varepsilon > 0$, для нього знайдеться таке число $\delta > 0$, що нерівність*

$$|x - x_0| < \delta \quad \textit{тягне за собою} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

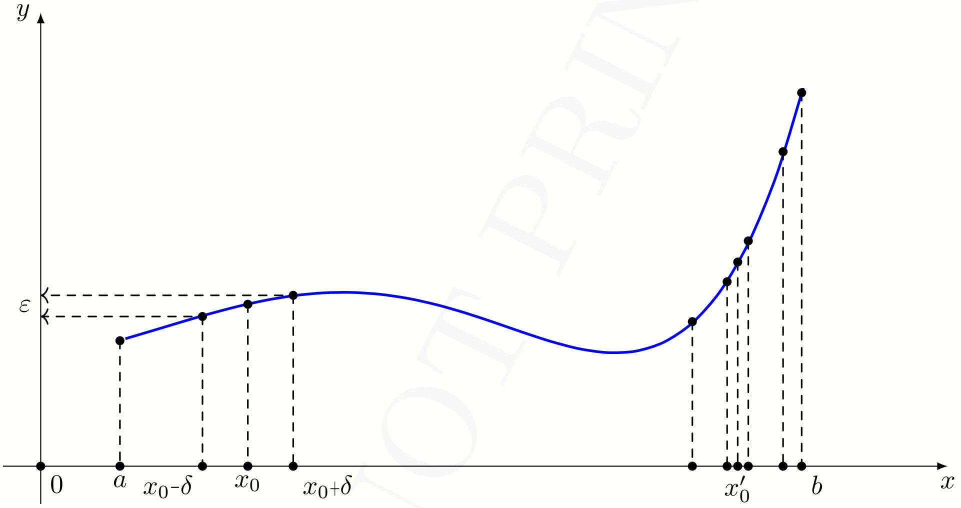


Рис. 86.1

Припустимо тепер, що функція $f(x)$ неперервна на всьому проміжку $\mathcal{X}$, тобто неперервна в **кожній** точці x_0 цього проміжку. Тоді для **кожної** точки x_0 із $\mathcal{X}$ **окремо** за заданим ε знайдеться δ, відповідне до нього в згаданому вище значенні. Якщо x_0 змінюється у межах $\mathcal{X}$, навіть якщо ε незмінне, число δ, взагалі кажучи, змінюватиметься. Одного погляду на рис. 86.1 досить, щоб переконатися в тому, що число δ придатне на ділянці, де функція змінюється повільно (графік має вигляд **пологої** кривої), може виявитися занадто великим для ділянки швидкої зміни функції (де графік **круто** піднімається чи опускається). Іншими словами, *число δ взагалі залежить не лише від ε, а й від x_0.*

Якби йшлося про **скінченне** число значень x_0 (якщо ε незмінне), то зі скінченного числа відповідних до них чисел δ можна було б вибрати найменше, і це останнє годилося б очевидно і для всіх розглянутих точок x_0 водночас.

Але щодо **нескінченної** множини значень x_0, що містяться на проміжку $\mathcal{X}$, так уже міркувати не можна: їм (якщо ε стале) відповідає нескінченна множина чисел δ, серед яких можуть знайтись і як завгодно малі. Отже, щодо функції $f(x)$, неперервної на проміжку $\mathcal{X}$, постає питання: чи існує для заданого ε таке δ, яке годилося б для **всіх** точок x_0 із цього проміжку?

Якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що

$$|x - x_0| < \delta \quad \textit{тягне за собою} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

хоч би де в межах розглянутого проміжку $\mathcal{X}$ лежали точки x_0 і x, то функцію $f(x)$ називають ***рівномірно*** *неперервною на проміжку $\mathcal{X}$.*

У цьому разі число δ виявляється залежним тільки від ε і може бути вказане до вибору точки x_0: δ годиться для всіх x_0 водночас.

Рівномірна неперервність означає, що в усіх частинах проміжку достатня одна і та ж близькість двох значень аргументу, щоб досягти заданої близькості відповідних значень функції.

Можна показати на прикладі, що неперервність функції в усіх точках проміжку не тягне за собою її **рівномірної** неперервності на цьому проміжку. Нехай, наприклад, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ для x на піввідкритому проміжку $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$. У цьому разі область зміни x — **незамкнений** проміжок $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$, і в кожній його точці функція неперервна. Покладемо тепер $x_0 = \dfrac{2}{(2n+1)\pi}$, $x = \dfrac{1}{n\pi}$ (де n — будь-яке натуральне число); тоді

$$f(x_0) = \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1 \quad \text{і} \quad f(x) = \sin\pi = 0,$$

так що

$$|f(x) - f(x_0)| = 1,$$

незважаючи на те, що $|x - x_0| = \dfrac{1}{n(2n+1)\pi}$ зі зростанням n може бути зроблене скільки завгодно малим. Тут для $\varepsilon = 1$ неможливо знайти δ, яке годилося б водночас для всіх точок x_0 на $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$, хоча для кожного окремого значення x_0, зважаючи на неперервність функції, таке δ існує!

Дуже чудово, що на **замкненому** проміжку $[a, b]$ аналогічного стану речей бути вже не може, як випливає з наступної теореми, яку довів Кантор (нім. Georg Cantor, Ґео́рґ Ка́нтор).

87. Теорема Кантора

Теорема 87.1 (Теорема Кантора). *Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на* ***замкненому*** *проміжку $[a, b]$, то вона і* **рівномірно** *неперервна на цьому проміжку.*

Доведення. Доведення поведемо від протилежного. Нехай для деякого **певного** числа $\varepsilon > 0$ немає такого числа $\delta > 0$, про яке йдеться в означенні рівномірної неперервності. У такому разі, хоч би яке число $\delta > 0$ взяти, знайдуться на проміжку $[a, b]$ такі два значення x_0' і x', що

$$|x' - x_0'| < \delta, \quad \text{але} \quad |f(x') - f(x_0')| \geqslant \varepsilon.$$

Візьмемо тепер послідовність $\{\delta_n\}$ додатних чисел так, що $\delta_n \to 0$.

Зі сказаного випливає, що для кожного δ_n знайдуться на $[a, b]$ значення $x_0^{(n)}$ і $x^{(n)}$ (вони відіграють роль x_0' і x') такі, що (для $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$)

$$\left|x^{(n)} - x_0^{(n)}\right| < \delta_n, \quad \text{але} \quad \left|f\left(x^{(n)}\right) - f\left(x_0^{(n)}\right)\right| \geqslant \varepsilon.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

За лемою Бользано – Ваярштрасса (лем. 41.1) з обмеженої послідовності $\{x^{(n)}\}$ можна витягти часткову послідовність, що збігається до деякої точки x_0 проміжку $[a, b]$. Для того щоб не ускладнювати позначень, вважатимемо, що вже сама послідовність $\{x^{(n)}\}$ збігається до x_0.

Оскільки $x^{(n)} - x_0^{(n)} \to 0$ ($\left|x^{(n)} - x_0^{(n)}\right| < \delta_n$, а $\delta_n \to 0$), то водночас і послідовність $\{x_0^{(n)}\}$ збігається до x_0. Тоді, зважаючи на неперервність функції в точці x_0, має бути

$$f\left(x^{(n)}\right) \to f(x_0) \quad \text{і} \quad f\left(x_0^{(n)}\right) \to f(x_0),$$

так що

$$f\left(x^{(n)}\right) - f\left(x_0^{(n)}\right) \to 0,$$

а це суперечить тому, що для всіх значень n

$$\left|f\left(x^{(n)}\right) - f\left(x_0^{(n)}\right)\right| \geqslant \varepsilon.$$

Теорема доведена. □

З доведеної теореми безпосередньо випливає такий наслідок, який буде нам корисний далі.

Наслідок 87.1.1. *Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на замкненому проміжку $[a, b]$. Тоді за заданим $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що якщо проміжок довільно розбити на часткові проміжки з довжинами, меншими від δ, то на кожному з них коливання функції $f(x)$ буде менше від ε.*

Доведення. Справді, якщо, за заданим ε, взяти число δ, про яке йдеться в означенні рівномірної неперервності, то на частковому проміжку з довжиною, меншою від δ, різниця між будь-якими двома значеннями функції буде за абсолютною величиною менша від ε. Зокрема, це справедливо і щодо **найбільшого і найменшого** із цих значень, різниця яких і дає коливання функції на згаданому частковому проміжку (розд. 85). □

88. Лема Бореля

Ми доведемо зараз одне цікаве допоміжне твердження, яке, подібно до леми Бользано – Ваярштрасса, може бути корисним у проведенні багатьох тонких міркувань; воно належить Борелю (фр. Émile Borel, Емíль Борéль).

Розглянемо разом із проміжком $[a, b]$ ще деяку систему Σ **відкритих** проміжків σ, яка може бути як скінченною, так і нескінченною. Домовимося говорити, що **система Σ покриває** проміжок $[a, b]$ (або що цей проміжок покривається системою Σ, і так далі), якщо для кожної точки x проміжку $[a, b]$ знайдеться в Σ проміжок σ, що містить її. Це означення полегшить нам формулювання та доведення згаданого твердження.

Лема 88.1 (Лема Бореля)**.** *Якщо* ***замкнений*** *проміжок* $[a, b]$ *покривається* ***нескінченною*** *системою* $\Sigma = \{\sigma\}$ *відкритих проміжків, то з неї завжди можна виділити* ***скінченну*** *підсистему*

$$\Sigma^* = \{\sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots,\ \sigma_n\},$$

яка також покриває весь проміжок $[a, b]$.

Доведення. **1-е доведення** поведемо від протилежного, застосувавши метод Больцано (розд. 41). Припустимо, що проміжок $[a, b]$ не може бути покритий скінченним числом проміжків σ з Σ. Розділимо проміжок $[a, b]$ навпіл. Тоді хоч одна з половин його теж не може бути покрита скінченним числом σ; справді, якби одна з них могла бути покрита проміжками $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots,\ \sigma_m$ (з Σ), а інша — проміжками $\sigma_{m+1},\ \sigma_{m+2},\ \dots,\ \sigma_n$ (з Σ), то з **усіх** цих проміжків склалася б скінченна система Σ^*, що вже покриває весь проміжок $[a, b]$, всупереч припущенню. Позначимо через $[a_1, b_1]$ ту половину проміжку, яка не покривається скінченним числом σ (якщо ж обидві такі, то будь-яку з них). Цей проміжок знову розділимо навпіл і позначимо через $[a_2, b_2]$ ту з його половин, яку неможливо покрити скінченним числом σ, і так далі.

Продовжуючи цей процес необмежено, ми отримаємо нескінченну послідовність вкладених проміжків $[a_n, b_n]$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$, кожен з яких становить половину попереднього. **Проміжки всі ці вибираються так, що жоден з них не покривається скінченним числом проміжків** σ**.** За лемою про вкладені проміжки (лем. 38.1), існує спільна для них усіх точка c, до якої прямують кінці a_n, b_n.

Ця точка c, як і всяка точка проміжку $[a, b]$, лежить в одному з проміжків σ, скажімо, в $\sigma_0 = (\alpha, \beta)$, так що $\alpha < c < \beta$. Але варіанти a_n і b_n, які прямують до c, починаючи з деякого номера будуть самі міститися між α і β (теор. 26.1), так що проміжок $[a_n, b_n]$ виявиться покритим лише одним проміжком σ_0, всупереч самому вибору цих проміжків $[a_n, b_n]$. Отримана суперечність і доводить лему. ☐

Наведемо ще одне доведення, побудоване на новій ідеї; воно належить Льобеґу (фр. Henri Lebesgue, Анрі́ Льобе́ґ).

2-е доведення.

Доведення. Розглянемо точки x^* проміжку $[a, b]$, що мають ту властивість, що проміжок $[a, x^*]$ покривається скінченним числом проміжків σ. Такі точки x^*, взагалі, знайдуться: оскільки, наприклад, точка a лежить на одному з σ, то і всі прилеглі до неї точки містяться на цьому σ і, отже, виявляються точками x^*.

Наше завдання — показати, що й точка b належить до точок x^*.

Оскільки всі $x^* \leqslant b$, то існує (розд. 11) і

$$\sup\{x^*\} = c \leqslant b.$$

Як і будь-яка точка проміжку $[a, b]$, c належить до деякого $\sigma_0 = (\alpha, \beta)$, $(\alpha < c < \beta)$. Але, за властивістю **точної** верхньої межі, знайдеться x_0^*, таке що $\alpha < x_0^* \leqslant c$. Проміжок $[a, x_0^*]$ покривається **скінченним** числом проміжків σ (за означенням точок x^*); якщо до цих проміжків приєднати ще лише один проміжок σ_0, то покриється і весь проміжок $[a, c]$, так що c є одна з точок x^*.

Разом з тим ясно, що c не може бути $< b$, бо інакше між c і b знайшлися б ще точки x^*, всупереч означенню числа c як **верхньої** межі всіх x^*. Отже, необхідно $b = c$; значить, b є одне з x^*, тобто проміжок $[a, b]$ покривається скінченним числом проміжків σ, що й потрібно було довести. ☐

Зауважимо, що для твердження леми рівною мірою істотно як припущення про **замкненість** основного проміжку $[a, b]$, так і припущення про те, що проміжки σ, що становлять систему Σ, відкриті. Наприклад, система відкритих проміжків

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \ \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \ \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), \ \ldots, \ \left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right), \ \ldots$$

покриває проміжок $(0, 1]$, але з них не можна виділити скінченної підсистеми з тією ж властивістю. Аналогічно, система замкнених проміжків

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \ \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \ \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right], \ \ldots, \ \left[\frac{2^n - 1}{2^n}, \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}\right], \ \ldots \quad \text{та} \quad [1, 2]$$

покриває проміжок $[0, 2]$, але й тут виділення **скінченної** підсистеми не можливе.

89. Нові доведення основних теорем

Покажемо тепер, як лема Бореля може бути використана для доведення основних теорем про неперервні функції: Бользано – Коші, Ваярштрасса та Кантора.

1. *Перша теорема Бользано – Коші* (теор. 80.1).

Доведення. Цього разу доводити її будемо від протилежного. Припустимо, що все ж таки в жодній точці функція $f(x)$ не дорівнює нулю. Тоді, за лем. 80.1, **кожну** точку x' проміжку $[a, b]$ можна оточити таким околом $\sigma' = (x' - \delta', \ x' + \delta')$, що в його межах (тобто в спільній частині цього околу та проміжку $[a, b]$) $f(x)$ зберігає певний знак.

Отже, нескінченна система $\Sigma = \{\sigma\}$ цих околів покриває весь заданий проміжок $[a, b]$. Тоді, за лемою Бореля, виявляється досить **скінченного** числа згаданих околів, що утворюють систему Σ^*.

Лівий кінець нашого проміжку належить до одного з околів цієї системи Σ^*, скажімо, околу $\sigma_1 = (x_1 - \delta_1, \ x_1 + \delta_1)$. Його правий кінець $x_1 + \delta_1$ належить до околу $\sigma_2 = (x_2 - \delta_2, \ x_2 + \delta_2)$ з Σ^*, точка $x_2 + \delta_2$ міститься в околі $\sigma_3 = (x_3 - \delta_3, \ x_3 + \delta_3)$ з

nebayduzhi.math@gmail.com

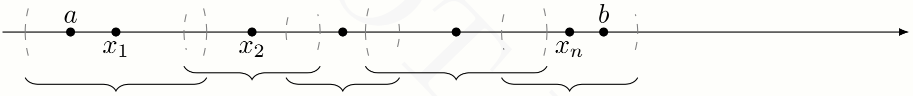


Рис. 89.1

Σ^*, і так далі. (рис. 89.1). Після скінченного числа кроків, пересуваючись праворуч, ми прийдемо до околу $\sigma_n = (x_n - \delta_n,\ x_n + \delta_n)$ з Σ^*, що містить у собі вже правий кінець b заданого проміжку. Якби Σ^* містила ще якісь інші проміжки, крім

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \ldots,\ \sigma_n,$$

то їх, очевидно, можна було б просто опустити.

В околі σ_1, функція $f(x)$ зберігає певний знак, саме, знак $f(a)$. Але і в σ_2 функція має певний знак, який повинен теж збігається зі знаком $f(a)$, **бо σ_1 і σ_2 взаємно налягають**. Так само переконуємось у тому, що той самий знак функція зберігає і в наступному за порядком околі σ_3, що налягає на σ_2, і так далі. Зрештою, прийдемо до висновку, що і в останньому околі σ_n функція має знак $f(a)$, так що і знак $f(b)$ збігається зі знаком $f(a)$, а це вже суперечить умові теореми. Теорема доведена. ☐

2. *Перша теорема Ваярштрасса* (теор. 84.1).

Доведення. Зважаючи на неперервність функції $f(x)$, хоч би яку точку x проміжку $[a, b]$ взяти, задавши деяке числом $\varepsilon > 0$, можна оточити цю точку таким малим околом $\sigma' = (x' - \delta',\ x' + \delta')$, щоб для всіх значень x, що належать до нього, виконувалися нерівності

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

або

$$f(x') - \varepsilon < f(x) < f(x') + \varepsilon.$$

Отже, в межах кожного такого околу функція f(x) свідомо обмежена: знизу — числом $f(x') - \varepsilon$, а зверху — числом $f(x') + \varepsilon$.

Читачеві ясно, що і тут до нескінченної системи околів, що мають вказану властивість, слід застосувати лему Бореля. З неї випливає, що знайдеться в Σ скінченне число околів, що також сукупно покривають весь проміжок $[a, b]$. Якщо

$$\begin{aligned} &m_1 \leqslant f(x) \leqslant M_1 \quad \text{в} \quad \sigma_1,\\ &m_2 \leqslant f(x) \leqslant M_2 \quad \text{в} \quad \sigma_2,\\ &\ldots\\ &m_n \leqslant f(x) \leqslant M_n \quad \text{в} \quad \sigma_n, \end{aligned}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

то, взявши за m найменше з чисел $m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_n$, а за M — найбільше з чисел $M_1,\ M_2,\ \dots,\ M_N$ очевидно матимемо

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

на всьому проміжку $[a, b]$, що й потрібно було довести. □

3. *Теорема Кантора* (теор. 87.1).

Доведення. Візьмемо деяке число $\varepsilon > 0$. Цього разу кожну точку x' проміжку $[a, b]$ оточимо таким околом $\sigma' = (x' - \delta',\ x' + \delta')$, щоб у його межах виконувалася нерівність

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Якщо x_0 також точка цього околу, то водночас і

$$|f(x') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, для **будь-яких точок** x і x_0 з σ' матимемо

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Стягнемо кожний окіл вдвічі, зберігаючи його центр, тобто замість σ' розглянемо окіл

$$\overline{\sigma}' = \left(x' - \frac{\delta'}{2},\ x' + \frac{\delta'}{2}\right).$$

З цих околів також складеться нескінченна система $\overline{\Sigma}'$, що покриває проміжок $[a, b]$, і саме до неї ми застосуємо лему Бореля. Проміжок $[a, b]$ покриється скінченним числом проміжків з $\overline{\Sigma}'$:

$$\overline{\sigma_i} = \left(x_i - \frac{\delta_i}{2},\ x_i + \frac{\delta_i}{2}\right) \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n).$$

Нехай тепер δ буде найменше з усіх чисел $\frac{\delta_i}{2}$, і $x_0,\ x$ — будь-які дві точки нашого проміжку, що задовольняють умову:

$$|x - x_0| < \delta. \tag{89.1}$$

Точка x_0 повинна належати до одного з виділених околів, наприклад до околу

$$\overline{\sigma}_{i_0} = \left(x_{i_0} - \frac{\delta_{i_0}}{2},\ x_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{2}\right),$$

так що $|x_0 - x_{i_0}| < \dfrac{\delta_{i_0}}{2}$.

Оскільки $\delta \leqslant \dfrac{\delta_{i_0}}{2}$, то, зважаючи на (89.1), $|x - x_0| < \dfrac{\delta_{i_0}}{2}$, звідки $|x - x_{i_0}| < \delta_{i_0}$, тобто точка x (і точка x_0) належить до того **спочатку** взятого околу

$$\overline{\sigma}_{i_0} = \left(x_{i_0} - \frac{\delta_{i_0}}{2},\ x_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{2} \right),$$

стягуванням якого отримано окіл $\overline{\sigma}_{i_0}$. У такому разі, за властивістю всіх спочатку взятих околів,

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Оскільки δ було вибране незалежно від положення точки x_0, то рівномірна неперервність функції $f(x)$ доведена. □

Як видно з наведених міркувань, лема Бореля з успіхом застосовується в тих випадках, коли “локальна” властивість, пов’язана з околом окремої точки, потребує поширення на весь заданий проміжок.

nebayduzhi.math@gmail.com

Глава 3

ПОХІДНІ І ДИФЕРЕНЦІАЛИ

3.1. Похідна та її обчислення

90. Задача про обчислення швидкості рухомої точки

Почнемо з окремого прикладу, а саме розглянемо вільне падіння (в порожнечі — щоб не враховувати опору повітря) важкої матеріальної точки.

Якщо час t (сек) відлічується від початку падіння, то пройдений за цей час шлях s (м), за відомою формулою, виразиться так:

$$s = \frac{g}{2}t^2, \tag{90.1}$$

де $g = 9{,}81 \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}^2}\right)$. Виходячи з цього, потрібно визначити швидкість v руху точки в певний момент часу t, коли точка перебуває в положенні M (рис. 90.1).

Надамо змінній t деякий приріст Δt і розглянемо момент $t + \Delta t$, коли точка буде в положенні M_1. Приріст MM_1 шляху за проміжок часу Δt позначимо через Δs. Підставляючи в (90.1) $t + \Delta t$ замість t, отримаємо для нового значення шляху вираз

$$s + \Delta s = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2,$$

звідки

$$\Delta s = \frac{g}{2}(2t \cdot \Delta t + \Delta t^2).$$

Розділивши Δs на Δt, ми отримаємо **середню швидкість** падіння точки на ділянці MM_1:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2} \cdot \Delta t.$$

Як бачимо, ця швидкість **змінюється** разом зі зміною Δt. Вона то краще характеризує стан точки в момент t, що менший проміжок Δt, що минув після цього моменту.

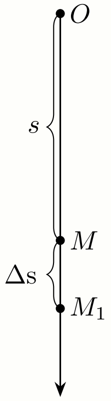


Рис. 90.1

Швидкістю *v точки в момент часу t називають* ***похідну****, до якої прямує середня швидкість $v_{ср}$ за проміжок часу Δt, коли Δt прямує до 0.*

У нашому випадку очевидно

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\left(gt + \frac{g}{2}\cdot \Delta t\right) = gt.$$

Аналогічно обчислюється швидкість v і в загальному випадку прямолінійного руху точки. Положення точки визначається її відстанню s, що відлічується від деякої початкової точки O; ця відстань і називається **пройденим шляхом**. Час t відлічується від деякого початкового моменту, причому не обов'язково, щоб у цей момент точка перебувала в O. Рух вважається цілком заданим, коли відоме **рівняння руху**: $s = f(t)$, з якого положення точки визначається в будь-який момент часу; у розглянутому прикладі таку роль відігравало рівняння (90.1).

Для знаходження швидкості v в певний момент часу t довелось би, як і вище, надати t приріст Δt; цьому відповідає збільшення шляху s на Δs. Відношення

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

є **середня швидкість** $v_{\text{ср}}$ за проміжок Δt. Шукану швидкість v в момент t отримаємо за допомогою граничного переходу:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ми розглянемо нижче іншу важливу задачу, що приводить до подібної ж граничної операції.

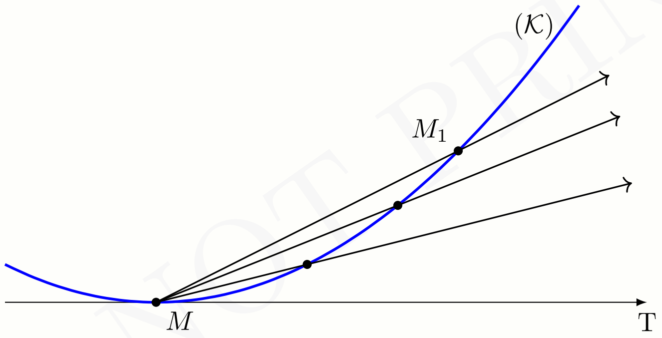


Рис. 91.1

91. Задача про проведення дотичної до кривої

Нехай дана крива ($\mathcal{K}$) (рис. 91.1) та на ній точка M; розглянемо поняття **дотичної до кривої в її точці** M.

У шкільному курсі **дотичну до кола** означають як "пряму, що має з кривою лише одну спільну точку". Але це означення охоплює тільки окремі випадки, не розкриваючи суті справи. Якщо спробувати застосувати його, наприклад до параболи $y = ax^2$ (рис. 91.2), то в точці початку координат O обидві координатні осі підпали б під це означення; тимчасом як, мабуть, безпосередньо ясно і читачеві, насправді лише вісь x служить дотичною до параболи в точці O!

Ми дамо зараз загальне означення дотичної. Візьмемо на кривій ($\mathcal{K}$) (рис. 91.1), окрім точки M, ще точку M_1, і проведемо **січну** MM_1. Коли точка M_1 буде переміщатися вздовж кривої, ця січна обертатиметься навколо точки M.

Дотичною *до кривої* ($\mathcal{K}$) *у точці* M *називається* ***граничне положення*** MT *січної* MM_1*, коли точка* M_1 *уздовж кривої прямує до* M. (Зміст цього означення в тому, що кут $\angle M_1MT$ стає скільки завгодно малим для досить малої хорди MM_1).

Застосуємо, наприклад, це означення до параболи $y = ax^2$ у будь-якій її точці $M(x, y)$. Оскільки дотична проходить через цю точку, то для уточнення її положення достатньо знати ще її кутовий коефіцієнт. Тож спробуємо *знайти кутовий коефіцієнт* $\operatorname{tg}\alpha$ *дотичної в точці* M.

Надавши абсцисі x приріст Δx, від точки M кривої перейдемо до точки M_1 з абсцисою $x + \Delta x$ та ординатою

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2$$

(рис. 91.2). Кутовий коефіцієнт $\operatorname{tg}\varphi$ **січної** MM_1 визначиться з прямокутного $\triangle MNM_1$. У ньому катет MN дорівнює приросту абсциси Δx, а катет NM_1 очевидно відповідний приріст ординати

$$\Delta y = a(2x \cdot \Delta x + \Delta x^2),$$

nebayduzhi.math@gmail.com

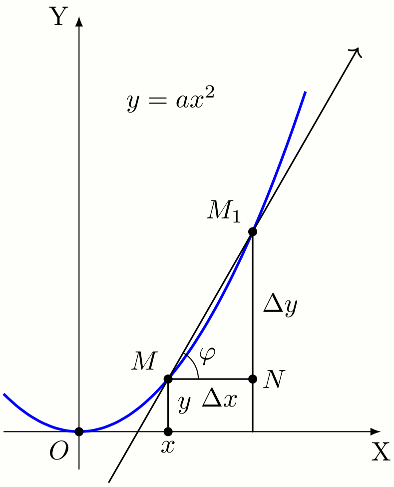


Рис. 91.2

так що

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a \cdot \Delta x.$$

Для отримання кутового коефіцієнта дотичної, як легко зрозуміти, потрібно перейти до границі, спрямувавши $\Delta x \to 0$. Отже, ми приходимо до результату:

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0}(2ax + a \cdot \Delta x) = 2ax.$$

Зауважимо також, що звідси випливає зручний спосіб для фактичної побудови дотичної до параболи. Саме з $\triangle MPT$ (рис. 91.3) відрізок

$$TP = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2},$$

тому T **є середина відрізка** OP. Отже, для того щоб отримати дотичну до параболі в її точці M, досить розділити навпіл відрізок OP і середину його з'єднати з точкою M.

У разі будь-якої кривої, що задана рівнянням

$$y = f(x),$$

кутовий коефіцієнт дотичної обчислюється так само. Приросту Δx абсциси відповідає приріст Δy ординати, а відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

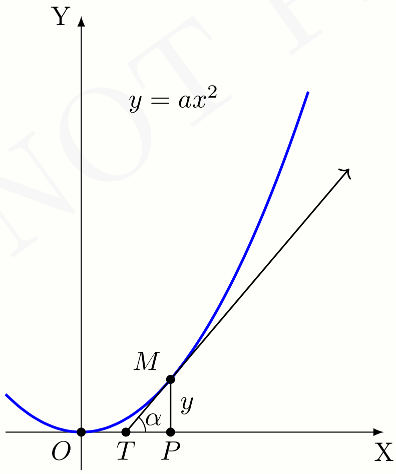


Рис. 91.3

виражає кутовий коефіцієнт **січної**, $\operatorname{tg}\varphi$. Кутовий коефіцієнт дотичної випливає звідси, якщо перейти до границі, спрямувавши $\Delta x \to 0$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

92. Означення похідної

Зіставляючи операції, які ми виконували, розв'язуючи розглянуті вище фундаментальні задачі, легко побачити, що в обох випадках, якщо відволіктися від різниці у тлумаченні змінних, по суті, робилося одне й те саме: приріст функції ділився на приріст незалежної змінної і потім обчислювалася границя їх відношення. Таким шляхом ми і приходимо до основного поняття диференціального числення — до поняття **похідної**.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $\mathcal{X}$. Виходячи з деякого значення $x = x_0$ незалежної змінної, надамо йому приріст $\Delta x \gtrless 0$, що не виводить його з проміжку $\mathcal{X}$, так що й нове значення $x_0 + \Delta x$ належить до цього проміжку. Тоді значення $y = f(x_0)$ функції заміниться новим значенням $y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$, тобто отримає приріст

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Границя відношення приросту функції Δy до приросту незалежної змінної Δx, коли Δx прямує до 0, тобто

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

і називається ***похідною*** *функції $y = f(x)$ за незалежною змінною x в заданій точці $x = x_0$.*

Отже, похідна функції **для даного значення** $x = x_0$, якщо існує, є деяке **число**; якщо ж похідна існує на всьому проміжку $\mathcal{X}$, тобто для кожного значення x на цьому проміжку, то вона також **функція** від x. (Поки ми обмежимося випадком, коли значення похідної у точці є **скінченне** число.)

Користуючись щойно введеним поняттям, сказане в розд. 90 про швидкість точки можна подати так.

Швидкість v є ***похідна*** *від пройденого шляху s за часом t.*

Якщо слово "швидкість" розуміти в загальному сенсі, можна було б похідну завжди трактувати як якусь "швидкість". Саме, маючи функцію y від незалежної змінної x, можна поставити питання **про швидкість зміни змінної y, якщо порівняти зі змінною** x (для даного значення останньої).

Якщо приріст Δx, наданий x, спричиняє приріст Δy для y, то, за аналогією з розд. 90, **середньою швидкістю** зміни y, коли x змінюється на величину Δx, можна вважати відношення

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Швидкістю зміни y для даного значення x природно назвати границю цього відношення, коли Δx прямує до 0:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

тобто якраз похідну від y за x.

У розд. 91 ми розглядали криву, задану рівнянням $y = f(x)$, і розв'язали питання про **проведення дотичної** до неї в заданій точці. Тепер ми можемо сформулювати отриманий нами результат так.

Кутовий коефіцієнт $\operatorname{tg}\alpha$ дотичної дорівнює значенню похідної від ординати y за абсцисою x.

Це **геометричне тлумачення** похідної часто буває корисним.

Наведемо на додаток ще кілька прикладів, що висвітлюють роль поняття похідної.

Якщо швидкість руху v не стала і сама змінюється з часом t: $v = f(t)$, то розглядають **прискорення** — "швидкість зміни швидкості".

Саме, якщо приросту часу Δt відповідає приріст швидкості Δv, то відношення

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

виражає **середнє прискорення** за проміжок часу Δt, а границя його дає прискорення руху в момент часу t:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Отже, прискорення — це похідна від швидкості за часом.

Звернемося до вчення про теплоту і за допомогою похідної з'ясуємо поняття **теплоємності тіла за даної температури**.

Позначимо фізичні величини так: θ — температура (у градусах C), W — кількість тепла, яке потрібно надати тілу для нагрівання його від 0° до θ° (в калоріях). Зрозуміло, що W є функція від θ: $W = f(\theta)$. Надамо θ деякий приріст $\Delta\theta$, тоді W також отримає приріст ΔW. **Середня теплоємність** за нагрівання від θ° до $(\theta + \Delta\theta)^\circ$ буде

$$c_{\text{ср}} = \frac{\Delta W}{\Delta \theta}.$$

Але оскільки, взагалі кажучи, ця середня теплоємність змінюється, коли $\Delta\theta$ змінюється, то ми не можемо прийняти її за **теплоємність за даної температури** θ. Для отримання останньої потрібно перейти до границі:

$$c = \lim_{\Delta\theta \to 0} c_{\text{ср}} = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta \theta}.$$

Отже, можна сказати, що *теплоємність тіла — це похідна від кількості тепла за температурою.*

Нарешті, візьмемо приклад із вчення про електрику: розглянемо поняття **сили змінного струму в якийсь момент часу.**

Позначимо через t час (у секундах), що відлічується від деякого початкового моменту, а через Q — кількість електрики (в кулонах), що протікає за цей час через поперечний переріз електричного провідника. Очевидно, що Q є функція від t: $Q = f(t)$. Повторивши попередні міркування, отримаємо, що **середня сила струму** за проміжок часу Δt буде

$$I_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

а **сила струму в момент часу** t є границя

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} I_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

тобто *сила струму — це похідна від кількості електрики, що протекла, за часом.*

Усі ці застосування похідної (число яких легко збільшити) з достатньою яскравістю висвітлюють той факт, що поняття похідної **істотно** пов'язане з основними поняттями з різних галузей знання.

Обчислення похідних, вивчення та використання їх властивостей і становить головний предмет *диференціального числення.*

Для позначення похідної використовують різні знаки:

$\dfrac{dy}{dx}$	або	$\dfrac{df(x_0)}{dx}$	Ляйбніц (нім. Gottfried Wilhelm Leibniz, Ґо́тфрід Ля́йбніц);
y'	або	$f'(x_0)$	Лаґранж (фр. Joseph-Louis Lagrange, Жозе́ф Лаґра́нж);
Dy	або	$Df(x_0)$	Арбоґаст (фр. Louis Arbogast, Луí Арбоґа́ст);
$\dot{y}$	або	$\dot{y}(x_0)$	Ньютен (англ. Isaac Newton, А́йзек Нью́тен).

Поки ми розглядаємо позначення Ляйбніца як цілісні символи; нижче (розд. 104) ми побачимо, що їх можна розглядати як дроби.

Ми будемо користуватися переважно простими позначеннями Лаґранжа. Якщо застосовують функціональне позначення (дивіться другий стовпчик), то x_0 у дужках вказує те саме значення незалежної змінної, за якою береться похідна. Зрештою, зауважимо, що в разі, коли може виникнути сумнів щодо змінної, за якою взята похідна (за якою встановлюється "швидкість зміни функції"), ця змінна вказується у вигляді значка внизу:

$$y'_x, \quad f'_x(x_0), \quad D_x y, \quad D_x f(x_0),$$

причому значок x не пов'язаний з тим окремим значенням x_0 незалежною змінної, за якого береться похідна.

У деякому розумінні, можна сказати, що **цілісні** символи

$$\frac{df}{dx}, \quad f', \quad f'_x, \quad Df, \quad D_x f$$

відіграють роль **функціональних позначень** для похідної функції.

Запишемо тепер, користуючись введеними для позначення похідних символами, деякі з отриманих вище результатів. Для **швидкості** руху маємо:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{або} \quad v = s'_t,$$

а для **прискорення**:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{або} \quad a = v'_t.$$

Аналогічно, **кутовий коефіцієнт** дотичної до кривої $y = f(x)$ напишемо так:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} \quad \text{або} \quad \operatorname{tg}\alpha = y'_x$$

і так далі.

93. Приклади обчислення похідних

Як приклади, обчислимо похідні для низки **елементарних функцій**.

1. Зазначимо насамперед очевидні результати:
якщо $y = c = \text{const}$, то $\Delta y = 0$, хоч би яке було Δx, отже, $y' = 0$;
якщо ж $y = x$, то $\Delta y = \Delta x$ і $y' = 1$.

2. Нехай тепер $y = x^n$, де n — натуральне число.
Надамо x приріст Δx (якщо похідна обчислюється за **будь-якого** значення аргументу, то зазвичай його позначають тією ж літерою, як і аргумент, без будь-яких значків при ньому); тоді нове значення y буде

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \ldots,$$

так що

$$\Delta y = nx^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \ldots$$

і

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \ldots.$$

Оскільки всі доданки, крім першого, прямують до нуля, коли $\Delta x \to 0$, то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}.$$

3. Якщо $y = \frac{1}{x}$, то $y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}$, так що

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)},$$

і

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)}.$$

Звідси

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Вважається, звісно, що $x \neq 0$.

4. Розглянемо функцію $y = \sqrt{x}$ $(x > 0)$. Маємо:

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x},$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}};$$

нарешті, користуючись неперервністю кореня, отримаємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Всі ці результати — окремі випадки наступного прикладу.

5. **Степенева функція:** $y = x^{\mu}$ (де μ — будь-яке дійсне число). Область зміни x залежить від μ; вона була вказана в розд. 48, 2. Маємо (для $x \neq 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^{\mu} - x^{\mu}}{\Delta x} = x^{\mu} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\Delta x} = x^{\mu - 1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\mu} - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Якщо скористатися границею (77.3), то отримаємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mu x^{\mu - 1}.$$

(Якщо $\mu > 1$, то для $x = 0$ легко безпосередньо отримати значення похідної: $y' = 0$.)

Зокрема,
якщо $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, то $y' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$;
якщо $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, то $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

6. **Показникова функція:** $y = a^x$ $(a > 0,\ -\infty < x < +\infty)$. Тут

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Скориставшись границею (77.2), знайдемо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

Зокрема,

$$\text{якщо} \quad y = e^x, \quad \text{то й} \quad y' = e^x.$$

Отже, швидкість зростання показникової функції (якщо $a > 1$) пропорційна значенню самої функції: що більшого значення функція вже досягла, то швидше в цей момент вона зростає. Це дає точну характеристику зростання показникової функції, про яку ми мали вже нагоду говорити (порівняйте з розд. 65).

7. **Логарифмічна функція:** $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1,\ 0 < x < +\infty)$. У цьому випадку

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Скористаємося границею (77.1):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a e}{x}.$$

Зокрема, для **натурального** логарифма виходить дуже простий результат:

$$\text{для} \quad y = \ln x \quad \text{маємо} \quad y' = \frac{1}{x}.$$

Це дає (хоча, по суті, і не нову) підставу для переваги, яку віддають натуральним логарифмам у теоретичних дослідженнях.

Та обставина, що швидкість зростання логарифмічної функції (для $a > 1$) обернено пропорційна значенню аргументу і, залишаючись додатною, прямує до нуля за безмежного зростання аргументу, добре узгоджується зі сказаним про це раніше (розд. 65).

8. **Тригонометричні функції.** Нехай $y = \sin x$, тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Користуючись неперервністю функції $\cos x$ і відомою границею (54.1) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$, отримаємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x.$$

Зазначимо, що ця формула зобов'язана своєю простотою тому, що кут вимірюється в **радіанах**. Якби ми стали вимірювати x, наприклад у градусах, границя відношення синуса до кута дорівнювала б не одиниці, а, як легко перевірити, $\frac{\pi}{180}$, і тоді ми мали б

$$(\sin x)' = \frac{\pi}{180} \cos x.$$

Аналогічно знайдемо:

$$\text{якщо} \quad y = \cos x, \quad \text{то} \quad y' = -\sin x.$$

Для $y = \operatorname{tg} x$ маємо

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\sin(x + \Delta x) \cdot \cos x - \cos(x + \Delta x) \cdot \sin x}{\Delta x \cdot \cos x \cdot \cos(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos(x + \Delta x)}. \end{aligned}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Звідси, як і вище,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Аналогічно,

$$\text{якщо} \quad y = \operatorname{ctg} x, \quad \text{то} \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

94. Похідна оберненої функції

Перед тим, як зайнятися обчисленням похідних від обернених тригонометричних функцій, доведемо таку загальну теорему.

Теорема 94.1. *Нехай*
1) функція $f(x)$ задовольняє умови теор. 83.1 про існування оберненої функції,
2) у точці x_0 має ***скінченну і відмінну від нуля*** *похідну $f'(x_0)$.*

Тоді для оберненої функції $g(y)$ у відповідній точці $y_0 = f(x_0)$ також існує похідна, яка дорівнює

$$\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доведення. Надамо значенню $y = y_0$ довільний приріст Δy, тоді відповідний приріст Δx отримає і функція $x = g(y)$. Зауважимо, що для $\Delta y \neq 0$, зважаючи на однозначність самої функції $y = f(x)$, і $\Delta x \neq 0$. Маємо

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Якщо тепер $\Delta y \to 0$ будь-яким чином, то раз функція $x = g(y)$ неперервна, то і приріст $\Delta x \to 0$. Але тоді знаменник правої частини написаної рівності прямує до границі $f'(x_0) \neq 0$, отже, існує границя для лівої частини, що дорівнює оберненій величині $\frac{1}{f'(x_0)}$; вона і є похідна $g'(y_0)$. □

Отже, маємо просту формулу:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{94.1}$$

Легко з'ясувати її **геометричне значення**. Ми знаємо, що похідна y'_x є тангенс кута α, утвореного дотичною до графіка функції $y = f(x)$ та віссю x. Але обернена функція $x = g(y)$ має той самий графік, лише незалежна змінна для неї відкладається на осі y. Тому похідна x'_y дорівнює тангенсу кута β, утвореного тією ж дотичною та віссю y (рис. 94.1). Отже, виведена формула зводиться до відомого співвідношення

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \qquad \left(\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\right).$$

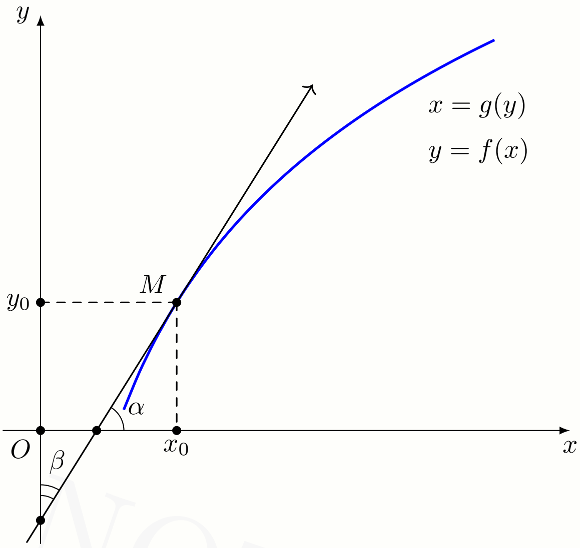


Рис. 94.1

Як приклад, розглянемо $y = a^x$. Оберненою до неї функцією буде $x = \log_a y$. Оскільки (пр. 93.6) $y'_x = a^x \cdot \ln a$, то, за нашою формулою,

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{a^x \cdot \ln a} = \frac{\log_a e}{y},$$

як і отримано в пр. 93.7.

Переходячи тепер до обчислення похідних від обернених тригонометричних функцій, ми для зручності обміняємо ролями змінні x і y, переписавши доведену формулу у вигляді

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

9. **Обернені тригонометричні функції.** Розглянемо функцію

$$y = \arcsin x \quad (-1 < x < 1),$$

причому $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Вона обернена до функції $x = \sin y$, що має для зазначених значень y **додатну** похідну $x'_y = \cos y$. У такому разі існує також похідна y'_x, яка дорівнює, за нашою формулою,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

корінь ми беремо зі знаком плюс, бо $\cos y > 0$.

Ми відкинули значення $x = \pm 1$, бо для відповідних значень $y = \pm\frac{\pi}{2}$ похідна $x'_y = \cos y = 0$.

Функція $y = \operatorname{arctg} x$ $(-\infty < x < +\infty)$ обернена до функції $x = \operatorname{tg} y$. За нашою формулою,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Аналогічно можна отримати:

$$\text{для} \quad y = \arccos x \qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1),$$

$$\text{для} \quad y = \operatorname{arcctg} x \qquad y' = -\frac{1}{1 + x^2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

95. Формули для похідних

Напишемо всі виведені нами формули:

1. $y = c$	$y' = 0$
2. $y = x$	$y' = 1$
3. $y = x^{\mu}$	$y' = \mu x^{\mu-1}$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4. $y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
5. $y = \log_a x$	$y' = \dfrac{\log_a e}{x}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
6. $y = \sin x$	$y' = \cos x$
7. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$
8. $y = \operatorname{tg} x$	$y' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
9. $y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\csc^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
10. $y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
13. $y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

96. Формула для приросту функції

Доведемо тут два прості твердження, що будуть використані надалі.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $\mathcal{X}$. Виходячи з певного значення $x = x_0$ з цього проміжку, позначимо через $\Delta x \gtrless 0$ довільний приріст x, підпорядкований лише тому обмеженню, щоб точка $x_0 + \Delta x$ не вийшла за межі $\mathcal{X}$. Тоді

nebayduzhi.math@gmail.com

відповідним приростом функції буде

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Теорема 96.1. *Якщо функція* $y = f(x)$ *у точці* x_0 *має (скінченну) похідну* $y'_x = f'(x_0)$, *то приріст функції може бути представлений у вигляді*

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \tag{96.1}$$

або, коротше,

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \tag{96.2}$$

де α *є величина, яка залежить від* Δx *і разом з ним прямує до нуля.*

Доведення. Оскільки, за означенням похідної,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'_x,$$

коли $\Delta x \to 0$, то, вважаючи

$$\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} - y'_x,$$

бачимо, що і $\alpha \to 0$. Знаходячи звідси Δy, прийдемо до формули (96.2).

Оскільки величина $\alpha \cdot \Delta x$ (для $\Delta x \to 0$) буде нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx, то, використовуючи введене в розд. 60 позначення, можна наші формули переписати у вигляді

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x) \tag{96.3}$$

або

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x + o(\Delta x), \tag{96.4}$$

□

Зауваження. Досі ми вважали, що $\Delta x \gtrless 0$; величина α була не визначена, якщо $\Delta x = 0$. Коли ми говорили, що $\alpha \to 0$, коли $\Delta x \to 0$, то (як завжди) припускали, що Δx прямує до 0 будь-яким чином, але **не дорівнюючи нулю**. Покладемо тепер $\alpha = 0$, якщо $\Delta x = 0$; тоді, зрозуміло, формула (96.1) збережеться і для $\Delta x = 0$. Крім того, співвідношення $\alpha \to 0$, коли $\Delta x \to 0$, можна розуміти і в ширшому значенні, ніж раніше, не виключаючи для Δx можливості, прямуючи до 0, набувати серед інших і нульові значення.

З доведених формул безпосередньо випливає така теорема.

Теорема 96.2. *Якщо функція* $y = f(x)$ *у точці* x_0 *має (скінченну) похідну, то в цій точці функція необхідно неперервна.*

Доведення. Справді, з (96.2) ясно, що $\Delta x \to 0$ тягне за собою $\Delta y \to 0$. □

nebayduzhi.math@gmail.com

97. Найпростіші правила обчислення похідних

У попередніх розділах ми обчислили похідні елементарних функцій. У цьому і в наступному розділах ми встановимо ряд простих правил, за допомогою яких стане можливим обчислення похідної для будь-якої функції, складеної з елементарних за допомогою скінченного числа арифметичних дій та композицій (розд. 51).

1. *Нехай функція* $u = \varphi(x)$ *має (в певній точці* x*) похідну* u'. Доведемо, що й функція $y = c \cdot u$ ($c = \mathrm{const}$) також має похідну (в цій же точці), і обчислимо її.

Якщо незалежна змінна x отримає приріст Δx, то функція u отримає приріст Δu, перейшовши від початкового значення u до значення $u + \Delta u$. Нове значення функції y буде $y + \Delta y = c(u + \Delta u)$.

Звідси $\Delta y = c \cdot \Delta u$ і

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = c \cdot u'.$$

Отже, похідна існує і дорівнює

$$y' = (c \cdot u)' = c \cdot u'.$$

Ця формула виражає таке правило: **сталий множник може бути винесений за знак похідної.**

2. *Нехай функції* $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ *мають (у певній точці) похідні* u', v'. Доведемо, що функція $y = u \pm v$ також має похідну (у тій точці), і обчислимо її.

Надамо x приріст Δx; тоді u, v і y отримають, відповідно, прирости Δu, Δv і Δy. Їх нові значення $u + \Delta u$, $v + \Delta v$ і $y + \Delta y$ пов'язані тим самим співвідношенням:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \pm (v + \Delta v).$$

Звідси

$$\Delta y = \Delta u \pm \Delta v, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

і

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v',$$

тому похідна суми (різниці) двох функцій існує і дорівнює

$$y' = (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Цей результат легко може бути поширений на будь-яке число доданків (тим же методом).

3. *За тих же припущень щодо функцій* u, v *доведемо, що функція* $y = u \cdot v$ *також має похідну*, і знайдемо її.

nebayduzhi.math@gmail.com

Приросту Δx відповідають, як і вище, прирости Δu, Δv і Δy; причому $y+\Delta y=(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v)$, тож

$$\Delta y=\Delta u\cdot v+u\cdot\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v$$

і

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v.$$

Оскільки $\Delta v\to 0$, коли $\Delta x\to 0$, то

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\cdot v+u\cdot v',$$

тобто похідна добутку двох функцій існує і дорівнює

$$y'=(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'.$$

Якщо $y=uvw$, а u', v', w' існують, то

$$y'=[(uv)\cdot w]'=(uv)'\cdot w+(uv)\cdot w'=u'vw+uv'w+uvw'$$

Легко зрозуміти, що для випадку n множників будемо мати аналогічно:

$$[\underbrace{uvw\ldots s}_{n}]'=u'vw\ldots s+uv'w\ldots s+uvw'\ldots s+\cdots+uvw\ldots s'. \tag{97.1}$$

Щоб довести це, скористаємося методом математичної індукції. Припустимо, що формула справедлива для деякого числа n множників, і встановимо її справедливість для $n+1$ множників:

$$[\underbrace{uvw\ldots st}_{n+1}]'=[(\underbrace{uvw\ldots s}_{n})\cdot t]'=(uvw\ldots s)'\cdot t+(uvw\ldots s)\cdot t';$$

якщо похідну $(uvw\ldots s)'$ розгорнути за формулою (97.1), то прийдемо до формули

$$[\underbrace{uvw\ldots st}_{n+1}]'=u'vw\ldots st+uv'w\ldots st+uvw'\ldots st+\cdots+uvw\ldots s't+uvw\ldots st',$$

абсолютно аналогічної до (97.1). Оскільки в справедливості формули (97.1) для $n=2$ і 3 ми переконалися безпосередньо, то ця формула справедлива для будь-якого n.

4. Нарешті, *якщо u, v задовольняють усе ті ж припущення і, крім того, v відмінна від нуля, то ми доведемо, що функція $y=\frac{u}{v}$ також має похідну*, і знайдемо її.

За тих же позначень, що і вище, маємо

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v},$$

nebayduzhi.math@gmail.com

так що

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

і

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Переходячи до границі тут для $\Delta x \to 0$ (причому одночасно й $\Delta v \to 0$), переконуємось в існуванні похідної частки двох функцій

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$$

98. Похідна композиції функцій

Тепер ми можемо отримати дуже важливе правило для практичного знаходження похідних. Воно дає змогу обчислити похідну композиції функцій, якщо відомі похідні складових функцій.

5. *Нехай*
1) функція $u = \varphi(x)$ *має в деякій точці* x_0 *похідну* $u'_x = \varphi'(x_0)$*,*
2) функція $y = f(u)$ *має у відповідній точці* $u_0 = \varphi(x_0)$ *похідну* $y'_u = f'(u_0)$*.*

Тоді складена функцій $y = f(\varphi(x))$ *в згаданій точці* x_0 *також матиме похідну, рівну добутку похідних функцій* $f(u)$ *та* $\varphi(x)$*:*

$$\Big[f(\varphi(x))\Big]'_x = f'_u(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'_x(x_0),$$

або, коротше,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{98.1}$$

Підкреслимо, що символ $f'_u(\varphi(x_0))$ означає похідну функції $f(u)$ **за її аргументом** u **(а не за** x**)**, для значення $u_0 = \varphi(x_0)$ цього аргументу.

Доведення. Для доведення надамо x_0 довільний приріст Δx; нехай Δu — відповідний приріст функції $u = \varphi(x)$ і, нарешті, Δy — приріст функції $y = f(u)$, викликаний приростом Δu. Скористаємося співвідношенням (96.2), яке, замінюючи x на u, перепишемо у вигляді

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$$

(α залежить від Δu і разом з ним прямує до нуля). Розділивши його почленно на Δx, отримаємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Якщо Δx спрямувати до нуля, то буде прямувати до нуля і Δu (теор. 96.2), а тоді, як ми знаємо, також прямуватиме до нуля залежна від Δu величина α. Отже, існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x,$$

яка і є шукана похідна y'_x. $\square$

Зауваження. Тут позначається корисність зауваження в розд. 96 щодо величини α, коли $\Delta x = 0$: поки Δx є приріст **незалежної змінної**, ми могли припускати його відмінним від нуля, але коли Δx замінено приростом **функції** $u = \varphi(x)$, то навіть за $\Delta x \neq 0$ ми вже не маємо права вважати, що $\Delta u \neq 0$.

99. Приклади

Спочатку наведемо кілька прикладів застосування правил 1-4. (Літерами x, y, u, v нижче позначені **змінні**, а іншими літерами — **сталі** величини.)

1) Розглянемо многочлен:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n.$$

За правилом 2, а потім 1, матимемо

$$\begin{aligned} y' &= (a_0 x^n)' + (a_1 x^{n-1})' + \cdots + (a_{n-2} x^2)' + (a_{n-1} x)' + (a_n)' = \\ &= a_0 (x^n)' + a_1 (x^{n-1})' + \cdots + a_{n-2} (x^2)' + a_{n-1} (x)' + (a_n)'. \end{aligned}$$

Застосувавши ж формули 1, 2, 3 (розд. 95), остаточно отримаємо

$$y' = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + 2 a_{n-2} x + a_{n-1}.$$

2) $y = (2x^2 - 5x + 1) \cdot e^x$. За правилом 3,

$$y' = (2x^2 - 5x + 1)' \cdot e^x + (2x^2 - 5x + 1) \cdot (e^x)'.$$

Спираючись на попередній приклад та формулу 4 (розд. 95), знайдемо:

$$y' = (4x - 5) \cdot e^x + (2x^2 - 5x + 1) \cdot e^x = (2x^2 - x - 4) \cdot e^x.$$

3) $y = \dfrac{ax + b}{x^2 + 1}$. За правилом 4,

$$y' = \frac{(ax+b)'(x^2+1) - (ax+b)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{a(x^2+1) - (ax+b)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

4) Обчислимо знову похідну функції $y = \operatorname{tg} x$, виходячи з формули $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Користуючись правилом 4 (і формулами 6, 7 розд. 95), отримаємо

$$y' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(порівняйте з формулою 8, розд. 95).

5) $y = \dfrac{x \sin x + \cos x}{x \cos x - \sin x}$. Тут доводиться користуватися спочатку правилом 4, а потім правилами 2 і 3 (і формулами 6, 7, розд. 95):

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x\sin x + \cos x)'(x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)(x\cos x - \sin x)'}{(x\cos x - \sin x)^2} = \\ &= \frac{x\cos x \cdot (x\cos x - \sin x) - (x\sin x + \cos x)\cdot(-x\sin x)}{(x\cos x - \sin x)^2} = \\ &= \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)^2}. \end{aligned}$$

Обчислення похідних чисельника та знаменника ми зробили, не ділячи їх на окремі кроки. Виконавши багато вправ можна і необхідно навчитися писати похідні відразу.

Приклади на обчислення похідних композиції функцій.

6) Нехай $y = \ln \sin x$, інакше кажучи, $y = \ln u$, де $u = \sin x$.

За правилом 5, $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. Похідна $y'_u = (\ln u)'_u = \frac{1}{u}$ (формула 5) повинна бути взята за $u = \sin x$. Отже (формула 6),

$$y'_x = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

7) $y = \sqrt{1 + x^2}$, тобто $y = \sqrt{u}$, де $u = 1 + x^2$.

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + x^2\right)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{(правило 5; формула 3).}$$

8) $y = e^{x^2}$, тобто $y = e^u$, де $u = x^2$;

$$y'_x = e^{x^2} \cdot \left(x^2\right)' = 2x \cdot e^{x^2} \quad (5;\ 4,\ 3).$$

Звісно, в окремому **виписуванні** складових функцій насправді немає потреби.

9) $y = \sin ax$;

$$y'_x = \cos ax \cdot (ax)' = a \cdot \cos ax \quad (5;\ 7,\ 1,\ 2).$$

10) $y = (x^2 + x + 1)^n$;

$$y'_x = n(x^2 + x + 1)^{n-1} \cdot (x^2 + x + 1)' = n(2x + 1)(x^2 + x + 1)^{n-1} \quad (5;\ 3).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

11) $y = 2^{\sin x}$;

$$y'_x = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot (\sin x)' = \ln 2 \cdot \cos x \cdot 2^{\sin x} \quad (5;\ 4,\ 6).$$

12) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

$$y'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2} \quad (5;\ 12,\ 3).$$

У разі функції, отриманої як результат кількох композицій, треба **послідовно** застосувати правило 5.

13) $y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$;

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)'_x = && (5;\ 3) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)'_x = && (5;\ 8) \\ &= \frac{\sec^2 \frac{x}{2}}{4\sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}}. \end{aligned}$$

14) $y = e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$;

$$\begin{aligned} y'_x &= e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(\sin^2 \frac{1}{x}\right)'_x = && (5;\ 4) \\ &= e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \left(\sin \frac{1}{x}\right)'_x = && (5;\ 3) \\ &= e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'_x = && (5;\ 6) \\ &= -\frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{2}{x} \cdot e^{\sin^2 \frac{1}{x}} && (5;\ 3) \end{aligned}$$

Дамо ще кілька прикладів застосування всіх правил.

15) $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

$$y' = \frac{1}{2}\left((e^x)' - (e^{-x})'\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

$$\begin{aligned} &y = \operatorname{ch} x; && y' = \operatorname{sh} x; \\ &y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; && y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \\ &y = \operatorname{cth} x; && y' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \end{aligned}$$

16) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Той самий результат можна отримати і з інших міркувань. Ми бачили в пр. 49.4, що функція $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ обернена до функції $x = \operatorname{sh} y$; тому (пр. 99.15; розд. 48, 6)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

17) $y = \dfrac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$;

$$y' = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+a^2} - x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)^2} = (x^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

18) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1-x^2}$ $(-1 < x < 1)$;

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot (1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$$= \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2 + 4x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

19)

$$y = \frac{1}{\sqrt{b-ac}} \ln \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b-ac}} \quad (b - ac > 0);$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{b-ac}} \Big(\ln(\sqrt{ax+b} - \sqrt{b-ac}) - \ln(\sqrt{ax+b} + \sqrt{b-ac})\Big)'_x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b-ac}} \left[\frac{\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{\sqrt{ax+b} - \sqrt{b-ac}} - \frac{\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}}{\sqrt{ax+b} + \sqrt{b-ac}} \right] =$$

$$= \frac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

20)

$$y = \frac{2}{\sqrt{ac-b}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}} \quad (ac-b>0);$$

$$y' = \frac{2}{\sqrt{ac-b}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{ax+b}{ac-b}}\cdot\frac{1}{\sqrt{ac-b}}\cdot\frac{a}{2\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{(x+c)\sqrt{ax+b}}.$$

21)

$$y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x} \quad \left(|b|<a; \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right);$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)^2}}\cdot\frac{a\cos x\cdot(a+b\sin x)-(a\sin x+b)\cdot b\cos x}{(a+b\sin x)^2} =$$

$$= \frac{(a^2-b^2)\cos x}{\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{(a+b\sin x)^2-(a\sin x+b)^2}\cdot(a+b\sin x)} =$$

$$= \frac{(a^2-b^2)\cos x}{\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{(a^2-b^2)\cos^2 x}\cdot(a+b\sin x)} =$$

$$= \frac{1}{a+b\sin x}.$$

22)

$$y = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{b+a\sin x-\sqrt{b^2-a^2}\cdot\cos x}{a+b\sin x} \quad (|a|<|b|);$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\left(\frac{a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\cdot\sin x}{b+a\sin x-\sqrt{b^2-a^2}\cdot\cos x}-\frac{b\cos x}{a+b\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{b^2-a^2}\cdot(b+a\sin x-\sqrt{b^2-a^2}\cdot\cos x)}{\sqrt{b^2-a^2}\cdot(b+a\sin x-\sqrt{b^2-a^2}\cdot\cos x)\cdot(a+b\sin x)}$$

$$= \frac{1}{(a+b\sin x)}.$$

23) Обчислимо похідну **степенево-показникового** виразу $y = u^v$ $(v>0)$, де u і v є функції від x, що мають в заданій точці похідні u', v'.

Прологарифмувавши рівність $y = u^v$, отримаємо

$$\ln y = v\cdot\ln u. \tag{99.1}$$

Отже, вираз для y можна переписати у вигляді

$$y = e^{v\cdot\ln u},$$

звідки вже ясно, що похідна y' існує. Її обчислення простіше виконати, прирівнюючи похідні за x від обох частин рівності (99.1). Ми використовуємо правила 5 і 3 (пам'ятаючи про те, що u, v, y є функції від x). Ми отримаємо

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u',$$

звідки

$$y' = y \left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' \right),$$

або, підставляючи замість y його вираз,

$$y'_x = (u^v)'_x = u^v \left(\frac{vu'}{u} + v' \ln u \right). \tag{99.2}$$

Цю формулу вперше отримали Ляйбніц та
Й. Бернуллі (швейц. Johann Bernoulli, Йóханн Бернýллі).

Наприклад,

$$\text{якщо} \quad y = x^{\sin x}, \quad \text{то} \quad y'_x = x^{\sin x} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x \right).$$

24) Припускаючи, що функція $f(x)$ має похідну $f'(x)$, написати вирази похідних для функцій

$$\text{а)} \quad \sin f(x), \quad \text{б)} \quad e^{f(x)}, \quad \text{в)} \quad \ln f(x)$$

за x, і для функцій

$$\text{г)} \quad f(\sin t), \quad \text{ґ)} \quad f(e^t), \quad \text{д)} \quad f(\ln t)$$

за t.

Відповідь:

$$\text{а)} \quad \cos f(x) \cdot f'(x), \quad \text{б)} \quad e^{f(x)} \cdot f'(x), \quad \text{в)} \quad \frac{f'(x)}{f(x)},$$

$$\text{г)} \quad f'(\sin t) \cdot \cos t, \quad \text{ґ)} \quad f'(e^t) \cdot e^t, \quad \text{д)} \quad f'(\ln t) \cdot \frac{1}{t}.$$

З приводу останніх трьох прикладів г), ґ), д) звертаємо увагу читача на те, що символ $f'(...)$ означає похідну за **аргументом** x, від якого залежить функція $f(x)$, але за значення цього аргументу, відповідно, $x = \sin t$, $x = e^t$, $x = \ln t$, вже залежного від t. Порівняйте з розд. 98.

25) Функція $f(x)$, визначена на симетричному щодо 0 проміжку, називається **парною**, якщо $f(-x) = f(x)$, і **непарною**, якщо $f(-x) = -f(x)$. (Прикладами парних функцій можуть бути **парні** степені x^2, x^4, ..., а також $\cos x$, $\operatorname{ch} x$; прикладами непарних функцій — **непарні** степені x, x^3, ..., $\sin x$, $\operatorname{sh} x$.

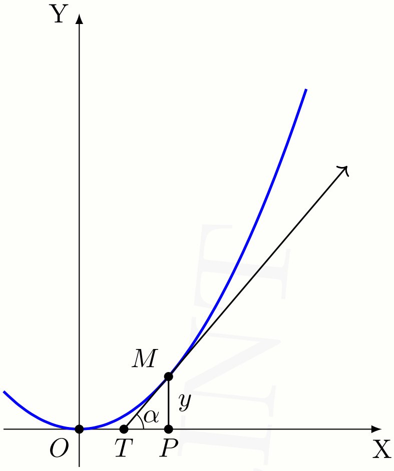


Рис. 99.1

Довести, що похідна парної функції (якщо існує) сама **непарна** функція, а похідна **непарної** функції сама буде **парною** функцією.

26) Обчислити похідну для функції $y = \ln|x|$ для $x \gtrless 0$.

Для $x > 0$, очевидно, $y' = \frac{1}{x}$. Покажемо, що та сама формула зберігається і для $x < 0$. Справді, обчислюючи похідну для функції

$$y = \ln|x| = \ln(-x),$$

як композиції функцій, будемо мати

$$y' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

і в цьому випадку.

27) Розглянемо криву

$$y = a \cdot x^m \quad (m > 0).$$

Кутовий коефіцієнт дотичної до неї в деякій її точці (x, y) буде (розд. 91, розд. 92):

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = m \cdot a \cdot x^{m-1}.$$

Дивлячись на рис. 99.1, видно, що відрізок TP (так звана **піддотична**) дорівнює

$$TP = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{ax^m}{max^{m-1}} = \frac{x}{m}.$$

Ця обставина вказує на легкий спосіб побудови дотичної. (Узагальнення результату пр. 91.1.)

28) Для кривої (**ланцюгова лінія**)

$$y = a \cdot \operatorname{ch}\frac{x}{a} \quad (a > 0),$$

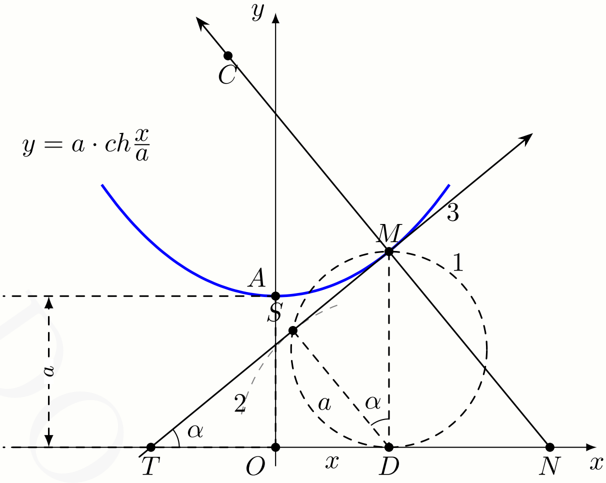


Рис. 99.2

подібним чином,

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$

На цей раз визначимо (вважаючи $x > 0$)

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{a}} = \frac{a}{y},$$

так що $y \cdot \cos\alpha = a$. Якщо з основи D ординати $y = DM$ (рис. 99.2) опустити перпендикуляр DS на дотичну MT, то відрізок DS виявиться рівним a. Звідси знову випливає простий спосіб побудови дотичної до кривої: на ординаті DM, як на діаметрі, будують півколо і з точки D роблять засічку S радіусом a; пряма MS і буде дотична.

29) Нехай матеріальна точка коливається по осі біля деякого середнього положення за законом

$$s = A \cdot \sin(\omega t + \alpha) \quad (A > 0,\ \omega > 0).$$

Таке коливання має назву **гармонічного**; A — його амплітуда, ω — частота, α — початкова фаза.

Взявши похідну від шляху s за часом t, знайдемо **швидкість** руху:

$$v = A\omega \cdot \cos(\omega t + \alpha).$$

Найбільшої величини $\pm A\omega$ швидкість досягає в моменти, коли $s = 0$, тобто точка проходить через середнє положення. Навпаки, коли точка найбільше віддалена від цього середнього положення ($s = \pm A$), швидкість $v = 0$.

Похідна від v за t:

$$a = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)$$

дасть нам **прискорення**, з яким рухається точка; очевидно

$$a = -\omega^2 \cdot s.$$

Звідси, якщо ввести масу m рухомої точки, то, за законом Ньютена, сила F, під дією якої відбувається гармонічне коливання, дорівнює:

$$F = -m\omega^2 s.$$

Як бачимо, вона завжди спрямована до середнього положення (бо має знак, протилежний знаку s) і пропорційна віддаленню точки від середнього положення.

30) Рух, що відбувається згідно із законом

$$s = Ae^{-kt} \sin \omega t \quad (A > 0,\ k > 0,\ \omega > 0),$$

називається **згасним коливанням**, бо наявність множника e^{-kt} змушує точку, що хоч і коливається біля середнього положення, все ж таки прямувати до середнього положення:

$$\lim_{t \to +\infty} s = 0.$$

У цьому разі

$$v = s'_t = Ae^{-kt}(\omega \cdot \cos \omega t - k \cdot \sin \omega t)$$

і

$$a = v'_t = -Ae^{-kt}(\omega^2 \cdot \sin \omega t + 2\omega k \cdot \cos \omega t - k^2 \cdot \sin \omega t).$$

Вводячи в дужках ще члени $\pm k^2 \cdot \sin \omega t$, після очевидних перетворень отримаємо

$$a = -Ae^{-kt}\left[(\omega^2 + k^2) \sin \omega t + 2k(\omega \cdot \cos \omega t - k \cdot \sin \omega t)\right] = -(\omega^2 + k^2)s - 2kv.$$

Сила, під дією якої відбувається подібний рух, дорівнює

$$F = -(\omega^2 + k^2)ms - 2kmv.$$

Ми бачимо, що вона складається з двох сил: 1) із сили, пропорційної відстані точки від середнього положення та спрямованої до цього середнього положення (як і в разі гармонічного коливання), і 2) з тієї сили, що **гальмує** рух, пропорційної швидкості та спрямованої у **зворотному** напрямку.

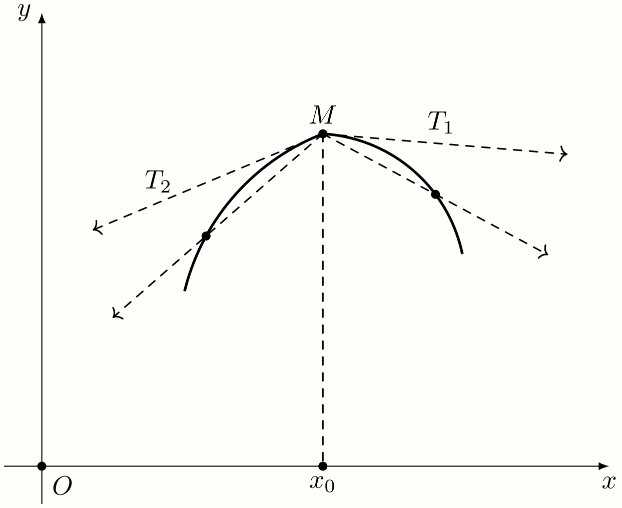


Рис. 100.1

100. Однобічні похідні

Звернемося, на закінчення, до огляду кількох **особливих випадків**, які можуть виникати в обчисленні похідних. Почнемо з розгляду поняття **однобічної** похідної.

Якщо значення x — один з кінців того проміжку $\mathcal{X}$, на якому визначена функція $y = f(x)$, то в обчисленні границі відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ доводиться обмежитися наближенням Δx до нуля лише **справа** (коли йдеться про лівий кінець проміжку) або **зліва** (для правого кінця). У цьому разі говорять про **однобічну** похідну, справа або зліва. У відповідних точках графік функції має однобічну дотичну.

Може статися, що і для внутрішньої точки x існують лише **однобічні** границі відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (коли $\Delta x \to +0$ або $\Delta x \to -0$), не рівні між собою; їх також називають **однобічними** похідними. Для графіка функції у відповідній точці будуть існувати лише **однобічні** дотичні, що становлять кут; точка буде **кутова** (рис. 100.1).

Як приклад, розглянемо функцію $y = f(x) = |x|$. Виходячи із значення $x = 0$, матимемо

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\Delta x|.$$

Якщо $\Delta x > 0$, то

$$\Delta y = \Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Якщо $\Delta x < 0$, то

$$\Delta y = -\Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

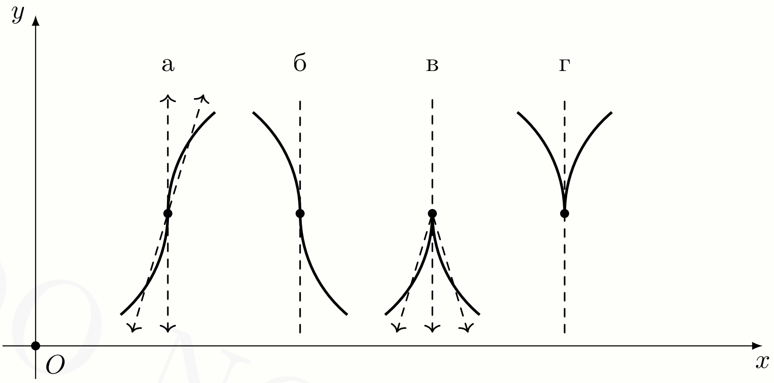


Рис. 101.1

Початок координат — це кутова точка для графіка цієї функції, що складається з бісектрис першого та другого координатних кутів.

101. Нескінченні похідні

Якщо відношення приростів $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ прямує до $+\infty$ $(-\infty)$, коли $\Delta x \to 0$, то це невласне число також називають похідною (і позначають як завжди). Аналогічно вводиться поняття **однобічної** нескінченної похідної.

Геометричне тлумачення похідної як кутового коефіцієнта дотичної поширюється і на цей випадок; але тут дотична виявляється паралельною осі y (рис. 101.1, а, б, в, г).

У випадках а) і б) ця похідна дорівнює, відповідно, $+\infty$ і $-\infty$ (обидві однобічні похідні мають однаковий знак); у випадках в) і г) однобічні похідні відрізняються знаками.

Нехай, наприклад, $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$; для $x \neq 0$ формула розд. 95, 3, дає

$$f_1'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}},$$

але вона непридатна для $x = 0$. У цій точці обчислимо похідну, виходячи безпосередньо з її означення; склавши відношення

$$\frac{f_1(0+\Delta x) - f_1(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} = \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}},$$

бачимо, що воно прямує до $+\infty$, коли $\Delta x \to 0$. Аналогічно переконуємося, що для функції $f_2(x) = x^{\frac{2}{3}}$ в точці $x = 0$ похідна ліворуч дорівнює $-\infty$, а праворуч $+\infty$.

Користуючись розширенням поняття похідної, можна доповнити теорему теор. 94.1 про похідну оберненої функції вказівкою, що і в тому разі, коли $f'(x_0)$ дорівнює 0 або $\pm\infty$, похідна оберненої функції $g'(y_0)$ існує і дорівнює, відповідно, $\pm\infty$ або 0.

Наприклад, раз функція $\sin x$ для $x = \pm\frac{\pi}{2}$ має похідну $\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$, то для оберненої функції $\arcsin y$ в точці $y = \pm 1$ існує нескінченна похідна (саме, $+\infty$).

102. Подальші приклади особливих випадків

1. *Приклади неіснування похідної.* Вже функція $y = |x|$ у точці $x = 0$ (дивіться розд. 100) немає звичайної, **двобічної**, похідної. Але цікавіший приклад функції

$$f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x} \quad (\text{для } x \neq 0), \quad f(0) = 0,$$

неперервній і в точці $x = 0$ (пр. 70.5), але що не має в цій точці навіть однобічних похідних. Справді, відношення

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x}$$

не прямує до жодної границі, коли $\Delta x \to \pm 0$.

За графіком цієї функції (рис. 54.4) легко побачити, що січна OM_1, що виходить з початкової точки O, не має граничного положення, коли M_1 прямує до O, так що дотичної до кривої в початковій точці немає (навіть однобічної).

Згодом (у другому томі, розд. 444) ми познайомимося із чудовим прикладом функції, неперервної за всіх значень аргументу, але яка немає похідної за жодного значення.

2. *Приклади розривів похідної.* Якщо для функції $y = f(x)$ існує скінченна похідна $y' = f'(x)$ у кожній точці деякого проміжку $\mathcal{X}$, то ця похідна становить на проміжку $\mathcal{X}$ функцію від x. У численних прикладах, які нам досі траплялися, ця функція сама виявлялася неперервною. Однак це може бути і не так. Розглянемо, наприклад, функцію

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} \quad (\text{для } x \neq 0), \quad f(0) = 0,$$

Якщо $x \neq 0$, то її похідна обчислюється звичайними методами:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

але отриманий результат непридатний для $x = 0$. Звертаючись у цьому разі безпосередньо до означення поняття похідної, матимемо

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \sin\frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Водночас ясно, що $f'(x)$ не прямує до жодної границі, коли $x \to 0$, тому в точці $x = 0$ **функція** $f'(x)$ має розрив.

Те ж справедливо і для будь-якої функції

$$f(x) = x^\alpha \cdot \sin\frac{1}{x} \quad (\text{для } x \neq 0), \quad f(0) = 0,$$

якщо $1 < \alpha < 2$.

У цих прикладах розриви похідної виявляються **другого роду**. Це не випадковість: нижче (розд. 113) ми побачимо, що розривів першого роду, тобто стрибків, похідна мати не може.

nebayduzhi.math@gmail.com

3.2. Диференціал

103. Означення диференціала

Нехай маємо функцію $y = f(x)$, визначену на деякому проміжку $\mathcal{X}$ і неперервну в точці x_0. Тоді приросту Δx аргументу відповідає приріст

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

що нескінченно малий разом з Δx. Велике значення має питання: *чи існує для Δy така лінійна відносно Δx нескінченно мала $A \cdot \Delta x$ $(A = \text{const})$, що їх різниця виявляється, якщо порівняти з Δx, нескінченно малою вищого порядку:*

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x). \tag{103.1}$$

Для $A \neq 0$ наявність рівності (103.1) показує, що нескінченно мала $A \cdot \Delta x$ еквівалентна нескінченно малій Δy і, отже, служить для останньої її **головною частиною**, якщо за основну нескінченно малу взята Δx (розд. 62, розд. 63).

Якщо рівність (103.1) *виконується, то функція $y = f(x)$ називається* ***диференційовною*** *(в точці $x = x_0$), сам же вираз $A \cdot \Delta x$ називається* ***диференціалом*** *функції* і позначається символом dy або $df(x_0)$. (В останньому випадку в дужках вказується значення аргументу x. Тут df як **суцільний** символ відіграє роль функціонального позначення.)

Ще раз повторюємо, що диференціал функції характеризується двома властивостями:
а) він лінійна (однорідна) функція від приросту Δx аргументу і
б) відрізняється від приросту функції на величину, яка нескінченно мала порядку вищого, ніж Δx, коли $\Delta x \to 0$.

Розглянемо приклади.

1) Площа Q круга радіуса r задається формулою $Q = \pi r^2$. Якщо радіус r збільшити на Δr, то відповідний приріст ΔQ величини Q буде площею кругового кільця, що міститься між концентричними колами радіусів r та $r + \Delta r$. З виразу

$$\Delta Q = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r \cdot \Delta r + \pi(\Delta r)^2$$

відразу бачимо, що головною частиною ΔQ, коли $\Delta r \to 0$, буде $2\pi r \cdot \Delta r$; це і є диференціал, dQ. Геометрично він виражає площу прямокутника (отриманого якби "випрямленням" кільця) з основою, що дорівнює довжині кола $2\pi r$, і висотою Δr.

2) Аналогічно, для об'єму $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ кулі радіуса r. Якщо радіус збільшити на Δr, виходить приріст

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 \cdot \Delta r + 4\pi r \cdot (\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3.$$

Спрямувавши $\Delta r \to 0$, отримаємо головну частину ΔV: $dV = 4\pi r^2 \cdot \Delta r$. Це — об'єм плоского шару з основою, що дорівнює площі поверхні кулі $4\pi r^2$, і з висотою Δr; в такий шар якби "розпластується" шар, що міститься між двома концентричними кульовими поверхнями r і $r + \Delta r$.

3) Нарешті, розглянемо вільне падіння матеріальної точки, за законом $s = \frac{gt^2}{2}$. За проміжок часу Δt, від t до $t + \Delta t$, точка пройде шлях

$$\Delta s = \frac{g(t+\Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = gt \cdot \Delta t + \frac{g}{2} \cdot (\Delta t)^2.$$

Спрямувавши $\Delta t \to 0$, виділимо головну частину: $ds = gt \cdot \Delta t$. Згадавши, що швидкість у момент часу t буде $v = gt$ (розд. 90), бачимо, що диференціал шляху (наближено замінює приріст шляху) обчислюється як шлях, пройдений точкою, яка протягом усього проміжку часу Δt рухалася б саме із цією швидкістю.

104. Зв'язок між диференційовністю та існуванням похідної

Легко тепер довести наступне твердження.

Твердження 104.1. *Для того, щоб функція $y = f(x)$ в точці x_0 була диференційовна, необхідно і достатньо, щоб для неї в цій точці існувала скінченна похідна $y' = f'(x_0)$. До того ж $A = f'(x_0)$ в рівнянні (103.1), і це рівняння можна записати так:*

$$\Delta y = y'_x \Delta x + o(\Delta x). \tag{104.1}$$

Доведення. **Необхідність.** Якщо виконується (103.1), то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

тому, спрямувавши $\Delta x \to 0$, справді, отримуємо

$$A = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x.$$

Достатність відразу випливає з (96.4). □

Отже, диференціал функції $y = f(x)$ завжди дорівнює

$$dy = y'_x \cdot \Delta x. \tag{104.2}$$

(Легко перевірити, що саме так і складався диференціал у всіх випадках, розглянутих у попередньому розділі. У пр. 103.1 маємо: $Q = \pi r^2,\ Q'_r = 2\pi r,\ dQ = 2\pi r \cdot \Delta r$ і так далі.)

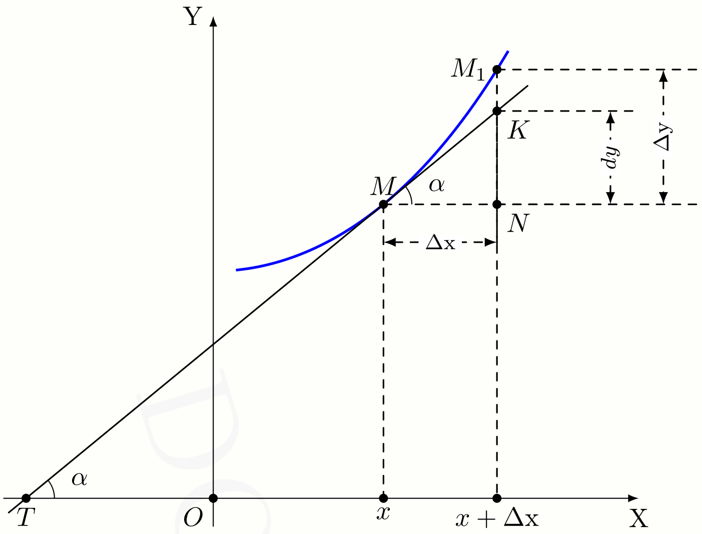


Рис. 104.1

Підкреслимо тут же, що під Δx у цьому виразі ми розуміємо довільний приріст незалежної змінної, тобто **довільне** число (яке часто зручно буває вважати незалежним від x). І зовсім **не обов'язково** вважати Δx нескінченно малою; але **якщо** $\Delta x \to 0$, то диференціал dy також буде нескінченно малою, і саме (якщо $y' \neq 0$) — головною частиною нескінченно малого приросту функції Δy. Це і дає підстави наближено вважати

$$\Delta y \doteq dy, \tag{104.3}$$

з то більшою точністю, що менше Δx. Ми повернемося до розгляду наближеної рівності (104.2) в розд. 107.

Щоб **геометрично** представити диференціал dy та його зв'язок з приростом Δy функції $y = f(x)$ розглянемо графік цієї функції (рис. 104.1). Значеннями x аргументу та y функції визначається точка M на кривій. Проведемо в цій точці кривої дотичну MT; як ми вже бачили (розд. 92), її кутовий коефіцієнт, $\operatorname{tg}\alpha$, дорівнює похідній y'_x. Якщо абсцисі x надати приріст Δx, то ордината кривої y дістане приріст $\Delta y = NM_1$. Водночас ордината дотичної дістане приріст NK. Обчислюючи NK як катет прямокутного трикутника MNK, знайдемо:

$$NK = MN \cdot \operatorname{tg}\alpha = y'_x \cdot \Delta x = dy.$$

Отже, Δy є приріст ординати кривої, а dy — відповідний приріст ординати дотичної.

На закінчення зупинимося на самій **незалежній змінній** x: її диференціалом називають саме приріст Δx, тобто умовно вважають

$$dx = \Delta x. \tag{104.4}$$

Якщо ототожнити диференціал незалежної змінної x із диференціалом функції $y = x$ (у цьому теж свого роду угода!), то формулу (104.4) можна і **довести**, посилаючись на (104.2): $dx = x'_x \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Враховуючи угоду (104.4), можна тепер переписати формулу (104.2), що дає означення диференціала, у вигляді

$$dy = y'_x \cdot dx \tag{104.5}$$

— так цю формулу зазвичай і пишуть.

Звідси випливає

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \tag{104.6}$$

так що вираз, який ми раніше розглядали як **цілісний символ**, тепер можна трактувати як **дріб**. Та обставина, що зліва тут стоїть цілком певне число, тоді як праворуч ми маємо відношення двох невизначених чисел dy і dx (адже $dx = \Delta x$ довільне), не повинно бентежити читача: числа dx і dy змінюються **пропорційно**, причому похідна y'_x якраз і є коефіцієнт пропорційності.

Поняття диференціала і термін "диференціал" (від латинського слова differentia, що означає "різниця") належать Ляйбніцу, який не дав, проте, точного означення цього поняття. Разом із диференціалами, Ляйбніц розглядав і "диференціальні частки", тобто частки двох диференціалів, що рівносильно нашим похідним; однак саме диференціал був для Ляйбніца первинним поняттям. Від часів Коші, який своєю теорією границь створив фундамент для всього аналізу і вперше чітко визначив похідну як границю, стало звичайним починати саме від похідної, а поняття диференціала будувати вже на основі похідної.

105. Основні формули та правила диференціювання

Обчислення диференціалів функцій зветься **диференціюванням**. (Втім, тим же терміном зазвичай позначають і обчислення похідних, для якого немає особливого терміна. У більшості мов для позначення цих операцій є два різні терміни; наприклад, французькою розрізняють "dérivation" і "différentiation".) Оскільки диференціал dy лише множником dx відрізняється від похідної y'_x, то за таблицею похідних для елементарних функцій (розд. 95) легко скласти таблицю диференціалів для них:

1. $y = c$	$dy = 0$
2. $y = x$	$dy = dx$
3. $y = x^{\mu}$	$dy = \mu x^{\mu-1} \cdot dx$
$y = \dfrac{1}{x}$	$dy = -\dfrac{dx}{x^2}$
$y = \sqrt{x}$	$dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$
4. $y = a^x$	$dy = a^x \cdot \ln a \cdot dx$
$y = e^x$	$dy = e^x \cdot dx$
5. $y = \log_a x$	$dy = \dfrac{\log_a e}{x} \cdot dx$
$y = \ln x$	$dy = \dfrac{dx}{x}$
6. $y = \sin x$	$dy = \cos x \cdot dx$
7. $y = \cos x$	$dy = -\sin x \cdot dx$
8. $y = \operatorname{tg} x$	$dy = \sec^2 x = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$
9. $y = \operatorname{ctg} x$	$dy = -\csc^2 x = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$

10. $y = \arcsin x$	$dy = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$
11. $y = \arccos x$	$dy = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$
12. $y = \operatorname{arctg} x$	$dy = \dfrac{1}{1+x^2} \cdot dx$
13. $y = \operatorname{arcctg} x$	$dy = -\dfrac{1}{1+x^2} \cdot dx$

Правила диференціювання (якщо йдеться саме про обчислення **диференціалів**) виглядають так:

14. $d(cu) = c \cdot du;$
15. $d(u \pm v) = du \pm dv;$
16. $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du;$
17. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}.$

nebayduzhi.math@gmail.com

Усі вони легко виходять із відповідних правил для похідних. Доведемо, наприклад, два останні:

$$d(u\cdot v) = (u\cdot v)'\cdot dx = (u'\cdot v + u\cdot v')\,dx = v\cdot(u'\cdot dx) + u\cdot(v'\cdot dx) = v\cdot du + u\cdot dv;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2}\cdot dx = \frac{v(u'dx) - u(v'dx)}{v^2} = \frac{v\cdot du - u\cdot dv}{v^2}.$$

106. Інваріантність форми диференціала

Правило диференціювання композиції функцій приведе нас до однієї чудової і важливої властивості диференціала.

Нехай функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(t)$ такі, що з них може бути створена композиція: $y = f(\varphi(t))$. Якщо існують похідні y'_x і x'_t, то за правилом розд. 98, 5 існує і похідна

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t. \tag{106.1}$$

Диференціал dy, якщо x вважати незалежною змінною, виразиться за формулою (104.5). Перейдемо тепер до незалежної змінної t; використовуючи це припущення маємо інший вираз для диференціала:

$$dy = y'_t\,dt.$$

Замінюючи, однак, похідну y'_t її виразом (106.1) і помічаючи, що $x'_t \cdot dt$ є диференціал x як функції від t, остаточно отримаємо:

$$dy = y'_x \cdot x'_t \cdot dt = y'_x \cdot dx,$$

тобто повернемося до **колишньої** форми диференціала!

Отже, бачимо, що *форма диференціала може бути збережена навіть у тому разі, якщо колишня незалежна змінна замінена на нову.* Ми завжди маємо право писати диференціал у **формі** (104.5), буде x незалежною змінною чи ні; різниця лише в тому, що якщо за незалежну змінну обрано t, то dx означає не довільне збільшення Δx, а диференціал x як функції від t. Ця властивість і зветься **інваріантністю форми диференціала.**

Оскільки з формули (104.5) безпосередньо випливає формула (104.6), що виражає похідну y'_x, використовуючи диференціали dx і dy, то й остання формула залишається справедливою, **хоч би за якою незалежною змінною** (звісно, однією і тією ж в обох випадках) **були обчислені** названі диференціали.

Нехай, наприклад, $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 < x < 1)$, тож

$$y'_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Нехай тепер $x = \sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді $y = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, і ми будемо мати: $dx = \cos t \cdot dt$, $dy = -\sin t \cdot dt$. Легко перевірити, що формула

$$y'_x = \frac{-\sin t \cdot dt}{\cos t \cdot dt} = -\frac{\sin t}{\cos t}$$

дає лише інший вираз для обчисленої вище похідної.

Цією обставиною особливо зручно користуватися, коли залежність y від x не задана безпосередньо, а натомість задана залежність обох змінних x і y від деякої третьої, допоміжної, змінної (що називається **параметром**):

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \tag{106.2}$$

Припускаючи, що обидві ці функції мають похідні, і для першої з них існує обернена функція $t = \theta(x)$, що має похідну (розд. 83, розд. 94), легко побачити, що тоді і y виявляється функцією від x:

$$y = \psi(\theta(x)) = f(x), \tag{106.3}$$

для якої також існує похідна. Обчислення цієї похідної може бути виконане за вказаним вище правилом:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t \cdot dt}{x'_t \cdot dt} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{106.4}$$

не відновлюючи безпосередньої залежності y від x.

Наприклад, якщо $x = \sin t$, $y = \cos t$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$, то похідну y'_x, можна визначити, як це зроблено вище, не користуючись зовсім залежністю $y = \sqrt{1-x^2}$.

Якщо розглядати x і y як прямокутні координати точки на площині, то рівняння (106.2) для кожного значенню параметра t дають координати деякої точки, що зі зміною t описує криву на площині. Рівняння (106.2) називаються **параметричними рівняннями** цієї кривої.

У разі параметричного задання кривої, формула (106.4) дає змогу безпосередньо за рівняннями (106.2) встановити кутовий коефіцієнт дотичної, не переходячи до задання кривої рівнянням (106.3); саме,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{106.5}$$

Зауваження. Можливість виражати похідну через диференціали, взяті за будь-якою змінною, зокрема, приводить до того, що формули

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

що виражають у позначеннях Ляйбніца правила диференціювання оберненої функції та композиції функцій, стають простими алгебраїчними тотожностями (оскільки всі диференціали тут можуть бути взяті за однією і тією самою змінною). Не слід думати, втім, що цим дано новий спосіб отримання названих формул: передусім тут не доводилося **існування** похідних зліва, головне ж — ми суттєво користувалися інваріантністю форми диференціала, яка сама є наслідком правила (98.1).

107. Диференціали як джерело наближених формул

Ми бачили, що, коли $\Delta x \to 0$, диференціал dy функції y (якщо тільки $y'_x \neq 0$) є **головна частина** нескінченно малого приросту функції Δy. Отже, $\Delta y \sim dy$, так що

$$\Delta y \doteq dy, \tag{107.1}$$

або докладніше

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \doteq f'(x_0) \cdot \Delta x \tag{107.2}$$

з точністю до нескінченно малої вищого порядку, ніж Δx. Це означає (розд. 62), що **відносна** похибка цієї рівності стає як завгодно малою для досить малого Δx.

Розглянемо простий приклад: нехай $y = x^3$. Тоді

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3,$$

і лінійна частина Δy (як ми це вище встановили в загальному вигляді), справді, є диференціал $dy = 3x_0^2 \cdot \Delta x = y'_x \cdot \Delta x$. Нехай $x = 2{,}3$; якщо взяти $\Delta x = 0{,}1$, то матимемо $\Delta y = 2{,}4^3 - 2{,}3^3 = 1{,}657$ і $dy = 3 \cdot 2{,}3^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}587$, так що похибка від заміни першого числа другим буде $0{,}070$, а **відносна** похибка перевищить $4\,\%$. Для $\Delta x = 0{,}01$ отримаємо $\Delta y = 0{,}159\,391$ і $dy = 0{,}1587$, що дає **відносну** похибку вже меншу, ніж $0{,}5\,\%$; для $\Delta x = 0{,}001$ — **відносна** похибка менша, ніж $0{,}05\,\%$, і так далі.

Це можна побачити на рис. 104.1, що дає геометричне тлумачення диференціала. На рисунку видно, що зменшуючи Δx, ми справді все з більшою **відносною** точністю можемо замінювати приріст ординати кривої приростом ординати дотичної.

Вигода заміни приросту функції Δy її диференціалом dy полягає, як зрозуміло читачеві, у тому, що dy залежить від Δx **лінійно**, тоді як як Δy зазвичай складніша функція від Δx.

Якщо покласти $\Delta x = x - x_0$ і $x_0 + \Delta x = x$, то рівність (107.2) набуде вигляду

$$f(x) - f(x_0) \doteq f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

або

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

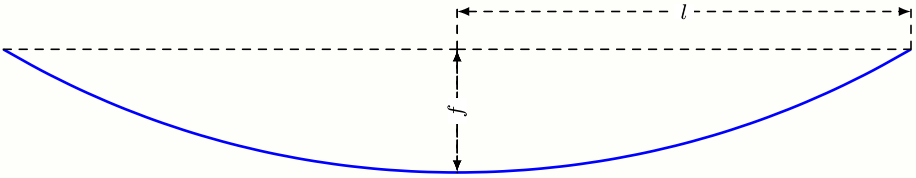


Рис. 107.1

За цією формулою, для значень x, близьких до x_0, функція $f(x)$ наближено замінюється **лінійною** функцією. Геометрично це відповідає заміні ділянки кривої $y = f(x)$, що примикає до точки $(x_0,\ f(x_0))$, відрізком **дотичної** до кривої в цій точці:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

(порівняйте з рис. 104.1). Справді, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, що проходить через точку (x_0, y_0), буде

$$y = y_0 + k(x - x_0);$$

у разі дотичної тут слід покласти $y_0 = f(x_0),\ k = f'(x_0)$.

Взявши для простоти $x = 0$ і обмежившись малими значеннями x, матимемо наближену формулу:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x.$$

Звідси підставляючи замість $f(x)$ різні елементарні функції, легко отримати низку формул:

$$\begin{aligned}
&(1+x)^\mu \doteq 1 + \mu x,\\
&\sqrt{1+x} \doteq 1 + \frac{1}{2}x,\\
&e^x \doteq 1 + x,\\
&\ln(1+x) \doteq x,\\
&\sin x \doteq x,\\
&\operatorname{tg} x \doteq x,
\end{aligned}$$

і так далі (багато з яких нам уже відомі).

Наведемо приклади наближених формул іншого типу, також отриманих з рівності (107.1).

1) Якщо довжину важкої нитки (дроту, каната, ременя), підвішеної за обидва кінці, позначити через $2s$, проліт — через $2l$, а стрілу провисання — через f (рис. 107.1), то для обчислення s часто користуються (наближеною) формулою

$$s = l\left(1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{f^2}{l^2}\right).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

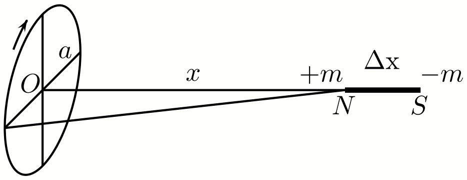


Рис. 107.2

Величину f тут будемо вважати незалежною змінною, а s — функцією від f. Потрібно встановити зв'язок між зміною Δs довжини s і зміною Δf стріли провисання f.

Замінюючи Δs на ds, отримаємо

$$\Delta s \doteq \frac{4}{3} \cdot \frac{f}{l} \cdot \Delta f, \quad \text{звідки} \quad \Delta f \doteq \frac{3}{4} \cdot \frac{l}{f} \cdot \Delta s.$$

Якщо, наприклад, врахувати зміну довжини дроту, коли змінюється температура або навантаження, то звідси можна передбачити і зміну стріли провисання.

2) Відомо, що коловий струм (рис. 107.2) діє на одиницю так званого "магнітного заряду", поміщену на його осі на відстані x від центра O, із силою

$$\frac{k}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

де k — сталий коефіцієнт, a — радіус. Знайти вираз для сили, з якою коловий струм діє на магніт NS завдовжки Δx, розташований на осі струму. При цьому вважатимемо, що в полюсі N зосереджений позитивний "магнітний заряд" m, а в полюсі S — рівний йому негативний "магнітний заряд" $-m$.

Загальна сила F дії струму на магніт виразиться так:

$$F = \frac{km}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{km}{(a^2+(x+\Delta x)^2)^{\frac{3}{2}}} = -km \cdot \Delta \left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Замінюючи приріст функції (вважаючи, що Δx мале) її диференціалом отримаємо

$$F \doteq -km \cdot d \left[\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = 3km\Delta x \cdot \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

108. Застосування диференціалів в оцінюванні похибок

Особливо зручно і природно використовувати поняття диференціала в наближених обчисленнях для оцінювання похибок. Нехай, наприклад, величину x ми вимірюємо або обчислюємо **безпосередньо**, а залежну від неї величину y знаходимо **за формулою**: $y = f(x)$. В процес вимірювання величини x звичайно вкрадається похибка, Δx, яка тягне за собою похибку Δy для величини y. Зважаючи на малу величину цих похибок, вважають

$$\Delta y = y'_x \cdot \Delta x,$$

тобто замінюють приріст диференціалом. Нехай δx буде **максимальною** абсолютною похибкою величини x: $|\Delta x| < \delta x$ (за звичайних умов така **межа похибки** вимірювання відома). Тоді очевидно за **максимальну** абсолютну похибку (межу похибки) для y можна взяти

$$\delta y = |y'_x| \cdot \delta x. \tag{108.1}$$

1) Нехай, наприклад, для знаходження об'єму кулі спочатку (за допомогою штангенциркуля, товщиноміра, мікрометра тощо) безпосередньо **вимірюють** діаметр D кулі, а потім об'єм V **обчислюють** за формулою

$$V = \frac{\pi}{6} D^3.$$

Оскільки $V'_D = \frac{\pi}{2} D^2$, то в цьому випадку зі (108.1) випливає

$$\delta V = \frac{\pi}{2} D^2 \cdot \delta D.$$

Розділивши цю рівність на попередню, отримаємо

$$\frac{\delta V}{V} = 3 \frac{\delta D}{D},$$

так що (максимальна) відносна похибка обчисленого значення об'єму виявляється втричі більшою, ніж (максимальна) відносна похибка виміряного значення діаметра.

2) Якщо число x, для якого обчислюється його десятковий логарифм $y = \lg x$, отримано з деякою похибкою, то це позначиться на логарифмі, створюючи і в ньому похибку.

Тут $y'_x = \frac{M}{x}$ ($M = \log_{10} e \doteq 0{,}4343$), так що, за формулою (108.1),

$$\delta y = 0{,}4343 \cdot \frac{\delta x}{x}.$$

Отже, (максимальна) **абсолютна** похибка логарифма просто визначається за (максимальною) **відносною** похибкою самого числа, та навпаки.

nebayduzhi.math@gmail.com

Цей результат має різноманітні застосування. Наприклад, за його допомогою можна скласти собі уявлення про точність звичайної логарифмічної лінійки, зі шкалою 25 см = 250 мм. В процесі відліку або встановлення візира можна помилитися, приблизно, на 0,1 мм у той чи інший бік, що відповідає похибці в логарифмі

$$\delta y = \frac{0{,}1}{250} = 0{,}0004,$$

Звідси, за нашою формулою,

$$\delta y = \frac{0{,}0004}{0{,}4343} = 0{,}000\,92\ldots \doteq 0{,}001.$$

Відносна точність відліків у всіх частинах шкали одна й та сама!

3) В процесі обчислення кута φ за логарифмічними-тригонометричними таблицями виникає питання, якими таблицями вигідніше користуватися — таблицями синусів чи тангенсів. Покладемо

$$y_1 = \lg\sin\varphi \quad \text{і} \quad y_2 = \lg\operatorname{tg}\varphi$$

і вважатимемо максимальні похибки δy_1 і δy_2 рівними (скажімо, половині останнього знака мантиси). Якщо позначити відповідні максимальні похибки кута φ через $\delta_1\varphi$ і $\delta_2\varphi$, то, як і вище, отримаємо:

$$\delta y_1 = \frac{M}{\sin\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot\delta_1\varphi,$$
$$\delta y_2 = \frac{M}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\sec^2\varphi\cdot\delta_2\varphi,$$

так що

$$\delta_2\varphi = \delta_1\varphi\cdot\cos^2\varphi < \delta_1\varphi.$$

Отже, виявляється, що для однакових помилок у логарифмі таблиця тангенсів дає меншу похибку кута, ніж таблиця синусів, і, отже, вигідніша. (Ми припускали кути вираженими в радіанах, але результати очевидно справедливі незалежно від того, якою одиницею вимірюються кути.)

4) Останній приклад. Розглянемо питання точності виміру невідомого опору за допомогою вимірювального моста Вітстона (англ. Charles Wheatstone, Ча́рлз Ві́тстон) (рис. 108.1). Пересувний контакт D пересувається градуйованою лінійкою AC, доки гальванометр G не покаже, що струму нема. Електричний опір y визначається за формулою

$$y = \frac{Rx}{a-x}, \tag{108.2}$$

де $a = AC,\ x = AD$, R — відомий опір гілки BC.

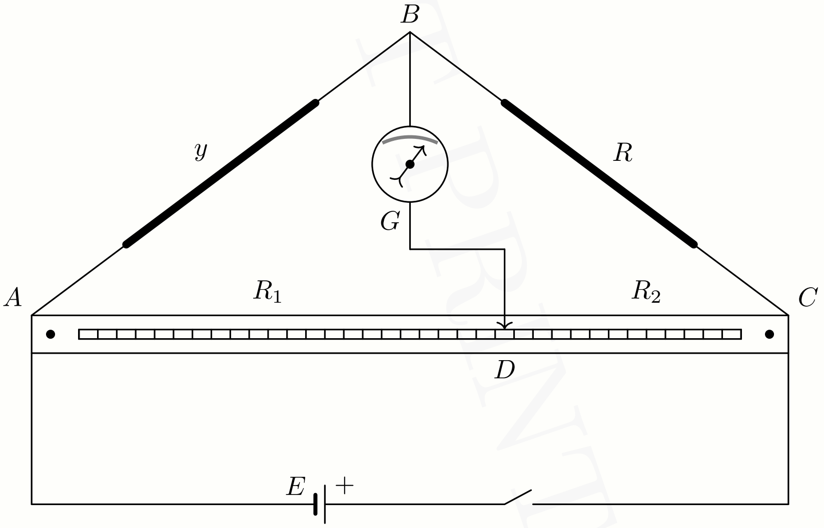


Рис. 108.1

За формулою (108.1) виходить:

$$\delta y = \left(\frac{Rx}{a-x}\right)'_x \cdot \delta x = \frac{aR}{(a-x)^2} \cdot \delta x;$$

якщо розділити почленно цю рівність на рівність (108.2), то отримаємо вираз (максимальної) відносної похибки для y,

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{a \cdot \delta x}{x(a-x)}.$$

З очевидної нерівності

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \geqslant 0$$

безпосередньо отримуємо

$$x(a-x) \leqslant \frac{a^2}{4}.$$

Отже, знаменник $x(a-x)$ досягає свого **найбільшого** значення, коли $x = \frac{a}{2}$. Оскільки похибку δx вимірювання довжини можна вважати незалежною від x, то **найменше** значення для відносної похибки досягається саме, коли $x = \frac{a}{2}$. Тому зазвичай, для отримання точнішого результату, опір R (за допомогою магазину опорів) встановлюється з таким розрахунком, щоб струм зникав, коли положення контакту D, якомога ближче до середини лінійки AC.

3.3. Основні теореми диференціального числення

109. Теорема Ферма

Знання похідної $f'(x)$ деякої функції $f(x)$ часто дає змогу робити висновок і про поведінку самої функції $f(x)$. Питанням цього роду і будуть, по суті, присвячені цей та наступні розділи.

Попередньо доведемо просту лему.

Лема 109.1. *Нехай функція $f(x)$ має скінченну похідну в точці x_0. Якщо ця похідна $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то для значень x, досить близьких до x_0* ***справа****, буде $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$), а для значень x, досить близьких до x_0* ***зліва****, буде $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).*

Іншими словами цей факт виражають так: *функція $f(x)$* ***у точці*** *x_0 зростає (спадає).* Якщо мається на увазі однобічна похідна, наприклад, справа, то справедливе лише твердження про значення x, що лежать праворуч від x_0.

Доведення. За означенням похідної,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Якщо $f'(x_0) > 0$ (обмежимося цим випадком), то, за теор. 55.2, знайдеться такий окіл $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ точки x_0, у якому (для $x \neq x_0$)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Нехай спочатку $x_0 < x < x_0 + \delta$, отже, $x - x_0 > 0$; з попередньої нерівності випливає, що $f(x) - f(x_0) > 0$, тобто $f(x) > f(x_0)$. Якщо ж $x_0 - \delta < x < x_0$, то очевидно і $f(x) - f(x_0) < 0$, тобто $f(x) < f(x_0)$. Лема доведена. □

Теорема 109.1 (Теорема Ферма)**.**
(фр. Pierre de Fermat, П'є́р де Ферма́)
Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку $\mathcal{X}$ і у внутрішній точці c цього проміжку набуває найбільшого (найменшого) значення. Якщо існує двобічна скінченна похідна $f'(c)$ у цій точці, то необхідно $f'(c) = 0$.

Це твердження, зрозуміло, відтворює лише суть того способу, який застосовував Ферма для знаходження найбільших і найменших значень функції (Ферма не мав у своєму розпорядженні поняття похідної).

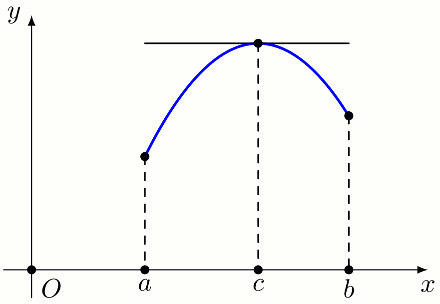


Рис. 109.1

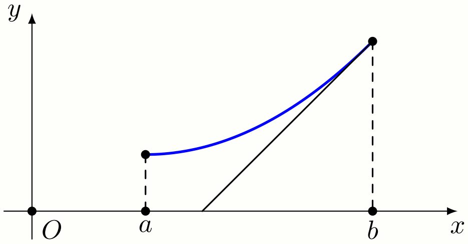


Рис. 109.2

Доведення. Нехай для визначеності $f(x)$ набуває **найбільшого** значення в точці c. Припущення, що $f'(c) \neq 0$, приводить до суперечності: або $f'(c) > 0$, і тоді (за лемою) $f(x) > f(c)$, якщо $x > c$ і досить близьке до c, або $f'(c) < 0$, і тоді $f(x) > f(c)$, якщо $x < c$ і досить близьке до c. В обох випадках $f(c)$ не може бути найбільшим значенням функції $f(x)$ на проміжку $\mathcal{X}$. Отримана суперечність і доводить теорему. □

Згадаємо (розд. 91, розд. 92) геометричне тлумачення похідної $y' = f'(x)$ як кутового коефіцієнта дотичної до кривої $y = f(x)$. Тоді $f'(c) = 0$ геометрично означає, що в точці c цієї кривої дотична паралельна до осі x. рис. 109.1 робить цю обставину абсолютно наочною.

У доведенні **суттєво** використано припущення, що c — внутрішня точка проміжку, бо нам довелося розглядати і точки x **праворуч** від c, і точки x **ліворуч** від c. Без цього припущення теорема перестала б бути справедливою: якщо функція $f(x)$ визначена на замкненому проміжку та досягає свого найбільшого (найменшого) значення на одному з кінців цього проміжку, то похідна $f'(x)$ на цьому кінці (якщо існує) може і не бути нулем. Залишаємо читачеві навести відповідний приклад; геометрично цей факт ілюструється рис. 109.2.

Застосуємо теорему Ферма, щоб довести одну цікаву теорему про похідну функції.

110. Теорема Дарбу

Теорема 110.1 (Теорема Дарбу)**.**
(фр. Jean-Gaston Darboux, Жа́н Дарбу́)
Якщо функція $f(x)$ має скінченну похідну на проміжку $[a, b]$, то значення функції $f'(x)$ пробігають усі проміжні числа між $f'(a)$ і $f'(b)$. І ми вважаємо, що в точці a існує похідна ***справа****, а в точці b — похідна* ***зліва****. Вони далі позначаються просто $f'(a)$ та $f'(b)$.*

Доведення. Спочатку припустимо, що $f'(a)$ і $f'(b)$ мають різні знаки, наприклад, що $f'(a) > 0$, а $f'(b) < 0$, і доведемо існування точки c між a і b, в якій похідна дорівнює нулю. Справді, з існування скінченної похідної $f'(x)$ випливає неперервність функції $f(x)$ (теор. 96.2), а тоді, за 2-ю теоремою Вяйрштрасса (теор. 85.1), $f(x)$ набуває в деякій точці c свого найбільшого значення. Ця точка c не може збігатися ні з a, ні з b, оскільки, згідно з лемою, $f(x)$ **більше** від $f(a)$ поблизу точки a (праворуч) та **більше** від $f(b)$ поблизу точки b (ліворуч). Отже, $a < c < b$. Тоді, за теоремою Ферма, отримуємо $f'(c) = 0$.

Переходячи до загального випадку, візьмемо будь-яке число C, що лежить між $f'(a)$ і $f'(b)$; нехай, для визначеності, $f'(a) > C > f'(b)$. Розглянемо допоміжну функцію $\varphi(x) = f(x) - Cx$; вона неперервна і має похідну $\varphi'(x) = f'(x) - C$ на проміжку $[a, b]$.

Оскільки $\varphi'(a) = f'(a) - C > 0$, та $\varphi'(b) = f'(b) - C < 0$, то за доведеним вище, існує така точка c $(a < c < b)$, у якій $\varphi'(c) = f'(c) - C = 0$, тобто $f'(c) = C$. ☐

Доведена теорема схожа на 2-у теорему Коші (теор. 82.1), згідно з якою, будь-яка неперервна функція пробігає від одного значення до іншого, лише переходячи через усі проміжні числа. Проте теорема Дарбу аж ніяк не наслідок теореми Коші, оскільки похідна $f'(x)$ сама може і не бути неперервною функцією.

111. Теорема Ролля

В основі багатьох теорем і формул диференціального числення та його застосувань лежить проста, але важлива теорема, що пов'язана з ім'ям Ролля (фр. Michel Rolle, Мішéль Рóлль). (Насправді Ролль висловив це твердження лише для многочленів.)

Теорема 111.1 (Теорема Ролля)**.** *Нехай*
1) функція $f(x)$ визначена та неперервна на замкненому проміжку $[a, b]$;
2) існує скінченна похідна $f'(x)$, принаймні на відкритому проміжку (a, b);
3) на кінцях проміжку функція набуває рівних значень: $f(a) = f(b)$.

Тоді між a і b знайдеться така точка, c $(a < c < b)$, що $f'(c) = 0$.

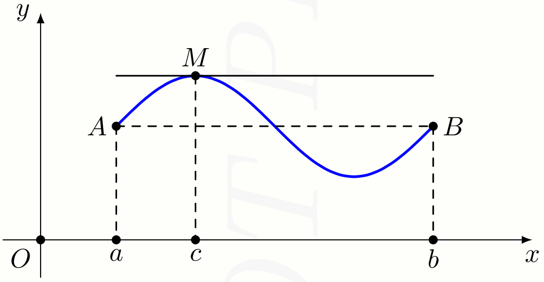


Рис. 111.1

Доведення. $f(x)$ неперервна на замкненому проміжку $[a, b]$ і тому, за 2-ою теоремою Ваярштрасса (теор. 85.1), набуває на цьому проміжку як свого найбільшого значення M, так і свого найменшого значення m.

Розглянемо два випадки.

1. $M = m$. Тоді $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ зберігає стале значення: насправді нерівність $m \leqslant f(x) \leqslant M$ в цьому випадку дає $f(x) = M$ для всіх x; тому $f'(x) = 0$ на всьому проміжку, так що c може бути будь-якою точкою з (a, b).

2. $M > m$. Ми знаємо, що функція набуває і найбільшого, і найменшого значення, але, оскільки $f(a) = f(b)$, то хоч одного з цих значень функція набуває в деякій точці **між** a і b. У такому разі з теореми Ферма випливає, що похідна $f'(c)$ в цій точці дорівнює нулю. Теорема доведена. ☐

Геометричною мовою теорема Ролля означає таке: *якщо крайні ординати кривої* $y = f(x)$ *рівні, то на кривій знайдеться точка, де дотична паралельна до осі* x (рис. 111.1).

Звертаємо увагу на те, що неперервність функції $f(x)$ на **замкненому** проміжку $[a, b]$ та існування похідної **на всьому** відкритому проміжку (a, b) **істотні** для справедливості твердження теореми. Функція $f(x) = x - E(x)$ задовольняє на проміжку $[0, 1]$ всі умови теореми, за винятком того, що має розрив в точці $x = 1$, а похідна $f'(x) = 1$ скрізь на $(0, 1)$. Функція, що визначається рівностями $f(x) = x$ для $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ та $f(x) = 1 - x$ для $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, також задовольняє всі умови на тому самому проміжку, за винятком лише тієї обставини, що в точці $x = \frac{1}{2}$ не існує (двобічної) похідної; водночас похідна $f'(x)$ дорівнює $+1$ на лівій половині проміжку і -1 на правій.

Так само істотна і умова 3) теореми: функція $f(x) = x$ на проміжку $[0, 1]$ задовольняє всі умови теореми, окрім умови 3), а її похідна $f'(x) = 1$ всюди.

Креслення залишаємо читачеві.

112. Формула Лаґранжа

Звернемося до безпосередніх наслідків теореми Ролля.

Теорема 112.1 (Теорема Лаґранжа)**.** *Нехай*
1) $f(x)$ визначена і неперервна на замкненому проміжку $[a, b]$,
2) існує скінченна похідна $f'(x)$, принаймні на відкритому проміжку (a, b).

Тоді між a та b знайдеться така точка c $(a < c < b)$, що для неї виконується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{112.1}$$

Звісно, неперервність функції $f(x)$ на (a, b), припущена в 1), уже випливає з 2), але ми ні тут, ні надалі не ставимо собі за мету розділяти умову теореми на взаємно незалежні припущення.

Доведення. Введемо допоміжну функцію, визначивши її на проміжку $[a, b]$ рівністю:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ця функція задовольняє всі умови теореми Ролля (теор. 111.1). Справді, вона неперервна на $[a, b]$, оскільки це різниця між неперервною функцією $f(x)$ і лінійною функцією. На проміжку (a, b) вона має певну скінченну похідну, яка дорівнює

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Нарешті, безпосередньою підстановкою переконуємось у тому, що $F(a) = F(b) = 0$, тобто $F(x)$ набуває рівних значень на кінцях проміжку.

Отже, до функції $F(x)$ можна застосувати теорему Ролля і стверджувати існування на (a, b) такої точки c, де $F'(c) = 0$. Отже,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

звідки

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,,$$

що й потрібно було довести. □

Доведену теорему називають також **теоремою про середнє значення** (у диференціальному численні).

Теорема Ролля — це окремий випадок теореми Лаґранжа; зауваження щодо умов 1) та 2) теореми, зроблені вище, зберігають чинність і тут.

nebayduzhi.math@gmail.com

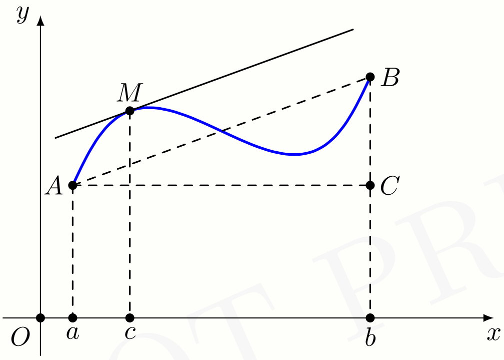


Рис. 112.1

Звертаючись до геометричного тлумачення теореми Лаґранжа (рис. 112.1), зауважимо, що відношення

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{CB}{AC}$$

є кутовий коефіцієнт січної AB, а $f'(c)$ є кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y=f(x)$ у точці з абсцисою $x=c$. Отже, твердження теореми Лаґранжа рівносильне такому: *на дузі AB завжди знайдеться принаймні одна точка M, у якій дотична* ***паралельна*** *до хорди AB.*

Доведена формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \text{або} \quad f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a) \tag{112.2}$$

має назву **формули Лаґранжа** або **формули скінченних приростів**. Вона очевидно справедлива і для випадку $a>b$.

Візьмемо будь-яке значення x_0 на проміжку $[a,b]$ і надамо йому приріст $\Delta x \gtrless 0$, що не виводить його за межі проміжку. Застосуємо формулу Лаґранжа до проміжку $[x_0,\ x_0+\Delta x]$, якщо $\Delta x>0$; або до проміжку $[x_0+\Delta x,\ x_0]$, якщо $\Delta x<0$. Число c з такого проміжку, можна представити так:

$$c=x_0+\theta\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

(Іноді кажуть, що θ є "правильний дріб"; не слід тільки думати, що йдеться про раціональний дріб — число θ може виявитися й ірраціональним.) Тоді **формула Лаґранжа** набуде вигляду:

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\Delta x) \tag{112.3}$$

або

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1). \tag{112.4}$$

Ця рівність, що дає **точний** вираз для приросту функції для будь-якого **скінченного** приросту Δx аргументу, природно протиставляється наближеній рівності (107.2):

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \doteq f'(x_0) \cdot \Delta x,$$

відносна похибка якої прямує до нуля, лише якщо Δx нескінченно мале. Звідси походить і сама назва "формула **скінченних** приростів".

Щодо невигоди формули Лаґранжа — у ній фігурує невідоме число θ (або c). (Лише у деяких випадках ми можемо обчислити це число θ; наприклад, для квадратичної функції $f(x) = ax^2+bx+c$, як легко перевірити, маємо $\theta = 0{,}5$.) Однак, це не заважає різноманітним застосуванням цієї формули в аналізі.

113. Границя похідної

Корисний приклад такого застосування дає таке зауваження.

Теорема 113.1. *Припустимо, що функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[x_0,\ x_0+H]$ $(H > 0)$ і має скінченну похідну $f'(x)$ для $x > x_0$.* ***Якщо існує*** *(скінченна або ні)* ***границя***

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x) = K,$$

то такою ж буде і похідна в точці x_0 справа.

Доведення. Справді, для $0 < \Delta x \leqslant H$ маємо (112.3). Якщо $\Delta x \to 0$, то, зважаючи на обмеженість величини θ, аргумент похідної $x_0 + \theta\Delta x$ прямує до x_0, так що права частина рівності, а з нею і ліва прямує до границі K, що й потрібно було довести. □

Аналогічне твердження доводиться і для лівобічного околу точки x_0.

Розглянемо, як приклад, функцію

$$f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$$

на проміжку $[-1, 1]$. Якщо $-1 < x < 1$, то за звичайними правилами диференціального числення легко знайти:

$$f'(x) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Для $x \to 1 - 0$ $(x \to -1 + 0)$ ця похідна очевидно прямує до границі $\frac{\pi}{2}$ $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; отже, і для $x = \pm 1$ існують (однобічні) похідні

$$f'(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Часто зроблене зауваження застосовується за таких обставин: з того факту, що знайдений для похідної вираз **прямує** до $+\infty$ $(-\infty)$, коли x прямує до x_0 **з того чи іншого боку**, робиться висновок, що в самій точці x_0 відповідна **однобічна** похідна **дорівнює** $+\infty$ $(-\infty)$.

Наприклад, якщо повернутися до функцій $f_1(x) = x^{\frac{1}{3}}$ і $f_2(x) = x^{\frac{2}{3}}$, які ми розглядали в розд. 101, то для них (для $x \gtrless 0$) маємо:

$$f_1'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \quad \text{і} \quad f_2'(x) = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}.$$

Оскільки перший з цих виразів прямує до $+\infty$, коли $x \to \pm 0$, а другий до $+\infty$, коли $x \to +0$, і $-\infty$, коли $x \to -0$, то робимо висновок, що для $f_1(x)$ у точці $x = 0$ існує двобічна похідна: $+\infty$, а для $f_2(x)$ в цій точці існують лише однобічні похідні: $+\infty$ справа та $-\infty$ зліва.

Зі сказаного випливає також, що, якщо скінченна похідна $f'(x)$ існує на деякому проміжку, то вона є функцією, яка не може мати звичайних розривів чи стрибків: у кожній точці вона або неперервна, або має розрив 2-го роду (порівняйте з пр. 102.2).

114. Формула Коші

Формула скінченних приростів **узагальнюється** так.

Теорема 114.1 (Теорема Коші)**.** *Нехай*
1) функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на замкненому проміжку $[a, b]$;
2) існують скінченні похідні $f'(x)$ і $g'(x)$, принаймні на відкритому проміжку (a, b);
3) $g'(x) \neq 0$ на проміжку (a, b).

*Тоді **між** a і b знайдеться така точка c $(a < c < b)$, що*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,. \tag{114.1}$$

Ця формула називається формулою Коші.

Доведення. Покажемо спочатку, що знаменник лівої частини нашої рівності не дорівнює нулю, тому що інакше вираз цей не мав би сенсу. Якби було $g(b) = g(a)$, то, за теоремою Ролля, похідна $g'(x)$ в деякій проміжній точці дорівнювала б нулю, що суперечить умові 3); отже, $g(b) \neq g(a)$.

Розглянемо тепер допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Ця функція задовольняє всі умови теореми Ролля. Справді, $F(x)$ неперервна на $[a, b]$, оскільки неперервні $f(x)$ та $g(x)$; похідна $F'(x)$ існує в (a, b) і вона дорівнює

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x).$$

Нарешті, підстановкою переконуємося, що $F(a) = F(b) = 0$. Внаслідок цього на проміжку (a, b) існує така точка c, що $F'(c) = 0$. Інакше кажучи,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

або

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c).$$

Розділивши на $g'(c)$ (це можливо, оскільки $g'(c) \neq 0$), отримуємо потрібну рівність.

□

Зрозуміло, що теорема Лаґранжа — це окремий випадок теореми Коші. Для отримання формули скінченних приростів з формули Коші слід покласти $g(x) = x$. Теорему Коші називають **узагальненою теоремою про середнє значення** (у диференціальному численні).

Геометрична ілюстрація теореми Коші така сама, як і для теореми Лаґранжа. Щоб читачеві легше було це побачити, перейдемо до інших позначень: x замінимо на t, а функції позначимо через $\psi(t)$ і $\varphi(t)$. Якщо t змінюється на проміжку $[\alpha, \beta]$, то формула Коші напишеться так:

$$\frac{\psi(\beta) - \psi(\alpha)}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)} = \frac{\psi'(\gamma)}{\varphi'(\gamma)} \quad (\alpha < \gamma < \beta). \tag{114.2}$$

Розглянемо тепер криву, задану **параметричними рівняннями**

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \tag{114.3}$$

Тоді ліва частина формули і тут виражає кутовий коефіцієнт хорди, що з'єднує кінці дуги цієї кривої, а права — кутовий коефіцієнт дотичної в деякій внутрішній точці дуги, що відповідає $t = \gamma$ (106.5).

Зауваження. Ці міркування підказують думку про можливість вивести формулу Коші з формули Лаґранжа. Суть цього висновку в тому, що замість параметричної залежності (114.3) отримують безпосередню залежність: $y = f(x)$, і тоді формула (114.2) виявляється рівнозначною (112.1).

3.4. Похідні і диференціали вищих порядків

115. Означення похідних вищих порядків

Якщо функція $y = f(x)$ має скінченну похідну $y' = f'(x)$ на деякому проміжку $\mathcal{X}$, так що ця похідна і сама нова функція від x, то може статися, що ця функція в деякій точці x_0 із $\mathcal{X}$ теж має похідну, скінченну чи ні. Її називають **похідною другого порядку** чи **другою похідною** функції $y = f(x)$ у згаданій точці, і позначають одним із символів

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad y'', \quad D^2y; \quad \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}, \quad f''(x_0), \quad D^2f(x_0).$$

Наприклад, ми бачили в розд. 92, що швидкість v руху точки дорівнює похідній від пройденого точкою шляху s за часом t: $v = \dfrac{ds}{dt}$, прискорення ж a — похідна від швидкості v за часом: $a = \dfrac{dv}{dt}$. Отже, прискорення — це **друга похідна** від шляху за часом: $a = \dfrac{d^2s}{dt^2}$.

Аналогічно, якщо функція $y = f(x)$ має скінченну другу похідну на цілому проміжку $\mathcal{X}$ (тобто в кожній точці цього проміжку), то її похідна, скінченна чи ні, в будь-якій точці x_0 з $\mathcal{X}$ називається **похідною третього порядку** або **третьою похідною** функції $y = f(x)$ у цій точці, і позначається так:

$$\frac{d^3y}{dx^3}, \quad y''', \quad D^3y; \quad \frac{d^3f(x_0)}{dx^3}, \quad f'''(x_0), \quad D^3f(x_0).$$

Подібним чином від третьої похідної переходимо до четвертої і так далі. Якщо припустити, що поняття $(n-1)$-ї похідної вже означено і що $(n-1)$-а похідна існує і скінченна на проміжку $\mathcal{X}$, то її похідна в деякій точці x_0 цього проміжку називається **похідною n-го порядку** або **n-ю похідною** від початкової функції $y = f(x)$; для позначення її застосовуються символи:

$$\frac{d^ny}{dx^n}, \quad y^{(n)}, \quad D^ny; \quad \frac{d^nf(x_0)}{dx^n}, \quad f^{(n)}(x_0), \quad D^nf(x_0).$$

Іноді, коли використовуються позначення Лаґранжа або Коші, може виникнути потреба вказати змінну, за якою береться похідна; тоді її пишуть у вигляді значка внизу:

$$y''_{x^2}, \quad D^3_{x^3}y, \quad f^{(n)}_{x^n}(x_0), \quad \dots,$$

причому, x^2, x^3, ... є умовний скорочений запис замість xx, xxx, ... Наприклад, можна написати: $a = s''_{t^2}$.

(Читачеві ясно, що і тут **цілісні** символи

$$\frac{d^n f}{dx^n}, \quad f^{(n)} \text{ або } f^{(n)}_{x^n}, \quad D^n f \text{ або } D^n_{x^n} f$$

можна розглядати як функціональні позначення.)

Отже, ми означили поняття n-ї похідної, як кажуть, **індуктивно**, переходячи по порядку від першої похідної до наступної. Співвідношення, що означує n-у похідну:

$$y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]',$$

називають також рекурентним (або “поворотним”), бо воно нас повертає від n-ї до $(n-1)$-ї похідної.

Саме обчислення похідних n-го порядку, **для заданого числа** n, виконується за відомими вже читачеві правилами і формулами. Наприклад, якщо

$$y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2},$$

то

$$y' = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + \frac{4}{3}, \quad y'' = 6x^2 - x + 4, \quad y''' = 12x - 1, \quad y^{(4)} = 12,$$

так що всі наступні похідні рівні тотожно 0. Або нехай

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$

тоді

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad y'' = -\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \quad y''' = \frac{2x^2-1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}, \quad \text{і так далі.}$$

Зауважимо, що стосовно похідних вищих порядків також індуктивно можна встановити поняття **однобічної** похідної (порівняйте з розд. 100). Якщо функція $y = f(x)$ визначена лише на деякому проміжку $\mathcal{X}$, то, говорячи про похідну будь-якого порядку **на його кінці**, завжди мають на увазі саме **однобічну** похідну.

116. Загальні формули для похідних будь-якого порядку

Отже, для того щоб обчислити n-у похідну від будь-якої функції, взагалі кажучи, потрібно спочатку обчислити похідні всіх попередніх порядків. Однак у ряді випадків вдається встановити такий **загальний** вираз для n-ї похідної, який залежить безпосередньо від n і не містить більше позначень попередніх похідних.

Для виведення таких загальних виразів іноді бувають корисні формули:

$$(cu)^{(n)} = c \cdot u^{(n)}, \quad (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)},$$

що узагальнюють на випадок вищих похідних відомі читачеві правила 1 і 2 з розд. 97. Їх легко отримати послідовним застосуванням цих правил.

1) Розглянемо спочатку **степеневу** функцію $y = x^\mu$, де μ — будь-яке дійсне число. Маємо послідовно:

$$y' = \mu x^{\mu-1}, \quad y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}, \quad y''' = \mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3}, \quad \dots$$

Легко побачити звідси і загальний закон:

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)\dots(\mu-(n-1))x^{\mu-n},$$

але, строго кажучи, його ще потрібно довести. Для цього скористаємося методом математичної індукції. Припустивши, що для деякого значення n ця формула справедлива, продиференціюємо її ще раз. Ми прийдемо до результату:

$$[y^{(n)}]' = y^{(n+1)} = \mu(\mu-1)\dots(\mu-(n-1))[x^{\mu-n}]' = \mu(\mu-1)\dots(\mu-(n-1))(\mu-n)x^{\mu-(n+1)},$$

тож наша формула виявляється справедливою для $(n+1)$-ї похідної, якщо була справедлива для n-ї. Звідси й випливає її справедливість для **всіх** натуральних значень n.

Якщо, наприклад, взяти $\mu = -1$, то отримаємо

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)(-2)\dots(-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}},$$

а для $\mu = -\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-n} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2x)^n\sqrt{x}}$$

тощо. (Символом $n!!$ позначають добуток натуральних чисел, що не перевищують n **і однієї з n парності**, так що, наприклад,

$$7!! = 1\cdot3\cdot5\cdot7, \quad 10!! = 2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10,$$

також умовно вважають $0!! = 1$ та $(-1)!! = 1$.)

Коли саме μ є **натуральне** число m, то m-та похідна від x^m буде вже сталим числом $m!$, а всі наступні — нулями. Звідси зрозуміло, що і для цілого многочлена степеня m виконується теж саме.

2) Для дещо загальнішого виразу

$$y = (a+bx)^\mu \quad (a,\ b = \text{const})$$

так само легко знайдемо:

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)\cdot(\mu-(n-1))\cdot b^n\cdot(a+bx)^{\mu-n}.$$

Зокрема, виходить, як і вище,

$$\left(\frac{1}{a+bx}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! b^n}{(a+bx)^{n+1}}\,,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!b^n}{2^n(a+bx)^n\sqrt{a+bx}}\,,$$

3) Нехай тепер $y=\ln x$. Насамперед маємо

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}\,.$$

Візьмемо звідси похідну $(n-1)$-го порядку за відповідною формулою з 1), замінивши в ній n на $n-1$; отримаємо

$$y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}\,.$$

4) Якщо $y=a^x$, то

$$y' = a^x\cdot\ln a, \quad y'' = a^x\cdot(\ln a)^2, \quad \ldots$$

Загальна формула

$$y^{(n)} = a^x\cdot(\ln a)^n$$

легко доводиться методом математичної індукції.

Зокрема, очевидно

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

5) Розглянемо функцію $y=\sin x$; тоді

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{(4)} = \sin x, \quad y^{(5)} = \cos x, \quad \ldots$$

Таким способом знайти необхідний загальний вираз для n-ї похідної складно. Але справа відразу спрощується, якщо переписати формулу для першої похідної як $y' = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; стає зрозуміло, що з кожним диференціюванням до аргументу буде додаватися $\frac{\pi}{2}$, так що

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Аналогічно виходить і формула

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

6) Розглянемо функцію $y = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$. Представивши її як

$$y = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right),$$

ми дістаємо можливість використовувати приклад 2) (і загальні правила, вказані вище). Остаточно

$$\left(\frac{1}{x^2 - a^2}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2a}\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right).$$

7) Для функції $y = e^{ax}\sin bx$ ми використаємо більш штучний спосіб. Маємо

$$y' = ae^{ax}\sin bx + ba^{ax}\cos bx = e^{ax}(a\sin bx + b\cos bx);$$

якщо ввести допоміжний кут φ:

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

то вираз для першої похідної можна переписати у вигляді:

$$y' = \sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot(\sin bx\cdot\cos\varphi + \cos bx\cdot\sin\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot\sin(bx+\varphi).$$

Повторюючи диференціювання, легко отримати загальний закон

$$y^{(n)} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cdot e^{ax}\cdot\sin(bx+n\varphi)$$

та довести його методом математичної індукції.

8) Зупинимося ще на функції $y = \operatorname{arctg} x$. Спочатку спробуємо виразити $y^{(n)}$ через y. Оскільки $x = \operatorname{tg} y$, то

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y = \cos y\cdot\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Диференціюючи вдруге за x (і пам'ятаючи, що y є функція від x), отримуємо

$$\begin{aligned} y'' &= \left[-\sin y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) + \cos y\cdot\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot y' = \\ &= \cos^2 y\cdot\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 y\cdot\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Наступне диференціювання дає

$$y''' = \left[-2\sin y\cdot\cos y\cdot\sin 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+2\cos^2 y\cdot\cos 2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot y' =$$
$$= 2\cos^2 y\cdot\cos\left(3y+2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos^3 y\cdot\sin 3\left(y+\frac{\pi}{2}\right).$$

Загальна формула:

$$y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y\cdot\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$$

доводиться методом математичної індукції.

Якщо (для $x > 0$) ввести кут

$$z = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - y,$$

то ця формула може бути переписана так:

$$y^{(n)} = (n-1)!\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\cdot\sin n(\pi - z)$$

або, нарешті,

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\cdot\sin\left(n\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right).$$

9) Доведемо на закінчення формулу

$$D^n\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Справедливість для $n = 1$ та $n = 2$ перевіряється безпосередньо. Припустимо тепер, що вона справедлива **для всіх значень** n **аж до деякого** $n \geqslant 2$ і доведемо, що тоді вона збереже справедливість, якщо замінити n на $n+1$ (звертаємо увагу читача на цю своєрідну форму застосування методу математичної індукції; насправді (дивіться текст нижче) ми використовуємо справедливість нашої формули для n і для $n-1$). З цією метою розглянемо вираз

$$D^{n+1}\left(x^n e^{\frac{1}{x}}\right) = D^n\left[D\left(x^n e^{\frac{1}{x}}\right)\right] = D^n\left[nx^{n-1}e^{\frac{1}{x}} - x^{n-2}e^{\frac{1}{x}}\right] =$$
$$= n\cdot D^n\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right) - D\left[D^{n-1}\left(x^{n-2}e^{\frac{1}{x}}\right)\right].$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Користуючись нашим припущенням, можна переписати цей вираз так:

$$D^{n+1}\left(x^n e^{\frac{1}{x}}\right) = n\cdot(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}} - D\left[(-1)^{n-1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}\right] = (-1)^{n+1}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+2}},$$

що й потрібно було довести.

Отже, формула справедлива для **всіх** натуральних значень n.

117. Формула Ляйбніца

Як ми зауважили на початку попереднього розділу, правила 1 і 2 з розд. 97 безпосередньо переносяться і на випадок похідних будь-якого порядку. Складніша ситуація з правилом 3, що стосується диференціювання добутку.

Припустимо, що функції u, v від x мають кожна окремо похідні до n-го порядку включно: доведемо, що тоді їх добуток $y = uv$ також має n-у похідну, і знайдемо її вираз.

Станемо послідовно застосовувати правило 3 до добутку; ми знайдемо:

$$\begin{aligned}
y' &= u'v + uv',\\
y'' &= u''v + 2u'v' + uv'',\\
y''' &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',\\
&\dots
\end{aligned}$$

Легко помітити закон, за яким побудовані всі ці формули: праві частини їх схожі на розклад степенів бінома: $u + v$, $(u+v)^2$, $(u+v)^3$, …, лише замість степенів u, v стоять похідні відповідних порядків. Схожість стане повнішою, якщо в отриманих формулах замість u, v писати $u^{(0)}$, $v^{(0)}$. Поширюючи цей закон на випадок будь-якого n, прийдемо до загальної формули:

$$\begin{aligned}
y^{(n)} = (uv)^{(n)} &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)} =\\
&= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \dots +\\
&+ \frac{n(n-1)\dots(n-(i-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot i}u^{(n-i)}v^{(i)} + \dots + uv^{(n)}.
\end{aligned}\tag{117.1}$$

Символ $\sum$ означає суму **однотипних** доданків. Коли доданки залежать від одного значка, що змінюється в певних межах, то ці межі і вказуються (знизу та зверху). Наприклад,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \dots + a_n,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} \quad \text{і так далі.}$$

Для доведення (117.1) вдамося знову до методу математичної індукції. Припустимо, що для деякого значення n формула справедлива. Якщо для функцій u, v існують $(n+1)$-і похідні, то можна ще раз продиференціювати за x; отримаємо:

$$\begin{aligned}
y^{(n+1)} &= \left[\sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}\right]' = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left[u^{(n-i)} v^{(i)}\right]' = \\
&= \sum_{i=0}^{n} C_n^i \left[u^{(n-i+1)} v^{(i)} + u^{(n-i)} v^{(i+1)}\right] = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i+1)} = \\
&= \left[u^{(n+1)} v + \sum_{i=1}^{n} C_n^i u^{(n-i+1)} v^{(i)}\right] + \left[\sum_{i=0}^{n-1} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i+1)} + u v^{(n+1)}\right] = \\
&= u^{(n+1)} v + \left[\sum_{i=1}^{n} C_n^i u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} C_n^{i-1} u^{(n-i+1)} v^{(i)}\right] + u v^{(n+1)} = \\
&= u^{(n+1)} v + \sum_{i=1}^{n} \left[C_n^i + C_n^{i-1}\right] u^{(n-i+1)} v^{(i)} + u v^{(n+1)} = \\
&= u^{(n+1)} v + \sum_{i=1}^{n} C_{n+1}^i u^{((n+1)-i)} v^{(i)} + u v^{(n+1)} = \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i u^{((n+1)-i)} v^{(i)}.
\end{aligned}$$

(Ми використовували, що $C_m^0 = C_m^m = 1$ та $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$.)

Ми отримали вираз, цілком аналогічний до виразу (117.1) (тільки n замінилося числом $n+1$); цим і доведено справедливість формули (117.1) для всіх натуральних значень n.

Отримана формула має назву *формули Ляйбніца.* Вона часто буває корисною у виведенні загальних виразів для n-ї похідної.

Зауважимо, що таку ж формулу можна було б отримати і для n-й похідної добутку **кількох** множників $y = uv \dots t$; вона має схожість з розкладом степеня **многочлена** $(u + v + \dots + t)^n$.

118. Приклади

1) Знайдемо за допомогою формули Ляйбніца (117.1) похідну

$$(x^2 \cdot \cos ax)^{(50)}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Покладемо $v = x^2$, $u = \cos ax$. Тоді

$$u^{(k)} = a^k \cdot \cos\left(ax + k \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$v' = 2x,\ v'' = 2,\ v''' = v^{(4)} = \ldots = 0.$$

Отже, у формулі (117.1) всі доданки, крім трьох перших, дорівнюють нулю, і ми отримуємо:

$$\begin{aligned}(uv)^{(50)} &= x^2 \cdot a^{50} \cdot \cos\left(ax + 50 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{50}{1} \cdot 2x \cdot a^{49} \cdot \cos\left(ax + 49 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \\ &+ \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} \cdot 2 \cdot a^{48} \cdot \cos\left(ax + 48 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= a^{48}\left[(2450 - a^2x^2)\cos ax - 100ax \cdot \sin ax\right].\end{aligned}$$

2) Повертаючись до пр. 116.7, тепер ми можемо отримати загальний вираз для n-ї похідної функції

$$y = e^{ax} \cdot \sin bx$$

безпосередньо за формулою Ляйбніца:

$$\begin{aligned}y^{(n)} = e^{ax}\Bigg[(\sin bx) \cdot \left(a^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots\right) + \\ +(\cos bx) \cdot \left(na^{n-1}b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots\right)\Bigg].\end{aligned}$$

3) Знайдемо вираз для $(n+1)$-ї похідної функції $y = \arcsin x$.

Маємо насамперед

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

так що, за формулою Ляйбніца,

$$\begin{aligned}y^{(n+1)} &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)^{(n)} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n)} \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \\ &+ n\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-1)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-2)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)'' + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{(n-3)} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)''' + \ldots\end{aligned}$$

Якщо тепер до обчислення послідовних похідних від $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ і $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ застосувати формули, отримані в пр. 116.2, то прийдемо до результату

$$y^{(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2^n\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{(2n-1)!!}{(1+x)^n} - n\frac{(2n-3)!!1!!}{(1+x)^{n-1}(1-x)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2n-5)!!3!!}{(1+x)^{n-2}(1-x)^2} + \ldots\right).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

4) Потрібно знайти значення всіх послідовних похідних функції $y = \operatorname{arctg} x$ в точці $x = 0$.

Оскільки $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, то $y'(1+x^2) = 1$. Візьмемо n-у похідну від обох частин цієї рівності (користуючись формулою Ляйбніца):

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nx \cdot y^{(n)} + n(n-1) \cdot y^{(n-1)} = 0.$$

Покладемо тут $x = 0$; якщо значення похідних в точці $x = 0$ позначати значками 0 знизу, то отримаємо:

$$y_0^{(n+1)} = -n(n-1) \cdot y_0^{(n-1)}.$$

В точці $x = 0$ похідна $y'' = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ дорівнює 0: $y''_0 = 0$. Зі знайденого співвідношення ясно, що завжди $y_0^{(2m)} = 0$. Що ж до похідних непарного порядку, то маємо для них рекурентну формулу:

$$y_0^{(2m+1)} = -(2m-1) \cdot 2m \cdot y_0^{(2m-1)}.$$

Зважаючи на те, що $y'_0 = 1$, отримуємо звідси:

$$y_0^{(2m+1)} = (-1)^m (2m)!.$$

Той самий результат можна було б отримати й із загальної формули пр. 116.8.

5) Те саме для функції $y = \arcsin x$.

Вказівка. Формулу Ляйбніца застосувати до співвідношення:

$$(1-x^2) \cdot y'' - x \cdot y' = 0.$$

Відповідь: $y_0^{(2m)} = 0,\ y_0^{(2m-1)} = 1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (2m-1)^2 = [(2m-1)!!]^2$. Цей результат із загальних виразів в 3) виходить не так просто.

6) *Многочлени Льожондра (фр. Adrien-Marie Legendre, Адріéн Льожóндр).* На закінчення зупинимося на важливих **многочленах (поліномах), що названі на честь Льожондра**. Вони означуються рівностями

$$X_n(x) = c_n \cdot \frac{d^n\left((x^2-1)^n\right)}{dx^n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{118.1}$$

де сталим коефіцієнтам c_n надаються ті чи інші значення залежно від міркувань зручності, а $\dfrac{d^n F(x)}{dx^n}$ — похідна n-го порядку функції $F(x) = (x^2-1)^n$.

Насамперед переконаємося в тому, що многочлен $X_n(x)$ (степеня n) має n різних дійсних коренів, які всі містяться між -1 і $+1$. Для простоти покладемо поки що $c_n = 1$.

Легко побачити, що многочлен $(x^2-1)^n = (x-1)^n \cdot (x+1)^n$ і його $n-1$ послідовних похідних дорівнюють нулю для $x = \pm 1$. Тоді перша її похідна, за теоремою Ролля (теор. 111.1), матиме корінь і між -1 і $+1$; за тією ж теоремою, друга похідна матиме два корені між -1 і $+1$, і так далі аж до $(n-1)$-ї похідної, яка, крім коренів -1 і $+1$, буде між ними мати ще $n-1$ коренів. Застосувавши до неї ще раз теорему Ролля, прийдемо до необхідного висновку.

Покладаючи коефіцієнти $c_n = 1$, визначимо тепер значення многочлена $X_n(x)$, коли $x = \pm 1$.

За формулою Ляйбніца, розглядаючи многочлен $(x^2-1)^n = (x-1)^n \cdot (x+1)^n$ як добуток, можна написати:

$$X_n(x) = (x+1)^n \cdot \frac{d^n(x-1)^n}{dx^n} + C_n^1 \cdot \frac{d(x+1)^n}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}} + \dots + \frac{d^n(x+1)^n}{dx^n} \cdot (x-1)^n.$$

Оскільки всі доданки, починаючи з другого, містять множник $x-1$ і, отже, перетворюються на 0, якщо $x=1$, то очевидно: $X_n(1) = 2^n \cdot n!$.

Аналогічно отримуємо: $X_n(-1) = (-1)^n \cdot 2^n \cdot n!$

Якщо у формулі, що дає загальне означення многочлена Льожондра $X_n(x)$, покласти, зокрема,

$$c_n = \frac{1}{2^n \cdot n!} = \frac{1}{(2n)!!},$$

то вийде многочлен, який найчастіше трапляється; його саме ми будемо надалі завжди позначати через $P_n(x)$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n((x^2-1)^n)}{dx^n}, \tag{118.2}$$

Він характеризується тим, що в точках $x = 1$ і $x = -1$ набуває значення

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n.$$

За допомогою формули Ляйбніца легко встановити далі, що многочлени Льожондра $X_n(x)$ задовольняють таке співвідношення:

$$(x^2-1) \cdot X_n'' + 2x \cdot X_n' - n(n+1) \cdot X_n = 0,$$

яке відіграє важливу роль у теорії цих многочленів.

Справді, вважаючи $y = (x^2-1)^n$, маємо

$$y' = 2nx(x^2-1)^{n-1}, \quad \text{так що} \quad (x^2-1)y' = 2nxy.$$

Візьмемо тепер $(n+1)$-і похідні від обох частин останньої рівності; за формулою Ляйбніца маємо:

$$(x^2-1)y^{(n+2)} + (n+1) \cdot 2x \cdot y^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2 \cdot y^{(n)} = 2nx \cdot y^{(n+1)} + (n+1) \cdot 2n \cdot y^{(n)}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Звідси
$$(x^2-1)y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y^{(n)}=0,$$
і після множення на c_n отримуємо потрібне співвідношення.

119. Диференціали вищих порядків

Звернемося тепер до диференціалів вищих порядків, вони також визначаються індуктивно. **Диференціалом другого порядку** або **другим диференціалом** функції $y=f(x)$ в деякій точці називається диференціал у цій точці від її (першого) диференціала і позначається:
$$d^2y=d(dy).$$

Диференціалом третього порядку або **третім диференціалом** називається диференціал від другого диференціала:
$$d^3y=d(d^2y).$$

Взагалі **диференціалом n-го порядку** або **n-м диференціалом** функції $y=f(x)$ називається диференціал від її $(n-1)$-го диференціала:
$$d^ny=d(d^{n-1}y).$$

Якщо користуватися функціональним позначенням, то послідовні диференціали можуть бути такі:
$$d^2f(x_0),\ d^3f(x_0),\ \dots,\ d^nf(x_0),\ \dots,$$
причому є можливість вказати те окреме значення $x=x_0$ — точку x_0, в якій беруться диференціали.

В обчисленні диференціалів вищих порядків дуже важливо пам'ятати, що dx є довільне і **незалежне від x число**, яке в диференціюванні за x слід розглядати як **сталий множник**. У такому разі, матимемо (увесь час припускаючи існування відповідних похідних):
$$\begin{aligned}&d^2y=d(dy)=d(y'\cdot dx)=dy'\cdot dx=(y''\cdot dx)\cdot dx=y''\cdot dx^2,\\&d^3y=d(d^2y)=d(y''\cdot dx^2)=dy''\cdot dx^2=(y'''\cdot dx)\cdot dx^2=y'''\cdot dx^3,\quad \text{і так далі.}\end{aligned}$$

Запис $dx^2,\ dx^3,\ \dots$ тощо завжди означає **степені** від диференціала: $(dx)^2,\ (dx)^3,\ \dots$. Диференціал від степеня позначатиметься так: $d(x^2),\ d(x^3),\ \dots$.

Загальний закон, що легко вгадується
$$d^ny=y^{(n)}\cdot dx^n \tag{119.1}$$

доводиться методом математичної індукції. З нього випливає, що

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n},$$

тому відтепер цей символ можна розглядати як **дріб**.

Скориставшись рівністю (119.1), легко тепер перетворити формулу Ляйбніца на диференціали. Достатньо помножити обидві її частини на dx^n, щоб отримати

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i}u \cdot d^i v \quad (d^0 u = u,\ d^0 v = v).$$

Сам Ляйбніц встановив свою формулу саме для диференціалів.

120. Порушення інваріантності форми для диференціалів вищих порядків

Згадуючи, що (перший) диференціал функції має властивість **інваріантності форми**, природно поставити питання, чи мають подібну властивість диференціали вищих порядків. Покажемо, наприклад, що вже другий диференціал цієї властивості **не має**.

Отже, нехай $y = f(x)$ і $x = \varphi(t)$, так що y можна розглядати як складену функцію від t: $y = f(\varphi(t))$. Її (перший) диференціал за t можна написати у формі $dy = y'_x \cdot dx$, де $dx = x'_t \cdot dt$ є функція від t. Обчислюємо другий диференціал за t:
$d^2y = d(y'_x \cdot dx) = dy'_x \cdot dx + y'_x \cdot d(dx)$. Диференціал dy'_x можна, знову користуючись інваріантністю форми (першого) диференціала, взяти у формі $dy'_x = y''_{x^2} \cdot dx$, так що остаточно

$$d^2y = y''_{x^2} \cdot dx^2 + y'_x \cdot d^2x, \tag{120.1}$$

тоді як за незалежної змінної x другий диференціал мав вигляд $d^2y = y''_{x^2} \cdot dx^2$. Звісно, вираз (120.1) для d^2y **загальніший**: якщо, зокрема, x — незалежна змінна, то $d^2x = 0$, і залишається лише перший член.

Розглянемо приклад. Нехай $y = x^2$, тож, поки x — незалежна змінна,

$$dy = 2x\,dx, \quad d^2y = 2\,dx^2.$$

Покладемо тепер $x = t^2$; тоді $y = t^4$, і

$$dy = 4t^3dt, \quad d^2y = 12t^2dt^2.$$

Новий вираз для dy може бути отриманий і зі старого, якщо туди підставити
$x = t^2,\ dx = 2t\,dt$. Інша річ з d^2y: зробивши таку ж підстанову, ми отримаємо $8t^2dt^2$

nebayduzhi.math@gmail.com

замість $12t^2dt^2$. Якщо ж продиференціювати рівність $dy = 2x\,dx$ за t, вважаючи x функцією від t, то, як і у (120.1), прийдемо до формули

$$d^2y = 2\,dx^2 + 2x\,d^2x.$$

Підставивши сюди $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, $d^2x = 2\,dt^2$, отримаємо вже правильний результат: $12t^2dt^2$.

Отже, якщо x перестає бути незалежною змінною, то диференціал другого порядку d^2y виражається через диференціали x **двочленною** формулою (120.1). Для диференціалів третього та подальших порядків кількість додаткових (переходячи до нової незалежної змінної) членів ще зросте. Отже, у виразах вищих похідних y''_{x^2}, y'''_{x^3}, ... через диференціали

$$y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y'''_{x^3} = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \ldots \tag{120.2}$$

вже **не можна** диференціали брати за будь-якою змінною, а лише за змінною x.

121. Параметричне диференціювання

Можна, втім, написати вирази похідних за x і через диференціали, взяті за будь-якою змінною t, але вони будуть набагато складніші. Саме, **вважаючи всі нижче написані диференціали обчисленими за** t, маємо послідовно

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \quad y''_{x^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_x = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{dx\cdot d^2y - d^2x\cdot dy}{dx^2}}{dx},$$

тобто

$$y''_{x^2} = \frac{dx\cdot d^2y - d^2x\cdot dy}{dx^3}; \tag{121.1}$$

потім,

$$y'''_{x^3} = \left(\frac{dx\cdot d^2y - d^2x\cdot dy}{dx^3}\right)'_x = \frac{d\left(\frac{dx\cdot d^2y - d^2x\cdot dy}{dx^3}\right)}{dx} =$$

$$= \frac{\frac{dx^3(dx\,d^3y - d^3x\,dy) - 3dx^2d^2x(dx\,d^2y - d^2x\,dy)}{dx^6}}{dx}$$

і остаточно:

$$y'''_{x^3} = \frac{dx(dx\,d^3y - d^3x\,dy) - 3d^2x(dx\,d^2y - d^2x\,dy)}{dx^5} \tag{121.2}$$

і так далі. Формули (121.1), (121.2) є **загальніші**; якщо в них вважати x незалежною змінною, то d^2x, d^3x будуть дорівнювати нулю — і ми повернемося до формул (120.2).

Отримані нами формули для похідних y за x виконують так зване **параметричне диференціювання**. Якщо x і y — функції від параметра t:

$$x = \varphi(y), \quad y = \psi(t),$$

то, як ми бачили в розд. 106, за відомих умов цим означується і y як функція від x: $y = f(x)$. За наявності послідовних похідних для x і y за t, існують відповідні похідні для y за x і виражаються отриманими вище формулами.

Іноді зручніше мати вираз похідних для y за x через похідні (а не диференціали) для x і y за t. Їх легко отримати з диференціальних виразів, розділивши чисельник та знаменник, відповідно, на dt, dt^3, dt^5, $\dots$. Отже, прийдемо до формул:

$$y'_x = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{x^2} = \frac{\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{d^2x}{dt^2}\cdot\dfrac{dy}{dt}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3} = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{\left(x'_t\right)^3};$$

аналогічно:

$$y'''_{x^3} = \frac{x'_t(x'_t y'''_{t^3} - x'''_{t^3} y'_t) - 3x''_{t^2}(x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t)}{\left(x'_t\right)^5}$$

і так далі.

122. Скінченні різниці

Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку $\mathcal{X}$ і всі значення x, які будуть траплятися, вважаються такими, що належать до цього проміжку. Зафіксувавши деякий приріст Δx змінної x (ми будемо припускати, для визначеності, $\Delta x > 0$, хоча ніщо не заважало б розглядати і $\Delta x < 0$), покладемо

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

і назвемо цей вираз **першою різницею** нашої функції. **Другою різницею** називається перша різниця від першої різниці:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = \Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x) = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x).$$

Вищі різниці визначаються індуктивно:

$$\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)].$$

Втім, для n-ї різниці може бути встановлена формула

$$\Delta^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i f(x + (n-1)\Delta x) =$$

$$= f(x + n\Delta x) - \frac{n}{1} f(x + (n-1)\Delta x) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} f(x + (n-2)\Delta x) - \ldots + (-1)^n f(x),$$

що виражає цю різницю безпосередньо через значення самої функції $f(x)$ у рівновіддалених точках

$$x,\ x+\Delta x,\ x+2\Delta x,\ \ldots,\ x+n\Delta x.$$

Ця формула легко доводиться методом математичної індукції, що можна залишити читачеві.

Порівняємо тепер ці скінченні різниці з похідними та диференціалами.

Теорема 122.1. *Припустимо, що функція $f(x)$ має $n-1$* ***неперервних*** *похідних*

$$f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x)$$

на замкненому проміжку $[x_0,\ x_0+n\Delta x]$ і скінченну n-у похідну $f^{(n)}(x)$, принаймні на відкритому проміжку $(x_0,\ x_0+n\Delta x)$. Тоді справедлива формула

$$\Delta^n f(x_0)=f^{(n)}(\xi_n)\cdot\Delta x^n\quad(x_0<\xi_n<x_0+n\Delta x).\tag{122.1}$$

Доведення. Для $n=1$ справа зводиться до формули скінченних приростів, яка є найпростіший окремий випадок формули (122.1). Маючи намір провести доведення нашого твердження методом математичної індукції, ми припустимо справедливість зміненої формули (122.1), яку можна одержати заміною n на $n-1$, зрозуміло, маючи відповідно змінені припущення, і доведемо (122.1), за зроблених припущень. З них випливає, що для функції $F(x)=\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ на проміжку $[x_0,\ x_0+(n-1)\Delta x]$ з надлишком виконуються умови застосування зміненої формули (122.1), і ми можемо написати

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x_0)&=\Delta^{n-1}[\Delta f(x_0)]=\Delta^{n-1}[F(x_0)]=F^{(n-1)}(\xi_{n-1})\cdot\Delta x^{n-1}=\\&=\left[f^{(n-1)}(\xi_{n-1}+\Delta x)-f^{(n-1)}(\xi_{n-1})\right]\cdot\Delta x^{n-1},\end{aligned}\tag{122.2}$$

де $x_0<\xi_{n-1}<x_0+(n-1)\Delta x$. Застосовуючи до правої частини цієї рівності формулу скінченних приростів, отримаємо безпосередньо формулу (122.1), причому

$$x_0<\xi_{n-1}<\xi_n<\xi_{n-1}+\Delta x<x_0+n\Delta x.$$

(Ми маємо право застосувати формулу скінченних приростів, бо функція неперервна на проміжку $[\xi_{n-1},\ \xi_{n-1}+\Delta x]$, а всередині нього має скінченну похідну $f^{(n)}(x)$.) □

Зауважимо, що, якщо похідна $f^{(n)}(x)$ існує також у точці x_0 і до того ж **неперервна** в цій точці, то зі співвідношення (122.1) для $\Delta x\to 0$ (тоді $\xi_n\to x_0$) випливає, що

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta^n f(x_0)}{\Delta x^n}.\tag{122.3}$$

Втім, ця цікава формула, яка встановлює можливість отримання n-ї похідної за допомогою лише **одного** граничного переходу, справедлива за єдиним припущенням, що ця похідна існує саме в точці x_0. Це означає, що в **деякому околі точки** x_0 існують похідні

$$f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x)$$

і, отже, за **досить малого** Δx, може бути застосована формула (122.2). Зважаючи на існування похідної $f^{(n)}(x_0)$, скориставшись формулою (96.1), можемо написати

$$f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)\cdot(\xi_{n-1} - x_0) + \alpha\cdot(\xi_{n-1} - x_0)$$

і

$$f^{(n-1)}(\xi_{n-1} + \Delta x) - f^{(n-1)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)\cdot(\xi_{n-1} + \Delta x - x_0) + \beta\cdot(\xi_{n-1} + \Delta x - x_0),$$

де α і β залежать від Δx і разом із ним прямують до нуля. Звідси і з (122.2) випливає (враховуючи, що $0 < \xi_{n-1} - x_0 < (n-1)\Delta x$, коли $\Delta x > 0$):

$$\Delta^n f(x_0) = \left[f^{(n)}(x_0) + \gamma\right]\cdot\Delta x^n,$$

де γ — нова нескінченна мала. Нарешті, ділячи цю рівність почленно на Δx^n і переходячи до границі, коли $\Delta x \to 0$, прийдемо до формули (122.3).

Підкреслимо, що вона справедлива **лише припускаючи, що існує похідна** $f^{(n)}(x_0)$. Границя праворуч може існувати і тоді, коли цієї похідної немає. (Отже, формула (122.3) аж ніяк не дає нового означення самого поняття n-ї похідної, **рівносильного** старому!)

Розглянемо, наприклад, функцію, означену так:

$$f(x) = x^3\cdot\sin\frac{1}{x}\quad(x \neq 0),\quad f(0) = 0,$$

взявши $x_0 = 0$. Для неї існує перша похідна

$$f'(x) = 3x^2\cdot\sin\frac{1}{x} - x\cdot\cos\frac{1}{x}\quad(x \neq 0),\quad f(0) = 0,$$

але немає в точці 0 другої похідної, бо відношення

$$\frac{f'(0+\Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \frac{3\Delta x^2\cdot\sin\frac{1}{\Delta x} - \Delta x\cdot\cos\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 3\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x} - \cos\frac{1}{\Delta x}$$

границі немає, коли $\Delta x \to 0$. Водночас вираз

$$\frac{\Delta^2 f(0)}{\Delta x^2} = \frac{f(0+2\Delta x) - 2f(0+\Delta x) + f(0)}{\Delta x^2} = \frac{8\Delta x^3\cdot\sin\frac{1}{2\Delta x} - 2\Delta x^3\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x^2} =$$
$$= 8\Delta x\cdot\sin\frac{1}{2\Delta x} - 2\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x} \to 0.$$

3.5. Формула Тейлора

123. Формула Тейлора для многочлена

Якщо $p(x)$ — цілий многочлен степеня n:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n, \tag{123.1}$$

то, послідовно диференціюючи його n раз:

$$\begin{aligned}
&p'(x) = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \dots + n \cdot a_n x^{n-1},\\
&p''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + \dots + (n-1)n \cdot a_n x^{n-2},\\
&p'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \dots + (n-2)(n-1)n \cdot a_n x^{n-3},\\
&\dots\\
&p^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot a_n
\end{aligned}$$

і вважаючи в усіх цих формулах $x = 0$, знайдемо **вирази коефіцієнтів многочлена через значення самого многочлена та його похідних в точці** $x = 0$

$$a_0 = p(0), \quad a_1 = \frac{p'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{p''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{p'''(0)}{3!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}.$$

Надамо ці значення коефіцієнтів у (123.1):

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!} x + \frac{p''(0)}{2!} x^2 + \frac{p'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{123.2}$$

Ця формула відрізняється від (123.1) **записом** коефіцієнтів.

Замість того щоб розкладати многочлен за степенями x, можна було б узяти його розклад за степенями $x - x_0$, де x_0 є деяке стале окреме значення x:

$$p(x) = A_0 + A_1 (x - x_0) + A_2 (x - x_0)^2 + A_3 (x - x_0)^3 + \dots + A_n (x - x_0)^n. \tag{123.3}$$

Вважаючи $x - x_0 = \xi$, $p(x) = p(x_0 + \xi) = P(\xi)$, для коефіцієнтів многочлена

$$p(x) = A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3 + \dots + A_n \xi^n.$$

маємо, за доведеним, вирази:

$$A_0 = P(0), \quad A_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad A_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \quad A_3 = \frac{P'''(0)}{3!}, \quad \dots, \quad A_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

Але

$$P(\xi) = p(x_0 + \xi), \quad P'(\xi) = p'(x_0 + \xi), \quad P''(\xi) = p''(x_0 + \xi), \quad \dots,$$

так що

$$P(0) = p(x_0), \quad P'(0) = p'(x_0), \quad P''(0) = p''(x_0), \quad \dots$$

і

$$A_0 = p(x_0), \quad A_1 = \frac{p'(x_0)}{1!}, \quad A_2 = \frac{p''(x_0)}{2!}, \quad A_3 = \frac{p'''(x_0)}{3!}, \ \dots, \ A_n = \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}, \tag{123.4}$$

тобто **коефіцієнти розкладу** (123.3) **виявилися вираженими через значення самого многочлена і його похідних в точці $x = x_0$.**

Підставимо в (123.3) вирази (123.4):

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{123.5}$$

Формула (123.5), як і її окремий (коли $x = x_0$) випадок (123.2), називається **формулою Тейлора (англ. Brook Taylor, Бру́к Те́йлор)**. Відомо, які важливі застосування вона має в алгебрі. Формулу (123.2) часто називають формулою Маклорена (шот. Colin Maclaurin, Ко́лін Макло́рен).

Зробимо (корисне для подальшого) очевидне **зауваження**, що якщо маємо многочлен $p(x)$ у вигляді

$$p(x) = c_0 + \frac{c_1}{1!}(x - x_0) + \frac{c_2}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{c_3}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{c_n}{n!}(x - x_0)^n,$$

то необхідно

$$p(x_0) = c_0, \quad p'(x_0) = c_1, \quad p''(x_0) = c_2, \ \dots, \ p^{(n)}(x_0) = c_n.$$

124. Розкладання довільної функції; додатковий член у формі Пеано

Звернемося тепер до розгляду **довільної** функції $f(x)$, що взагалі не є цілий многочлен. Припустимо, що для неї в деякій точці x_0, існують похідні всіх порядків до n-го включно. Це означає, точніше кажучи, що функція визначена та має похідні всіх порядків до $(n-1)$-го включно:

$$f'(x), \ f''(x), \ f'''(x), \ \dots, \ f^{(n-1)}(x)$$

на деякому проміжку $[a, b]$, що містить точку x_0 і, крім того, має похідну n-го порядку $f^{(n)}(x_0)$ у самій точці x_0 (якщо точка x_0 — один з кінців проміжку $[a, b]$, то, говорячи про похідні у цій точці, ми маємо на увазі **однобічні** похідні). Тоді, за зразком (123.5), і для функції $f(x)$ може бути складений многочлен

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{124.1}$$

Згідно з попереднім зауваженням, **цей многочлен і його похідні (до n-ї включно) у точці x_0 мають ті ж значення, що і функція $f(x)$ та її похідні.**

Але цього разу, якщо тільки $f(x)$ не є цілий многочлен n-го степеня, вже неможливо стверджувати рівності $f(x) = p(x)$. Многочлен $p(x)$ дає лише деяке **наближення функції** $f(x)$. Тому особливий інтерес набуває вивчення різниці

$$r(x) = f(x) - p(x). \tag{124.2}$$

Покажемо насамперед, що *в точці $x \to x_0$, ця різниця становить нескінченно малу порядку, вищого від n-го (порівнюючи з $x - x_0$):*

$$r(x) = o\left((x - x_0)^n\right). \tag{124.3}$$

За властивістю многочлена $p(x)$, для функції $r(x)$, очевидно, будуть виконуватися рівності

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = r'''(x_0) = ... = r^{(n)}(x_0) = 0. \tag{124.4}$$

Ми зараз доведемо **загальне** твердження.

Теорема 124.1. *Якщо для **будь-якої функції** $r(x)$, що має в точці x_0 похідні до n-го порядку включно, виконуються умови* (124.4)*, то справедливе співвідношення* (124.3).

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для $n = 1$ це твердження має вигляд: якщо функція $r(x)$ має в точці x_0 похідну (першого порядку) і задовольняє умови

$$r(x_0) = r'(x_0) = 0,$$

то

$$r(x) = o(x - x_0).$$

Це можна перевірити так:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{r(x) - r(x_0)}{x - x_0} = r'(x_0) = 0.$$

Припустимо тепер, що сформульоване вище твердження справедливе для будь-якого $n \geqslant 1$, і **доведемо**, що воно залишається справедливим і для $n+1$, тобто: *якщо **для деякої функції** $r(x)$, що має в точці x_0 похідні до $(n+1)$-го порядку включно, виконуються умови*

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = r'''(x_0) = ... = r^{(n)}(x_0) = r^{(n+1)}(x_0) = 0, \tag{124.5}$$

то

$$r(x) = o\left((x - x_0)^{n+1}\right). \tag{124.6}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Зі (124.5) випливає, що функція $r'(x)$ задовольняє умови типу (124.4), а значить для неї за **припущеним** уже маємо:

$$r'(x) = o((x - x_0)^n).$$

Але, за формулою скінченних приростів (112.1),

$$r(x) = r(x) - r(x_0) = r'(c) \cdot (x - x_0),$$

де c міститься між x_0 і x; оскільки $|c - x_0| < |x - x_0|$, то

$$r'(c) = o((c - x_0)^n) = o((x - x_0)^n),$$

і ми остаточно приходимо до (124.6), що й потрібно було довести. □

Отже, наше твердження виправдане для будь-якого натурального n, і для різниці (124.2) справді виконується співвідношення (124.3). Зважаючи на (124.1), ми отримуємо формулу

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \end{aligned} \tag{124.7}$$

яка від формули (123.5) для многочлена відрізняється наявністю **додаткового члена** (124.3). У зазначеній формі додатковий член навів Пеано (іт. Giuseppe Peano, Джузéппе Пеáно). Формула (124.7) називається *формулою Тейлора з додатковим членом у формі Пеано.*

Доведена формула — це природне узагальнення формули (96.3), яку можна написати так:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0);$$

вона відповідає $n = 1$. Там функція $f(x)$, з точністю до нескінченно малої порядку вищого за перший, була задана у вигляді **лінійної функції**, тут же ми задаємо її цілим многочленом **n-го степеня**, але вже з точністю до нескінченно малої порядку вищого від n-го.

Легко показати, що такий запис функції $f(x)$ єдиний, тобто що якщо маємо одночасно поблизу x_0

$$f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots + A_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

і

$$f(x) = A'_0 + A'_1(x - x_0) + A'_2(x - x_0)^2 + \dots + A'_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

то необхідно

$$A_0 = A'_0,\ A_1 = A'_1,\ A_2 = A'_2,\ \dots,\ A_n = A'_n.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Справді, з тотожності

$$A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \dots + A_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) =$$
$$= A'_0 + A'_1(x-x_0) + A'_2(x-x_0)^2 + \dots + A'_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

для $x \to x_0$ одразу отримуємо $A_0 = A'_0$. Знищивши ці члени і ділячи на $x - x_0$, отримуємо

$$A_1 + A_2(x-x_0) + \dots + A_n(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1}) =$$
$$= A'_1 + A'_2(x-x_0) + \dots + A'_n(x-x_0)^{n-1} + o((x-x_0)^{n-1}),$$

звідки, аналогічно, $A_1 = A'_1$, і так далі.

Іноді зручно формулу (124.7) застосовувати в іншій формі. Додатковий член $r(x)$ можна подати так:

$$r(x) = \frac{\alpha}{n!}(x-x_0)^n,$$

де α залежить від x і прямує до 0 разом із $x-x_0$. Підставляючи цей вираз, отримаємо

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha}{n!}(x-x_0)^n. \quad (124.8)$$

Далі, переносячи у формулі (124.7) $f(x_0)$ ліворуч і вважаючи $x - x_0 = \Delta x$, можна переписати її у вигляді

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + \frac{1}{2!}f''(x_0)\cdot\Delta x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\cdot\Delta x^n + o(\Delta x^n). \qquad (124.9)$$

У цій формі вона ще ближче до формули (96.3);

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x).$$

Остання виділяє лише один головний член із нескінченно малого приросту функції $\Delta f(x_0)$ — вважаючи, як завжди, Δx за основну нескінченно малу, тоді як у формулі (124.9) виписані члени всіх порядків до n-го включно, причому всі вони **найпростіші** нескінченно малі в термінах розд. 63.

Отже, з точністю до додаткового члена, **приріст функції розкладено за степенями приросту незалежної змінної.**

Зрештою, згадуючи, що

$$f'(x_0)\cdot\Delta x = df(x_0),\ \ f''(x_0)\cdot\Delta x^2 = d^2f(x_0),\ \ f^{(n)}(x_0)\cdot\Delta x^n = d^nf(x_0),$$

ми можемо переписати (124.9) у такій формі:

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0) + \dots + \frac{1}{n!}d^{(n)}f(x_0) + o(\Delta x^n).$$

Звідси бачимо, що (для $\Delta x \to 0$) послідовні диференціали становлять, з точністю до факторіалів у знаменнику, саме найпростіші нескінченно малі члени відповідних порядків у розкладі нескінченно малого приросту функції.

125. Приклади

Найпростіше виглядає формула Тейлора, якщо $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \qquad (125.1)$$

Цю формулу пов'язують з ім'ям Маклорена.

До цього окремого випадку завжди можна звести справу, взявши $x - x_0$ за нову незалежну змінну.

Розглянемо, як приклад, деякі конкретні розклади за цією формулою для елементарних функцій.

1) Нехай $f(x) = e^x$; тоді $f^{(k)}(x) = e^x$ для будь-якого $k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$. Оскільки в цьому випадку $f(0) = 1,\ f^{(k)}(0) = 1$, то за формулою (125.1),

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2) Якщо $f(x) = \sin x$, то $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$, так що

$$f(0) = 0, \quad f^{(2m)}(0) = \sin m\pi = 0,$$

$$f^{(2m-1)}(0) = \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{m-1} \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Тому, поклавши у формулі (125.1) $n = 2m$, маємо

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}).$$

3) Аналогічно, для $f(x) = \cos x$:

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f(0) = 1, \quad f^{(2m)}(0) = (-1)^m,\ f^{(2m-1)}(0) = 0 \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Отже, (якщо взяти $n = 2m + 1$):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}).$$

4) Розглянемо тепер степеневу функцію x^m, де m — не натуральне число і не нуль. Тоді для $x \to 0$ або сама функція (якщо $m < 0$), або її похідні (починаючи з деякого порядку за $n > m$) **нескінченно зростають**. Отже, тут уже не можна брати $x_0 = 0$.

Візьмемо $x_0 = 1$, тобто розкладатимемо x^m за степенями $x - 1$. Втім, як уже згадано, можна ввести нову змінну $x - 1$; ми її, як і раніше, позначатимемо через x, і розкладатимемо функцію $(1 + x)^m$ за степенями x.

Як ми знаємо (пр. 116.2),

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\dots(m-(k-1))(1+x)^{m-k},$$

так що

$$f(0) = 1, \quad f^{(k)}(0) = m(m-1)\dots(m-(k-1)).$$

Розклад має вигляд

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n).$$

Зокрема, наприклад, для $n = 2$ і $m = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ матимемо

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2),$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).$$

Перший із цих розкладів дуже легко виходить — додатковий член тут просто дорівнює $\frac{x^3}{1+x}$. Другий і третій потребували б довших викладок (порівняйте з розд. 63).

5) Якщо перейти до логарифмічної функції $\ln x$, яка прямує до $-\infty$, коли $x \to +0$, то, як і в попередньому прикладі, ми вважатимемо за краще розглядати функцію $f(x) = \ln(1 + x)$ і розкладати її за степенями x.

Тоді (пр. 116.3)

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k};$$

$$f(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!.$$

(Ми вже домовилися, що $0! = 1$.) Звідси

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

6) Нехай тепер $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Ми мали в пр. 118.4 значення її похідних для $x = 0$:

$$f^{(2m)}(0) = 0, \quad f^{(2m-1)}(0) = (-1)^{m-1}(2m-2)!,$$

тому її розклад ми можемо записати у вигляді

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + o(x^{2m}).$$

7) Для функції $f(x) = \operatorname{tg} x$ формула коефіцієнтів у формулі Тейлора складна. Проте кілька перших членів її написати нескладно. Оскільки, наприклад,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x) = 2\frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad f'''(x) = 2\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}, \quad f^{(4)}(x) = 8\sin x\frac{2+\sin^2 x}{\cos^5 x},$$

то

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = 0,$$

тож

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Користуючись відомими розкладами, можна, вже не обчислюючи похідних безпосередньо, писати розклад і для складніших функцій. Наприклад, попередня формула могла б бути отримана з розкладів для $\sin x$ і $\cos x$. Наведемо нові приклади; всі степені x, до вказаного включно, ми будемо точно враховувати, а вищі степені (не виписуючи їх) будемо відразу вносити в додатковий член.

8) Написати розклад функції $e^{\sin x}$ до x^3. Використаємо приклад 1),

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(x^3).$$

Слід би написати $o(\sin^3 x)$, але, зважаючи на еквівалентність нескінченно малих x та $\sin x$, це все одно, що $o(x^3)$.

Використаємо приклад 2)

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4),$$

так що

$$e^{\sin x} = 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{6}\sin^3 x + o(x^3).$$

Член із x^3 зникає і остаточно

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3).$$

Аналогічно,

$$e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

9) Написати розклад функції $\ln\cos x$ до члена з x^6. Згідно з 5),

$$\ln\cos x = \ln(1 + (\cos x - 1)) = (\cos x - 1) - \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + \frac{1}{3}(\cos x - 1)^3 + o(x^6).$$

Оскільки $1-\cos x$ одного порядку з x^2 (розд. 61), то $o((\cos x-1)^3)$ є $o(x^6)$. А зважаючи на 3),

$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^7);$$

звідси

$$\ln\cos x = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6\right)$$

або, після зведення,

$$\ln\cos x = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6).$$

Аналогічно,

$$\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

і

$$\ln\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 - \frac{1}{2835}x^6 + o(x^6).$$

Усі ці розклади, отримані без використання формули Тейлора, могли б, звісно, бути отримані й за цією формулою, і до того ж точно з тими ж коефіцієнтами, зважаючи на встановлену вище єдиність подібного розкладу функції.

Зауваження. Оскільки розглянуті тут функції мали в околі точки $x = 0$ похідні всіх порядків, то ми нічим не були обмежені у виборі числа n у формулі (125.1), тобто могли продовжувати розкладання цих функцій аж до будь-якого степеня x.

126. Інші форми додаткового члена

Формула Тейлора з додатковим членом у формі Пеано має різноманітні застосування (дивіться наступний розділ); але всі вони, так би мовити, “локального” характеру, тобто стосуються самої точки x_0. Якщо в них іншим разом і йдеться про інакші значення x, то ці значення вважаються “досить близькими” до x_0 і наперед не можуть бути довільно взятими.

Тимчасом природно спробувати використати многочлен $p(x)$ як **наближення до функції** $f(x)$, за допомогою якого вона може бути обчислена з необхідним степенем точності.

Щоб многочлен $p(x)$ був придатний для цієї ролі, необхідно мати можливість оцінювати різницю (124.2) **для заданого** x_0. І тут форма Пеано, що характеризує лише прямування $r(x)$ до 0, коли $x \to 0$, служити не може. Вона не дає змогу встановлювати для яких значень x многочлен $p(x)$ відтворює функцію $f(x)$ з наперед вказаним степенем точності; нічого не говорить вона і про те, як можна було б для заданого x впливати на величину додаткового члена $r(x) = x_n(x)$ через збільшення n, і так далі. Потрібно пам'ятати, що додатковий член $r(x)$ залежить, взагалі кажучи, від n, для підкреслення цієї обставини ми надалі позначатимемо його через $r_n(x)$.

Тому ми звернемося до виведення **інших форм** додаткового члена $r_n(x)$. Для визначеності розглядатимемо проміжок $[x_0,\ x_0 + H]$ $(H > 0)$ праворуч від точки x_0, і вважатимемо функцію $f(x)$ визначеної на цьому проміжку; випадок, коли функція задана на проміжку $[x_0 - H,\ x_0]$, вичерпується аналогічно.

Цього разу зробимо важчі припущення, власне, припустимо, що на всьому проміжку $[x_0,\ x_0 + H]$ існують і неперервні перші n похідних:

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \dots,\ f^{(n)}(x)$$

і, крім того, принаймні на відкритому проміжку $(x_0,\ x_0+H)$ існує і скінченна $(n+1)$-а похідна $f^{(n+1)}(x)$.

Зазначимо, що, зважаючи на (124.1) і (124.2),

$$r_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (126.1)$$

Фіксуємо тепер будь-яке значення x із проміжку $[x_0,\ x_0 + H]$ і **за зразком** правої частини формули (126.1), замінюючи стале число x_0 на змінну z, складемо нову, допоміжну функцію:

$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n,$$

причому незалежну змінну z вважаємо такою, що змінюється на проміжку $[x_0, x]$. На цьому проміжку функція $\varphi(z)$ неперервна і набуває на кінцях його значення (126.1):

$$\varphi(x_0) = r_n(x), \quad \varphi(x) = 0.$$

Крім того, на проміжку (x_0, x) існує похідна

$$\varphi'(z) = -f'(z) - \left(\frac{f''(z)}{1!}(x-z) - f'(z)\right) - \left(\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 - \frac{f''(z)}{1!}(x-z)\right) -$$

$$- \left(\frac{f^{(4)}(z)}{3!}(x-z)^3 - \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2\right) - \dots - \left(\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\right)$$

або, після спрощення,

$$\varphi'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

Візьмемо тепер довільну функцію $\psi(z)$, неперервну на проміжку $[x_0, x]$ і, яка має похідну $\psi'(z)$, що не дорівнює нулю, принаймні на відкритому проміжку (x_0, x).

До функцій $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ застосуємо формулу Коші (розд. 114):

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

де

$$x_0 < c < x \quad \text{або} \quad c = x_0 + \theta(x - x_0) \quad (0 < \theta < 1).$$

Оскільки

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(x_0) = r_n(x), \quad \varphi'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

то

$$r_n(x) = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n.$$

Тепер, якщо підставляти замість $\psi(z)$ будь-які функції, що задовольняють поставлені умови, ми отримаємо різні форми додаткового члена $r_n(x)$.

Нехай $\psi(z) = (x-z)^p$, де $p > 0$. Маємо:

$$\psi'(z) = -p(x-z)^{p-1} \quad (x_0 < z < x).$$

Очевидно, що ця функція задовольняє поставлені вимоги. Тому

$$r_n(x) = \frac{-(x-x_0)^p}{-p(x-c)^{p-1}} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p}(x-c)^{n+1-p}(x-x_0)^p.$$

Оскільки $c = x_0 + \theta(x-x_0)$, то $x - c = x - x_0 - \theta(x-x_0) = (1-\theta)(x-x_0)$, і остаточно

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Цей вираз називається **додатковим членом у формі** Шльомільха та Роша;
Шльомільх (нім. Oskar Schlömilch, О́скар Шльо́мільх),
Рош (фр. Édouard Roche, Еду́ард Ро́ш).

З нього, надаючи p конкретні значення, можна отримувати різні форми додаткового члена. Поклавши $p = n+1$, **отримаємо додатковий член у формі Лаґранжа**:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (x_0 \lesseqgtr c \lesseqgtr x),$$

який виглядає особливо просто. Він схожий на наступний черговий член формули Тейлора, лише замість того, щоб обчислити $(n+1)$-у похідну в точці x_0, цю похідну беруть для деякого середнього (між x_0 і x) значення c.

Отже, формула Тейлора з додатковим членом у формі Лаґранжа має вигляд

$$\begin{gathered} f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+ \\ +\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (x_0\leqslant c\leqslant x). \end{gathered} \tag{126.2}$$

Якщо перенести в ній член $f(x_0)$ наліво, то легко побачити в ній пряме узагальнення формули скінченних приростів (розд. 112), яку можна написати так

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)\cdot(x-x_0).$$

Хоча найбільше користуються додатковим членом саме у формі Лаґранжа, через її простоту, все ж таки в окремих випадках ця форма виявляється непридатною для оцінювання додаткового члена, і доводиться вдаватися до інших форм, менш простих. Згадаємо тут **про додатковий член у формі Коші**, який випливає із загальної форми Шльомільха та Роша для $p=1$:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}\cdot(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}.$$

127. Наближені формули

Припустимо, для простоти, у формулі (126.2) $x_0=0$, а замість c станемо писати $\theta\cdot x$, де $0<\theta<1$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{127.1}$$

Якщо відкинути додатковий член, то вийде **наближена формула**:

$$f(x)\doteq f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

що замінює функцію складної природи цілим многочленом. Але цього разу ми можемо **оцінити похибку цієї формули**, бо вона якраз і дорівнює (за абсолютною величиною) відкинутому члену. Наприклад, якщо абсолютна величина $(n+1)$-ї похідної (принаймні якщо аргумент змінюється між 0 і x) обмежена числом M, то

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

По приклади звернемося до елементарних функцій. Нам немає потреби повторювати виклади розд. 125, лише додатковий член ми писатимемо в новій формі.

1) $f(x) = e^x$. Наближена формула

$$e^x \doteq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!};$$

оскільки додатковий член тут

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta \cdot x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

то, наприклад, для $x > 0$ похибка оцінюється так:

$$|r_n(x)| < e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Зокрема, якщо $x = 1$,

$$e \doteq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

$$|r_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Подібною формулою ми вже користувалися в розд. 37 для наближеного обчислення числа e, але оцінка додаткового члена, отримана іншим способом, була точніша.

2) $f(x) = \sin x$; отримаємо

$$\sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

У цьому випадку додатковий член:

$$r_{2m}(x) = \frac{\sin\left(\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!} \cdot x^{2m+1} = (-1)^m \cos\theta x \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

і похибка оцінюється легко:

$$|r_{2m}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Зокрема, якщо ми задовольняємося одним членом та вважаємо

$$\sin x \doteq x,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

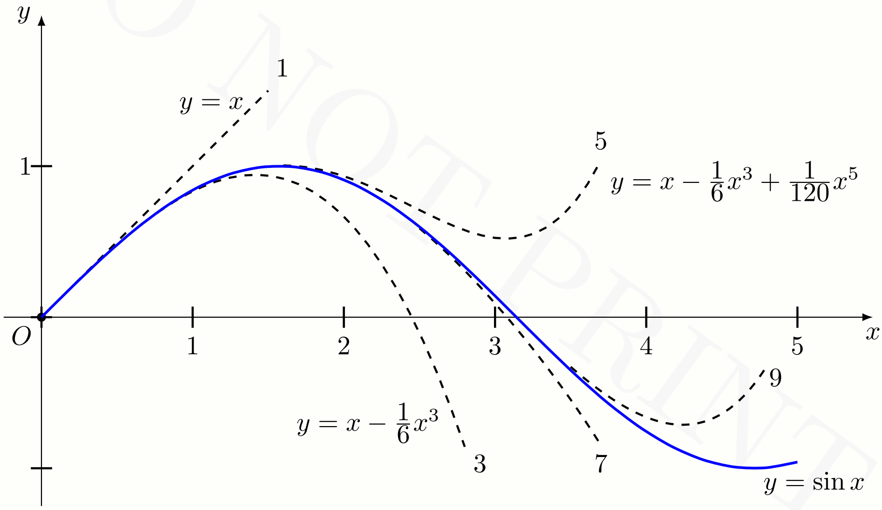


Рис. 127.1

то для того, щоб похибка була менша, скажімо, ніж 0,001, достатньо взяти (вважаючи $x > 0$)

$$\frac{x^3}{6} < 0{,}001$$

або

$$x < 0{,}1817,$$

що наближено дорівнює 10°. Користуючись двочленною формулою

$$\sin x \doteq x - \frac{x^3}{6},$$

для досягнення тієї ж точності вже достатньо взяти

$$\frac{x^5}{120} < 0{,}001$$

або

$$x < 0{,}6544 (\doteq 37{,}5^\circ);$$

якщо ж обмежитися кутами $x < 0{,}4129 (\doteq 23{,}5^\circ)$, то похибка буде навіть $< 0{,}0001$ і так далі.

Ми бачимо, що зі збільшенням числа членів многочлена Тейлора він з дедалі більшою точністю і на більшому протязі відтворює початкову функцію. Цей факт наочно ілюструє рис. 127.1, де поряд з графіком функції $y = \sin x$ зображені графіки многочленів

$$y = x, \quad y = x - \frac{x^3}{6}, \quad y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad \text{і так далі.}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

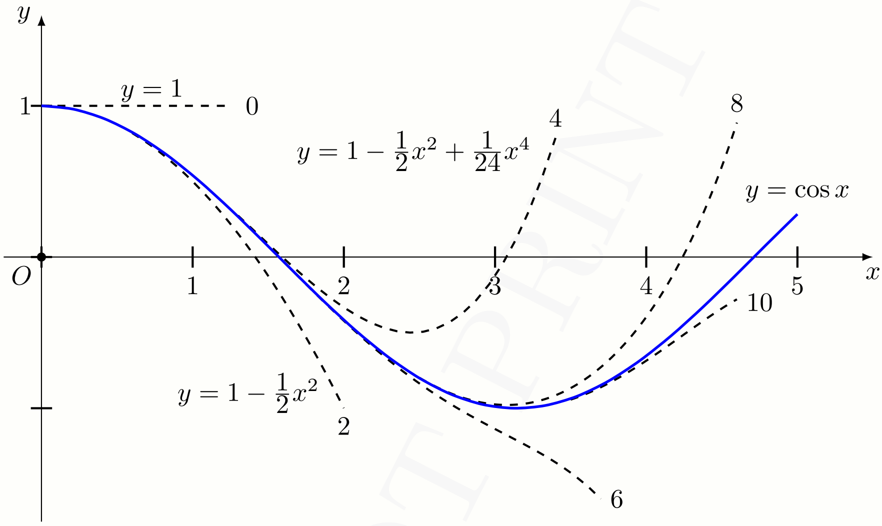


Рис. 127.2

3) Аналогічно, для $f(x) = \cos x$ маємо

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

причому

$$r_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} \cos\theta x \cdot \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

так що

$$|r_{2m+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

Наприклад, для формули

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2}$$

похибка

$$|r_3(x)| \leqslant \frac{x^4}{24}$$

і напевно буде, скажімо, $< 0{,}0001$ для $x < 0{,}2213 (\doteq 13^\circ)$ тощо. На рис. 127.2 представлені для порівняння графіки функції $y = \cos x$ та графіки послідовних многочленів

$$y = 1, \quad y = 1 - \frac{x^2}{4}, \quad y = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24} \quad \text{і так далі.}$$

Ми звертаємо увагу читача на суттєве просування вперед проти формул з розд. 62, розд. 63, розд. 107: *тепер ми вміємо отримувати межі похибки і маємо формули будь-якої точності.*

nebayduzhi.math@gmail.com

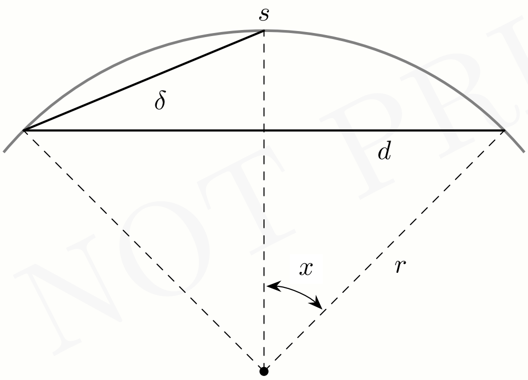


Рис. 127.3

Вкажемо ще, що формула Тейлора є джерелом побудови наближених формул зовсім іншого типу.

4) Розглянемо *формулу* Хаґенса (нід. Christiaan Huygens, Крі́стіан Ха́ґенс) для наближеного випрямлення дуги кола, малої порівнюючи з радіусом.

Нехай s — довжина дуги, d — відповідна хорда, а δ — хорда, що відповідає половині дуги (рис. 127.3). Потрібно записати s **якомога точніше** наближеною формулою вигляду $s \doteq A \cdot d + B \cdot \delta$, де $A,\ B$ — коефіцієнти, що потрібно знайти.

Якщо r — радіус кола, а $2x$ — центральний кут, що відповідає дузі s, то маємо

$$d = 2r \cdot \sin x = 2r\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{\theta'}{120}x^5\right) \quad (0 < \theta' < 1)$$

і, аналогічно, замінюючи x на $\frac{x}{2}$,

$$\delta = 2r \cdot \sin\frac{x}{2} = 2r\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{48}x^3 + \frac{\theta''}{3840}x^5\right) \quad (0 < \theta'' < 1).$$

Звідси

$$Ad + B\delta = 2r\left[\left(A + \frac{1}{2}B\right)\cdot x - \left(\frac{1}{6}A + \frac{1}{48}B\right)\cdot x^3 + \left(\frac{\theta'}{120}A + \frac{\theta''}{3840}B\right)\cdot x^5\right],$$

тоді як $s = 2rx$. Доцільно вибрати A і B так, щоб було

$$A + \frac{1}{2}B = 1, \quad \frac{1}{6}A + \frac{1}{48}B = 0,$$

бо тоді різниця між лівою та правою частинами аналізованої формули буде лише в членах, що містять x^3. Для коефіцієнтів A і B отримуємо значення $A = -\frac{1}{3},\ B = \frac{8}{3}$, і формула набуває вигляду

$$s = \frac{8\delta - d}{3} = 2\delta + \frac{2\delta - d}{3}.$$

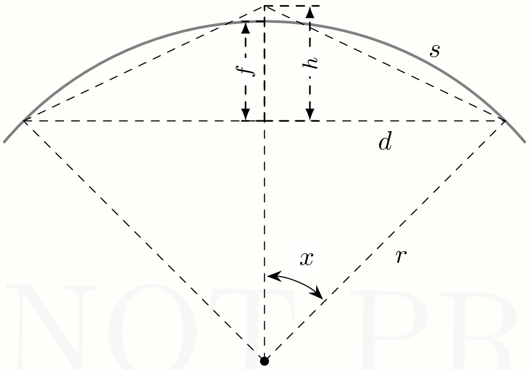


Рис. 127.4

Її похибка Δ, як легко побачити, оцінюється так:

$$|\Delta| < r \cdot \frac{x^5}{180}\,.$$

Наприклад, для центрального кута 30°, тобто $x = \frac{\pi}{12}$, маємо, згідно з цим оцінюванням, $|\Delta| < r \cdot 0{,}000\,007$; насправді $s = r \cdot 0{,}523\,599\ldots$, а з формули Хаґенса випливає $s = 0{,}523\,593\ldots$, отже, розбіжність не перевищує встановленої межі.

5) Для тієї ж мети Чебишов (рос. Pafnuty Chebyshov, Пафну́тій Чебишо́в) дав таке правило: *дуга приблизно дорівнює сумі рівних сторін рівнобічного трикутника, побудованого на хорді, і з висотою* $\sqrt{\frac{4}{3}}$ *стрілки* (рис. 127.4).

Покладемо поки $h = \gamma f$; нижче з'ясується, що, узявши $\gamma = \sqrt{\frac{4}{3}}$, ми справді отримуємо — в деякому розумінні — **найкраще** наближення.

Як ми бачили тільки що,

$$\frac{1}{2}d = r \cdot \sin x = r\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{\theta_1}{120}x^5\right) \quad (0 < \theta_1 < 1);$$

аналогічно,

$$h = \gamma \cdot f = \gamma r(1 - \cos x) = \gamma r\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{\theta_2}{24}x^4\right) \quad (0 < \theta_2 < 1).$$

Позначаючи через s^* суму сторін рівнобічного трикутника, про яку згадується в правилі Чебишова, маємо

$$s^* = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}d\right)^2 + h^2} = 2rx\sqrt{\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{\theta_1}{120}x^4\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{1}{2}x - \frac{\theta_2}{24}x^3\right)^2} =$$

$$= 2rx\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{1}{3}\right)x^2 + ax^4 + bx^6 + cx^8}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Тепер, саме для того, щоб знищити під коренем член з x^2, покладемо його коефіцієнт рівним 0, звідки і знаходимо $\gamma = \sqrt{\frac{4}{3}}$!

Для оцінювання похибки перепишемо вираз для s^* так

$$s^* = 2rx\sqrt{1 + Ax^4}, \tag{127.2}$$

причому вираз A виявиться таким, що містить другий і четвертий степінь x. Припускаючи $x < \frac{\pi}{2}$, матимемо: $x^2 < 2{,}5,\ x^4 < 6{,}5$, тоді для A вийде оцінка $|A| < 0{,}06$, отже, $|A|x^4 < 0{,}4$.

Позначивши для зручності Ax^4 через y, за формулою скінченних приростів (розд. 112), будемо мати

$$\sqrt{1 + Ax^4} = \sqrt{1 + y} = 1 + \frac{y}{2\sqrt{1 + \theta y}} \quad (0 < \theta < 1).$$

Останній дріб оцінюється так:

$$\left|\frac{y}{2\sqrt{1 + \theta y}}\right| < \frac{|y|}{2\sqrt{1 - |y|}} = \frac{|A|x^4}{2\sqrt{1 - |A|x^4}} < \frac{0{,}06x^4}{2\sqrt{1 - 0{,}4}} < \frac{1}{2} \cdot 0{,}1x^4.$$

Зіставляючи вираз (127.2) для s^* зі щойно отриманими результатами, бачимо, що

$$s^* = s + \varrho, \quad |\varrho| < 0{,}1rx^5.$$

Порядок похибки той самий, що й у формулі Хаґенса.

Ми повернемося до формули Тейлора з додатковим членом в главі 11 другого тому, присвяченій нескінченним рядам; там ця формула відіграватиме важливу роль.

3.6. Інтерполяція

128. Найпростіша задача інтерполяції. Формула Лаґранжа

Уявимо, що для деякої функції $f(x)$, визначеної на проміжку $[a, b]$, обчислені $m+1$ її значень у точках $x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_m$ проміжку:

$$f(x_0),\ f(x_1),\ \dots,\ f(x_m), \tag{128.1}$$

і потрібно **за цими значеннями** обчислити значення $f(x)$ для будь-якого **нового** значення x.

У цьому полягає *найпростіша задача* ***інтерполяції***. Звісно, у такій поставі задачі є багато невизначеного. Зазвичай задачу розуміють так: шукається цілий многочлен $L(x)$ найнижчого степеня, який у заданих точках x_i $(i = 0,\ 1,\ \dots,\ m)$, що називаються *вузлами інтерполяції*, набуває тих же значень $f(x_i)$, що і функція $f(x)$, і **приблизно** вважають для будь-якого x з $[a, b]$;

$$f(x) \doteq L(x). \tag{128.2}$$

Така наближена рівність називається інтерполяційною формулою. Отже, потрібно насамперед **знайти** інтерполяційну формулу, а потім, за певних припущень щодо функції $f(x)$, **оцінити** похибку наближеної формули (128.2).

Для знаходження многочлена $L(x)$, що задовольняє умови

$$L(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0,\ 1,\ \dots,\ m), \tag{128.3}$$

зручно ввести многочлени m-го степеня

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_m)}{(x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_m)} \quad (k = 0,\ 1,\ \dots,\ m),$$

які, відповідно до значка, набувають значення 1, коли $x = x_k$, і дорівнюють 0, коли $x = x_i$, якщо $i \neq k$. Тепер ясно, що многочлен

$$L(x) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k) l_k(x) \tag{128.4}$$

задовольняє всі умови (128.3). Степінь цього многочлена не вищий від m і, отже, умовами (128.3) він визначається однозначно, його називають *інтерполяційним многочленом Лаґранжа*, а наближену рівність (128.2) — *інтерполяційною формулою Лаґранжа.*

Зауважимо, що многочлен $l_k(x)$ можна написати стисліше, якщо ввести вираз

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_m),$$

nebayduzhi.math@gmail.com

що дорівнює 0 саме у вузлах інтерполяції $x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_m$. Очевидно

$$(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_m)=\frac{\omega(x)}{x-x_k}\quad(x\neq x_k),$$

а

$$\begin{aligned}&(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_m)=\\&=\lim_{x\to x_k}\frac{\omega(x)}{x-x_k}=\lim_{x\to x_k}\frac{\omega(x)-\omega(x_k)}{x-x_k}=\omega'(x_k).\end{aligned}$$

Отже,

$$l_k(x)=\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\quad\text{і}\quad L(x)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\cdot f(x_k).$$

129. Додатковий член формули Лаґранжа

Звернемося тепер до оцінки різниці $f(x)-L(x)$, де x є будь-яке **фіксоване** значення на проміжку $[a,b]$, відмінне від вузлів інтерполяції. *Припустимо, що функція* $f(z)$ *на цьому проміжку має похідні всіх порядків до* $(m+1)$*-го включно.*

Хоч би яка була константа K, функція

$$\varphi(z)=f(z)-L(z)-K\cdot\omega(z)$$

теж має $m+1$ похідну і до того ж дорівнює 0 у вузлах x_i $(i=0,\ 1,\ \dots,\ m)$. Ми виберемо тепер константу K так, щоб і для $z=x$ було $\varphi(x)=0$, тобто покладемо

$$K=\frac{f(x)-L(x)}{\omega(x)}\tag{129.1}$$

(оскільки $x\neq x_i$, то $\omega(x)\neq 0$). За теоремою Ролля (теор. 111.1) на $m+1$ проміжках між $m+2$ коренями $x,\ x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_m$ функції $\varphi(z)$ знайдеться $m+1$ різних коренів її похідної $\varphi'(z)$. Застосовуючи знову теорему Ролля до функції $\varphi'(z)$ і до m проміжків між її $m+1$ коренями, встановимо існування m різних коренів другої похідної $\varphi''(z)$ і так далі. Продовжуючи це міркування, на $(m+1)$-м його кроці прийдемо до існування кореня ξ $(m+1)$-ї похідної $\varphi^{(m+1)}(z)$, так що

$$\varphi^{(m+1)}(\xi)=0\quad(a<\xi<b).\tag{129.2}$$

Але $L^{(m+1)}(z)\equiv 0$, бо степінь многочлена $L(z)$ не вищий від m; а
$\omega^{(m+1)}(z)\equiv(m+1)!$. Враховуючи означення допоміжної функції $\varphi(z)$, маємо

$$\varphi^{(m+1)}(z)=f^{(m+1)}(z)-K\cdot(m+1)!,$$

так що з (129.2) випливає, що

$$K = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}.$$

Остаточно, з (129.1) знаходимо:

$$f(x) = L(x) + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}\omega(x) \quad (a < \xi < b). \tag{129.3}$$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_m),$$

Це *інтерполяційна формула Лаґранжа з додатковим членом.* На відміну від (128.2), вона **точна**!

Зауваження. Якщо на проміжку $[a, b]$

$$max|f^{(m+1)}(z)| = M_{m+1} < \infty,$$

то, раз на цьому проміжку $|\omega(z)| \leqslant (b-a)^{m+1}$, отримуємо таку оцінку для похибки формули (128.2)

$$|f(x) - L(x)| \leqslant \frac{M_{m+1}}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}.$$

Права частина прямує до нуля, коли $m \to \infty$, лише для дуже вузького класу функцій $f(x)$; наприклад, це буде виконуватися для таких функцій, які на $[a, b]$ диференціюються будь-яке число разів, причому всі їх похідні обмежені **однією** сталою M. У цьому разі в міру зростання **кількості** вузлів інтерполяції і **незалежно від закону**, за яким вибираються ці вузли, похибка формули (128.2) рівномірно прямуватиме до нуля. Як довів Марчинкевич (пол. Józef Marcinkiewicz, Ю́зеф Марчинке́вич), для кожної окремо взятої неперервної функції можна досягти такого ж ефекту, належно вибираючи послідовні системи вузлів. Але, за теоремою Фабара (нім. Georg Faber, Ґео́рґ Фа́бар), не існує такого закону вибору вузлів, який годився б у цьому сенсі для всіх неперервних функцій одночасно. У подробиці відносно цих і подібних до них питань ми тут заглиблюватися не маємо можливості.

130. Інтерполяція з кратними вузлами. Формула Ерміта

Можна поставити *загальнішу задачу інтерполяції*, задавши у вузлах $x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_m$, крім значень самої функції $f(x)$, також і значення послідовних її похідних:

$$\begin{array}{l} f(x_0),\ f'(x_0),\ \dots,\ f^{(n_0)}(x_0), \\ f(x_1),\ f'(x_1),\ \dots,\ f^{(n_1)}(x_1), \\ \dots \\ f(x_m),\ f'(x_m),\ \dots,\ f^{(n_m)}(x_m), \end{array} \tag{130.1}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

де n_0, n_1, …, n_m — невід'ємні цілі числа. Загальна кількість цих умов дорівнює

$$(n_0+1)+(n_1+1)+\dots+(n_m+1)=N.$$

Задачу обчислення значення функції $f(x)$ для будь-якого відмінного від вузлів значення x з $[a,b]$, з використанням усіх даних (130.1), ми, подібно до найпростішого випадку, розумітимемо так. Шукається цілий многочлен $H(x)$ найнижчого степеня, який у кожному вузлі x_i, разом зі своїми похідними до порядку n_i включно, набуває тих же значень, що і сама функція $f(x)$ та її відповідні похідні, а потім приблизно вважають

$$f(x)\doteq H(x). \tag{130.2}$$

Вузли x_i; називаються *вузлами інтерполяції*, відповідно, **кратності** n_i+1.

Можна довести існування та єдиність многочлена $H(x)$ степеня не вищого від $N-1$, що задовольняє всі поставлені умови. Його називають *інтерполяційним многочленом Ерміта (фр. Charles Hermite, Ша́рль Ермі́т)*, а формулу (130.2) — *інтерполяційною формулою Ерміта.*

Якщо усі n_i покласти рівними нулю, то ми повернемося до формули Лаґранжа (128.2). Нам трапляся і інший окремий випадок формули Ерміта: візьмемо один лише вузол x_0, але кратності $n+1$, тобто від многочлена не вище від n-го степеня, $T(x)$, вимагатимемо, щоб у точці x_0 його значення та значення n його похідних збігалися, відповідно, зі значеннями самої функції $f(x)$ та її похідних. Ми знаємо, що ці вимоги задовольняє *многочлен Тейлора* (124.1)

$$T(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Отже, наближена формула

$$f(x)\doteq T(x)$$

(порівняйте з розд. 127) також окремий випадок інтерполяційної формули Ерміта.

Додатковий член формули (130.2), який відновлює її точність, виводиться за допомогою міркувань, аналогічних до наведених у попередньому розділі. Розглянемо многочлен N-го степеня

$$\Omega(z)=(z-x_0)^{n_0+1}(z-x_1)^{n_1+1}\dots(z-x_m)^{n_m+1}$$

і покладемо для $a\leqslant z\leqslant b$

$$\Phi(z)=f(z)-H(z)-K\cdot\Omega(z)\quad (K=\text{const}).$$

Якщо припустити, що функція $f(z)$ на проміжку $[a,b]$ має N послідовних похідних, то це буде справедливо і для $\Phi(z)$. Фіксуючи значення $z=x$, відмінне від вузлів, ми виберемо константу K так:

$$K=\frac{f(x)-H(x)}{\Omega(x)}\quad (\Omega(x)\neq 0); \tag{130.3}$$

за такого вибору функція $\Phi(z)$ дорівнює 0 і для $z = x$. Усього вона матиме $N+1$ коренів, якщо кожен корінь лічити стільки раз, яка його кратність. (Ми поширюємо поняття **кратності** кореня, звичне для читача щодо цілого многочлена, на будь-яку функцію $\Phi(z)$: число α називається її коренем p-ї кратності, якщо для $z=\alpha$ дорівнює 0 функція $\Phi(z)$ і $p-1$-на її похідні.) Застосовуючи послідовно теорему Ролля як і вище (з тим лише ускладненням, що кожен кратний корінь функції $\Phi(z)$ ще протягом кількох кроків фігуруватиме і як корінь її послідовних похідних), остаточно прийдемо до твердження, що в деякій точці ξ похідна $\Phi^{(N)}(z)$ дорівнюватиме 0. Звідси

$$K = \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!},$$

і зважаючи на (130.3)

$$f(x) = H(x) + \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}\Omega(x). \tag{130.4}$$

Це і є *інтерполяційна формула Ерміта з додатковим членом.*

Формула Лаґранжа з додатковим членом (129.3) — її окремий випадок. Так само, взявши єдиний вузол x_0, кратності $n+1$, ми як окремий випадок формули (130.4) отримаємо формулу Тейлора з додатковим членом у формі Лаґранжа (126.2).

nebayduzhi.math@gmail.com

Глава 4

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНИХ

4.1. Вивчення ходу зміни функції

131. Умова сталості функції

У вивченні ходу зміни функції на першому місці стоїть питання про умови, за яких функція зберігає на заданому проміжку стале значення або змінюється на ньому монотонно (розд. 57).

Теорема 131.1. *Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $\mathcal{X}$ (замкненому або ні, скінченному або нескінченному) і має **всередині** нього скінченну похідну $f'(x)$. Для того щоб $f(x)$ була на $\mathcal{X}$ сталою, необхідно і достатньо, щоб*

$$f'(x) = 0 \quad \textit{всередині} \quad \mathcal{X}.$$

Доведення. Необхідність умови очевидна: з $f(x) = \text{const}$ випливає $f'(x) = 0$. Доведемо тепер обернене.

Достатність. Нехай умова виконана. Фіксуємо деяку точку x_0 з проміжку $\mathcal{X}$ і візьмемо **будь-яку** іншу його точку x. На проміжку $[x_0, x]$ або $[x, x_0]$ виконані всі умови теореми Лаґранжа (теор. 112.1), тому можемо написати

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

де c міститься **між** x_0 і x і значить звісно лежить **усередині** $\mathcal{X}$. Але за припущенням $f'(c) = 0$, так що для всіх x із $\mathcal{X}$

$$f(x) = f(x_0) = \text{const},$$

і наше твердження доведено. □

nebayduzhi.math@gmail.com

В інтегральному численні важливе застосування знайде простий наслідок цієї теореми.

Наслідок 131.1.1. *Якщо дві функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені та неперервні на проміжку $\mathcal{X}$ і* ***всередині*** *нього мають скінченні похідні $f'(x)$, $g'(x)$, а*

$$f'(x) = g'(x) \quad (\textit{всередині } \mathcal{X}),$$

то ці функції на всьому проміжку $\mathcal{X}$ відрізняються лише на сталу:

$$f(x) = g(x) + C \quad (C = \mathrm{const}).$$

Доведення. Для доведення достатньо застосувати теорему до різниці $f(x) - g(x)$: оскільки її похідна $f'(x) - g'(x)$ усередині $\mathcal{X}$ дорівнює 0, сама різниця буде стала. ☐

Особливості користування цією теоремою з'ясуємо на **прикладах**.

1) Розглянемо дві функції

$$\operatorname{arctg} x \quad \text{і} \quad \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Оскільки похідна другої з них

$$D\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

збігається з похідною першої функції, то ці функції на всьому проміжку від $-\infty$ до $+\infty$ різняться на константу:

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Для знаходження значення цієї константи можна, наприклад, покласти тут $x = 0$; оскільки при цьому арктангенс і арксинус обидва дорівнюють 0, то і C повинно бути нулем. Отже, ми довели тотожність

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

nebayduzhi.math@gmail.com

яка, втім, у розд. 50 була виведена з елементарних міркувань.

2) Пропонується аналогічно довести, що

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

3) Розглянемо тепер функції

$$\operatorname{arctg} x \quad \text{і} \quad \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}.$$

Легко перевірити, що їхні похідні збігаються в усіх точках x, крім $x = \pm 1$, де друга з функцій втрачає сенс. Тому тотожність

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

виявляється справедливою лише для кожного із проміжків

$$(-1, +1), \quad (-\infty, -1), \quad (+1, +\infty)$$

окремо. Цікаво, що значення константи C для цих проміжків будуть різні. Для першого з них $C = 0$ (у чому переконуємося, поклавши $x = 0$), а для двох інших маємо, відповідно, $C = \frac{\pi}{2}$ та $C = -\frac{\pi}{2}$ (що легко побачити, якщо, наприклад, спрямувати x до $-\infty$ та $+\infty$).

Всі ці співвідношення можуть бути доведені елементарно.

Зауваження. Значення теор. 131.1 проявляється в **теоретичних** дослідженнях і взагалі тоді, коли функція задана так, що з її означення безпосередньо не випливає, що вона зберігає стале значення. Подібні випадки нам неодноразово траплятимуться далі.

132. Умова монотонності функції

З'ясуємо тепер, як за допомогою похідної функції можна робити висновки про зростання (спадання) самої функції на цьому проміжку. Зупинимося спочатку на випадку функції, монотонно зростаючою в **широкому розумінні**, тобто не спадної (або монотонно спадної в **широкому розумінні**, тобто не зростаючої) (розд. 57).

Теорема 132.1. *Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $\mathcal{X}$ і* ***всередині*** *нього має скінченну похідну $f'(x)$. Для того щоб $f(x)$ була на $\mathcal{X}$ монотонно зростаючою (спадною) в широкому розумінні, необхідно і достатньо, щоб*

$$f'(x) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \quad \textit{всередині } \mathcal{X}.$$

(Хоча ми формулюємо теорему паралельно і для зростаючих, і для спадних функцій, але в доведенні обмежуємося лише випадком зростання.)

Доведення. **Необхідність.** Якщо $f(x)$ монотонно зростає, хоча б у широкому розумінні, то, взявши x всередині $\mathcal{X}$ і надавши йому приріст $\Delta x > 0$, матимемо:

$$f(x+\Delta x) \geqslant f(x), \qquad \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Перейдемо до границі, коли $\Delta x \to 0$, отримаємо $f'(x) \geqslant 0$.

Достатність. Нехай тепер, обернено, $f'(x) \geqslant 0$ всередині $\mathcal{X}$. Візьмемо два значення x', x'' із проміжку $\mathcal{X}$, такі що $x' < x''$. Застосуємо формулу Лаґранжа до функції $f(x)$ на проміжку $[x', x'']$:

$$f(x'')-f(x') = f'(c)\cdot(x''-x') \quad (x' < c < x'').$$

Оскільки $f'(c) \geqslant 0$, то

$$f(x'') \geqslant f(x'),$$

і функція $f(x)$ буде зростаюча, принаймні в широкому розумінні. □

Досі функція $f(x)$ мала можливість зберігати на деяких проміжках сталі значення, а її похідна — дорівнювати 0 на цих проміжках тотожно. Якщо ми цю можливість відкинемо, то прийдемо до випадку зростання (або спадання) у **строгому розумінні**.

Теорема 132.2. *За збереження тих самих припущень щодо неперервності функції $f(x)$ та існування її похідної $f'(x)$, для того щоб $f(x)$ була монотонно зростаюча (спадна) у строгому розумінні, необхідно та достатньо, щоб:*

1) $f'(x) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ для x всередині $\mathcal{X}$;

2) $f'(x)$ не дорівнювала тотожно 0 на жодному проміжку, що становить частину $\mathcal{X}$.

Доведення. **Необхідність.** Якщо $f(x)$ зростає на проміжку $\mathcal{X}$, то за теор. 132.1 маємо $f'(x) \geqslant 0$, так що умова 1) виконується. Виконується і умова 2), бо, якби похідна дорівнювала 0 на деякому проміжку **суцільно**, то за теор. 131.1 на ньому $f(x)$ була б стала, що суперечило б припущенню.

Достатність. Нехай виконуються умови 1) і 2). Тоді, за теор. 132.1, функція $f(x)$ принаймні неспадна. Якщо взяти в $\mathcal{X}$ два значення x', x'' $(x' < x'')$, то будемо мати не тільки

$$f(x') \leqslant f(x''), \tag{132.1}$$

але й

$$f(x') \leqslant f(x) \leqslant f(x'') \quad (x' \leqslant x \leqslant x''). \tag{132.2}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Рис. 132.1

Доведемо, що знак рівності в (132.1) насправді відбутися не може. Якби було $f(x') = f(x'')$, то, зважаючи на (132.2), отримали б

$$f(x') = f(x) = f(x'') \quad (x' \leqslant x \leqslant x''),$$

тобто функція $f(x)$ була б стала на проміжку $[x', x'']$, і ми мали б $f'(x) = 0$ на цьому проміжку суцільно, всупереч умові 2). Отже,

$$f(x') < f(x'') \quad (x' < x''),$$

тобто функція $f(x)$, у строгому розумінні, зростає. Цим теорема доведена. □

Встановлений зв'язок між **знаком** похідної та **напрямком зміни** функції геометрично цілком очевидний, якщо згадати (розд. 91, розд. 92), що похідна є кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції. Знак цього кутового коефіцієнта показує, нахилена дотична вгору або вниз, а з нею — йде вгору або вниз і сама крива (рис. 132.1).

Однак в окремих точках дотична може виявитися і горизонтальною, тобто похідна, навіть у строгому розумінні, зростаючої (спадної) функції може для окремих значень x дорівнювати 0.

Приклади.

1) Найпростіший приклад останнього зауваження дає функція $f(x) = x^3$: вона зростає, проте похідна її $f'(x) = 3x^2$ в точці $x = 0$ дорівнює 0.

2) Аналогічно, зростаючою буде і функція

$$f(x) = x - \sin x,$$

оскільки її похідна

$$f(x) = 1 - \cos x$$

невід'ємна та дорівнює 0 для значень $x = 2k\pi$ $(k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

3) Нарешті, щоб показати, що для зростаючої функції похідна може навіть на **скінченному** проміжку дорівнювати 0 **нескінченно багато разів**, розглянемо функцію

$$f(x) = (e)^{\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}} \quad (x > 0), \quad f(0) = 0.$$

Очевидно

$$\lim_{x\to+0} f(x) = 0,$$

так що наша функція неперервна і при $x = 0$. Маємо для $x > 0$:

$$f'(x) = (e)^{\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} \geqslant 0,$$

причому ця похідна дорівнює 0 в точках $x = \frac{1}{2k\pi}$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Зауважимо, що

$$0 \leqslant f'(x) < 2e \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x}}} \to 0, \quad \text{коли } x \to +0,$$

звідси (розд. 113) і $f'(0) = 0$.

Можна побудувати приклади зростаючих (спадних) функцій, для яких точки, де похідна дорівнює 0, розподілені ще складнішим чином. Однак подібні випадки трапляються рідко, і для практичних цілей зазвичай користуються такою **достатньою ознакою**: *якщо похідна $f'(x) > 0$ (< 0) всюди, крім хіба що скінченного числа значень x, то функція $f(x)$ буде зростаюча (спадна).*

Ця ознака дуже зручна для застосування.

Наприклад, розглянемо функцію $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ для $x > 0$ і доведемо, що вона **зростає**. Достатньо довести, що зростає її логарифм

$$g(x) = \ln f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x].$$

Маємо

$$g'(x) = [\ln(x+1) - \ln x] - \frac{1}{x+1}.$$

Оскільки, за формулою скінченних приростів (розд. 112),

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{\xi} \quad (x < \xi < x+1),$$

то $g'(x) > 0$; $g(x)$ зростає, що й потрібно було довести.

133. Доведення нерівностей

Викладений простий критерій монотонності успішно застосовується до доведення нерівностей.

1) Доведемо, що

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\left(0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Похідна

$$f'(x) = \frac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

буде від'ємна, оскільки $x < \operatorname{tg} x$ (54.2). Отже, функція $f(x)$ **спадає** і $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$, якщо $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

2) Функція $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$ дорівнює 0 в точці $x = 0$. Її похідна, для $x > 0$,

$$f'(x) = -\sin x + x > 0 \quad (\text{оскільки } \sin x < x).$$

Отже, функція $f(x)$ для $x \geqslant 0$ зростає, і для $x > 0$ буде $f(x) > f(0) = 0$, тобто

$$\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

Звідси аналогічно для $x > 0$ отримаємо, що

$$\sin x > x - \frac{1}{6}x^3,$$

і так далі.

3) Довести, що

$$\operatorname{tg} x > x + \frac{1}{3}x^3 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Для цього досить встановити, що для вказаних x похідна функції $f(x) = \operatorname{tg} x - x - \frac{1}{3}x^3$ додатна.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} - x^2 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - x^2 = \operatorname{tg}^2 x - x^2 > 0,$$

оскільки $\operatorname{tg} x > x$ (54.2).

4) Оскільки функція $f(x) = \ln x - x$ $(x > 0)$ має похідну

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad \begin{cases} > 0, & 0 < x < 1, \\ < 0, & x > 1, \end{cases} ,$$

то ця функція зростає, поки x змінюється на проміжку $(0,1]$, і спадає на проміжку $[1,+\infty)$. Звідси ясно, що $f(1)=-1$ буде найбільшим значенням функції, так що для $x>0$

$$\ln x \leqslant x-1.$$

5) Розглянемо ще функцію $f(x)=x^\alpha-\alpha x$ для $x\geqslant 0$ (припускаючи $0<\alpha<1$). Маємо

$$f'(x)=\alpha(x^{\alpha-1}-1)\quad \begin{cases} >0, & 0<x<1\\ <0, & x>1,\end{cases}$$

і, аналогічно до 4), зробимо висновок, що для $x>0$

$$x^\alpha-\alpha x\leqslant 1-\alpha. \tag{133.1}$$

Отримана проста нерівність — джерело для отримання ряду класичних нерівностей. У зв'язку з цим корисно записати її ще й в інших формах.

Нехай $x=\frac{a}{b}$, де a і b довільні додатні числа. Позначимо $1-\alpha$ через β, зведемо (133.1) до вигляду

$$x^\alpha-\alpha x-(1-\alpha)=\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha-\frac{\alpha a}{b}-\beta=\frac{1}{b}\cdot\left(a^\alpha b^\beta-\alpha a-\beta b\right)\leqslant 0;$$

$$a^\alpha b^\beta\leqslant \alpha a+\beta b\quad (a,\ b,\ \alpha,\ \beta>0,\quad \alpha+\beta=1). \tag{133.2}$$

Іноді вводять числа $k=\frac{1}{\alpha}>1$ і $k'=\frac{1}{\beta}>1$, так що $k'=\frac{k}{k-1}$. Замінюючи в попередній нерівності a і b, відповідно, через a^k і $b^{k'}$, отримаємо

$$ab\leqslant \frac{1}{k}a^k+\frac{1}{k'}b^{k'}\quad \left(a,\ b>0;\quad k,\ k'>1;\quad \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1\right). \tag{133.3}$$

6) Насамперед, нерівність (133.2) можна поширити на будь-яке число множників. Від двох до трьох перехід виконується за допомогою застосуванням нерівності (132.2) двічі:

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma = a^\alpha\left(b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}\cdot c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}\right)^{\beta+\gamma}\leqslant \alpha a+(\beta+\gamma)\cdot b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}\cdot c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}\leqslant$$
$$\leqslant \alpha a+(\beta+\gamma)\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma}b+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}c\right)=\alpha a+\beta b+\gamma c,$$

так що остаточно

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma\leqslant \alpha a+\beta b+\gamma c\quad (a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma>0,\quad \alpha+\beta+\gamma=1).$$

Аналогічно можна було б зробити і перехід від n до $n+1$ і довести за методом математичної індукції загальну нерівність, яка (в змінених позначеннях) має вигляд:

$$a_1^{q_1} \cdot a_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{q_n} \leqslant q_1 a_1 + q_2 a_2 + \cdots + q_n a_n$$

$$(a_1,\ \ldots,\ a_n,\ q_1,\ \ldots,\ q_n > 0, \quad q_1 + \cdots + q_n = 1).$$

Замість q_i можна взяти довільні числа $p_i > 0$ і вважати $q_i = \dfrac{p_i}{\Sigma_j p_j}$, так що сума $\displaystyle\sum_i q_i = 1$. Нерівність перепишемо так:

$$\left(a_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{\Sigma p_j}} \leqslant \frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + \cdots + p_n} \tag{133.4}$$

$$(a_1,\ \ldots,\ a_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n > 0).$$

При $p_1 = \ldots = p_n = 1$ ми прийдемо до відомої нерівності

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \tag{133.5}$$

де *середнє геометричне додатних чисел не перевищує їх середнього арифметичного.* Отже, нерівність (133.4) — природне **узагальнення** цього класичного твердження.

7) Доведемо так звану нерівність Коші – Хьольдара
(фр. Augustin-Louis Cauchy, Оґюста́ Коші́; нім. Otto Ludwig Hölder, О́тто Хьо́льдар)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right]^{\frac{1}{k}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right]^{\frac{1}{k'}} \tag{133.6}$$

$$(a_i,\ b_i > 0; \quad k,\ k' > 1,\ \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1).$$

Коші встановив цю нерівність для окремого випадку $k = k' = 2$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \tag{133.7}$$

Припустимо спочатку, що

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^{k'} = 1, \tag{133.8}$$

тож нерівність, що потрібно довести, має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant 1.$$

Покладемо в нерівності (133.3) по черзі $a = a_i$, $b = b_i$ $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$ і підсумуємо всі отримані нерівності; враховуючи умову (133.8), прийдемо до необхідного результату:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k} a_i^k + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k'} b_i^{k'} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} a_i^k + \frac{1}{k'} \sum_{i=1}^{n} b_i^{k'} = \frac{1}{k} \cdot 1 + \frac{1}{k'} \cdot 1 = 1.$$

Загальний випадок отримаємо, якщо замість чисел a_i, b_i ввести числа

$$a_i' = \frac{a_i}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^k\right]^{\frac{1}{k}}}, \quad b_i' = \frac{b_i}{\left[\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^{k'}\right]^{\frac{1}{k'}}},$$

для яких виконуються умови типу (133.8). За доведеним

$$\sum_{i=1}^{n} a_i' b_i' \leqslant 1,$$

а це рівносильно (133.6).

8) З нерівності Коші – Хьольдара відразу випливає ще одна важлива нерівність, що названа на честь Мінковського (нім. Hermann Minkowski, Хе́рман Мінко́вський)

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k\right]^{\frac{1}{k}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right]^{\frac{1}{k}} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right]^{\frac{1}{k}} \tag{133.9}$$

$$(a_i,\ b_i > 0; \quad k > 1).$$

Очевидно

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) \cdot (a_i + b_i)^{k-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)^{k-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)^{k-1}.$$

Якщо до кожної з останніх двох сум застосувати нерівність (133.6) і згадати, що $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k'} = 1$ або $k + k' = k \cdot k'$, отримаємо:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k = \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right]^{\frac{1}{k}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{(k-1)k'}\right]^{\frac{1}{k'}} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right]^{\frac{1}{k}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{(k-1)k'}\right]^{\frac{1}{k'}} = \\ &= \left(\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right]^{\frac{1}{k}} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right]^{\frac{1}{k}}\right) \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k\right]^{1-\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

і, нарешті, скоротивши на останній множник, прийдемо до (133.9).

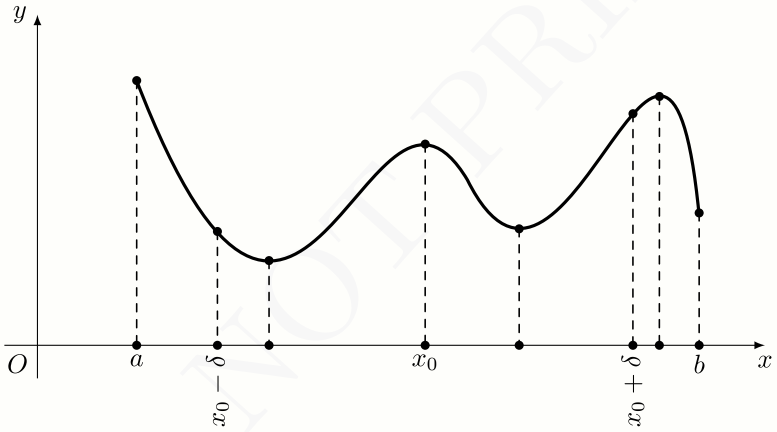


Рис. 134.1

134. Максимуми і мінімуми; необхідні умови

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a,b]$, не є на ньому монотонна, то знайдуться такі частини $[\alpha,\beta]$ проміжку $[a,b]$, на яких найбільше або найменше значення досягається функцією у **внутрішній** точці, тобто між α і β. На графіку функції (рис. 134.1) таким проміжкам відповідають характерні горби або впадини.

Говорять, що *функція $f(x)$ має в точці x_0 максимум (або мінімум) (латинські слова maximum і minimum означають "найбільше" і "найменше"), якщо цю точку можна оточити таким околом $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, що міститься на проміжку, де визначена функція, що для всіх його точок x виконується нерівність*

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad(\text{або } f(x)\geqslant f(x_0)).$$

Іншими словами, точка x_0 **доставляє** функції $f(x)$ максимум (мінімум), якщо значення $f(x_0)$ виявляється найбільшим (найменшим) із значень, які функція набуває в деякому (хоча б малому) околі цієї точки. Зазначимо, що означення максимуму (мінімуму) передбачає, що функція визначена **з обох боків** від точки x_0.

Якщо існує такий окіл, у межах якого (але $x\neq x_0$) виконується строга нерівність

$$f(x)<f(x_0)\quad(\text{або } f(x)>f(x_0)),$$

то кажуть, що функція має в точці x_0 **власний** максимум (мінімум), інакше — **невласний**.

Якщо функція має максимуми в точках x_0 і x_1, то, застосовуючи до проміжку $[x_0, x_1]$ 2-у теорему Вайрштрасса (теор. 85.1), бачимо, що найменшого свого значення на цьому проміжку функція досягає в деякій точці x_2 **між** x_0 і x_1 і має там **мінімум**. Аналогічно, між двома мінімумами неодмінно знайдеться максимум. У тому найпростішому (і практично найважливішому) випадку, коли функція має взагалі лише скінченне число максимумів і мінімумів, вони просто чергуються.

Зауважимо, що для позначення максимуму або мінімуму існує і термін, що їх об'єднує, — **екстремум**. (Латинське extremum означає "крайнє" значення.)

Поставимо задачу про знаходження всіх значень аргументу, що доставляють функції екстремум. У її розв'язанні основну роль відіграватиме похідна.

Припустимо спочатку, що для функції $f(x)$ на проміжку (a, b) існує скінченна похідна. Якщо в точці x_0 функція має екстремум, то, застосовуючи до проміжку $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, про який ішлося вище, теорему Ферма (теор. 109.1), робимо висновок, що $f'(x_0) = 0$: у цьому полягає **необхідна умова** екстремуму. Екстремум слід шукати лише в тих точках, де похідна дорівнює нулю; такі точки називатимемо **стаціонарними**. У них зміна функції як би "зупиняється": швидкість цієї зміни (розд. 92) дорівнює нулю.

Не слід думати, однак, що кожна стаціонарна точка доставляє функції екстремум: вказана щойно необхідна умова не достатня. Ми бачили, скажімо, в пр. 132.1, що для функції x^3 похідна $3x^2$ дорівнює нулю в точці $x = 0$, але в цій точці функція не має екстремуму: вона весь час зростає.

Якщо розширити клас функцій $f(x)$ і припустити, що в окремих точках двобічної скінченної похідної не існує, то можливо, що екстремум припаде на якусь з таких точок: адже теорема Ферма стверджує рівність $f'(x) = 0$ лише **за умови**, що існує двобічна скінченна похідна! Наприклад, функція $x^{\frac{2}{3}}$, очевидно, має мінімум в точці $x = 0$, тоді як у цій точці її похідна зліва дорівнює $-\infty$; а праворуч — $+\infty$ (розд. 101); так само в точці $x = 0$ має мінімум функція $|x|$, хоча двобічної похідної для неї в цій точці немає (розд. 100). Отже, і точки, в яких не існує двобічної скінченної похідної, також можуть доставляти функції екстремум. Але, зрозуміло, і в цьому випадку також не може бути гарантованою наявність екстремуму в усіх таких точках. Прикладами можуть бути функції $y = x^{\frac{1}{3}}$ і $y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ (з додатковою умовою: $y = 0$ в точці $x = 0$). Перша з них має нескінченну похідну в точці $x = 0$ (розд. 101), друга ж зовсім не має похідної в цій точці (пр. 102.1), але точка $x = 0$ не доставляє екстремум ні тій, ні тій функції (бо в будь-якому її околі обидві функції набувають і додатних, і від'ємних значень).

nebayduzhi.math@gmail.com

135. Достатні умови. Перше правило

Отже, якщо точка x_0 — стаціонарна точка для функції $f(x)$ або якщо в цій точці не існує для неї двобічної скінченної похідної, то точка x_0, здається, так би мовити, лише “підозрілою” щодо екстремуму та потребує подальшого **дослідження**.

Це дослідження полягає в перевірці **достатніх** умов для існування екстремуму, які ми зараз встановимо.

Припустимо, що в деякому околі $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ точки x_0 (принаймні для $x \neq x_0$) існує скінченна похідна $f'(x)$ і як ліворуч від x_0, так і праворуч від x_0 (окремо) **зберігає певний знак**. Тоді можливі такі три випадки:

1) $f'(x) > 0$ для $x < x_0$ і $f'(x) < 0$ для $x > x_0$, тобто *похідна* $f'(x)$*, переходячи через точку* x_0*, змінює знак плюс на мінус.* У цьому випадку на проміжку $[x_0-\delta,\ x_0]$ функція $f(x)$ зростає, а на проміжку $[x_0,\ x_0+\delta]$ спадає (розд. 132), так що значення $f(x_0)$ буде найбільше на проміжку $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$, тобто в точці x_0 функція має власний **максимум**.

2) $f'(x) < 0$ для $x < x_0$ і $f'(x) > 0$ для $x > x_0$, тобто *похідна* $f'(x)$*, переходячи через точку* x_0*, змінює знак мінус на плюс.* У цьому випадку аналогічно переконуємося, що в точці x_0 функція має власний **мінімум**.

3) $f'(x) > 0$ як для $x < x_0$, так і для $x > x_0$, або ж $f'(x) < 0$ і ліворуч, і праворуч від x_0, тобто, *переходячи через* x_0*,* $f'(x)$ *не змінює знак.* Тоді функція або весь час зростає, або весь час спадає; у будь-якій близькості від x_0 з одного боку знайдуться точки x, у яких $f(x) < f(x_0)$, з другого — точки x, у яких $f(x) > f(x_0)$, отже, в точці x_0 ніякого **екстремуму немає**.

Графічна ілюстрація найпростіших можливостей дана на рис. 135.1, рис. 135.2, рис. 135.3.

Отже, ми отримуємо **перше правило** для дослідження “підозрілого” значення x_0: *підставляючи в похідну* $f'(x)$ *спочатку* $x < x_0$*, а потім* $x > x_0$*, з'ясовуємо знак похідної поблизу від точки* x_0 *ліворуч і праворуч від неї; якщо похідна* $f'(x)$ *змінює знак плюс на мінус, то це максимум, якщо змінює знак мінус на плюс, то — мінімум, якщо ж знака не змінює, то екстремуму зовсім немає.*

Це правило повністю розв'язує питання в тому разі, коли на проміжку (a,b), як це зазвичай буває, лише скінченне число стаціонарних точок або точок, де нема скінченної похідної:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n < b. \tag{135.1}$$

Саме тоді насамперед на будь-якому проміжку

$$(a_1, x_1),\ (x_1, x_2),\ \ldots,\ (x_k, x_{k+1}),\ \ldots,\ (x_n, b)$$

існує скінченна похідна $f'(x)$ і, крім того, на **кожному такому проміжку** $f'(x)$ **зберігає постійний знак.** Справді, якби $f'(x)$ змінювала знак, наприклад, на про-

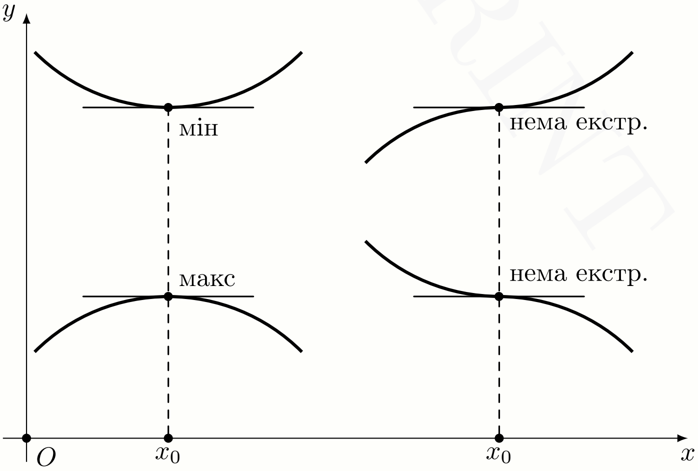


Рис. 135.1

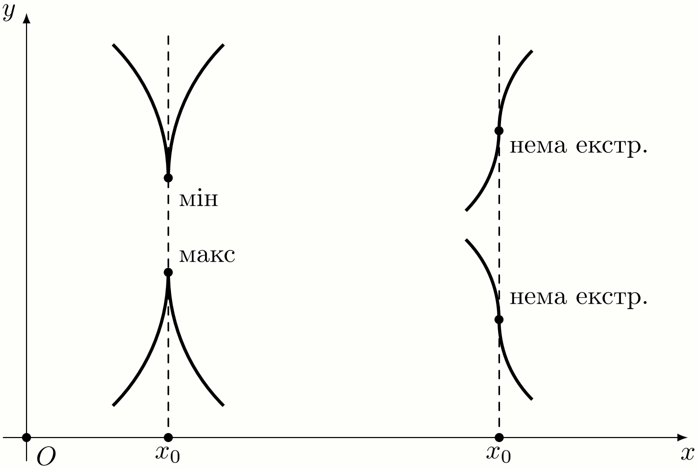


Рис. 135.2

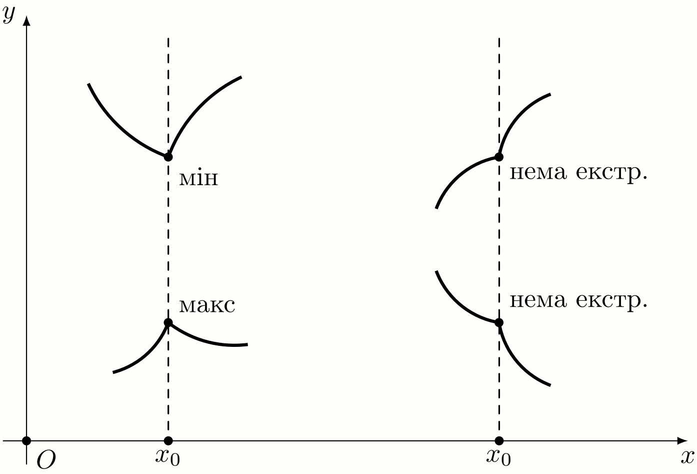


Рис. 135.3

міжку $(x_k,\ x_{k+1})$, то, за теоремою Дарбу (теор. 110.1), вона дорівнювала б нулю в деякій точці **між** x_k і x_{k+1}, що неможливо, бо всі корені похідної вже містяться в ряді точок (135.1).

Останнє зауваження буває корисним у деяких випадках на практиці: знак похідної $f'(x)$ на всьому проміжку $(x_k,\ x_{k+1})$ визначиться, якщо обчислити її значення (або навіть лише обчислити знак) в **одній** точці цього проміжку.

136. Приклади

1) Знайти екстремуми функції

$$f(x) = (x+2)^2(x-1)^3.$$

Її похідна завжди існує і скінченна:

$$f'(x) = 2(x+2)(x-1)^3 + 3(x+2)^2(x-1)^2 = (x+2)(x-1)^2[2(x-1)+3(x+2)] = \\ = (x+2)(x-1)^2(5x+4).$$

Коренями похідної (стаціонарними точками) будуть:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = -0{,}8, \quad x_3 = 1.$$

Цими значеннями весь проміжок $(-\infty, +\infty)$ розбивається на такі частини:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, -0{,}8), \quad (-0{,}8, 1), \quad (1, +\infty).$$

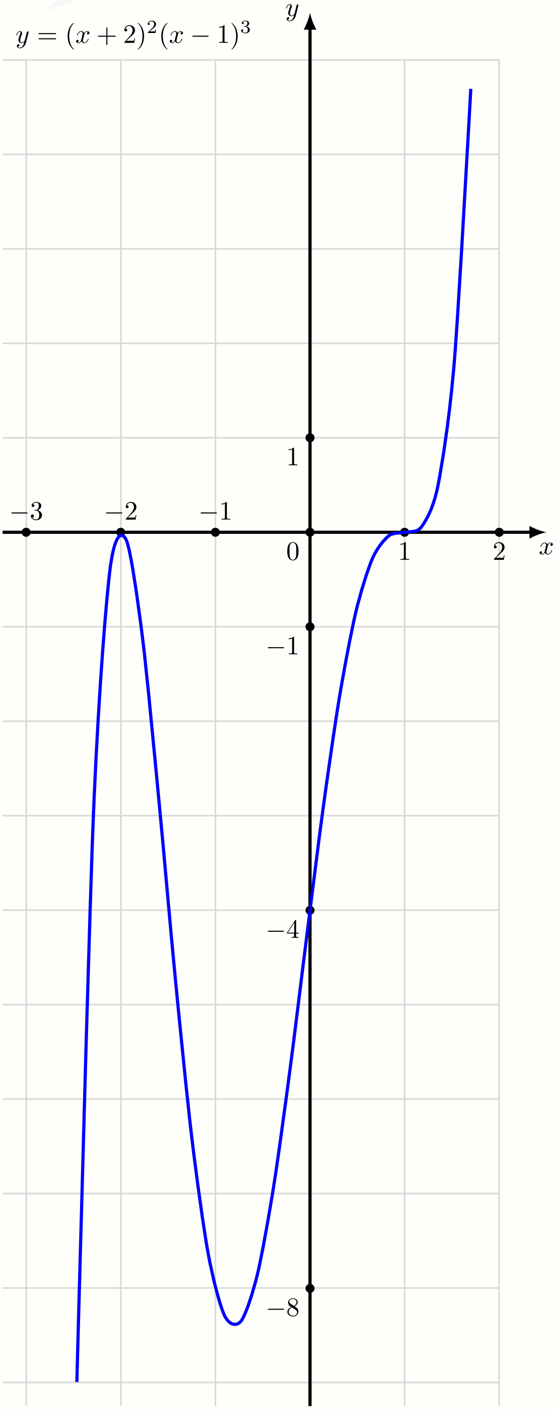


Рис. 136.1

nebayduzhi.math@gmail.com

Для знаходження знака похідної на цих проміжках можна, скориставшись зробленим вище зауваженням, знайти його для конкретних значень, наприклад, для -3, -1, 0, 2. Обчислюючи знаки окремих множників, для всієї похідної отримуємо такі знаки:

на проміжку $(-\infty, -2)$	$(-)(+)(-) = +$
на проміжку $(-2, -0{,}8)$	$(+)(+)(-) = -$
на проміжку $(-0{,}8, 1)$	$(+)(+)(+) = +$
на проміжку $(1, +\infty)$	$(+)(+)(+) = +$

Звідси зрозуміло, що в $x = -2$ функція $f(x)$ має максимум, в $x = -0{,}8$ вона має мінімум, а в точці $x = 1$ екстремуму зовсім немає.

Проте зазвичай роблять інакше, не підставляючи в похідну конкретних значень. Почнемо з $x = -2$. Добуток двох останніх множників похідної $(x-1)^2$ і $(5x+4)$ в точці $x = -2$ має знак мінус, отже (за неперервністю), зберігає той самий знак і поблизу цієї точки (як ліворуч, так і праворуч). Множник $(x+2)$, коли x, зростаючи, проходить через значення -2, міняє знак мінус на плюс, так що похідна змінює знак плюс на мінус, та функція має максимум. В точці $x = -0{,}8$ (і поблизу) перші два множники похідної мають знак плюс; останній множник $(5x+4)$ (а з ним і вся похідна), проходячи через це значення, змінює знак мінус на плюс; функція має мінімум. Нарешті, під час переходу через значення $x = 1$, не тільки перший і третій множник зберігають знак, але й другий множник також, бо квадрат завжди додатний; екстремуму тут немає.

Знаючи точки x, що **доставляють** нашій функції екстремальні значення, легко обчислити тепер самі значення: максимум $f(-2) = 0$ і мінімум $f(-0{,}8) \doteq -8{,}40$.

На рис. 136.1 зображено графік, що ілюструє зміну цієї функції. Тут і в наступних прикладах зміну функції ми ілюструємо графіками, але питання про **побудову** графіків буде докладно розглянуте лише в 4.3. Дивіться, зокрема, пр. 149.3.

2) Знайти екстремуми функції

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

Зважаючи на те, що функція має період 2π, достатньо обмежитися тими значеннями x, які містяться на проміжку $[0, 2\pi]$. Похідна цієї функції існує скрізь:

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cdot \cos x - 3\cos^2 x \cdot \sin x = 3\sin x \cdot \cos x \cdot (\sin x - \cos x).$$

Корені похідної (стаціонарні точки) в цьому випадку будуть:

$$0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{5\pi}{4},\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

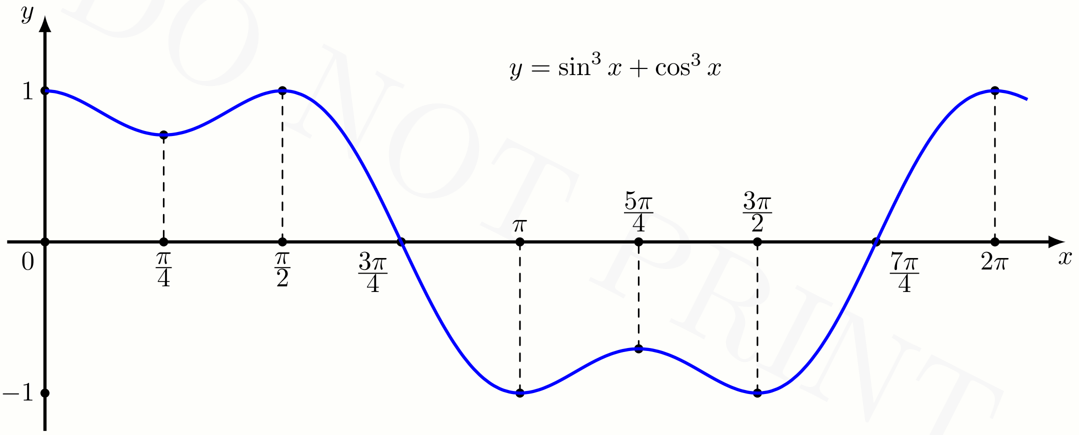


Рис. 136.2

Переходячи через $x = 0$ множник $\sin x$ змінює знак мінус на плюс, а вся похідна змінює знак плюс на мінус, бо останні два множника зберігають поблизу $x = 0$ знак мінус; маємо максимум. Множник $(\sin x - \cos x)$, дорівнює нулю, коли $x = \frac{\pi}{4}$, і переходячи через цю точку, змінює знак мінус на плюс. Те ж буде і з похідною, бо перші два множники додатні; отже, тут буде мінімум. Аналогічно досліджуються усі інші стаціонарні точки: всі вони по черзі доставляють функції максимуми та мінімуми.

Підставляючи їх у вираз функції, отримаємо самі максимальні та мінімальні значення:

$$\textit{максимуми:}\qquad f(0) = f(2\pi) = 1,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\quad f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \doteq -0{,}71,$$

$$\textit{мінімуми:}\qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0{,}71,\quad f(\pi) = -1,\quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

Графік функції зображений на рис. 136.2 (порівняйте з пр. 147.1).

3) Знайти екстремуми функції

$$f(x) = (x)^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}.$$

Цього разу скінченна похідна

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}} - (x)^{\frac{4}{3}}}{(x)^{\frac{1}{3}} \cdot (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}$$

існує скрізь, крім точок $x = 0$ та $x = \pm 1$.

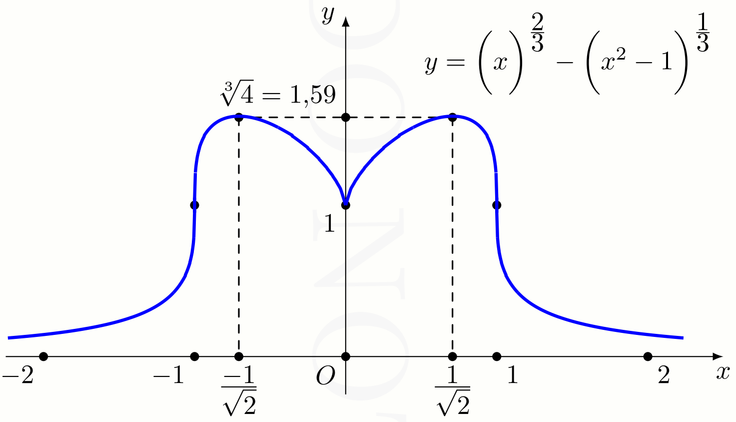


Рис. 136.3

Коли x наближається до цих значень (з обох боків) похідна прямує до $\pm\infty$.

Для знаходження коренів похідної, прирівнюємо до нуля її чисельник; ми знайдемо $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Отже, “підозрілими” щодо екстремуму будуть точки:

$$-1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1.$$

В точці $x = 0$ (і поблизу) чисельник та другий множник знаменника мають знак плюс. Множник же $x^{\frac{1}{3}}$ знаменника змінює знак мінус на плюс, похідна — теж: мінімум. В точці $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (і поблизу) знаменник зберігає знак плюс. Чисельник, маючи на увазі значення x, близькі до $\frac{1}{\sqrt{2}}$, перепишемо так: $(1-x^2)^{\frac{2}{3}} - (x)^{\frac{4}{3}}$; він дорівнює 0 в точці $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, і зі зменшенням x — зростає, зі збільшенням x — зменшується, так що змінює знак плюс на мінус, і маємо максимум. Те саме і в точці $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Переходячи через $x = 1$, множник $(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$ у знаменнику, який у цій точці дорівнює нулю, не змінює знака; це ж справедливо і для похідної, отже в точці $x = 1$ екстремуму немає. Те саме і в точці $x = -1$.

Отже, максимуми $f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt[3]{4} \doteq 1{,}59$, а мінімум $f(0) = 1$.

Графік функції зображений на рис. 136.3 (порівняйте з пр. 149.4).

4) **Згасні коливання.** Нехай рух точки відбувається за законом:

$$s = Ae^{-kt}\sin\omega t,$$

де s — пройдений шлях (відлічується від початкового положення), а t — час (відлічується від початкового моменту). Вважатимемо всі сталі A, k, ω, а також змінну t додатними. З'ясуємо вигляд графіка цієї залежності; його цікаво зіставити з уже знайомою нам синусоїдою $s = A\sin\omega t$. Оскільки $e^{-kt} > 0$, то очевидно, що обидва графіки перетинають вісь x у тих самих точках $t = n\frac{\pi}{\omega}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$. Зауважимо, що функція $s = A\sin\omega t$ має поперемінно максимуми і мінімуми в точках $t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega}$, де дорівнює нулю її похідна $s' = A\omega\cos\omega t$. Запишемо похідну для заданої функції (порівняйте з пр. 99.30):

$$s' = Ae^{-kt}(\omega\cdot\cos\omega t - k\cdot\sin\omega t) = A\cdot\sqrt{\omega^2+k^2}\cdot e^{-kt}\left(\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+k^2}}\cos\omega t - \frac{k}{\sqrt{\omega^2+k^2}}\sin\omega t\right).$$

Вводячи допоміжний кут φ, такий що:

$$\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+k^2}} = \cos\varphi, \qquad \frac{k}{\sqrt{\omega^2+k^2}} = \sin\varphi,$$

перепишемо вираз похідної:

$$s' = A\cdot\sqrt{\omega^2+k^2}\cdot e^{-kt}\cdot\cos(\omega t + \varphi).$$

Вона дорівнює нулю в точках

$$t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega} - \frac{\varphi}{\omega},$$

і оскільки косинус, проходячи через нуль, змінює знак, то легко побачити, що в цих точках наша функція, справді, має максимуми, коли n парне, і мінімуми, коли n непарне. Порівняно з синусоїдою, маємо **зміщення** екстремальних точок **вліво** на $\frac{\varphi}{\omega}$.

Нескладно перевірити, що всі максимуми будуть додатні, а мінімуми — від'ємні. Якщо величину n-го екстремуму позначити через A_n, то

$$\left|\frac{A_n}{A_{n+1}}\right| = e^{\frac{k\pi}{\omega}},$$

так що розмахи спадають у геометричній прогресії.

Графік (для простого окремого випадку) зображений на рис. 136.4. Такий рух має назву **згасного коливання**.

Зауваження. У більшості випадків правила, викладеного в попередньому розділі, виявляється цілком досить для дослідження "підозрілих" значень. Проте слід усвідомити, що можуть бути випадки, де воно непридатне: це буде тоді, коли в будь-якій близькості від досліджуваної точки міститься безліч інших подібних точок, і **похідна не зберігає певного знака** з того чи іншого боку від цієї точки.

Розглянемо, як приклад, функцію задану рівностями:

$$f(x) = x^2\cdot\sin\frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \text{і} \qquad f(0) = 0.$$

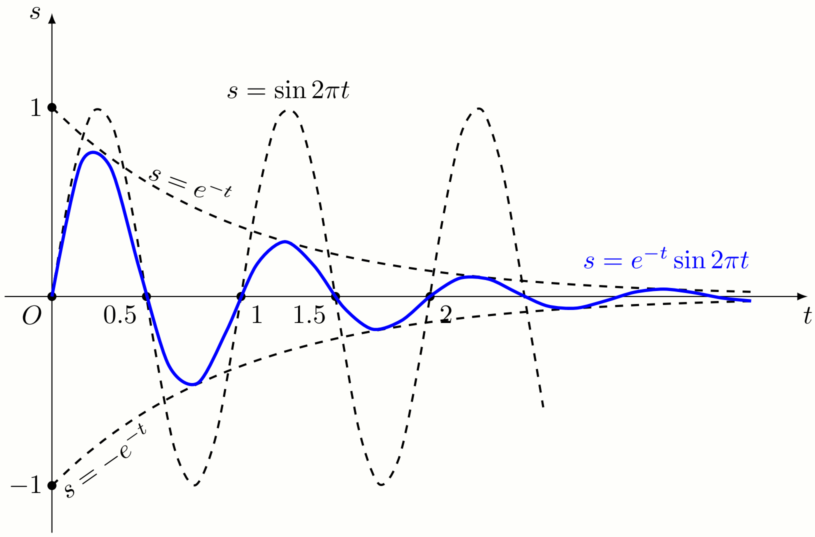


Рис. 136.4

Ми вже знаємо, що вона в точці $x = 0$ має похідну $f'(0) = 0$ (пр. 102.2). Однак за будь-якої близькості від стаціонарної точки $x = 0$ як ліворуч, так і праворуч похідна

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

безліч разів змінює знак. Тут в точці $x = 0$ **немає екстремуму**.

Якщо ж функція задана так:

$$f(x) = x^2\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0) \quad \text{і} \qquad f(0) = 0,$$

то вона має таку ж особливість, але цього разу в точці $x = 0$ очевидно **буде мінімум**.

Правило в обох випадках непридатне.

137. Друге правило

Знаходячи екстремуми, дослідження знака похідної поблизу досліджуваної точки можна замінити дослідженням знака **другої** похідної в самій цій точці; покажемо це.

Отже, нехай функція $f(x)$ не тільки має похідну $f'(x)$ в околі точки x_0, але й другу похідну в самій точці x_0: $f''(x_0)$. Точка x_0 — стаціонарна, тобто $f'(x_0) = 0$. Якщо $f''(x_0) > 0$, то, за лем. 109.1, функція $f'(x)$ **у точці** $x = x_0$**, зростає**, тобто поблизу точки x_0, зліва $f'(x) < f'(x_0) = 0$, а праворуч $f'(x) > f'(x_0) = 0$. Отже, похідна $f'(x)$ змінює знак мінус на плюс і, отже, $f(x)$ має в точці $x = x_0$ мінімум.

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо $f''(x_0) < 0$, то $f'(x)$ **у точці** $x = x_0$ **спадає**, змінюючи знак плюс на мінус, так що очевидно маємо максимум.

Отже, можна сформулювати **друге правило** для дослідження "підозрілого" значення x_0: *підставляємо* x_0 *у другу похідну* $f''(x)$*; якщо* $f''(x_0) > 0$*, то функція має мінімум, якщо ж* $f''(x_0) < 0$*, то — максимум.*

Це правило має, взагалі кажучи, вужче коло застосування; воно, наприклад, явно непридатне до тих точок, де немає скінченної першої похідної (бо там і мови бути не може про другу). Тоді, коли друга похідна дорівнює нулю, правило також нічого не дає. Розв'язання питання залежить тоді від поведінки вищих похідних (дивіться наступний розділ).

Застосуємо це правило до пр. 136.2. Потрібно обчислити другу похідну:

$$f''(x) = 6\sin x\cos x(\cos x + \sin x) - 3(\sin^3 x + \cos^3 x).$$

В точці $x = 0$ (2π), $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ перший доданок дорівнює нулю і знак $f''(x)$ протилежний знаку $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$; це буде мінус для $x = 0$ (2π), $\frac{\pi}{2}$ (тут максимуми) і плюс для $x = \pi$, $\frac{3\pi}{2}$ (тут мінімуми). Для $x = \frac{\pi}{4}$ і $x = \frac{5\pi}{4}$, зважаючи на рівність $\sin x = \cos x$, $f''(x)$ зведеться до $6\sin^3 x$, так що в першій із цих точок знак другої похідної буде плюс (мінімум), а в другій — мінус (максимум).

Ось новий приклад. Знайти екстремуми функції

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}.$$

Похідна

$$f'(x) = 5\frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

дорівнює нулю разом із чисельником; її корені будуть $x_1 = 1 - \sqrt{2} \doteq -0{,}41$ і $x_2 = 1 + \sqrt{2} \doteq 2{,}41$. Диференціюємо похідну знову як добуток:

$$f''(x) = \frac{5}{(x^2 + 1)^2}(2x - 2) + \dots,$$

крапками замінений член, що містить множником $x^2 - 2x - 1$ і **нам не потрібний**, бо для тих значень x, які ми збираємося підставляти, він дорівнює нулю. Легко побачити, що $f''(x_1) < 0$, а $f''(x_2) > 0$, отже, значення $f(x_1) \doteq 7{,}04$ є максимум, а $f(x_2) \doteq -0{,}03$ — мінімум.

Графік функції зображений на рис. 137.1 (дивіться пр. 149.5).

Нарешті, розглянемо таку **задачу** геометричного змісту: знайти екстремальні значення для відстані r від заданої (на площині) точки $P(\xi, \eta)$ до точок $M(x, y)$ кривої $(\mathcal{K})$, заданою своїм рівнянням: $y = f(x)$ (рис. 137.2).

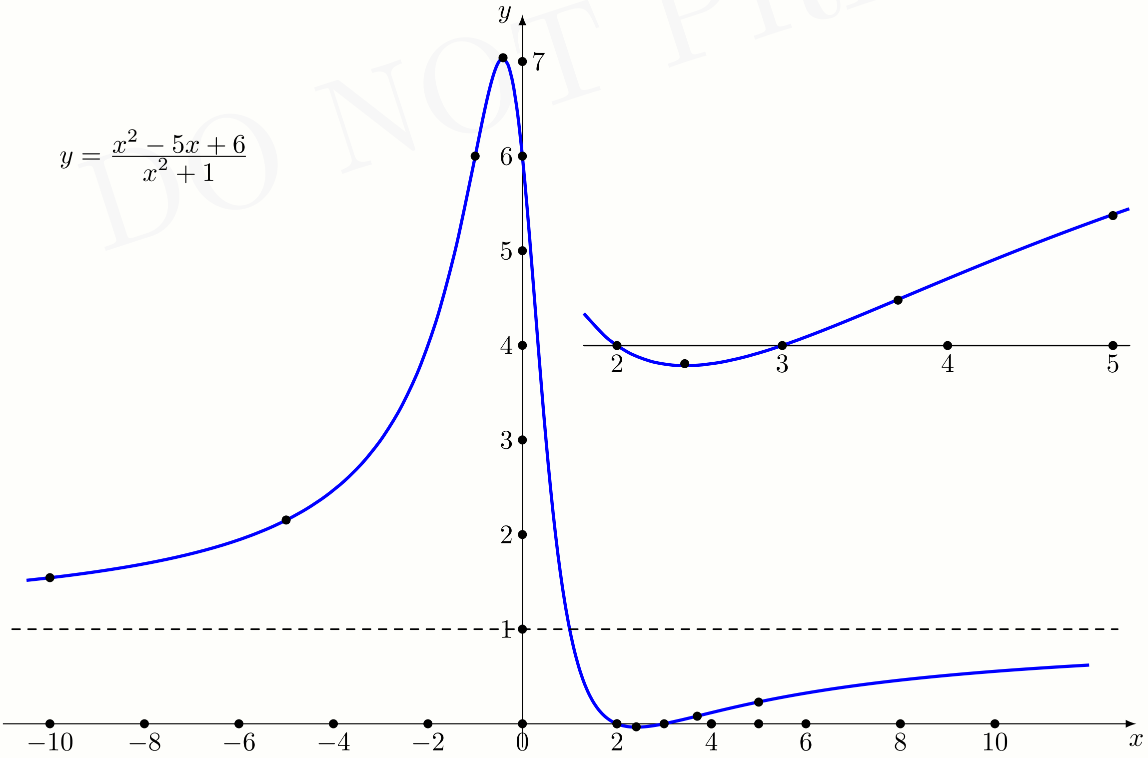


Рис. 137.1

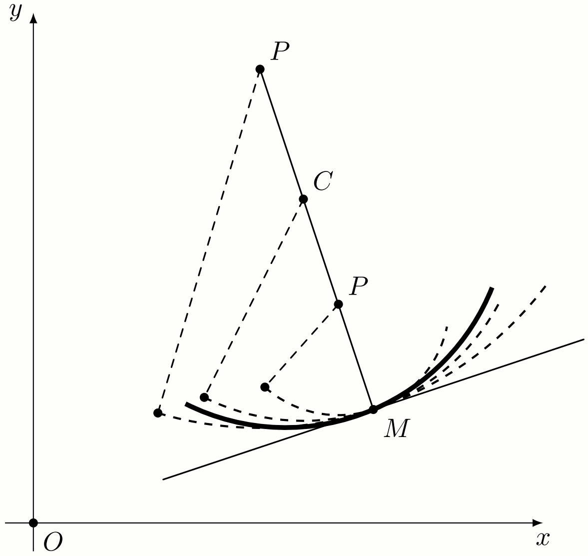


Рис. 137.2

Замість функції r можна розглянути функцію

$$u = \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}\left[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right],$$

де $y = f(x)$. Прирівнюючи до нуля похідну:

$$u'_x = x - \xi + (y-\eta)\cdot y'_x,$$

бачимо, що для того, щоб точка $M(x, y)$ на кривій $(\mathcal{K})$ доставляла екстремум відстані r, необхідне виконання умови:

$$x - \xi + y'_x(y-\eta) = 0.$$

Іншими словами, точка $P(\xi, \eta)$ повинна лежати на прямій

$$X - x + y'_x(Y - y) = 0,$$

проведеній через точку $M(x, y)$ кривій перпендикулярно до дотичної; її називають **нормаллю** до кривої. (Її кутовий коефіцієнт $-\dfrac{1}{y'_x}$ обернений за величиною і протилежний за знаком до кутового коефіцієнта y'_x дотичної.)

Припустимо, що точка $P(\xi, \eta)$ справді лежить на нормалі до кривої $(\mathcal{K})$ в точці $M(x, y)$; який це буде екстремум для відстані PM? Розв'язання цього питання залежить від знака другої похідної:

$$u''_{x^2} = 1 + y'^2_x + (y-\eta)\cdot y''_{x^2}.$$

Цей вираз дорівнює нулю (за умови, що $y''_{x^2} \neq 0$) лише в точці C з координатами:

$$\xi = x - y'_x \cdot \frac{1+y'^2_x}{y''_{x^2}}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2_x}{y''_{x^2}}; \tag{137.1}$$

для неї питання залишається відкритим. Точка C відокремлює на нормалі ті точки, для яких $u'' < 0$, і відстань PM буде **максимум**, від тих точок P, для яких $u'' > 0$, і ця відстань є **мінімум**.

Згодом (розд. 243, розд. 253) ми побачимо, що ця **межова точка** C на нормалі багато чим цікава.

138. Використання вищих похідних

Ми бачили, що якщо $f'(x_0) = 0$ та $f''(x_0) > 0$, то функція досягає в точці x_0 мінімуму; якщо ж $f'(x_0) = 0$ та $f''(x_0) < 0$, то функція має в цій точці максимум. Випадок, коли й $f''(x_0) = 0$, ми залишили недослідженим.

nebayduzhi.math@gmail.com

Припустимо тепер, що функція $f(x)$ має в точці $x = x_0$ n послідовних похідних, і всі вони, аж до $(n-1)$-ї, у цій точці дорівнюють нулю:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

тоді як $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Розкладемо приріст $f(x) - f(x_0)$ функції $f(x)$ за степенями різниці $x - x_0$ за формулою Тейлора з додатковим членом у формі Пеано (124.8). Оскільки всі похідні порядків менших, ніж n, рівні 0 в точці x_0, то

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0) + \alpha}{n!}(x - x_0)^n.$$

Внаслідок того, що $\alpha \to 0$, коли $x \to x_0$, для досить близьких x до x_0 знак суми в чисельнику збігатиметься зі знаком $f^{(n)}(x_0)$ як для $x < x_0$, так і для $x > x_0$. Розглянемо два випадки.

1) n — **непарне число:** $n = 2k + 1$. Переходячи від значень x, менших ніж x_0, до значень, більших ніж x_0, вираз $(x - x_0)^n$ змінить знак на протилежний; а оскільки знак першого множника не змінюється, то й знак різниці $f(x) - f(x_0)$ зміниться. Отже, в точці x_0 функція $f(x)$ не може мати екстремуму, бо поблизу цієї точки набуває значень як менших, так і більших, ніж $f(x_0)$.

2) n — **парне число:** $n = 2k$. У цьому випадку різниця $f(x) - f(x_0)$ не змінює знака переходячи від x, менших ніж x_0, до більших, бо $(x - x_0)^n > 0$ для всіх x. Очевидно поблизу x_0, як зліва, так і справа, знак різниці $f(x) - f(x_0)$ збігається зі знаком числа $f^{(n)}(x_0)$. Значить, якщо $f^{(n)}(x_0) > 0$, то $f(x) > f(x_0)$ поблизу точки x_0, і в точці x_0 функція $f(x)$ має (власний) мінімум; якщо $f^{(n)}(x_0) < 0$, то функція має (власний) максимум.

Звідси отримуємо таке **правило**.

Якщо перша з похідних, що не дорівнюють в точці x_0 нулю, є похідна непарного порядку, то функція не має в точці x_0 ні максимуму, ні мінімуму. Якщо така похідна — похідна парного порядку, то функція в точці x_0 має максимум або мінімум, залежно від того, буде ця похідна від'ємна чи додатна.

Наприклад, для функції $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$ точка $x = 0$ стаціонарна, бо в цій точці перша похідна дорівнює нулю

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2\sin x.$$

Далі:

$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2\cos x, \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2\sin x, \quad f'''(0) = 0;$$

$$f^{(4)}(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x, \quad f^{(4)}(0) = 4.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Оскільки похідна **парного** порядку була перша відмінна від нуля в точці, то маємо екстремум, а саме мінімум, бо $f^{(4)}(0) > 0$.

Зауваження. Хоча виведений вище критерій розв'язує питання про екстремум у дуже широкому класі випадків, але, теоретично кажучи, він все ж таки не всеосяжний: функція, не бувши тотожно сталою, може мати в околі досліджуваної точки похідні всіх порядків, які, проте, **в цій точці** всі дорівнюють нулю.

Як приклад, розглянемо (разом з Коші) таку функцію:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0.$$

Для $x \neq 0$ вона має похідні всіх порядків:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \dots$$

і взагалі

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots), \tag{138.1}$$

де $P_n(z)$ — цілий многочлен (степеня $3n$). Цю загальну формулу легко довести методом математичної індукції.

Покажемо тепер, що в точці $x = 0$ для нашої функції **існують похідні всіх порядків, причому всі дорівнюють нулю.** Справді, насамперед

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

отже $f'(0) = 0$. Нагадаємо, що для $z \to +\infty$ функція e^z буде нескінченно велика вищого порядку, ніж будь-який степінь z^k, тобто

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{z^k}{e^z} = 0$$

(розд. 65). Тут роль z відіграє $\frac{1}{x^2}$ $(x \to 0)$.

Припустимо, що твердження справедливе для всіх похідних до n-го порядку включно. Тоді (дивіться (138.1))

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{\frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} \to 0, \quad \text{коли } x \to 0,$$

оскільки чисельник є сумою членів виду $\frac{c}{x^m}$. Значить, і $f^{(n+1)}(0) = 0$. За методом математичної індукції твердження повністю доведено.

Хоча **безпосередньо** ясно, що ця функція в точці $x = 0$ має мінімум, але отримати цей факт за допомогою розгляду її послідовних похідних у цій точці не вдалося б.

nebayduzhi.math@gmail.com

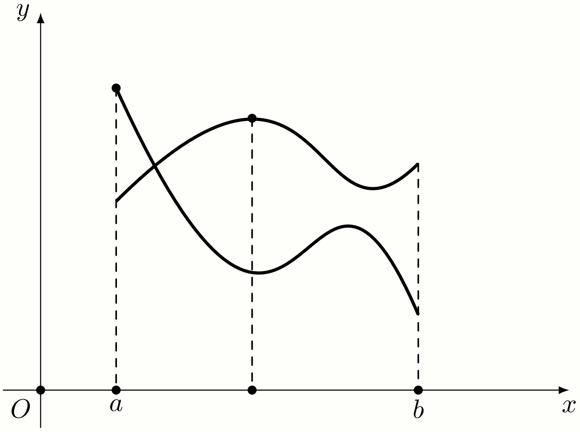


Рис. 139.1

139. Знаходження найбільших і найменших значень

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на скінченному замкненому проміжку $[a, b]$. Досі ми цікавилися лише її максимумами і мінімумами, тепер поставимо питання про знаходження **найбільшого і найменшого** з усіх значень, яких вона набуває на цьому проміжку. (Отже, ми зберігаємо за терміном “**максимум**” його локальний зміст (найбільше значення в **безпосередньому околі** відповідної точки) і відрізняємо його від “**найбільшого значення**” функції на всьому заданому проміжку. Теж саме стосується “**мінімуму**” і “**найменшого значення**” функції.) За 2-ю теоремою Ваярштрасса (теор. 85.1), такі найбільші та найменші значення існують. Зупинимося для визначеності на **найбільшому** значенні.

Якщо воно досягається в деякій точці **між** a і b, то це одночасно буде одним із максимумів (очевидно найбільшим); але найбільше значення може досягатися і на одному з кінців проміжку, a чи b (рис. 139.1). Отже, потрібно порівняти між собою всі максимуми функції $f(x)$ та її **граничні значення** $f(a)$ та $f(b)$; найбільше із цих чисел і буде найбільшим з усіх значень функції $f(x)$ на $[a, b]$. Аналогічно знаходиться найменше значення функції.

Нехай, наприклад, потрібно знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$; два максимуми, що дорівнюють 1, більші, ніж крайні значення $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$, отже, 1 і буде найбільшим значенням функції на вказаному проміжку. Мінімум, що дорівнює 0,7 … , більший від крайніх значень, так що найменшим значенням буде 0. Для проміжку $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ за найбільше

nebayduzhi.math@gmail.com

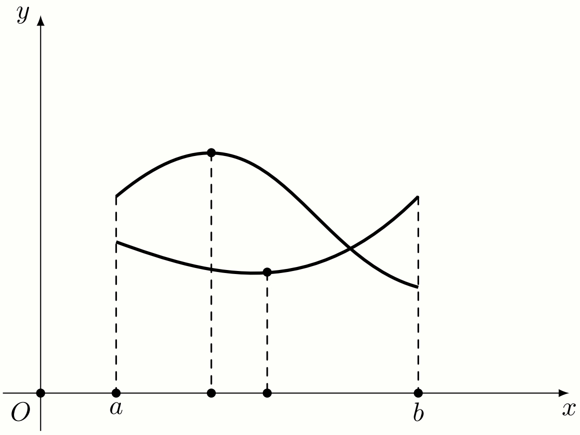


Рис. 139.2

значення довелося б узяти більший із двох максимумів 1 і $-0{,}7\ldots$, що досягаються в $x=\frac{\pi}{2}$ і $x=\frac{5\pi}{4}$, бо на кінцях функція набуває значень $f\left(\frac{\pi}{4}\right)\doteq 0{,}7$ і $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$, менші ніж 1. Найменше значення досягається в правому кінці, до того ж, при $x=\pi$, збігаючись із мінімумом.

Якщо бажають уникнути дослідження на максимум і мінімум, то можна вчинити інакше. Потрібно лише обчислити значення функції в усіх "підозрілих" щодо екстремуму точках і порівняти їх із крайніми значеннями $f(a)$ і $f(b)$; найбільші та найменші з цих чисел очевидно і будуть найбільшим і найменшим з усіх значень функції.

Наприклад, для проміжку $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ порівнюємо значення $f(0)=1$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)\doteq 0{,}7$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ з крайніми $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=0$, а для проміжку $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$ порівнюємо числа $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $f(\pi)=-1$, $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\doteq-0{,}7$ з крайніми значеннями $f\left(\frac{\pi}{4}\right)\doteq 0{,}7$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$.

Зауваження. У прикладних задачах найчастіше трапляється простий випадок, коли **між** a і b виявляється лише одна "підозріла" точка x_0. Якщо в цій точці функція має максимум (мінімум), то без порівняння з крайніми значеннями зрозуміло, що це і буде найбільше (найменше) значення функції на проміжку (дивіться рис. 139.2). Часто в подібних випадках виявляється простіше зробити дослідження на максимум і мінімум, ніж обчислювати та порівнювати окремі значення функції (особливо якщо до функції входять літерні константи).

Важливо наголосити, що сказане можна застосовувати повною мірою і до **відкритого** проміжку (a,b), а також до **нескінченного** проміжку.

nebayduzhi.math@gmail.com

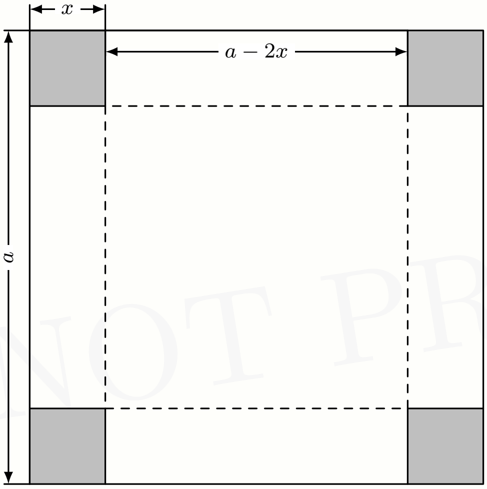


Рис. 140.1

140. Задачі

Викладемо тепер, у вигляді прикладів, кілька задач із різних сфер, розв'язання яких виконується через знаходження найбільшого або найменшого значення функції. Втім, найчастіше інтерес становлять не стільки самі ці значення, скільки ті точки (ті значення аргументу), в яких функція набуває своїх найбільших або найменших значень.

1) З квадратного листа жерсті зі стороною a, вирізаючи по кутах рівні квадрати та згинаючи краї (рис. 140.1), складають прямокутну відкриту коробку. Як отримати коробку **найбільшого вмісту**?

Якщо сторону квадрата, що вирізається, позначити через x, то об'єм y коробки буде: $y = x(a-2x)^2$, причому x змінюється на проміжку $\left[0, \frac{a}{2}\right]$. Задача зведена до знаходження найбільшого значення функції на цьому проміжку.

Оскільки похідна $y' = (a-2x)(a-6x)$ **між** 0 і $\frac{a}{2}$ має єдиний корінь $x = \frac{a}{6}$, то переконавшись у тому, що це значення доставляє функції максимум, отримуємо і шукане найбільше значення. Або інакше: для $x = \frac{a}{6}$ маємо $y = \frac{2a^3}{27}$, тоді як граничні значення y дорівнюють 0; отже, в точці $x = \frac{a}{6}$, справді, маємо найбільше значення для y.

2) Дана колода з круглим перерізом діаметра d. Потрібно обтесати її так, щоб вийшла балка із прямокутним перерізом **найбільшої міцності**.

Вказівка. В опорі матеріалів встановлюється, що міцність прямокутної балки пропорційна добутку bh^2, де b — основа прямокутника перерізу балки, а h — її висота.

Оскільки $h^2 = d^2 - b^2$, то йдеться про найбільше значення для виразу $y = bh^2 = b(d^2 - b^2)$, причому "незалежна змінна" b змінюється на проміжку $(0, d)$.

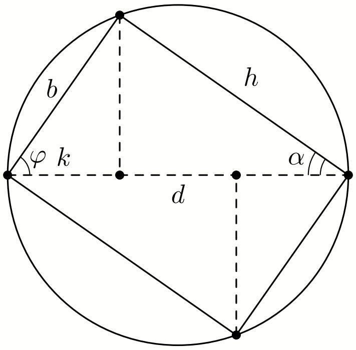


Рис. 140.2

Похідна $y' = d^2 - 3b^2$ дорівнює нулю лише один раз на визначеному проміжку, в точці $b = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$. Друга похідна $y'' = -6b < 0$, отже, у зазначеній точці досягається максимум, а з ним і найбільше значення.

Для $b = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$ буде $h = d\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, так що $d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$. На рис. 140.2 видно, як побудувати необхідний прямокутник. (Діаметр розділений на три рівні частини, в точках поділу побудовані перпендикуляри. Легко побачити, що $\cos\varphi = \dfrac{k}{b} = \dfrac{b}{d}$, отже, $k = \dfrac{b^2}{d} = \dfrac{b^2}{d^2}d = \dfrac{d}{3}$.) У будівельній справі зазвичай пропонується відношення $h : b = 7 : 5$; це і є наближене значення $\sqrt{2} \doteq 1{,}4$. Ще $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,
$\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 35^\circ 15' 52''$.

3) Навколо півкулі радіуса r описати прямий круговий конус **найменшого об'єму**; основи півкулі та конуса повинні лежати в одній площині та бути концентричними (рис. 140.3).

Тут потрібно ще раціонально вибрати незалежну змінну; нехай нею буде кут φ при вершині конуса. Матимемо $R = \dfrac{r}{\cos\varphi}$, $h = \dfrac{r}{\sin\varphi}$, отже, об'єм конуса

$$v = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\frac{1}{3}\pi r^3}{\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi}.$$

Для того щоб об'єм v мав **найменше** значення, очевидно треба щоб вираз
$y = \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi$, що стоїть у знаменнику, набув свого **найбільшого** значення, коли φ змінюється на проміжку $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Маємо

$$y'_\varphi = -2\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi + \cos^3\varphi = 2\cos^3\varphi\left(\frac{1}{2} - \operatorname{tg}^2\varphi\right);$$

між 0 і $\frac{\pi}{2}$ похідна дорівнює нулю тільки, коли $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 35^\circ 15' 52''$,

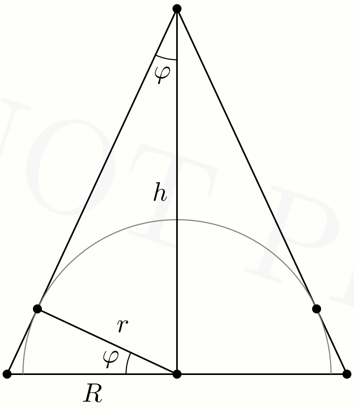


Рис. 140.3

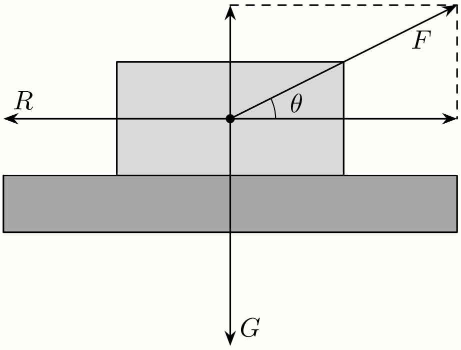


Рис. 140.4

змінюючи знак плюс на мінус. Цей кут надає виразу y найбільшого значення, а об'єму v — найменше.

4) Вантаж ваги G, що лежить на горизонтальній площині, має бути зрушений з місця прикладеною до нього силою (рис. 140.4). Під яким кутом до горизонту, за наявності тертя, слід прикласти цю силу, щоб величина її F була **найменша**? Коефіцієнт тертя μ заданий.

Вказівка. Сила тертя вважається пропорційною силі, що притискає тіло до площини (закон Кульома (фр. Charles-Augustin de Coulomb, Ша́рль Кульо́м)), і спрямована проти руху. Множник пропорційності μ — "коефіцієнт тертя".

Визначимо силу F, яка відповідає куту θ. Розкладаючи силу F за горизонтальним та вертикальним напрямками, отримаємо для складових сил такі величини: $F\cdot\cos\theta$ і $F\cdot\sin\theta$. Сила, що притискає тіло до площини, буде $G-F\cdot\sin\theta$, так що, за законом Кульома, сила тертя $R=\mu(G-F\cdot\sin\theta)$; горизонтальна складова $F\cdot\cos\theta$ сили F, що тягне, якраз і повинна врівноважувати силу тертя:

$$F \cdot \cos\theta = \mu \cdot (G - F \cdot \sin\theta),$$

звідки

$$F = \frac{\mu G}{\cos\theta + \mu \sin\theta}.$$

Йдеться про пошук **найменшого** значення цієї функції або **найбільшого** значення функції $y = \cos\theta + \mu\sin\theta$ на проміжку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Похідна $y'_\theta = \mu\cos\theta - \sin\theta$ дорівнює нулю, якщо $\operatorname{tg}\theta = \mu$, $\theta = \operatorname{arctg}\mu$; цей кут називається "кутом тертя". Оскільки $y''_{\theta^2} = -\mu\sin\theta - \cos\theta < 0$, то прикладати силу під кутом тертя виявляється найвигіднішe. Наприклад, якщо треба зрушити камінь по дерев'яному настилу, то $\mu = 0{,}4$ і $\theta \doteq 22^\circ$.

5) Відомо, що вартість плавання судна протягом години виражається **емпіричною формулою** $a + bv^3$, де a стосується амортизації та забезпечення команди, bv^3 — вартості палива, v — швидкість судна у вузлах (1 вузол = 1 морська миля на годину = 1,85 км/год); a і b — константи, які повинні бути обчислені окремо для кожного судна. За якої швидкості ("економічної") судно здолає будь-яку відстань із **найменшими** витратами?

На здолання 1 км потрібно $\frac{1}{1{,}85v}$ години, тому відповідні витрати можна записати формулою

$$\frac{1}{1{,}85v}(a + bv^3) = \frac{1}{1{,}85}\left(bv^2 + \frac{a}{v}\right).$$

Для виразу $y = bv^2 + \frac{a}{v}$ похідна $y'_v = 2bv - \frac{a}{v^2} = 0$, коли $v = \sqrt{\frac{a}{2b}}$. Оскільки $y''_{v^2} = 2b + \frac{2a}{v^2} > 0$, то за знайденого значення v витрати справді досягають **найменшої** величини.

Числовий приклад: $a = 40,\ b = 0{,}01,\ v = \sqrt[3]{2000} \doteq 12{,}6$ (вузлів).

6) Нехай електрична лампочка може пересуватися (наприклад, на блоці) вертикальною прямою OB (рис. 140.5). На якій відстані від горизонтальної площини OA її слід помістити, щоб в точці A цієї площини дістати **найбільшу освітленість**?

Вказівка. Освітленість J пропорційна $\sin\varphi$ і обернено пропорційна квадрату відстані $r = AB$, тобто

$$J = c \cdot \frac{\sin\varphi}{r^2},$$

де c залежить від сили світла лампочки.

Якщо за незалежну змінну вибрати $h = OB$, то

$$\sin\varphi = \frac{h}{r}, \quad r = \sqrt{h^2 + a^2}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

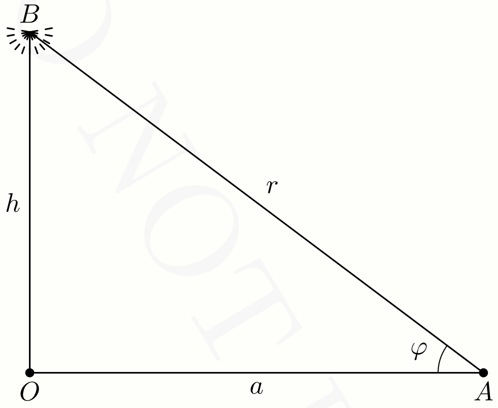


Рис. 140.5

і

$$J = c \cdot \frac{h}{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (0 < h < +\infty).$$

Далі, похідна

$$J'_h = c \cdot \frac{a^2 - 2h^2}{(h^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}}$$

дорівнює нулю, коли $h = \frac{a}{\sqrt{2}} \doteq 0{,}7a$, і змінює знак, переходячи через це значення, з плюса на мінус. Це і є найвигідніша відстань.

Можна вибрати за незалежну змінну кут φ; тоді

$$r = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad J = \frac{c}{a^2} \cdot \cos^2\varphi \sin\varphi,$$

і справа зводиться до знаходження найбільшого значення для функції $y = \cos^2\varphi \sin\varphi$ на проміжку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Але ми вже знаємо (дивіться задачу 3), що це найбільше значення досягається, коли кут дорівнює φ_0, для якого $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Для відстані h отримуємо колишнє значення $h \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

7) З точки A, що міститься на залізничній магістралі AB (рис. 140.6), вантажний потік прямує в точку C, віддалену на $CB = l$ від лінії залізниці. Вартість провезення вагової одиниці на одиницю відстані: α — залізницею і β — за гужового транспортування. До якої точки M слід провести шосе MC, щоб провезення вантажу з A в C (по лінії AMC) було якомога дешевше?

Вартість провезення вагової одиниці вантажу — за довільного положення точки

nebayduzhi.math@gmail.com

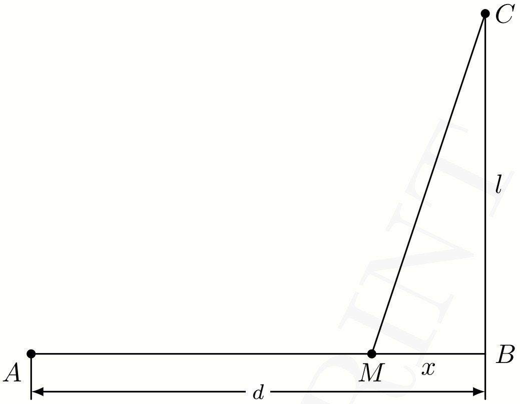


Рис. 140.6

M на AB — виявляється рівною

$$y = \alpha(d - x) + \beta\sqrt{x^2 + l^2} \quad (0 \leqslant x \leqslant d).$$

Маємо

$$y'_x = \frac{\beta x}{\sqrt{x^2 + l^2}} - \alpha = \beta\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}} - k\right) \quad \left(k = \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Якщо $k \geqslant 1$ $(\alpha \geqslant \beta)$, то цей вираз зберігає знак мінус, **зовсім не набуваючи нуля**. Функція y спадає зі зростанням x від 0 до d і очевидно досягає свого найменшого значення в точці $x = d$. У цьому випадку найвигідніше починати шосе безпосередньо від точки A.

Те саме справедливо і для $k < 1$, якщо одночасно

$$\frac{kl}{\sqrt{1 - k^2}} \geqslant d.$$

Справді, для $k < 1$ вираз

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}} - k$$

має єдиний корінь

$$\frac{kl}{\sqrt{1 - k^2}}.$$

Але за зробленого припущення цей корінь виявляється **поза** межами проміжку зміни x (або на кінці його), так що всередині проміжку похідна y'_x від'ємна.

Лише в тому разі, якщо згаданий корінь буде $< d$, це значення x визначає положення точки M **між** A і B, за якого витрати на перевезення будуть найменші.

nebayduzhi.math@gmail.com

Зауваження. Користуємося нагодою звернути увагу читача на таку обставину. У знаходженні найбільшого чи найменшого значення функції для певного проміжку зміни аргументу може виявитися, що всередині цього проміжку зовсім немає коренів похідної (або інших "підозрілих" значень). Це свідчить про те, що на аналізованому проміжку функція виявляється монотонно зростаючою або спадною і, отже, досягає як найбільшого, так і найменшого свого значення на кінцях проміжку.

В останній задачі за певних співвідношень між її вхідними величинами якраз і виконується подібний випадок.

4.2. Опуклі (і увігнуті) функції

141. Означення опуклої (увігнутої) функції

Після класу монотонних функцій, що **зростають** або **спадають**, виділяється клас так званих **опуклих** або **увігнутих** функцій.

*Функція $f(x)$, що визначена та **неперервна** на проміжку $\mathcal{X}$ (замкненому чи ні, скінченному чи нескінченному), називається **опуклою** (опуклою вниз), якщо для будь-яких точок x_1 і x_2 з $\mathcal{X}$ $(x_1 \lessgtr x_2)$ виконується нерівність*

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leqslant q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2), \tag{141.1}$$

*хоч би які були додатні числа q_1 і q_2, що в сумі дають одиницю. Функція називається **увігнутою** (опуклою вгору), якщо замість* (141.1) *маємо*

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \geqslant q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2), \tag{141.2}$$

Поняття опуклої (увігнутої) функції ввів Єнсен (дан. Johan Jensen, Йохéн Є́нсен), який використовував, проте, більш **часткове** співвідношення, ніж (141.1) (або (141.2)), а саме:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2};$$

воно відповідає $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$. У разі **неперервних** функцій, якими ми обмежуємося, його означення рівносильне даному в тексті.

Очевидно, що, якщо функція $f(x)$ опукла (увігнута), то функція $g(x) = -f(x)$ виявляється увігнутою (опуклою), і навпаки. Це просте зауваження дасть змогу нам у багатьох випадках обмежуватися вивченням лише опуклих функцій.

Наведене означення опуклої функції має просте геометричне значення. Насамперед зазначимо, що вираз

$$x = q_1x_1 + q_2x_2 \quad (x_1 < x_2), \tag{141.3}$$

за накладених на q_1 і q_2 умов, міститься між x_1 і x_2; навпаки, кожне число x, яке міститься між x_1 і x_2, може бути єдиним способом представлене в зазначеній формі, з коефіцієнтами

$$q_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{і} \quad q_1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{141.4}$$

Якщо розглянути **графік** функції $f(x)$ (рис. 141.1) та його дугу між точками $A_1(x_1, y_1)$ і $A_2(x_2, y_2)$, де $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, то в лівій частині нерівності (141.1)

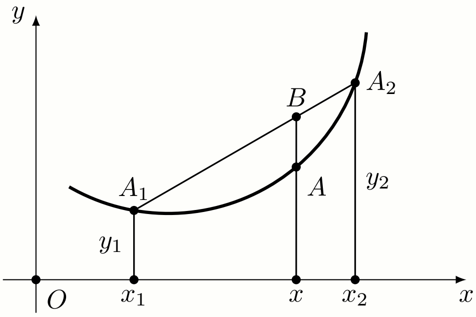


Рис. 141.1

при коефіцієнтах (141.4) ми маємо ординату точки A дуги A_1A_2 з абсцисою x. У правій частині цієї нерівності стоїть ордината точки B **хорди** A_1A_2

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}y_2 \tag{141.5}$$

з тією самою абсцисою. Отже, ***опукла*** *функція характеризується тим, що всі точки будь-якої дуги її графіка лежать* ***під*** *відповідною хордою або* ***на*** *ній.* (У разі увігнутої функції замість “під” слід було б сказати “над”.) Одночасно з самою функцією $f(x)$ **опуклою** (**увігнутою**) називають і криву $y = f(x)$.

Тривіальний приклад опуклої (й одночасно увігнутої) функції — **лінійна** функція $f(x) = ax+b$: для неї співвідношення (141.1) виконується завжди зі знаком **рівності**.

Опуклою буде і функція $f(x) = x^2$, що легко перевірити безпосередньо за означенням:

$$\begin{aligned}(q_1x_1 + q_2x_2)^2 &= q_1^2x_1^2 + 2q_1q_2x_1x_2 + q_2^2x_2^2 = \\ &= (1 - q_2)q_1x_1^2 + 2q_1q_2x_1x_2 + (1 - q_1)q_2x_2^2 = \\ &= q_1x_1^2 + q_2x_2^2 - q_1q_2x_1^2 + 2q_1q_2x_1x_2 - q_1q_2x_2^2 = \\ &= q_1x_1^2 + q_2x_2^2 - q_1q_2(x_1 - x_2)^2 \\ &< q_1x_1^2 + q_2x_2^2,\end{aligned}$$

якщо $q_1 > 0,\ q_2 > 0,\ q_1 + q_2 = 1$.

Інші приклади опуклих функцій читач знайде нижче.

142. Найпростіші твердження про опуклі функції

Теорема 142.1. *Добуток опуклої функції на додатну константу — опукла функція.*

Теорема 142.2. *Сума двох або кількох опуклих функцій також опукла функція.*

В обох випадках доведення відразу випливає з означення.

Зауваження. Добуток двох опуклих функцій може не виявитися опуклою функцією. Приклад буде наведений нижче.

Теорема 142.3. *Якщо $\varphi(u)$ опукла зростаюча функція, а $u = f(x)$ також опукла, то й композиція функцій $\varphi(f(x))$ буде опуклою функцією.*

Доведення. Справді, зважаючи на опуклість $f(x)$ (141.1) і зростання $\varphi(u)$ маємо

$$\varphi(f(q_1x_1 + q_2x_2)) \leqslant \varphi(q_1f(x_1) + q_2f(x_2)),$$

а з опуклості $\varphi(u)$

$$\varphi(q_1f(x_1) + q_2f(x_2)) \leqslant q_1\varphi(f(x_1)) + q_2\varphi(f(x_2)),$$

так що остаточно отримуємо нерівність

$$\varphi(f(q_1x_1 + q_2x_2)) \leqslant q_1\varphi(f(x_1)) + q_2\varphi(f(x_2)),$$

а це і є співвідношення типу (141.1) для функції $\varphi(f(x))$. ☐

Пропонуємо читачеві довести аналогічні твердження, що містяться в таблиці:

$\varphi(u)$	$u = f(x)$	$\varphi(f(x))$
$\smile$ опукла, ╱ зростає	$\smile$ опукла	$\smile$ **опукла**
$\smile$ опукла, ╲ спадає	$\frown$ увігнута	$\smile$ **опукла**
$\frown$ увігнута, ╱ зростає	$\frown$ увігнута	$\frown$ **увігнута**
$\frown$ увігнута, ╲ спадає	$\smile$ опукла	$\frown$ **увігнута**

Теорема 142.4. *Якщо $y = f(x)$ і $x = g(x)$ є однозначні взаємно обернені функції (на відповідних проміжках), то одночасно*

$f(x)$	$g(y)$
$\smile$ *опукла*, ╱ *зростає*	$\frown$ *увігнута*, ╱ *зростає*
$\smile$ *опукла*, ╲ *спадає*	$\smile$ *опукла*, ╲ *спадає*
$\frown$ *увігнута*, ╲ *спадає*	$\frown$ *увігнута*, ╲ *спадає*
$\frown$ *увігнута*, ╱ *зростає*	$\smile$ *опукла*, ╱ *зростає*

Доведення. Усі сформульовані в таблиці твердження очевидні з рисунка.

Нехай, наприклад, $f(x)$ опукла і зростає. Нехай

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2, \quad \text{так що} \quad x_1 = g(y_1), \quad x_2 = g(y_2).$$

Маємо, за основною нерівністю (141.1)

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leqslant q_1f(x_1) + q_2f(x_2) = q_1y_1 + q_2y_2.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Оскільки, за теоремою про обернену функцію (теор. 83.1), функція $g(y)$ також буде зростаючою, то

$$g(q_1y_1 + q_2y_2) \geqslant g(f(q_1x_1 + q_2x_2)) = q_1x_1 + q_2x_2 = q_1 \cdot g(y_1) + q_2 \cdot g(y_2),$$

що й доводить увігнутість функції $g(y)$ (141.2). ☐

Теорема 142.5. *Опукла на проміжку $\mathcal{X}$ функція, яка не стала, не може досягати* ***найбільшого*** *значення* ***всередині*** *цього проміжку.*

Доведення. Припустимо протилежне: нехай функція досягає найбільшого значення у внутрішній точці x_0 проміжку. Оскільки функція не стала, то знайдеться проміжок (x_1, x_2):

$$x_1 < x_0 < x_2,$$

що хоч на одному з кінців значення функції менше, ніж у точці x_0. Нехай, скажімо,

$$f(x_1) < f(x_0), \quad f(x_2) \leqslant f(x_0).$$

Знайдуться такі $q_1,\ q_2,\ q_1 + q_2 = 1$, що $x_0 = q_1x_1 + q_2x_2$. Помножимо обидві частини першої нерівності на q_1, а другої на q_2 і додамо. Ми отримаємо

$$q_1f(x_1) + q_2f(x_2) < f(x_0)(q_1 + q_2) = f(x_0) = f(q_1x_1 + q_2x_2),$$

що суперечить опуклості функції $f(x)$. Цим наше твердження доведено. ☐

Теорема 142.6. *Якщо проміжок $[x_1, x_2]$, де $x_1 < x_2$, міститься в проміжку $\mathcal{X}$, у якому функція опукла, то співвідношення (141.1) виконується або* ***завжди*** *зі знаком рівності, або* ***завжди*** *зі знаком нерівності.*

Повертаючись до позначень рис. 141.1, геометрично це можна висловити так: дуга A_1A_2 або **зливається** з хордою A_1A_2 або ж (за винятком кінців) **уся** лежить **під** хордою.

Доведення. Для доведення розглянемо **лінійну** функцію (141.5), що в точках x_1 і x_2 має ті ж самі значення, що й функція $f(x)$; позначимо цю функцію через $l(x)$. Різниця

$$\varphi(x) = f(x) - l(x) = f(x) + (-l(x)),$$

зважаючи на опуклість функцій $f(x)$ і $-l(x)$, теж буде опукла (теор. 142.2). Тоді або $\varphi(x) \equiv 0$ на проміжку $[x_1, x_2]$, або ні. У першому випадку $f(x) \equiv l(x)$ на цьому проміжку, тобто дуга **зливається** з хордою, та співвідношення (141.1) виконується **завжди** зі знаком рівності. У другому випадку на всьому проміжку (x_1, x_2) має бути $\varphi(x) < 0$, бо, якби функція $\varphi(x)$ набувала на цьому проміжку і невід'ємних значень, то вона досягала б свого найбільшого на проміжку $[x_1, x_2]$ значення **всередині** цього проміжку, що для відмінної від сталої опуклої функції неможливо (теор. 142.5). Отже, всередині проміжку $f(x) < l(x)$, тобто крива лежить **під** хордою, і співвідношення (141.1) **завжди** виконується зі знаком нерівності. ☐

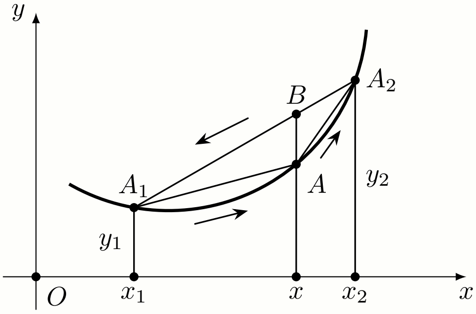


Рис. 143.1

Якщо для ***будь-якого*** *проміжку* $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$, *що міститься в* $\mathcal{X}$, *співвідношення* (141.1) *виконується зі знаком нерівності, ми будемо називати функцію* $f(x)$ ***строго опуклою***. Аналогічно встановлюється поняття строго увігнутої функції. Ця термінологія застосовується одночасно і до кривої $y = f(x)$.

143. Умови опуклості функції

Враховуючи (141.3) та (141.4), можна основну нерівність (141.1) переписати так:

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

або, симетричніше,

$$(x_2 - x) f(x_1) + (x_1 - x_2) f(x) + (x - x_1) f(x_2) \geqslant 0. \tag{143.1}$$

Нарешті, ця умова може бути записана і за допомогою визначника матриці:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{143.2}$$

У всіх випадках вважається, що x міститься між x_1 і x_2; для визначеності ми будемо надалі вважати $x_1 < x_2$.

Зауважимо також, що умова опуклості функції у формі (143.2) має безпосереднє геометричне тлумачення. Написаний визначник виражає подвоєну площу $\triangle A_1 A A_2$ (рис. 143.1) з **плюсом** саме тоді, коли трикутник **додатно орієнтований**, тобто його периметр $A_1 - A - A_2$ описується проти годинникової стрілки.

Зазначимо особливо, що, якщо йдеться про **строгу** опуклість, то в усіх цих умовах знак рівності можна відкинути.

Зручні для перевірки умови опуклості функції виходять, якщо залучити її похідні.

Теорема 143.1. *Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $\mathcal{X}$ і має на ньому скінченну похідну $f'(x)$. Для того щоб $f(x)$ була опукла на $\mathcal{X}$, необхідно і достатньо, щоб її похідна $f'(x)$ зростала (в широкому значенні).*

Доведення. **Необхідність.** Нехай функція $f(x)$ опукла. Припускаючи $x_1 < x < x_2$, запишемо умову (143.1) у вигляді:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}. \tag{143.3}$$

Якщо тепер спрямувати тут x до x_1 або до x_2 і перейти до границі, то отримаємо

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \text{і} \quad f'(x_2) \geqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \tag{143.4}$$

звідки $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$, отже функція $f'(x)$ справді виявляється зростаючою (в широкому значенні).

В інтересах подальшого підкреслимо, що у виведенні нерівностей (143.4) використано **лише** існування похідної, відповідно, у точці x_1 або x_2.

Достатність. Припустимо тепер виконання цієї останньої умови. Для доведення нерівності (143.3) застосуємо до кожної з її частин формулу скінченних приростів (дивіться розд. 112)

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\xi_2),$$

причому $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. Оскільки, за припущенням, $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$, то співвідношення (143.3), справді виконується, а вже з нього можна відновити співвідношення (143.1), що підтверджує опуклість функції $f(x)$. ☐

Теорема 143.2. *Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна разом зі своєю похідною $f'(x)$ на проміжку $\mathcal{X}$ і має* ***всередині*** *нього скінченну другу похідну $f''(x)$. Для опуклості функції $f(x)$ на $\mathcal{X}$ необхідно і достатньо, щоб* ***усередині*** *$\mathcal{X}$ було*

$$f''(x) \geqslant 0. \tag{143.5}$$

Доведення. Достатньо застосувати до функції $f'(x)$ теор. 132.2 і теор. 143.1. ☐

Для увігнутості функції аналогічно виходить умова

$$f''(x) \leqslant 0. \tag{143.6}$$

Отже, вимога

$$f''(x) > 0 \quad (< 0) \tag{143.7}$$

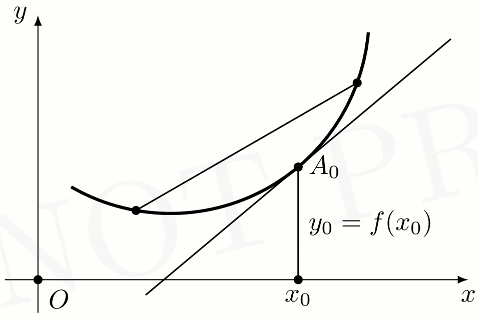


Рис. 143.2

забезпечує **строгу** опуклість (увігнутість), бо функція $f(x)$ не може бути лінійною на будь-якому проміжку (теор. 142.6).

Тепер одразу полегшується побудова будь-якої кількості прикладів як опуклих, так і увігнутих функцій.

1) Функція $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ **опукла** на проміжку $(-\infty, +\infty)$, бо $y'' = a^x \cdot (\ln a)^2 > 0$;

2) функція $y = \ln x$ **увігнута** на проміжку $(0, +\infty)$, бо $y'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ (порівняйте з теор. 142.4);

3) для функції $y = x \cdot \ln x$ на проміжку $(0, +\infty)$ $y'' = \dfrac{1}{x} > 0$, і функція **опукла**;

4) для функції $y = x^r$ на проміжку $(0, +\infty)$ $y'' = r(r-1)x^{r-2}$; звідси видно, що для $r > 1$ і $r < 0$ функція **опукла**, а для $0 < r < 1$ — **увігнута**.

Цей приклад дає можливість показати, що добуток двох опуклих функцій може не бути опуклою функцією; так, функція $y = -x^{\frac{1}{3}}$ **опукла**, тоді як її квадрат, тобто функція $y = x^{\frac{2}{3}}$, виявляється **увігнутою**.

В усіх цих прикладах фактично маємо **строгу** опуклість або увігнутість.

На закінчення ми вкажемо ще одну важливу геометричну характеристику опуклої функції $f(x)$. Замість **хорди** графіка функції $y = f(x)$, яку ми розглядали в розд. 141, тут ми залучимо до розгляду **дотичну** в будь-якій точці графіка (рис. 143.2).

Теорема 143.3. *Нехай функція $f(x)$ визначена та неперервна на проміжку $\mathcal{X}$ і має на ньому скінченну похідну $f'(x)$. Для опуклості функції $f(x)$ необхідно і достатньо, щоб її графік усіма точками лежав над будь-якою своєю дотичною (або на ній).*

Доведення. **Необхідність.** Дотична до кривої $y = f(x)$ у точці $A_0(x_0, f(x_0))$ має кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$. Рівняння дотичної напишеться так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Потрібно показати, що опуклість функції $f(x)$ тягне для будь-яких точок x_0 і x з $\mathcal{X}$ нерівність

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{143.8}$$

Вона рівносильна двом таким

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x > x_0) \\ f'(x_0) &\geqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x < x_0) \end{aligned} \tag{143.9}$$

а ці нерівності збігаються, відповідно, з нерівностями (143.4), отриманими в доведенні теор. 143.1 (саме за умови опуклості функції), якщо в першому з них покласти $x_2 = x,\ x_1 = x_0$, а в другому $x_2 = x_0,\ x_1 = x$.

Достатність. Припустимо, навпаки, що виконується нерівність (143.8) або, що те ж саме, що і нерівності (143.9). Тоді за допомогою їх можна відновити нерівності (143.4), звідки випливає, що $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$, отже, похідна $f'(x)$ буде зростаючою функцією. А це, як ми знаємо (теор. 143.1), тягне за собою опуклість функції $f(x)$. $\square$

Зауваження. Звертаємо увагу читача на те, що фактично (дивіться теор. 143.1) **необхідність** нерівності (143.8) для **даного** x_0 і довільного $x \neq x_0$ доведена, за припущення лише існування похідної $f'(x_0)$ у самій точці x_0.

144. Нерівність Єнсена та її застосування

Згідно з означенням опуклої функції (141.1), маємо

$$\begin{gathered} f(q_1x_1 + q_2x_2) \leqslant q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2), \\ (q_1,\ q_2 > 0; \quad q_1 + q_2 = 1). \end{gathered}$$

Можна довести, що для опуклої функції справедлива загальніша нерівність (яку пов'язують з ім'ям Єнсена):

$$\begin{gathered} f(q_1x_1 + q_2x_2 + \dots + q_nx_n) \leqslant q_1 \cdot f(x_1) + q_2 \cdot f(x_2) + \dots + q_n \cdot f(x_n), \\ (q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_n > 0; \quad q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1), \end{gathered} \tag{144.1}$$

хоч би які були значення $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ з основного проміжку $\mathcal{X}$.

Доведення. Для $n = 2$ ця нерівність, як ми знаємо, справедлива; припустивши тепер, що вона справедлива для будь-якого натурального числа $n \geqslant 2$, доведемо, що вона справедлива і для $n+1$, тобто що, взявши $n+1$ значень $x_1,\ \dots,\ x_n,\ x_{n+1}$ з $\mathcal{X}$ і $n+1$ додатних чисел $q_1,\ \dots,\ q_n,\ q_{n+1}$, сума яких дорівнює одиниці, матимемо

$$f(q_1x_1 + \dots + q_nx_n + q_{n+1}x_{n+1}) \leqslant q_1 \cdot f(x_1) + \dots + q_n \cdot f(x_n) + q_{n+1} \cdot f(x_{n+1}). \tag{144.2}$$

З цією метою, замінимо зліва суму двох останніх доданків $q_nx_n + q_{n+1}x_{n+1}$ одним доданком

$$(q_n + q_{n+1})\left(\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}}x_n + \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}x_{n+1}\right);$$

це дасть можливість скористатися нерівністю (144.1) і встановити, що вираз у (144.2) зліва не перевищує суми

$$q_1 \cdot f(x_1) + \dots + (q_n + q_{n+1}) \cdot f\left(\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}}x_n + \frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}x_{n+1}\right).$$

Залишається лише застосувати до значення функції в останньому доданку основну нерівність (141.1), щоб прийти до (144.2). Отже, за методом математичної індукції, нерівність (144.1) доведена. □

Зазвичай замість множників q_i, сума яких дорівнює одиниці, вводять довільні додатні числа p_i. Вважаючи в нерівності (144.1)

$$q_i = \frac{p_i}{p_1 + \dots + p_n},$$

зведемо її до вигляду

$$f\left(\frac{\sum p_ix_i}{\sum p_i}\right) \leqslant \frac{\sum p_if(x_i)}{\sum p_i}. \tag{144.3}$$

У разі **увігнутої** функції $f(x)$ очевидно знак нерівності потрібно змінити на протилежний.

Вибираючи різними способами функцію $f(x)$, можна отримувати важливі конкретні нерівності, і до того ж усі з одного джерела! Наведемо приклади.

1) $f(x) = x^k$, де $x > 0,\ k > 1$. Це **опукла** функція. Маємо

$$\left(\frac{\sum p_ix_i}{\sum p_i}\right)^k \leqslant \frac{\sum p_ix_i^k}{\sum p_i}.$$

або

$$\left(\sum p_ix_i\right)^k \leqslant \left(\sum p_i\right)^{k-1} \cdot \sum p_ix_i^k.$$

Замінюючи тут p_i на $b_i^{\frac{k}{k-1}}$, а x_i на $\dfrac{a_i}{b_i^{\frac{1}{k-1}}}$, прийдемо до вже відомої нам нерівності Коші – Хьольдара

$$\sum a_ib_i \leqslant \left(\sum a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \cdot \left(\sum b_i^{\frac{k}{k-1}}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

(Порівняйте з (133.6)).

2) $f(x) = \ln x$, де $x > 0$. Це **увігнута** функція. Маємо

$$\frac{\sum p_i \ln x_i}{\sum p_i} \leqslant \ln \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}.$$

Звідси, потенціюючи, теж прийдемо до нерівності, яку вже бачили,

$$\left(\prod x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\Sigma p_i}} \leqslant \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}.$$

(Порівняйте з (133.4)).

Потенціювання в математиці — це обернена дія до логарифмування з певною основою, тобто піднесення до степеня з цією основою. Іншими словами, це перехід від рівняння вигляду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ до рівняння $f(x) = g(x)$, де a — відмінне від одиниці додатне число.

Як $\sum$ означає **суму**, так знак $\prod$ означає **добуток**.

3) Нарешті, візьмемо $f(x) = x \cdot \ln x$, де $x > 0$. Це **опукла** функція. Тоді виявиться, що

$$\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \cdot \ln \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \leqslant \frac{\sum p_i x_i \ln x_i}{\sum p_i}.$$

Помножуючи на $\sum p_i$ і потенціюючи, отримаємо нерівність

$$\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} \leqslant \left(\prod x_i^{p_i x_i}\right)^{\frac{1}{\Sigma p_i x_i}}.$$

Зокрема, поклавши тут $p_i = \frac{1}{x_i}$, матимемо

$$\frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod x_i}.$$

Якщо поширити поняття **середнього гармонічного** (пр. 35.5) на випадок кількох чисел, то нерівність цю можна сформулювати так: *середнє гармонічне ряду додатних чисел не перевищує їх середнього геометричного.*

145. Точки перегину

У побудові графіків функцій (чому буде присвячений наступний розділ) важливі так звані **точки перегину** кривої $y = f(x)$.

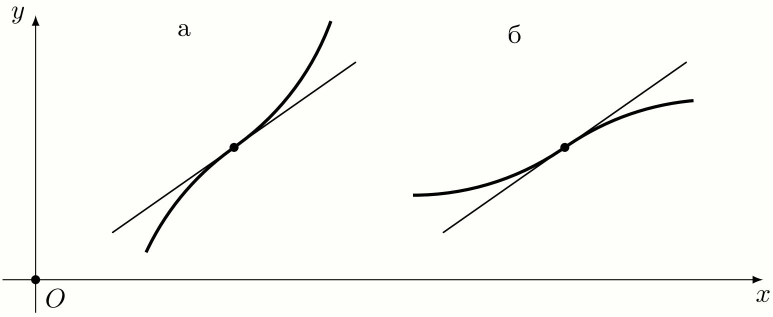


Рис. 145.1

Точку $M(x_0, f(x_0))$ кривої називають її **точкою перегину**, *якщо вона відокремлює ділянку кривої, де функція $f(x)$ опукла (опукла вниз), від ділянки, де ця функція увігнута (опукла вгору)* (рис. 145.1).

Якщо припустити, що на заданому проміжку функція $f(x)$ має скінченну похідну, то ця похідна, за теор. 143.1, зростає в деякому околі $[x_0 - \delta,\ x_0]$ зліва від x_0 і спадає в околі $[x_0,\ x_0 + \delta]$ справа, або навпаки, спадає зліва і зростає справа. У першому випадку $f'(x)$ має в точці $x = x_0$ максимум, а у другому — мінімум. Якщо допустити ще існування скінченної другої похідної $f''(x)$ **хоча б тільки в** точці $x = x_0$, то необхідно $f''(x_0) = 0$ (порівняйте з розд. 134).

Ця умова $f''(x_0) = 0$ відіграє таку ж роль щодо точок перегину, яку відігравала умова $f'(x_0) = 0$ під час знаходження екстремумів функції $f(x)$: воно необхідне, але не достатнє. В останньому легко переконатися на прикладі. Нехай $f(x) = x^4$, тоді $f''(x) = 12x^2 \geqslant 0$ на проміжку $(-\infty, +\infty)$, так що, за теор. 143.2, функція $f(x)$ опукла на **всьому** цьому проміжку, хоча $f''(x)$ дорівнює нулю в точці $x = 0$.

Якщо друга похідна $f''(x)$ існує скрізь усередині заданого проміжку, то абсциси точок перегину слід шукати серед **коренів** цієї похідної. Але кожен корінь x_0 потребує **дослідження**. Нехай у деяких околах $[x_0 - \delta,\ x_0)$ і $(x_0,\ x_0 + \delta]$, ліворуч і праворуч від x_0, похідна $f''(x)$ **зберігає певний знак**. Тоді для розпізнавання точки перегину можна дати таке **правило**: *якщо під час переходу через значення $x = x_0$, похідна $f''(x)$ змінює знак, то є перегин, якщо ж знак не змінює, то перегину немає* (порівняйте з розд. 135).

Зазначимо, що на ділянках кривої, відокремлених точкою $(x_0,\ f(x_0))$, крива виявляється **строго** опуклою на одній і **строго** увігнутою — на іншій.

Розглянемо, наприклад, функцію $f(x) = \sin x$; для неї $f''(x) = -\sin x$ дорівнює нулю в точках $x = k\pi$ (k — ціле) і **змінює в цих точках знак**. Отже, всі точки синусоїди, що лежать на осі x, — точки перегину; легко побачити, що на проміжках $((2m-1)\pi,\ 2m\pi)$ синусоїда опукла (опукла вниз), а на проміжках $(2m\pi,\ (2m+1)\pi)$ вона увігнута (опукла вгору).

Можна було б, як ми це зробили в розд. 138 для знаходження екстремумів функції, залучити і вищі похідні у досліджуваній точці x_0, для якої $f''(x_0) = 0$. Отже виходить правило: *якщо перша з похідних (вища від другого порядку), що не дорівнюють у точці x_0 нулю, — похідна непарного порядку, то маємо перегин; якщо ж така похідна — похідна парного порядку, то перегину немає.*

На закінчення вкажемо чудову властивість кривої $y = f(x)$ щодо дотичної до неї в точці перегину (якщо така дотична існує): *крива переходить у цій точці з одного боку дотичної на інший, тобто крива та дотична взаємно перетинаються* (дивіться рис. 145.1).

Ця обставина очевидна, якщо дотична вертикальна (порівняйте з рис. 101.1 а) та б)). Звернемося до випадку похилої чи горизонтальної дотичної, припускаючи існування скінченної похідної $f'(x_0)$. Припустимо для визначеності, що ліворуч від точки перегину, для $x_0 - \delta \leqslant x < x_0$ крива опукла, а праворуч, для $x_0 < x \leqslant x_0 + \delta$, крива увігнута (це відповідає рис. 145.1 б). У цьому випадку встановимо, що для $x < x_0$ крива лежить **над** дотичною (або на ній), а для $x > x_0$ — **під** дотичною (або на ній), тобто що

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (x < x_0), \\ f(x) &\leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (x > x_0). \end{aligned}$$

Але перша з цих нерівностей збігається з нерівністю (143.8) (слід мати на увазі **зауваження**, там же). Друга — аналог нерівності (143.8) для **увігнутої** функції.

Зауваження. Часто саме цю властивість кривої приймають просто за означення точки перегину. **Таке означення зовсім не рівносильне даному вище.** Крива насамперед може не мати дотичної в точці перегину, отже друге означення виявиться непридатним. Може статися навпаки: крива перетинає дотичну в точці, яка не відокремлює опуклої ділянки кривої від увігнутої, і перше означення непридатне. Такі криві показані на рис. 101.1 в і г; але цікавіша крива

$$y = \begin{cases} x^5\left(1 + \sin^2\frac{1}{x}\right), & \text{якщо} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad x = 0, \end{cases}$$

яка в точці $(0, 0)$ торкається осі x і перетинає її; тут існує навіть неперервна друга похідна, але вона безліч разів змінює знак поблизу точки $x = 0$ як ліворуч, так і праворуч від неї.

4.3. Побудова графіків функцій

146. Формулювання задачі

Маючи методи диференціального числення, повернемося до питання **побудови графіків функцій** (порівняйте з розд. 47). Нехай спочатку потрібно побудувати графік неперервної на скінченному проміжку $[a, b]$ функції $y = f(x)$. Зараз основна мета для нас — *якомога точніша характеристика самого* ***ходу зміни*** *функції*; точність окремих ординат цікавить нас менше.

Зазвичай спосіб побудови "за точками" (розд. 47), взятими більш-менш густо, але **випадково** і без урахування (невідомих наперед) особливостей графіка, непридатний. Він насамперед вимагає обчислення великої кількості координат, що **практично** незручно. Але головне в іншому: він непридатний **принципово**, тому що саме через випадковість обчислюваних ординат він все ж таки не забезпечує досягнення поставленої мети.

Припустимо тепер, що функція $y = f(x)$ має скінченну похідну $y' = f'(x)$; виняток може становити лише скінченне число окремих точок, де похідна виявляється **нескінченною**, але певного знака або різних знаків праворуч і ліворуч. Тоді методи диференціального числення дають можливість встановити кілька "опорних" точок, **характерних саме для цього графіка**, за якими він будується вже достатньо точно.

Насамперед ми маємо тут на увазі **поворотні точки** графіка, тобто вершини його горбів і западин, що відповідають екстремальним значенням функції (розд. 134 - розд. 138). Втім, до них слід приєднати всі взагалі точки, де дотична горизонтальна або вертикальна, навіть якщо вони не відповідають екстремумам функції. Зрозуміло, мають бути позначені і кінці графіка.

Коли згадані щойно точки нанесені на креслення (а число їх зазвичай невелике), цього, власне, вже досить для побудови графіка.

Побудований подібним чином графік уже досить повно відображає хід зміни функції, точно позначаючи її проміжки зростання та спадання, а також точки, де швидкість зміни функції падає до нуля ($y' = 0$) або зростає до нескінченності ($y' = \pm\infty$).

Можна досягти подальшого уточнення графіка, якщо врахувати його **опуклість** (опуклість вниз) або **увігнутість** (опуклість вгору) на окремих ділянках і положення **точок перегину**, що їх відокремлюють (розд. 143, розд. 145).

147. Схема побудови графіка. Приклади

Отже, нехай функція $y = f(x)$ на проміжку $[a, b]$ двічі диференційовна, за винятком окремих точок, у яких похідна $y' = f'(x)$ має нескінченне значення, певного знака з обох боків або різних знаків праворуч і ліворуч.

Тоді для побудови графіка функції $y = f(x)$ слід виконати таке:

1) визначити значення x, для яких похідна $y' = f'(x)$ дорівнює нулю або нескінченності, і піддати їх дослідженню на екстремум;

2) визначити значення x, для яких друга похідна $y'' = f''(x)$ дорівнює нулю, і піддати їх дослідженню на перегин;

3) обчислити значення самої функції $y = f(x)$, що відповідають усім цим значенням x, а також кінцям a і b цього проміжку.

Результати зручно розташувати у вигляді таблиці (дивіться приклади нижче), з неодмінною вказівкою щодо **особливості** обчисленої точки графіка: *максимум*, *мінімум*, $y' = 0$, $y' = +\infty$, $y' = -\infty$, $y' = \pm\infty$ або $\mp\infty$ (так ми умовно позначатимемо той факт, що похідна ліворуч є $+\infty$, а праворуч $-\infty$, або навпаки), *перегин*.

Іноді до названих точок графіка на бажання приєднують ще й деякі інші, наприклад, точки перетину графіка з осями.

Після нанесення на креслення усіх обчислених точок через них проводять графік, враховуючи всі згадані їх **особливості**.

Звісно, *ми маємо на увазі звичайний у практиці побудови графіків випадок, коли перша похідна дорівнює* 0 *(або* $\pm\infty$*) або друга похідна дорівнює* 0 *лише в* ***скінченному*** *числі точок.* Тоді на проміжках між ними графік іде весь час вгору або весь час вниз, а також виявляється опуклим, вниз чи вгору.

Обчислення та проведення кривої спрощуються, якщо функція не змінює своє значення, коли x змінює знак, (**парна** функція), отже, графік **симетричний відносно вертикальної осі**. Аналогічну послугу може надати і **симетрія відносно початку координат**, яка аналітично виявляється в тому, що функція лише змінює знак, коли x змінює знак, (**непарна** функція).

Приклади.

1) У пр. 136.2 ми вже досліджували поведінку функції

$$y = \sin^3 x + \cos^3 x;$$

за допомогою її похідної ми встановили значення x, що доставляють функції екстремуми, а також обчислили і самі екстремальні значення функції. Зважаючи на періодичність функції, ми обмежилися проміжком $[0, 2\pi]$ зміни x. Графік функції також досить побудувати для цього проміжку.

Тепер нам потрібно знайти корені другої похідної. Якщо представити її у вигляді

$$y'' = \frac{9}{2}(\sin x + \cos x)\left(\sin 2x - \frac{2}{3}\right),$$

то легко побачити, що перший множник у дужках дорівнює 0, коли $x = \frac{3\pi}{4} \doteq 2{,}36$ і $x = \frac{7\pi}{4} \doteq 5{,}50$, а другий — коли $x \doteq 0{,}36$ (21°), $1{,}21$ (69°), $3{,}51$ (201°) і $4{,}35$ (249°); у всіх випадках знак y'' змінюється, так що є **перегин**.

nebayduzhi.math@gmail.com

Складаємо таблицю:

x	**y**	**особливість**
0	1	$y' = 0$, макс.
0,36	0,86	перегин
0,78	0,71	$y' = 0$, мін.
1,21	0,86	перегин
1,57	1	$y' = 0$, макс.
2,36	0	перегин
3,14	−1	$y' = 0$, мін.
3,51	−0,86	перегин
3,94	−0,71	$y' = 0$, макс.
4,35	−0,86	перегин
4,71	−1	$y' = 0$, мін.
5,50	0	перегин
6,28	1	$y' = 0$, макс.

За цією таблицею і побудовано графік, зображений на рис. 136.2.

Зауваження. Читач повинен мати на увазі, що наведені в книзі креслення, зважаючи на малий масштаб, не повністю використовують ті точні дані, які отримані обчисленнями. Рекомендується повторити ці креслення в більшому масштабі.

2) Розглянемо функцію

$$y = \sin x + \sin 2x.$$

Вона не лише періодична, а й **непарна**. Це дає змогу скоротити проміжок зміни x, звівши його до $[0, \pi]$.

У цьому проміжку похідна

$$y' = \cos x + 2\cos 2x = 4\cos^2 x + \cos x - 2$$

дорівнює 0, якщо $\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8}$, тобто коли $x \doteq 0{,}94$ (54°) і $2{,}57$ (147°). Оскільки друга похідна

$$y'' = -\sin x - 4\sin 2x = -\sin x(1 + 8\cos x)$$

для першого з цих значень очевидно від'ємна, то це значення доставляє функції максимум; аналогічно, друге значення доставляє функції мінімум.

Сама друга похідна дорівнює 0 разом із $\sin x$, коли $x = 0$ або $x = \pi \doteq 3{,}14$, а також разом із множником у дужках, коли $x \doteq 1{,}70$ (97°); у всіх випадках вона змінює знак (перегин).

Таблиця:

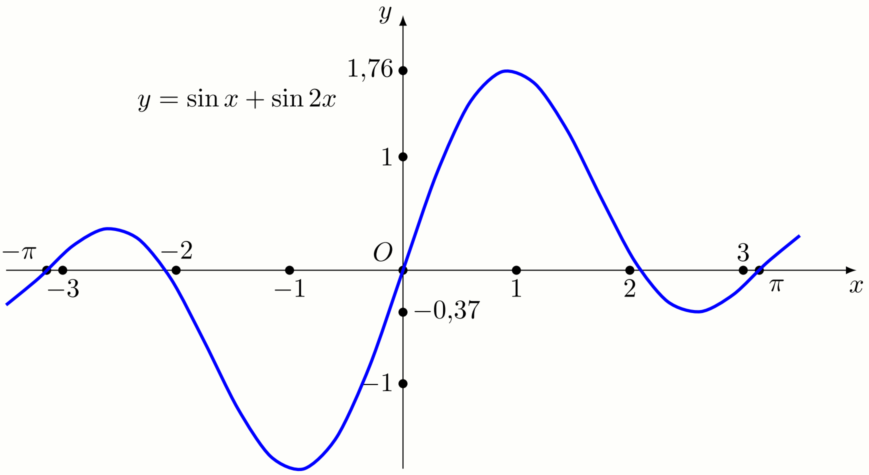


Рис. 147.1

x	y	особливість
0	0	перегин
0,94	1,76	$y' = 0$, макс.
1,70	0,74	перегин
2,09	0	
2,57	$-0{,}37$	$y' = 0$, мін.
3,14	0	перегин

До вказаних вище значень x ми приєднали тут значення $x = \frac{2}{3}\pi \doteq 2{,}09$ (120°), для якого $y = 0$ (графік перетинає вісь x). Графік, побудований за цими точками, зображений на рис. 147.1; для проміжку $[-\pi, 0]$ він виходить подвійним перекладанням: навколо осі y, а потім навколо осі x.

148. Нескінченні розриви, нескінченний проміжок. Асимптоти

Корисно розширити клас функцій, які ми розглядаємо. По-перше, ми припустимо тепер для функції $y = f(x)$ можливість **прямувати до нескінченності** для окремих значень x. Це означає, що якщо x_0 є одне з таких значень і x наближається до x_0 з того чи іншого боку, то $f(x)$ прямує до $+\infty$ або до $-\infty$. По-друге, нас може цікавити поведінка функції і на **нескінченному проміжку**.

Оскільки розміри креслення, зрозуміло, скінченні, то в обох цих випадках доводиться задовольнятися частиною всього графіка. За межами креслення намагаються залишити такі частини графіка, про вигляд яких легко наперед скласти собі уявлення, виходячи з того, що накреслено.

nebayduzhi.math@gmail.com

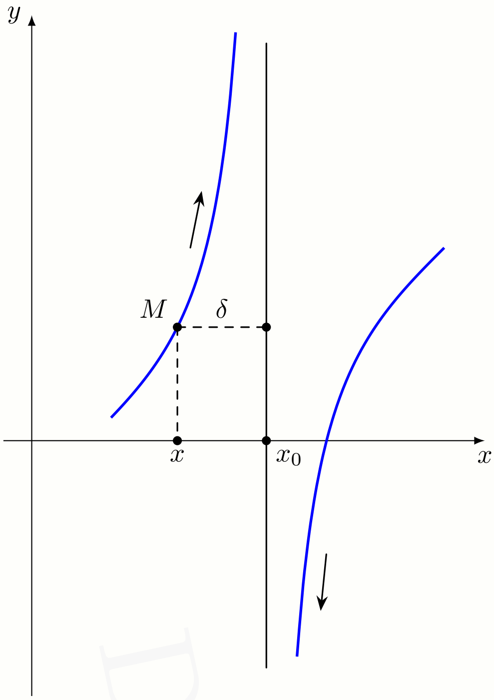


Рис. 148.1

Зупинимося на випадку нескінченного розриву функції, скажімо в точці $x = x_0$. Коли x наближається до x_0 з одного боку, функція прямує до нескінченності (того чи іншого знака) **монотонно**, якщо принаймні в скінченній частині проміжку похідна $y' = f'(x)$ лише скінченне число разів змінює знак. З різних боків від x_0 (якщо x_0 не є кінець проміжку) функція може мати границі різних знаків. Принаймні графік буде безмежно наближатися, йдучи в нескінченність, до **вертикальної** прямої $x = x_0$ у верхній чи нижній його частині, залежно від знака нескінченної границі. **Ця пряма дає змогу виразно уявити собі вигляд графіка і за межами креслення** (рис. 148.1). Прикладами можуть служити вже відомі нам графіки функцій:
$y = \frac{a}{x}$ в точці $x = 0$ (рис. 48.2);
$y = \operatorname{tg} x$ в точках $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (рис. 48.8);
$y = \log_a x$ в точці $x = 0$ (рис. 48.6).

У разі нескінченного (в один бік або обидва) проміжку, схожу послугу іноді надає **горизонтальна** або **похила** пряма, до якої графік наближається безмежно. У зв'язку з цим дамо таке загальне означення.

Нехай маємо криву, гілка якої в тому чи іншому напрямку віддаляється в нескінченність. *Якщо відстань δ від точки кривої до деякої певної прямої прямує до нуля, коли точка віддаляється в нескінченність, то ця пряма називається* ***асимптотою*** *кривої.*

nebayduzhi.math@gmail.com

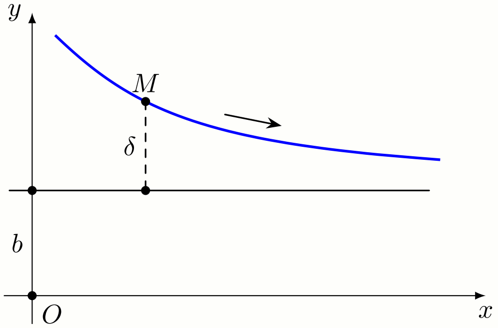


Рис. 148.2

Щойно ми мали справу з вертикальними асимптотами, тепер займемося горизонтальними і похилими асимптотами для кривої, заданої рівнянням $y = f(x)$.

Приклади **горизонтальних** асимптот нам уже траплялися:
для кривої $y = \frac{a}{x}$ — пряма $y = 0$, коли $x \to \pm\infty$ (рис. 48.2);
для кривої $y = \operatorname{arctg} x$ — прямі $y = \frac{\pi}{2}$ та $y = -\frac{\pi}{2}$, відповідно, коли $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$ (рис. 50.2);
для кривої $y = a^x$ — пряма $y = 0$ для $x \to -\infty$, якщо $a > 1$; і для $x \to +\infty$, якщо $a < 1$ (рис. 48.5).

Щоб, наприклад, для $x \to +\infty$, пряма служила асимптотою для кривої $y = f(x)$ очевидно (рис. 148.2) **необхідно і достатньо**, щоб було

$$\lim_{x\to+\infty} \delta = \lim_{x\to+\infty} |y - b| = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$

Отже, питання про горизонтальну асимптоту зводиться просто до питання про цю границю.

Окремо потрібно шукати таку границю, і коли $x \to -\infty$; але (як, наприклад, у разі кривої $y = \operatorname{arctg} x$) може вийти й інша асимптота.

Переходячи до **похилих** асимптот, нагадаємо, що прикладами їх можуть бути відомі читачеві з аналітичної геометрії асимптоти $y = \pm\frac{b}{a}x$ гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{або} \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{148.1}$$

(дивіться також рис. 47.3).

Припустимо тепер, що крива $y = f(x)$ має **похилу** асимптоту

$$Y = ax + b \tag{148.2}$$

(рис. 148.3), скажімо, з боку додатної частини осі x. Оскільки різниця ординат $|y - Y|$ лише сталим множником (рівним косинусу кута між асимптотою та віссю x)

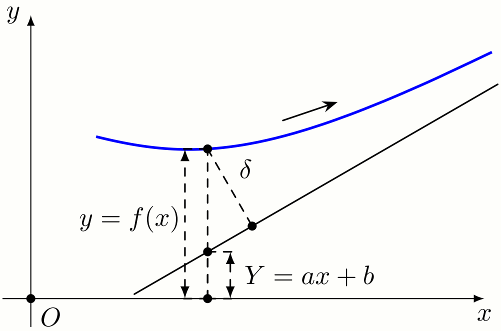


Рис. 148.3

відрізняється від відстані δ, то для $x \to +\infty$ одночасно з δ повинна прямувати до нуля і ця різниця:

$$\lim_{x\to+\infty}(y - ax - b) = 0. \tag{148.3}$$

Розділивши на x, отримаємо звідси:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = a; \tag{148.4}$$

крім того, рівність (148.3) безпосередньо дає

$$\lim_{x\to+\infty}(y - ax) = b. \tag{148.5}$$

Отже, щоб пряма (148.2) була асимптотою для заданої кривої, **необхідне** виконання умов (148.4) і (148.5). Зворотне міркування легко покаже їх **достатність**. Питання тут звелося до послідовного знаходження границь (148.4) і (148.5), якими вже й визначаться коефіцієнти рівняння прямої (148.2).

Зрозуміло, для $x \to -\infty$ потрібно повторити всі дослідження.

Наприклад, у разі гіперболи (148.1), для $x \to +\infty$, маємо

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a}\cdot\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} \to \pm\frac{b}{a};$$

потім

$$y \mp \frac{a}{b}x = \pm\frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2} - x\right) = \mp\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \to 0,$$

і ми приходимо до відомих уже нам асимптот:

$$y = \pm\frac{a}{b}x.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Повертаючись до задачі побудови графіка функції, тепер ми додамо до сказаного в попередньому розділі в пунктах 1), 2), 3), що слід ще:

4) визначити значення x, де функція $y = f(x)$ прямує до нескінченності, з урахуванням знака, і побудувати відповідні вертикальні асимптоти;

5) знайти горизонтальну або похилу асимптоту графіка (і до того ж окремо для $x \to +\infty$ і для $x \to -\infty$, якщо проміжок нескінченний в обидва боки).

Звернемося знову до прикладів.

149. Приклади

3) Повернемося до функції

$$y = (x+2)^2(x-1)^3,$$

для якої ми вже шукали екстремуми в пр. 136.1. Ця функція неперервна на всьому проміжку $(-\infty, +\infty)$. Для $x \to \pm\infty$ не тільки y, але й $\frac{y}{x}$ прямує до ∞, тому асимптот немає.

Розглянемо додатково другу похідну

$$y'' = 2(x-1)(10x^2 + 16x + 1).$$

Вона дорівнює 0 в точках $x = 1;\ -0{,}07;\ -1{,}53$, змінюючи знак (перегин).

Складаємо таблицю:

x	**y**	**особливість**
-2	0	$y' = 0$, макс.
$-1{,}53$	$-3{,}58$	перегин
$-0{,}8$	$-8{,}40$	$y' = 0$, мін.
$-0{,}07$	$-4{,}56$	перегин
0	-4	
1	0	$y' = 0$, перегин

Графік функції зображений на рис. 136.1.

4) Функція

$$y = x^{\frac{2}{3}} - (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$$

(дивіться пр. 136.3). Функція неперервна на проміжку $(-\infty, +\infty)$. Представивши її у вигляді

$$y = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}}(x^2-1)^{\frac{1}{3}} + (x^2-1)^{\frac{2}{3}}},$$

легко отримати, що $y \to 0$, коли $x \to \pm\infty$, тому графік нашої функції має асимптоту: вісь x (і направо, і наліво). Друга похідна y'' не має коренів; перегини будуть лише в точках, де похідна y' прямує до нескінченності. Зважаючи на парність функції, є симетрія відносно осі y.

Таблиця:

x	**y**	**особливість**
0	1	$y' = +\infty$, мін.
0,71	1,59	$y' = 0$, макс.
1	1	$y' = -\infty$, перегин
$+\infty$	0	

Графік функції зображений на рис. 136.3.

5) Функція

$$y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$$

(дивіться розд. 137). Функція неперервна на всьому проміжку $(-\infty, +\infty)$. Коли $x \to \pm\infty$, очевидно
$y \to 1$: горизонтальна асимптота. Друга похідна

$$y'' = -10\frac{(x+1)(x^2 - 4x + 1)}{(x^2+1)^3}$$

дорівнює нулю в точках $x = -1;\ 2 + \sqrt{3} \doteq 3{,}73;\ 2 - \sqrt{3} \doteq 0{,}27$, змінюючи знак (перегин).

Таблиця:

x	**y**	**особливість**
$-\infty$	1	
-10	1,55	
-5	2,15	
-1	6	перегин
$-0{,}41$	7,04	$y' = 0$, макс.
0	6	
0,27	4,40	перегин
2	0	
2,41	$-0{,}03$	$y' = 0$, мін.
3	0	
3,73	0,08	перегин
5	0,23	
10	0,55	
$+\infty$	1	

nebayduzhi.math@gmail.com

Графік зображений на рис. 137.1. Невеликий масштаб тут заважає чіткості креслення, особливо на проміжку зміни x від 2 до 5; ця частина графіка представлена в збільшеному масштабі.

Дамо тепер низку нових прикладів.

6) Функція

$$y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}.$$

Функція прямує до $-\infty$ в точці $x=-1$. Оскільки для $x \to \pm\infty$ маємо

$$\frac{y}{x} \to 1, \quad y - 1\cdot x = \frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2} \to -5,$$

то крива має асимптоту: $Y = x - 5$.

Обчислимо похідні:

$$y' = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}, \quad y'' = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}.$$

Перша дорівнює нулю в точці $x=1$ (перегин) і в точці $x=-5$ (максимум); інших точок перегину немає. За таблицею:

x	**y**	**особливість**
-10	$-16{,}4$	
-5	$-13{,}5$	$y'=0$, макс.
-3	-16	
-1	$-\infty$	
0	-1	
1	0	$y'=0$, перегин
5	1,78	
10	6,05	

будуємо графік з урахуванням асимптот (рис. 149.1).

7) Функція

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-a}}, \quad (a > 0).$$

Тут функція набуває дійсних значень, лише якщо $x \leqslant 0$ або $x > a$; в точці $x = a$ функція прямує до $+\infty$.

Вважаючи $x > a$, маємо для $x \to +\infty$

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{x}{x-a}} \to 1, \quad y - 1\cdot x = \frac{x}{\sqrt{x-a}} \cdot \frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a}} \to \frac{a}{2},$$

nebayduzhi.math@gmail.com

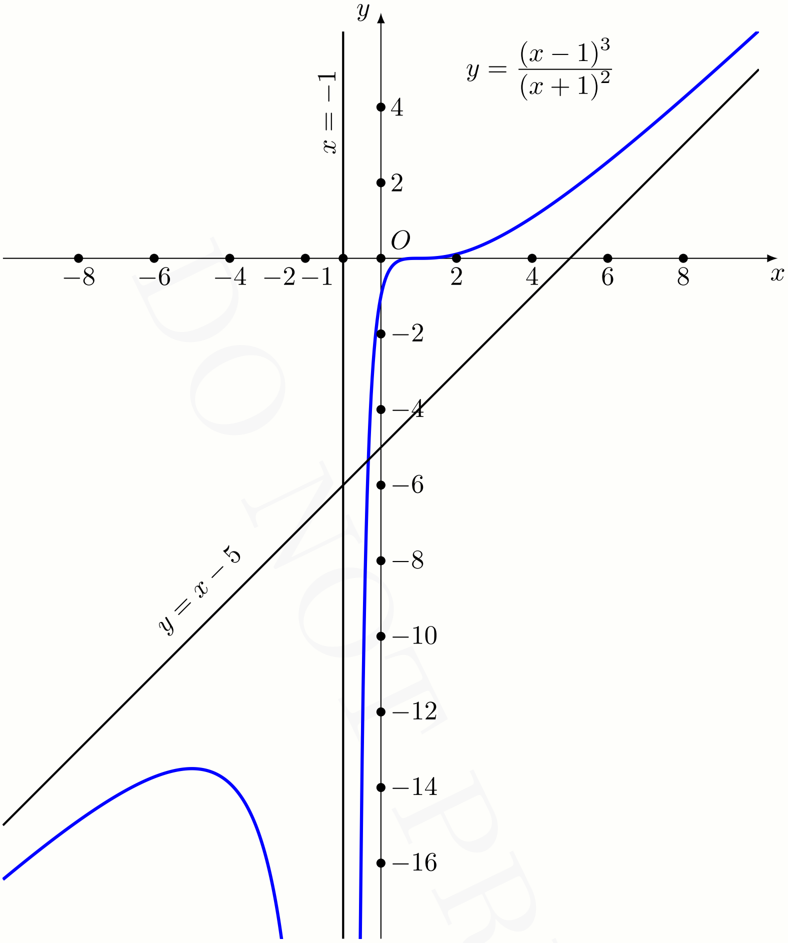


Рис. 149.1

nebayduzhi.math@gmail.com

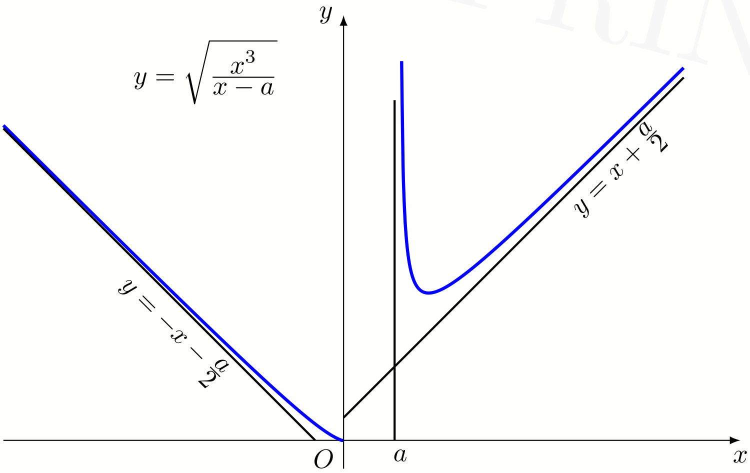


Рис. 149.2

так що, з боку додатних x, крива наближається до асимптоти $y = x + \frac{a}{2}$. Аналогічно виходить з боку від'ємних x інша асимптота $y = -x - \frac{a}{2}$.

Похідна

$$y' = \frac{1}{y} \cdot \frac{x^2\left(x - \frac{3}{2}a\right)}{(x-a)^2} = \left(x - \frac{3}{2}a\right)\sqrt{\frac{x}{(x-a)^3}}$$

дорівнює нулю в точці $x = \frac{3}{2}a$, змінюючи знак мінус на плюс (мінімум). Вона дорівнює нулю і в точці $x = 0$, але це кінець проміжку $(-\infty, 0]$, у якому ми функцію розглядаємо, і про екстремуми тут не може бути й мови.

Друга похідна:

$$y'' = \frac{1}{y} \cdot \frac{\frac{3}{4}a^2 x}{(x-a)^3};$$

вона > 0, і коли $x < 0$, і коли $x > a$, отже крива завжди опукла (вниз).

Обчисливши ще ординату $y = \frac{\sqrt{27}}{2}a \doteq 2{,}6a$, що відповідає $x = \frac{3}{2}a$, ми маємо достатньо даних для побудови графіка (рис. 149.2).

8) Функція

$$y = \sqrt{\frac{a^3 - x^3}{3x}} \quad (a > 0).$$

Змінна x може змінюватися лише на проміжку $(0, a]$; коли $x \to +0$, функція прямує до $+\infty$.

Похідна

$$y' = -\frac{a^3 + 2x^3}{6x^2 y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

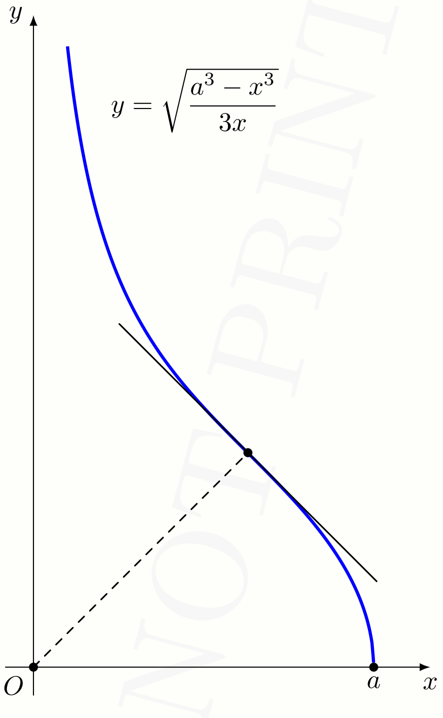


Рис. 149.3

завжди від'ємна, отже, функція спадає. В точці $x = a$ похідна $y' = -\infty$.

Друга похідна

$$y'' = \frac{1}{2}(y - xy')\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)$$

дорівнює нулю, змінюючи знак, лише в точці $y = x = \frac{a}{\sqrt[3]{4}} \doteq 0{,}63a$ (перегин); очевидно, що $y' = -1$. Графік зображений на рис. 149.3.

4.4. Розкриття невизначеностей

150. Невизначеність виду $\frac{0}{0}$

Ми тепер застосуємо поняття похідної та доведені в 3.3, 3.5 теореми для **розкриття невизначеностей**. Дальші теор. 150.1 – теор. 150.4 здебільшого належать Лопіталю (фр. Guillaume François Antoine de L'Hôpital, Ґійóм де Льопітáль) та Й. Бернуллі (швейц. Johann Bernoulli, Йóханн Бернýллі). Висловлене в них правило зазвичай називають **правилом Лопіталя**. Спочатку ми займемося основним випадком невизначеності виду $\frac{0}{0}$, тобто розглянемо границю відношення двох функцій $f(x)$ та $g(x)$, які прямують до нуля (коли $x \to a$).

Почнемо з простої теореми, яка безпосередньо використовує саме поняття похідної.

Теорема 150.1. *Нехай:*
1) функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені на проміжку $[a, b]$,
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,
3) існують скінченні похідні $f'(a)$ і $g'(a)$, до того ж $g'(a) \neq 0$.

Тоді

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Доведення. Існування скінченних похідних $f'(a)$ і $g'(a)$ забезпечує неперервність функцій $f(x)$ та $g(x)$ у точці a. З умови 2) маємо: $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ і $g(a) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Оскільки $g'(a) \neq 0$, то за лем. 109.1, $g(x) \neq 0$ для значень x, досить близьких до a; ними ми й обмежимося, так що відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$ має сенс.

Тепер це відношення можна переписати у вигляді

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}.$$

Переходячи тут до границі для $x \to a$, отримаємо необхідний результат. □

Приклади.

1) Знайти границю

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(e - x) + x - 1}.$$

За теоремою, вона дорівнює обчисленому в точці $x = 0$ відношенню похідних

$$\left.\frac{e^x - e^{-x}}{1 - \dfrac{1}{e - x}}\right|_{x=0} = \frac{2}{1 - \dfrac{1}{e}} = \frac{2e}{e - 1}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

2) Знайти границю

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$$

Вона дорівнює

$$\left.\frac{\dfrac{1-2x^3}{\sqrt{2x-x^4}}-\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{-\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}}\right|_{x=1}=\frac{16}{9}.$$

У тому разі, коли одночасно $f'(a)=0,\ g'(a)=0$, можна скористатися узагальненням теор. 150.1, що використовує похідні вищих порядків.

Теорема 150.2. *Нехай:*
1) функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені на проміжку $[a,b]$,
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$,
3) на проміжку $[a,b]$ існують скінченні похідні всіх порядків до $(n-1)$-го включно $f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x),\ g'(x),\ g''(x),\ \ldots,\ g^{(n-1)}(x)$,
4) в точці $x=a$ вони всі дорівнюють 0,
5) існують скінченні похідні $f^{(n)}(a)$ та $g^{(n)}(a)$, до того ж $g^{(n)}(a)\neq 0$.

Тоді

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Доведення. Застосуємо на проміжку $[a,x]$ $(a<x\leqslant b)$ формулу Тейлора з додатковим членом у формі Пеано (124.8) до функцій $f(x)$ та $g(x)$. Зважаючи на умови 2), 3) і 4), отримаємо

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(a)+\alpha}{n!}(x-a)^n,$$

$$g(x)=\frac{g^{(n)}(a)+\beta}{n!}(x-a)^n,$$

де $\alpha\to 0,\ \beta\to 0$, коли $x\to a$.

Друга з цих рівностей, внаслідок умови $g^{(n)}(a)\neq 0$, передусім показує, що $g(x)$ відмінна від нуля, принаймні для значень x, досить близьких до a. Якщо обмежитися тільки цими значеннями, то відношення $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ має сенс.

Тоді з написаних рівностей безпосередньо і випливає потрібний результат:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(a)+\alpha}{g^{(n)}(a)+\beta}=\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

□

nebayduzhi.math@gmail.com

Приклад.

3) Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}.$$

$$\begin{array}{rlrl}
f(x)=e^x-e^{-x}-2x, & f(0)=0; & g(x)=x-\sin x, & g(0)=0;\\
f'(x)=e^x+e^{-x}-2, & f'(0)=0; & g'(x)=1-\cos x, & g'(0)=0;\\
f''(x)=e^x-e^{-x}, & f''(0)=0; & g''(x)=\sin x, & g''(0)=0;\\
f'''(x)=e^x+e^{-x}, & f'''(0)=2; & g'''(x)=\cos x, & g'''(0)=1;
\end{array}$$

Отже, границя дорівнює 2.

Хоча здебільшого для розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$ вже достатньо доведених теорем, але на практиці зазвичай зручніша така теорема.

Теорема 150.3. *Нехай:*
1) функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені на проміжку $(a,b]$,
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$,
3) на проміжку $(a,b]$ існують скінченні похідні $f'(x)$ і $g'(x)$, до того ж $g'(x)\neq 0$, і, нарешті,
4) існує (скінченна чи ні) границя

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K.$$

Тоді і

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

Доведення. Доповнимо означення функцій $f(x)$ і $g(x)$, нехай $f(a)=g(a)=0$. (Звісно, можна було б просто припустити заздалегідь, що функції визначені та неперервні в точці $x=a$; однак для застосування іноді зручніше формулювання умов теореми, наведеної в тексті. Дивіться, наприклад, наступну теор. 150.4.) Тоді ці функції виявляться неперервними на всьому замкненому проміжку $[a,b]$: їх значення в точці a збігаються з границями для $x\to a$ (друга умова теореми), а в інших точках неперервність випливає з існування скінченних похідних (умова 3) теореми). Застосовуючи теорему Коші теор. 114.1, отримаємо

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

де $a<c<x$. Та обставина, що $g(x)\neq 0$, тобто $g(x)\neq g(a)$, — це наслідок припущення: $g'(x)\neq 0$, як це встановлено у виведенні формули Коші.

nebayduzhi.math@gmail.com

Коли $x \to a$, очевидно і $c \to a$, отже, з умови 4) випливає

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K,$$

що й потрібно було довести. □

Отже, доведена теорема зводить границю відношення функцій до границі відношення похідних, **якщо така границя (відношення похідних) існує.** Часто виявляється, що знаходження границі відношення похідних простіше і може бути проведене елементарними засобами.

Приклад.

4) Знайти границю

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$$

Відношення похідних послідовно спрощується:

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x};$$

воно очевидно прямує до 2, коли $x \to 0$. Такою же буде, згідно з теоремою, і шукана границя.

Теор. 150.1 у цьому випадку була б непридатна, бо в точці $x = 0$ похідні чисельника та знаменника обидві рівні 0. Що ж до теор. 150.2, то хоча з її допомогою задача могла б бути розв'язана, але для цього потрібно було б (у чому легко переконатися) обчислити три послідовні похідні від заданих функцій.

Звертаємо увагу читача на те, що тут і відношення похідних знову мало невизначеність виду $\frac{0}{0}$, але розкрити цю невизначеність виявилося можливим зробивши елементарні перетворення. В інших випадках може знадобитися застосувати теорему **повторно**. Важливо підкреслити, що тут **допустимі будь-які спрощення одержуваних виразів, скорочення однакових множників, застосування вже відомих границь тощо.** (Усього цього робити не можна, якщо застосовується теор. 150.2!) У дальшому прикладі теор. 150.3 застосовується послідовно тричі; після першого ми скорочуємо на e^x, а після другого — відкидаємо множник e^x у знаменнику (бо він прямує до 1). Цим викладки спрощуються.

nebayduzhi.math@gmail.com

Приклади.

5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{2x}+e^{2x}+xe^{x}+e^{x}-4e^{2x}+2e^{x}}{3\left(e^{x}-1\right)^{2}\cdot e^{x}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}-3e^{x}+x+3}{3\left(e^{x}-1\right)^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}+2e^{x}-3e^{x}+1}{6\left(e^{x}-1\right)e^{x}}=$$
$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}-e^{x}+1}{e^{x}-1}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}+e^{x}}{e^{x}}=\frac{1}{6}.$$

6)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^{2}(1+x)}.$$

Оскільки перший множник праворуч прямує до e, то досить зайнятися другим множником. За допомогою застосування теор. 150.3 двічі знайдемо, що границя його дорівнює $-\frac{1}{2}$.

Відповідь: $-\frac{e}{2}$.

Теор. 150.3 легко поширюється на випадок, коли аргумент x прямує до нескінченності: $a=\pm\infty$ (цього, зрозуміло, неможливо зробити щодо теор. 150.1 та теор. 150.2). Отже, маємо таку теорему.

Теорема 150.4. *Нехай:*
1) функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені на проміжку $[c,+\infty)$, де $c>0$,
2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$,
3) на проміжку $[c,+\infty)$ існують скінченні похідні $f'(x)$ і $g'(x)$, до того ж $g'(x)\neq 0$, і, нарешті,
4) існує (скінченна чи ні) границя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K.$$

Тоді і

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

Доведення. Перетворимо змінну x за формулою $x=\frac{1}{t}$, $t=\frac{1}{x}$. Тоді, якщо $x\to+\infty$, то $t\to+0$, і навпаки. Зважаючи на умову 2), маємо

$$\lim_{t\to+0}f\left(\frac{1}{t}\right)=0,\quad \lim_{t\to+0}g\left(\frac{1}{t}\right)=0,$$

а, використовуючи умову 4), маємо,

$$\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=K.$$

До функцій $f\left(\frac{1}{t}\right)$ і $g\left(\frac{1}{t}\right)$ від нової змінної t можна застосувати теор. 150.3, що дає нам

$$\lim_{t\to+0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=K.$$

Функції $f\left(\frac{1}{t}\right)$ і $g\left(\frac{1}{t}\right)$ ми диференціювали за t як складені функції. Далі маємо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K,$$

що й потрібно було довести. ☐

Зауваження. Іноді, розкриваючи невизначеності $\frac{0}{0}$, можна обійтися **формально** без застосування зазначених вище теорем, використовуючи розклади функцій за формулою Тейлора (розд. 124 – розд. 125). Нехай $x\to 0$ (до цього випадку завжди можна звести справу). Якщо за допомогою відомих розкладів вдається виділити з чисельника і знаменника головні члени:

$$f(x)=ax^n+o(x^n),\quad g(x)=bx^m+o(x^m),$$

то стає відразу зрозуміла границя дробу $\dfrac{f(x)}{g(x)}$: вона дорівнює 0, $\frac{a}{b}$ або $\pm\infty$, залежно від того, буде n більше, рівне чи менше від m. В останньому випадку **знак** нескінченності нескладно отримати за знаками a і b, а також (у разі **непарності** різниці $m-n$) за знаком x. (Порівняйте з розд. 62, розд. 63.)

У прикладі 1) маємо, замінюючи функції e^x, e^{-x} і $\ln(e-x)-1=\ln\left(1-\frac{x}{e}\right)$ кількома першими членами їх розкладів:

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x+\dots)-(1-x+\dots)}{(-\frac{x}{e}+\dots)+x}=\lim_{x\to0}\frac{2x+\dots}{\left(1-\frac{1}{e}\right)x+\dots}=\frac{2e}{e-1}.$$

Аналогічно, у прикладі 4):

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(x+\frac{x^3}{3}+\dots\right)-x}{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+\dots\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3}+\dots}{\frac{x^3}{6}+\dots}=2.$$

Як вправу, пропонується тим же методом розв'язати приклади 3) та 5).

151. Невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$

Звернемося до розгляду невизначених виразів виду $\frac{\infty}{\infty}$, тобто досліджуємо питання про границю відношення двох функцій $f(x)$ і $g(x)$, які прямують до $+\infty$, коли $x \to a$.

Покажемо, що в цьому випадку можна застосувати те саме *правило Лопіталя*: дальша теорема — просте перефразування теор. 150.3.

Теорема 151.1. *Нехай:*
1) функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені на проміжку $(a, b]$,
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$,
3) на проміжку $(a, b]$ існують скінченні похідні $f'(x)$ і $g'(x)$, до того ж $g'(x) \neq 0$, і, нарешті,
4) існує (скінченна або нескінченна) границя

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тоді і

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок скінченного K.

Оскільки похідна $g'(x)$ не дорівнює нулю, то, за теоремою Дарбу (теор. 110.1), вона зберігає знак, і функція $g(x)$ змінюється монотонно (розд. 132). Оскільки a — це лівий кінець проміжку, з умови 2) маємо, що $g'(x) < 0$ і $g(x)$ зі спаданням x $(x \to a + 0)$ монотонно зростаючи прямує до $+\infty$. Можна вважати, що завжди $g(x) > 0$.

Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. Використаємо умову 4) та знайдемо таке $\eta > 0$, що для $a < x < a + \eta$ буде

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Покладемо для стислості $a + \eta = x_0$, і візьмемо x між a і x_0. Застосуємо формулу Коші до проміжку $[x, x_0]$. У цьому суттєва відмінність від доведення теор. 150.3: тут не можна застосувати формулу Коші до проміжку $[a, x]$, бо, хоч би як означувати функції $f(x)$ і $g(x)$ у точці a, зважаючи на умову 2), з них не отримати функцій, неперервних у цій точці. Отже, застосуємо формулу Коші до проміжку $[x, x_0]$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

де $x < c < x_0$, отже,

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{151.1}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Напишемо тепер тотожність (яку легко безпосередньо перевірити):

$$\frac{f(x)}{g(x)} - K = \frac{f(x_0) - K \cdot g(x_0)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right) \cdot \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K\right),$$

звідки

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| \leqslant \left|\frac{f(x_0) - K \cdot g(x_0)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K\right|.$$

Другий доданок справа для $x < x_0 = a + \eta$ буде менший від $\frac{\varepsilon}{2}$, це випливає з (151.1). Зважаючи на те, що $g(x) \to +\infty$, коли $x \to a+0$, перший доданок прямує до нуля, і знайдеться таке $\delta > 0$ (можна вважати $\delta < \eta$), що для $a < x < a + \delta$ перший доданок теж стане меншим від $\frac{\varepsilon}{2}$. Для вказаних значень x будемо мати тоді

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon,$$

що й доводить необхідне твердження. Підкреслимо, що в нашому міркуванні ми фактично не користувалися припущенням, що $\lim f(x) = +\infty$ (порівняйте з доведенням теореми Штольца теор. 33.1).

У тому разі, коли $K = +\infty$ (і $f'(x) \neq 0$ принаймні поблизу a), маємо, змінюючи ролями $f(x)$ і $g(x)$,

$$\lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0, \quad \text{так що і} \quad \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0,$$

звідки, нарешті,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

бо (принаймні поблизу a) очевидно і $f(x) > 0$, і $g(x) > 0$.

Випадок $K = -\infty$, за умовами теореми, неможливий. □

Зазначимо, що доведення без істотних змін поширюється на випадок $a = -\infty$. Так само теорема могла б бути доведена і для проміжку $[b, a)$ $(b < a)$ як для скінченного a, так і для $a = +\infty$. Отже, на випадок нескінченної границі аргументу теор. 151.1 поширюється автоматично.

Як приклад, легко отримати вже відомі нам границі.

7)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\mu} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mu x^\mu} = 0 \quad (\mu > 0).$$

8)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\mu}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mu x^{\mu-1}}{a^x \cdot \ln a} \quad (a > 1,\ \mu > 0).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо $\mu > 1$, то праворуч знову маємо невизначеність того ж типу $\frac{\infty}{\infty}$; але, продовжуючи цей процес і повторно застосовуючи теор. 151.1, зрештою отримаємо в чисельнику степінь із від'ємним (або нульовим) показником. Тому, у будь-якому разі,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{a^x}=0.$$

Зробимо загальне зауваження щодо теор. 150.3, теор. 150.3 та теор. 151.1. У них встановлюється границя відношення функцій, **якщо** існує границя відношення похідних. Але обернення цих теорем неприпустиме, перша границя може існувати, коли другої не існує.

Наприклад, існує границя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

хоча відношення похідних, що дорівнює $1+\cos x$, границі не має, коли $x\to+\infty$.

152. Інші види невизначеностей

Попередні теореми належали до невизначеностей виду $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$.

Якщо маємо невизначеність виду $0\cdot\infty$, її можна перетворити до виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ і тоді скористатися правилом Лопіталя. Нехай

$$\lim_{x\to a}f(x)=0,\qquad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty.$$

Тоді маємо

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Другий з цих виразів — невизначеність виду $\frac{0}{0}$, третій — невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$, коли $x\to a$.

Приклад.

9) Нехай $\mu>0$

$$\lim_{x\to+0}(x^\mu\cdot\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\mu}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{x^\mu}{-\mu}=0.$$

До виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ завжди можна перетворити і невизначеність виду $\infty-\infty$. Нехай маємо вираз $f(x)-g(x)$, де

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty.$$

Тоді можна, наприклад, перетворити $f(x)-g(x)$ на невизначеність виду $\frac{0}{0}$:

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}.$$

Часто, втім, того ж таки вдається досягти простіше.

Приклад.

10)

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\cos^2 x-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x},$$

але

$$\frac{x^2\cdot\cos^2 x-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x}=\frac{x\cdot\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x};$$

границя першого множника знаходиться елементарно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x+\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=2,$$

а до другого застосовуємо теор. 150.3:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot\sin x}{\sin^2 x+2x\cdot\sin x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x}=-\frac{1}{3}.$$

Отже, шукана границя дорівнює $-\frac{2}{3}$.

У разі невизначених виразів виду 1^∞, 0^0, ∞^0 рекомендується їх попередньо прологарифмувати.

Нехай $y=[f(x)]^{g(x)}$; тоді $\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$. Границя $\ln y$ має невизначеність уже вивченого типу $0\cdot\infty$. Припустимо, що одним із зазначених вище засобів вдається знайти $\lim(\ln y)$, який виявляється рівним скінченному числу k, $+\infty$ або $-\infty$. Тоді $\lim y$, відповідно, буде e^k, $+\infty$ або 0.

Приклади.

11) Нехай

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

Потрібно знайти $\lim\limits_{x\to 0} y$ (невизначеність виду: 1^∞).

Якщо вважати $x>0$ (цим припущенням, через парність функції y, можна обмежитися), то

$$\ln y=\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Застосовуючи теор. 150.3 (і за допомогою вже знайденого в попередньому прикладі результату), отримаємо:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x\cdot\sin^2 x} = -\frac{1}{3},$$

звідки

$$\lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

12)

$$y = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Для $x \to +\infty$ цей вираз становить невизначеність виду 0^0. Маємо

$$\ln y = \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)}{\ln x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

За правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{1+x^2}}{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2} = -1,$$

так що

$$\lim_{x\to+\infty} y = \frac{1}{e}.$$

4.5. Наближене розв'язування рівнянь

153. Вступні зауваження

Займемося тепер задачею про знаходження **коренів** заданої функції $f(x)$, тобто коренів рівняння

$$f(x) = 0. \tag{153.1}$$

Втім, розв'язувати цю задачу ми будемо, припускаючи, що корінь ξ, який нас цікавить, ізольований, тобто що знайдено проміжок $[a, b]$, який містить його:

$$a < \xi < b,$$

і інших коренів на цьому проміжку немає.

Якщо, крім того, на кінцях проміжку функція $f(x)$ має значення $f(a)$ та $f(b)$ різних знаків, то, як це було роз'яснено в розд. 81, у зв'язку із застосуванням 1-ї теореми Бользано – Коші (теор. 80.1), послідовно ділячи на частини проміжок, що містить корінь, і визначаючи знак функції $f(x)$ у точках поділу, можна довільно звужувати цей проміжок і тим самим наближено обчислювати корінь. Однак, цей спосіб, попри його принципову простоту, на практиці часто виявляється непридатним, бо потребує надто великої кількості обчислень. Далі читач познайомиться з найпростішими засобами наближеного обчислення (ізольованого) кореня рівняння (153.1), які систематичніше і швидше ведуть до мети. І ми знову будемо мати нагоду використовувати основні поняття та методи диференціального числення.

Ми завжди припускатимемо виконання таких умов:

1) *функція $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ неперервна разом зі своїми похідними $f'(x)$ та $f''(x)$;*

2) *значення $f(a)$ та $f(b)$ функції на кінцях проміжку мають різні знаки: $f(a) \cdot f(b) < 0$;*

3) *кожна з похідних $f'(x)$ і $f''(x)$ зберігає певний знак на всьому проміжку $[a, b]$.*

З неперервності функції $f(x)$ та умови 2) випливає, що між a і b міститься корінь ξ рівняння (153.1) (розд. 80). Оскільки похідна $f'(x)$ зберігає знак (умова 3), то $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ зростає або спадає і, отже, дорівнює 0 лише один раз, тобто корінь ξ ізольований.

Умова 3) геометрично означає, що крива $y = f(x)$ не тільки йде в одному напрямку, весь час вгору або весь час вниз, залежно від знака $f'(x)$ (розд. 132), але до того ж (строго) опукла вниз або вгору, дивлячись за знаком $f''(x)$ (розд. 143). На рис. 154.1 – рис. 154.4 зображені чотири можливі випадки, що відповідають різним комбінаціям знаків $f'(x)$ і $f''(x)$.

В алгебрі доведено, що в обчисленні (дійсних) коренів **алгебраїчних** рівнянь завжди може бути створений такий стан речей, коли виконуються умови 1), 2), 3), отже ці умови принципово не обмежують придатності викладених нижче засобів. Цього не можна сказати щодо **трансцендентних** (тобто неалгебраїчних) рівнянь. Однак на практиці поставлені умови не дуже обмежують, бо в більшості випадків висловлені умови виконуються.

154. Правило пропорційних частин (метод хорд)

Якщо проміжок $[a, b]$ досить малий, то з певним наближенням можна вважати, що, приріст функції $f(x)$ **пропорційний** приросту аргументу x, коли x змінюється в межах проміжку $[a, b]$. Позначаючи через ξ корінь функції, маємо, зокрема,

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{f(b) - f(a)} \doteq \frac{\xi - a}{b - a},$$

звідки, з урахуванням того, що $f(\xi) = 0$,

$$\xi \doteq a - \frac{(b - a) \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Отже, за наближене значення кореня тут береться число

$$x_1 = a - \frac{(b - a) \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{154.1}$$

Цей вираз очевидно можна записати і в такій формі

$$x_1 = b - \frac{(b - a) \cdot f(b)}{f(b) - f(a)}. \tag{154.2}$$

Викладене правило знаходження наближеного значення кореня і називається *правилом пропорційності частин.* (За старих часів його називали "правилом хибного положення" (regula falsi)), бо воно спирається на припущення, яке, строго кажучи, не відповідає дійсності.) Правило пропорційності частин допускає просте геометричне тлумачення. Замінимо дугу MM' кривої (рис. 154.1) **хордою** MM'. Рівняння хорди може бути написане, наприклад, у вигляді

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{154.3}$$

Наше правило, по суті, зводиться до того, що замість точки A перетину **кривої** з віссю x визначається точка D перетину з віссю x цієї **хорди**. Справді, вважаючи в (154.3) $y = 0$, для абсциси x точки D отримуємо саме вираз (154.1).

У зв'язку з цим правило пропорційних частин називають також *методом хорд.*

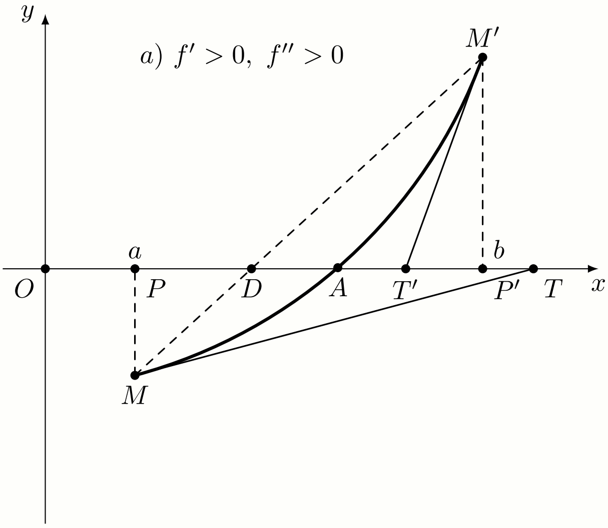


Рис. 154.1

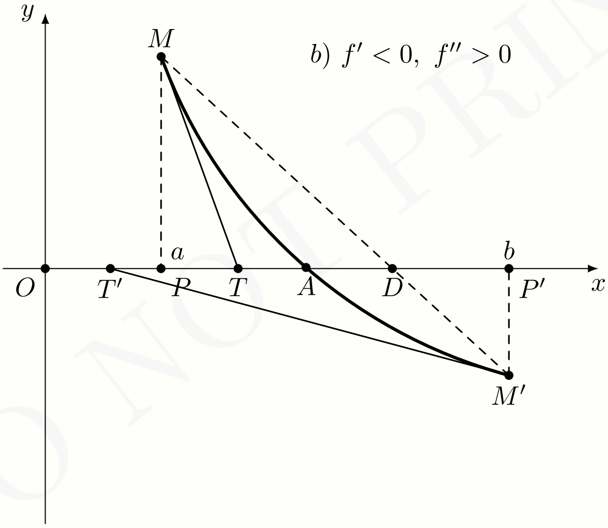


Рис. 154.2

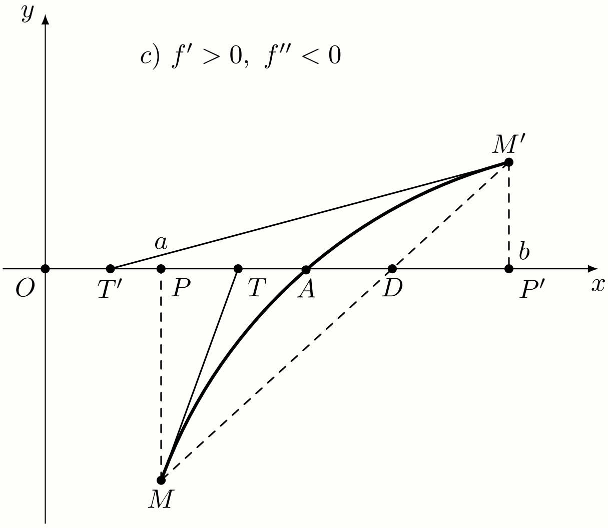


Рис. 154.3

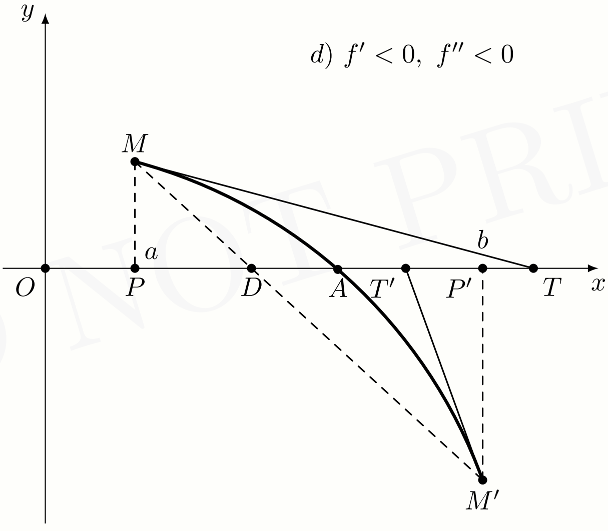


Рис. 154.4

Звернемося тепер до дослідження питання положення точки x відносно кореня ξ. Безпосередньо ясно, що точка x_1 лежить між a і b, але з якого боку від ξ?

Оскільки у випадках a) і b) **(**c), d)**)** ми маємо справу з опуклою вниз (вгору) функцією, то **крива** MM' лежить під (над) **хордою** MM', тобто

$$f(x) \underset{(\,>)}{<} f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad (a<x<b). \tag{154.4}$$

Вважаючи тут $x = x_1$, безпосередньо отримуємо

$$f(x_1) \underset{(\,>)}{<} 0,$$

отже, $f(x_1)$ завжди має знак, протилежний до знака $f''(x)$. Звідси, нарешті, робимо висновок, що *у випадках* a) *і* d) *значення* x_1 *лежить між* a *та* ξ, *у випадках* b) *і* c) — *між* ξ *та* b.

Обмежуючись випадками a) і d), знову застосуємо наше правило, цього разу до проміжку $[x_1, b]$; замінюючи в (154.1) a на x_1, отримаємо нове наближене значення кореня ξ:

$$x_2 = x_1 - \frac{(b-x_1)\cdot f(x_1)}{f(b)-f(x_1)},$$

що міститься, за доведеним, між x_1 і ξ. Цей процес можна продовжувати невизначено і побудувати послідовність дедалі **більших** наближених значень

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots < \xi.$$

Водночас будь-які два послідовні значення x_n і x_{n+1} зв'язані формулою, аналогічною до (154.1),

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b-x_n)\cdot f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}, \tag{154.5}$$

Покажемо, що зі зростанням n, $x_n \to \xi$. Справді, монотонно зростаюча, але обмежена (наприклад, числом ξ) змінна x_n повинна прямувати до деякої скінченної границі $\alpha \leqslant \xi$. Якщо перейти до границі в рівності (154.5), використовуючи неперервність функції $f(x)$, то отримаємо, що

$$\frac{(b-a)\cdot f(\alpha)}{f(b)-f(\alpha)} = 0,$$

звідки $f(\alpha) = 0$. Оскільки інших коренів рівняння (153.1), крім ξ, на проміжку $[a, b]$ немає, то $\alpha = \xi$. (Збіжність процесу можна встановити і без припущення, щодо другої похідної, але тоді можливо, що точки x_n переходять з одного боку від кореня на інший.)

nebayduzhi.math@gmail.com

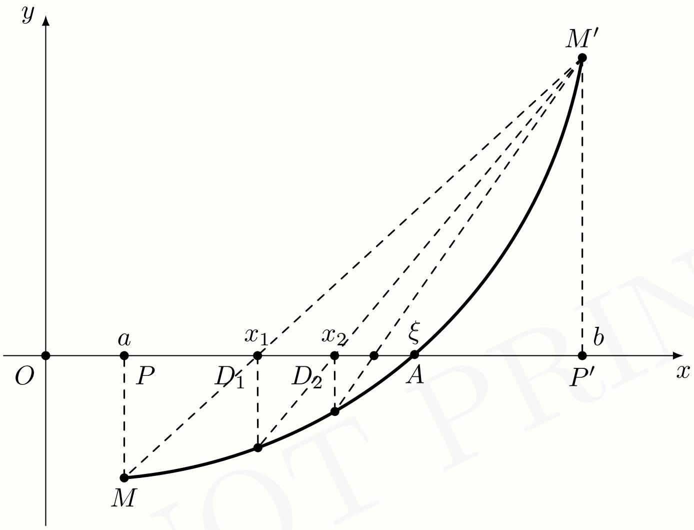


Рис. 154.5

Рис. 154.5 ілюструє поступове наближення точок D_1, D_2, ... перетину послідовних хорд із віссю x до шуканої точки A.

Легко зрозуміти, що у випадках b) або c) повторне застосування правила приведе до послідовності **спадних** наближених значень

$$b > x_1 > x_2 > ... > x_n > x_{n+1} > ... > \xi,$$

що прямують до кореня справа.

Отже, в усіх випадках, застосувавши достатнє число разів вказане вище правило, можна обчислити корінь ξ **з будь-якою точністю**. Але залишається відкритим питання, **як оцінити точність уже обчисленого наближеного значення** x_n**.**

Для розв'язання його застосуємо до різниці $f(x_n) - f(\xi)$ (де $f(\xi) = 0$) формулу скінченних приростів розд. 112:

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\xi) = (x_n - \xi) \cdot f'(c) \quad (\xi \lesseqgtr c \lesseqgtr x_n).$$

Звідси

$$x_n - \xi = \frac{f(x_n)}{f'(c)};$$

якщо позначити через m найменше значення $|f'(x)|$ на розглянутому проміжку (яке можна раз і назавжди обчислити наперед), то отримаємо оцінку:

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}. \tag{154.6}$$

Так за самою величиною $f(x_n)$ виявляється можливим судити про близькість x_n до кореня!

Розглянемо приклад. Рівняння

$$x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$$

має корінь між 3 і 4, бо якщо через $f(x)$ позначити ліву його частину, то

$$f(3) = -10 < 0, \quad f(4) = 9 > 0.$$

Спробуємо обчислити цей корінь із точністю до 0,01. На проміжку $[3, 4]$ обидві похідні

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \quad \text{і} \quad f''(x) = 6x - 4$$

зберігають знак плюс (випадок a)); найменше значення першої з них буде $m = 11$.

Маємо:

$$x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f(4) - f(3)} = 3 + \frac{10}{19} = 3 + 0{,}52\ldots;$$

округлюючи, покладемо $x_1 = 3{,}52$. Оскільки $f(3{,}52) = -2{,}246\,592$, то, за нерівністю (154.6), потрібної точності ще немає. Продовжуємо:

$$x_2 = 3{,}52 - \frac{0{,}48 \cdot f(3{,}52)}{f(4) - f(3{,}52)} = 3{,}52 + \frac{1{,}078\,364\,16}{11{,}246\,592} = 3{,}52 + 0{,}09\ldots$$

або, округлюючи, $x_2 = 3{,}61$. Обчисливши $f(3{,}61) = -0{,}458\,319$ і користуючись нерівністю (154.6), знову бачимо, що мети ще не досягнуто. Зрештою,

$$x_3 = 3{,}61 - \frac{0{,}39 \cdot f(3{,}61)}{f(4) - f(3{,}61)} = 3{,}61 + \frac{0{,}178\,744\,41}{9{,}458\,319} = 3{,}61 + 0{,}0188\ldots$$

Округлюючи, покладемо $x_3 = 3{,}63$. Оскільки ми округлили "в бік кореня", то могли і перескочити через нього; що цього не сталося, видно по знаку числа $f(3{,}63) = -0{,}041\,653$. На цей раз, використовуючи нерівність (154.6), маємо

$$|x_3 - \xi| = \xi - x_3 < \frac{0{,}041\ldots}{11} < 0{,}004.$$

Отже,

$$3{,}630 < \xi < 3{,}634,$$

тобто $\xi = 3{,}63_{+0{,}004}$.

Цим прикладом ми обмежимося, бо **метод хорд** усе ж таки малоефективний; слід віддати перевагу **методу дотичних**, до якого ми і переходимо.

155. Правило Ньютена (метод дотичних)

Повернемося до колишніх припущень щодо функції $f(x)$ (розд. 153); шуканий корінь ξ цієї функції ізольований на проміжку $[a, b]$: $a < \xi < b$. Вирушаючи від якогось із кінців цього проміжку, наприклад від b, напишемо формулу Тейлора з додатковим членом у формі Лаґранжа:

$$0 = f(\xi) = f(b) + f'(b) \cdot (\xi - b) + \frac{1}{2} f''(c) \cdot (\xi - b)^2 \quad (\xi < c < b). \tag{155.1}$$

Відкидаючи додатковий член, приблизно можна покласти

$$f(b) + f'(b) \cdot (\xi - b) \doteq 0,$$

звідки

$$\xi \doteq b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Отже ми приходимо до наближеного значення кореня ξ:

$$x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{155.2}$$

Знаходження цього значення можна наочно тлумачити і геометрично. Розглянемо **дотичну** до кривої $y = f(x)$ у точці M', з абсцисою b. Її рівняння має вигляд

$$y - f(b) = f'(b) \cdot (x - b).$$

Вважаючи тут $y = 0$, знайдемо абсцису точки T' перетину дотичної з віссю x; вона точно збігається з (155.2). Значить, суть справи у наближеній заміні дуги кривої MM' **дотичною** до неї в одному з її кінців (дивіться рис. 154.1).

Це правило називається *правилом Ньютена*; воно також називається *методом дотичних.*

Постає, проте, питання, де лежить значення x_1', що отримується за формулою (155.2). Адже той самий рис. 154.1 показує, що точка перетину дотичної з віссю x може лежати навіть поза проміжком $[a, b]$! Ми доведемо, що *якщо значення* $f(b)$ *одного знака* з $f''(x)$ (тобто у випадках a) і d)), то x_1' *лежить між* ξ та b.

Справді, оскільки $f(b)$ і $f'(b)$ одного знака, то з (155.2) безпосередньо ясно, що $x_1' < b$. З іншого боку, з (155.1) і (155.2) випливає:

$$\xi - x_1' = \xi - b + \frac{f(b)}{f'(b)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c)}{f'(b)} (\xi - b)^2. \tag{155.3}$$

Але $f''(x)$ у випадках a) і d) має однаковий знак з $f'(x)$, отже, $\xi < x_1'$. Остаточно: $\xi < x_1' < b$.

Аналогічно, якщо виходити з точки a, і дотичну до кривої провести в кінці M (з абсцисою a), то, замість (155.2) отримаємо наближене значення

$$x_1' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{155.4}$$

Щодо обчисленого за цією формулою значення можна показати, як і вище: *якщо значення* $f(a)$ *одного знака* з $f''(x)$ (тобто у випадках b) і c)), то x_1' *лежить між* a і ξ.

Отже, для кожного з чотирьох можливих випадків вказано, з якого кінця гарантована успішність наближення до кореня за правилом Ньютена. Повторне застосування його дає у випадках a) і d) послідовність **спадних** значень:

$$b > x_1' > x_2' > ... > x_n' > x_{n+1}' > ... > \xi,$$

а в випадках b) і c) — послідовність **зростаючих** значень:

$$a < x_1' < x_2' < ... < x_n' < x_{n+1}' < ... < \xi,$$

причому обчислення наступного значення за допомогою попереднього завжди робиться за формулою

$$x_{n+1}' = x_n' - \frac{f(x_n')}{f'(x_n')}. \tag{155.5}$$

І тут легко довести, що $x_n' \to \xi$. Монотонна та обмежена змінна x_n має скінченну границю β; переходячи ж до границі в (155.5), з урахуванням неперервності обох функцій $f(x)$ та $f'(x)$, знайдемо:

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = 0, \quad \text{звідки} \quad f(\beta) = 0 \quad \text{і} \quad \beta = \xi.$$

Рис. 155.1 ілюструє наближення до точки A з боку точок T_1, T_2, ... перетину послідовних дотичних з віссю x.

Отже, і правило Ньютена, повторно застосоване, дає змогу обчислити корінь ξ **із будь-якою точністю**. А точність **уже обчисленого** наближеного значення оцінюється, як і вище за формулою (154.6).

Щоб описати швидкість спадання різниць $x_n' - \xi$, повернемося до формули (155.3); замінимо в ній b через x_n', а x_1' — через x_{n+1}':

$$x_{n+1}' - \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c)}{f'(x_n')}(x_n' - \xi)^2. \tag{155.6}$$

Позначаючи через M найбільше значення $|f''(x)|$ на заданому проміжку $[a, b]$ (і зберігаючи за m його колишнє значення), звідси легко отримати тепер:

$$|x_{n+1}' - \xi| \leqslant \frac{M}{2m}(x_n' - \xi)^2. \tag{155.7}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

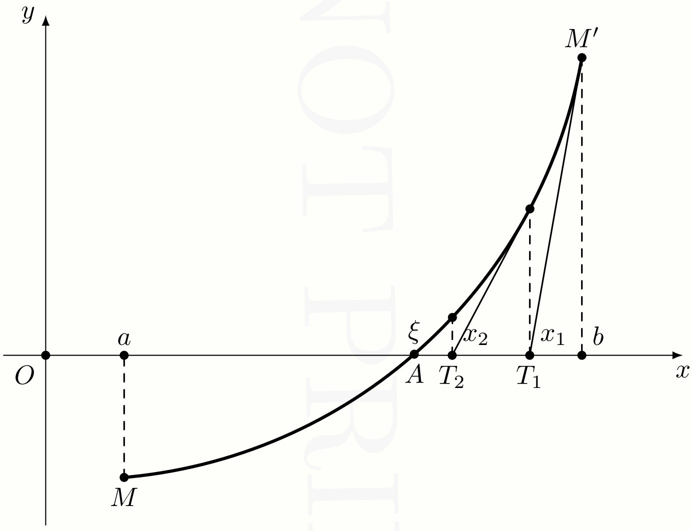


Рис. 155.1

Оскільки праворуч стоїть **квадрат**, цим забезпечено дуже швидке наближення x'_n до ξ (принаймні починаючи з деякого кроку), що робить метод дотичних одним із найефективніших методів наближеного обчислення кореня.

Нерівність (155.7) виконує ще одну функцію. Якщо точність обчисленого значення x'_n уже оцінена, наприклад, за допомогою нерівності (154.6), то нерівність (155.7) дає змогу наперед оцінити точність ще **не обчисленого** значення x'_{n+1}. Це може виявитися корисним у розв'язанні питання про те, на якому знаку доцільно його округлити.

Звернемося до прикладів. Їх розв'язування, зрозуміло, передбачає використання всіх допоміжних засобів обчислення, які є під рукою, як-то: таблиць степенів і коренів, таблиць множення, арифмометра, логарифмічних та логарифмо- тригонометричних таблиць, натуральних таблиць тригонометричних величин, таблиць для переведення градусної міри кутів у радіанну тощо!!!

156. Приклади і вправи

У цьому розділі ми будемо користуватися лише **методом дотичних**.

1) Обчислити з точністю до 0,01 корінь рівняння

$$x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0,$$

знаючи, що він міститься на проміжку $(3, 4)$ (порівняйте з розд. 154).

Маємо:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7, \quad f(3) = -10 < 0, \quad f(4) = +9 > 0,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

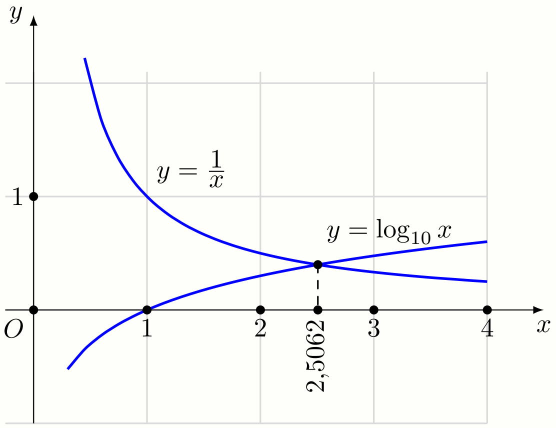


Рис. 156.1

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 > 0, \quad f''(x) = 6x - 4 > 0 \quad (3 \leqslant x \leqslant 4)$$

(випадок a)); найменше значення $|f'(x)|$ є $m = 11$.

Почнемо з того кінця заданого проміжку $b = 4$, для якого знак функції $f(x)$ збігається зі знаком $f''(x)$. За формулою (155.2),

$$x_1' = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{9}{28} = 4 - 0{,}32\ldots;$$

округлюючи, покладемо $x_1' = 4 - 0{,}3 = 3{,}7$. Оскільки $f(x_1') = f(3{,}7) = 1{,}473$, то, використовуючи нерівність (154.6), $x_1' - \xi < \dfrac{1{,}473}{11} < 0{,}14$, тобто досягнута точність недостатня. Далі,

$$x_2' = 3{,}7 - \frac{f(3{,}7)}{f'(3{,}7)} = 3{,}7 - \frac{1{,}473}{22{,}27} = 3{,}7 - 0{,}066\ldots;$$

припустимо, $x_2' = 3{,}7 - 0{,}066 = 3{,}634$. На цей раз $f(x_2') = f(3{,}634) = 0{,}042\ldots$, так що використовуючи (154.6), маємо $x_2' - \xi < \dfrac{0{,}042}{11} < 0{,}004$. Тому $3{,}630 < \xi < 3{,}634$ та $\xi = 3{,}63$ з необхідною точністю.

(Отримання цього ж результату в розд. 154 за методом хорд досягнено за **три** кроки.)

2) Спробуємо розв'язати рівняння

$$x \cdot \lg x = 1.$$

Скористаємося цим випадком, щоб пояснити читачеві, як **графічне зображення** функцій може служити для попереднього орієнтування в розташуванні коренів рівняння. Значення x, що задовольняє рівняння

$$\lg x = \frac{1}{x},$$

очевидно, є абсциса точки перетину кривих

$$y = \lg x \quad \text{і} \quad y = \frac{1}{x}.$$

Навіть грубе їх зображення (рис. 156.1) відразу показує, що корінь лежить між 2 і 3. Це легко тепер перевірити і обчисленням, бо, вважаючи $f(x) = x \cdot \lg(x) - 1$, маємо

$$f(2) = -0{,}397\,93\ldots < 0, \quad f(3) = 0{,}431\,36\ldots > 0.$$

Обчислимо згаданий корінь із точністю до 0,0001.

Очевидно, для $2 \leqslant x \leqslant 3$

$$f'(x) = \lg x + \lg e > 0, \quad f''(x) = \frac{\lg e}{x} > 0$$

(випадок a)); можна вважати $m = 0{,}7$.

Оскільки саме $f(3)$ має той же знак, що і $f''(x)$, то, за формулою (155.2),

$$x_1' = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{0{,}431\,36\ldots}{0{,}911\,41\ldots} = 3 - 0{,}473\ldots;$$

візьмемо $x_1' = 3 - 0{,}47 = 2{,}53$. Маємо $f(x_1') = f(2{,}53) = 0{,}019\,894\ldots$, так що $x_1' - \xi \leqslant \frac{0{,}0199}{0{,}7} < 0{,}03$. Далі,

$$x_2' = 2{,}53 - \frac{f(2{,}53)}{f'(2{,}53)} = 2{,}53 - \frac{0{,}019\,894\ldots}{0{,}837\,41\ldots} = 2{,}53 - 0{,}023\,75\ldots;$$

візьмемо $x_2' = 2{,}53 - 0{,}0237 = 2{,}5063$. Оцінимо похибку, використовуючи нерівність (154.6):

$$f(2{,}5063) = 0{,}000\,096\ldots,$$

$$x_2' - \xi < \frac{0{,}000\,096}{0{,}7} < 0{,}0002,$$

тобто $2{,}5061 < \xi < 2{,}5063$. У такому разі маємо, з уже необхідною точністю,

$$\xi = 2{,}5062_{\pm 0{,}0001}.$$

(Насправді 2,5062 — надлишкове наближене значення для ξ, бо $f(2{,}5062) > 0$.)

3) Повернемося до рівняння

$$2^x = 4x,$$

про яке вже йшлося в розд. 81. Ми бачили там, що між 0 і 0,5 є корінь цього рівняння. Цю обставину також легко було б помітити за допомогою графіків функцій $y = 2^x$ і $y = 4x$; на рис. 156.2 видно, що ці криві, крім точки з абсцисою 4, перетинаються ще

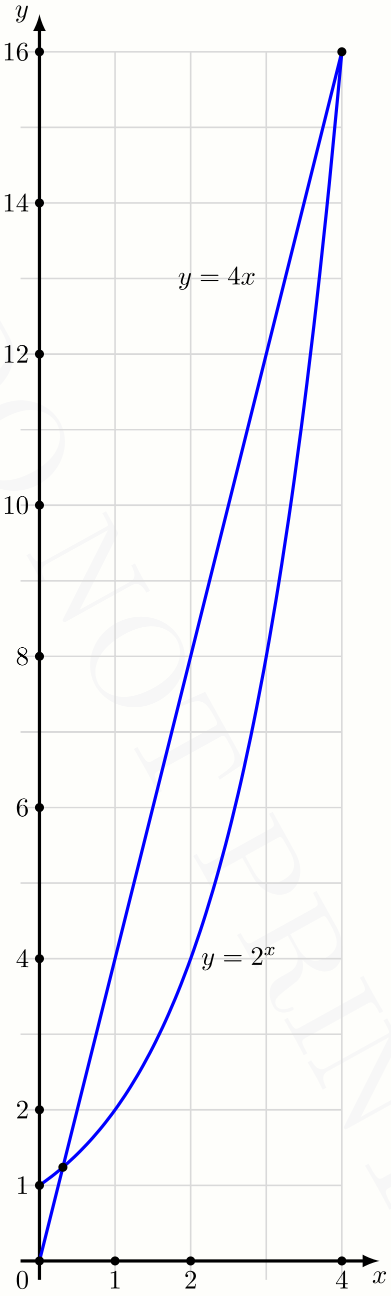


Рис. 156.2

в деякій точці з абсцисою ξ між 0 і 0,5. Спробуємо обчислити цей корінь із точністю до 0,000 01.

Маємо для $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5$:

$$f(x) = 2^x - 4x, \quad f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 4 < 0, \quad f''(x) = 2^x \cdot \ln^2 2 > 0$$

(випадок b)). Тут

$$m = |f'(0{,}5)| = 4 - \sqrt{2} \cdot \ln 2 > 3, \quad M = |f''(0{,}5)| = \sqrt{2} \cdot \ln^2 2 < 0{,}7; \quad \frac{M}{2m} < 0{,}12.$$

Оскільки $f(0) = 1$ має однаковий знак з $f''(x)$, то починаємо з $a = 0$. Застосуємо (154.6); похибка цього наближеного значення $< \frac{1}{3}$. Далі можна наперед оцінити похибку (155.7):

$$\xi - x_1' < 0{,}12 \cdot \frac{1}{9} < 0{,}014.$$

Тому обчислене за формулою (155.4) значення

$$x_1' = \frac{1}{\ln 2 - 4} = \frac{1}{3{,}306\,852\ldots} = 0{,}30\ldots$$

округлюємо на другому знаку: $x_1' = 0{,}30$. Користуючись значенням $f(0{,}30) = 0{,}031\,144\ldots$, точніше оцінюємо похибку (154.6):

$$\xi - x_1' < \frac{0{,}031\,144}{3} < 0{,}011,$$

а тоді, за (155.7),

$$\xi - x_2' < 0{,}12 \cdot 0{,}000\,121 < 0{,}000\,015,$$

так що наближаємося до необхідної точності. Наступне наближення:

$$x_2' = 0{,}30 - \frac{0{,}031\,144\ldots}{0{,}853\,364\,3\ldots - 4} = 0{,}30 - \frac{0{,}031\,144\ldots}{3{,}146\,635\,6\ldots} = 0{,}309\,897\ldots$$

округляємо на п'ятому знаку "в бік кореня": $x_2' = 0{,}309\,90$.
Оскільки $f(0{,}309\,90) = 0{,}000\,021\ldots > 0$, то це значення все ж таки менше від кореня. Похибка ж його (154.6) насправді виявляється

$$\xi - x_2' < \frac{0{,}000\,022}{3} < 0{,}000\,01,$$

так що, остаточно,

$$\xi = 0{,}309\,90_{\pm 0{,}000\,01}\,.$$

4) Рівняння

$$\operatorname{tg} x = x$$

nebayduzhi.math@gmail.com

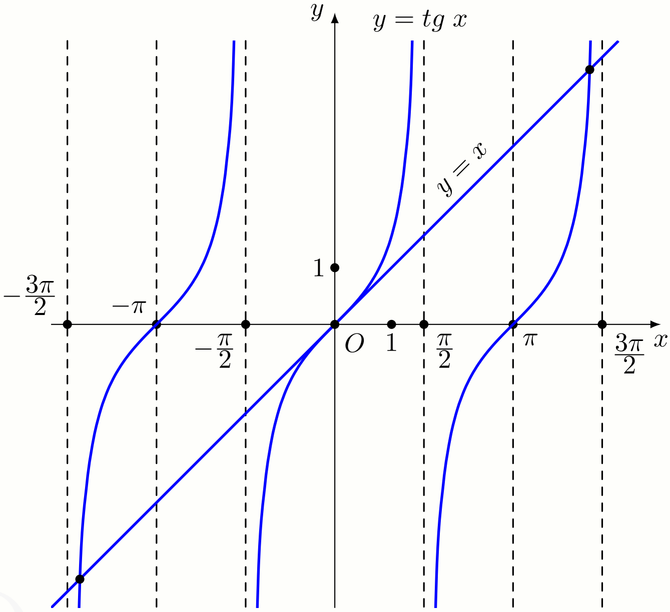


Рис. 156.3

має безліч коренів.

Це можна відразу побачити на рис. 156.3. Існує безліч точок перетину графіка тангенса $y = \operatorname{tg} x$ з прямою $y = x$. Спробуємо обчислити **найменший додатний** корінь цього рівняння, який міститься між $\frac{5\pi}{4}$ і $\frac{3\pi}{2}$.

Оскільки для $x = \frac{3\pi}{2}$ тангенс прямує до нескінченності, то запропоноване рівняння зручніше подати у вигляді $f(x) = \sin x - x \cdot \cos x = 0$.

Маємо:

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{5\pi}{4}\right) > 0, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 < 0;$$

$f'(x) = x \cdot \sin x < 0,\ m = 2{,}7;\ f''(x) = \sin x + x \cdot \cos x < 0$ (випадок d)). Починаємо з $b = \frac{3\pi}{2} = 4{,}712\,388\,9\ldots$; отримаємо

$$x_1' = \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{3\pi} = 4{,}712\,388\,9\ldots - 0{,}212\,206\,6\ldots$$

Тут ми стикаємося з такою обставиною: у таблицях тригонометричних величин (і їх логарифмів) кути вказуються в градусах, хвилинах та секундах; тому округлення поправки $0{,}212\,206\,6\ldots$ нам зручніше робити саме в цих одиницях. Ми візьмемо $12^\circ 10'$, що відповідає дещо більшому числу $0{,}212\,234\,84\ldots$ (округлення в "бік кореня"), так що

$$x_1' = 4{,}500\,040\,6\ (257^\circ 50').$$

Далі,

$$f(x_1') = -\cos 12^\circ 10' + 4{,}500\,040\,6 \cdot \sin 12^\circ 10' = -0{,}029\,127\,4\ldots,$$

$$f'(x_1') = -4{,}398\,962\ldots; \quad x_1' - \xi < \frac{0{,}03}{2{,}7} < 0{,}012.$$

Продовжуємо:

$$x_2' = 4{,}500\,040\,6 - \frac{0{,}029\,127\,4\ldots}{4{,}398\,962\ldots} = 4{,}500\,040\,6 - 0{,}006\,621\,4\ldots;$$

округляємо поправку до $0{,}006\,617\,7$ $(22'45'')$ та беремо

$$x_2' = 4{,}493\,422\,9\ldots \ (257^\circ 27' 15'').$$

Оскільки $f(x_2') = -0{,}000\,059\ldots$, то

$$x_2' - \xi < \frac{0{,}000\,06}{2{,}7} < 0{,}000\,022\,3.$$

Отже,

$$4{,}493\,400\,6\ldots < \xi < 4{,}493\,422\,9\ldots$$

і можна покласти

$$\xi = 4{,}4934_{+0{,}000\,03}.$$

5) Силу методу Ньютена особливо можна побачити, коли проміжок, що містить корінь, досить звужений. На закінчення обчислимо з великою точністю, скажімо, до 10^{-10}, корінь рівняння $x^3 - 2x - 5 = 0$, виходячи з проміжку $(2;\ 2{,}1)$, у якому він міститься.

Тут:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5, \quad f(2) = -1 < 0, \quad f(2{,}1) = 0{,}061 > 0,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 > 0, \quad f''(x) = 6x > 0 \quad (2 \leqslant x \leqslant 2{,}1)$$

(випадок a)). Легко підрахувати, що $m = 10$, $M < 12{,}6$, так що

$$\frac{M}{2m} < 0{,}63.$$

Починаємо з $b = 2{,}1$. За формулою (154.6): $b - \xi < \frac{0{,}061}{10} = 0{,}0061$. Тепер, користуючись нерівністю (155.7), ми заздалегідь підрахуємо, якої точності **можна очікувати** від x_1':

$$x_1' - \xi < 0{,}63 \cdot 0{,}061^2 < 0{,}000\,024.$$

Тому число

$$x_1' = 2{,}1 - \frac{f(2{,}1)}{f'(2{,}1)} = 2{,}1 - \frac{0{,}061}{11{,}23} = 2{,}1 - 0{,}005\,43\ldots$$

nebayduzhi.math@gmail.com

округляємо “в бік кореня” на п'ятому знаку: $x_1' = 2{,}1 - 0{,}005\,44 = 2{,}094\,56$. Оскільки $f(x_1') = f(2{,}094\,56) = 0{,}000\,095\,078\,690\,816$, то тепер, за формулою (154.6), можна точніше оцінити похибку:

$$x_1' - \xi < \frac{0{,}000\,095\,\ldots}{10} < 0{,}000\,01.$$

Переходячи до x_2' і знову вдавшись до (155.7), підрахуємо наперед:

$$x_2' - \xi < 0{,}63 \cdot 0{,}000\,01^2 = 0{,}000\,000\,000\,063.$$

Тому число

$$x_2' = 2{,}094\,56 - \frac{0{,}000\,095\,078\,690\,816}{11.1615447808} = 2{,}094\,56 - 0{,}000\,008\,518\,416\,\ldots,$$

округлене на одинадцятому знаку: $x_2' = 2{,}094\,56 - 0{,}000\,008\,518\,41 = 2{,}094\,551\,481\,59$, все ж таки відрізняється від шуканого кореня на менш ніж $0{,}000\,000\,000\,07$. Отже,

$$2{,}094\,551\,481\,52 < \xi < 2{,}094\,551\,481\,59,$$

тобто $\xi = 2{,}094\,551\,481\,5 + 10^{-10}$.

157. Комбінований метод

Цей метод полягає в одночасному використанні як **методу дотичних**, так і **методу хорд**.

Для визначеності припустимо, що маємо справу з випадком a). Наближені значення x_1 і x_1' обчислимо, як і вище, користуючись формулами (154.1) і (155.2):

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}, \quad x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)};$$

тоді, за доведеним,

$$a < x_1 < \xi < x_1' < b.$$

За наступного кроку ми просто замінюємо в цих формулах a і b на x_1 і x_1':

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1'-x_1)\cdot f(x_1)}{f(x_1')-f(x_1)}, \quad x_2' = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}.$$

Цей процес може бути продовжений невизначено; маючи два наближені значення x_n і x_n', між якими міститься корінь ξ, ми переходимо до наступної пари наближених значень за формулами:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n'-x_n)\cdot f(x_n)}{f(x_n')-f(x_n)}, \quad x_{n+1}' = x_n' - \frac{f(x_n')}{f'(x_n')}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Друга з них тотожна з (155.5); перша ж суттєво відрізняється від (154.5) тим, що *точка* b *замінюється тут точкою* x'_n, *дедалі ближчою до* ξ. Якщо нерівність (154.4), для цього випадку, переписати у вигляді

$$\frac{x-a}{f(x)-f(a)} > \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

і покласти в ньому $a = x_n$ і $x = x'_n$, то легко побачити, що згадана заміна b на x'_n *сприяє лише швидшому наближенню* x_n *до шуканого кореня* (геометрично це очевидно!).

Отже, застосовуючи комбінований метод, ми отримуємо одночасно недостатні та надмірні наближені значення кореня, які прямують до нього з різних боків. У випадках a) і d) x_n прямує до ξ ліворуч, а x'_n — праворуч; у випадках b) і c) очевидно буде навпаки. Величина $|x'_n - x_n|$ **безпосередньо** дає змогу розмірковувати про якість досягнутого наближення — у цьому зручність **комбінованого методу**.

Застосування його висвітлимо прикладами.

158. Приклади і вправи

Тут передбачається використовувати лише **комбінований метод**.

1) Знайти три дійсні корені рівняння

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 5 = 0$$

із точністю до 0,001.

Грубий графік функції $y = f(x)$ допомагає знайти проміжки, в яких містяться ці корені:

$$-2 < \xi_1 < -1, \quad 0 < \xi_2 < 1, \quad 1 < \xi_3 < 2;$$

перевірити це легко, якщо дивитися, чи змінюється знак функції.

а) На проміжку $[-2, -1]$

$$f'(x) = 6x^2 - 2x - 7 > 0, \quad f''(x) = 12x - 2 < 0$$

випадок c). Оскільки $f(-2) = -1 < 0$, $f(-1) = 9 > 0$, то правило Ньютена слід застосовувати до лівих кінців проміжку. Маємо:

$$f'(-2) = 21, \quad x'_1 = -2 - \frac{-1}{21} = -1{,}952\ldots, \quad x_1 = -1 - \frac{9}{9-(-1)} = -1{,}9.$$

Округлюючи значення x'_1 у бік зменшення, отримаємо число $-1{,}96 < \xi$. Якщо ж округлити його в бік збільшення, тобто в бік кореня, то отримаємо число $-1{,}95$; але $f(-1{,}95) = 0{,}017\,75 > 0$, тобто в цьому випадку ми перескочили через корінь. Ця обставина вигідна для нас, бо дає змогу звузити проміжок, що містить корінь, і, відкинувши колишнє значення x_1, вважати

$$x_1' = -1{,}96, \quad x_1 = -1{,}95.$$

Далі, маємо:

$$f(-1{,}96) = -0{,}180\,672, \quad f'(-1{,}96) = 19{,}9696,$$

$$x_2' = -1{,}96 + \frac{0{,}180\,672}{19{,}9696} = -1{,}96 + 0{,}009\,04\ldots = -1{,}950\,95\ldots,$$

$$x_2 = -1{,}95 - \frac{0{,}01\cdot 0{,}017\,75}{0{,}017\,75 + 0{,}180\,672} = -1{,}95 - 0{,}000\,89\ldots = -1{,}950\,89\ldots$$

Оскільки ξ_1 має бути між цими межами, то ясно, що

$$\xi_1 = -1{,}9509_{\pm 0{,}001}$$

(так що необхідна точність перевищена!).

б) На проміжку $[0,1]$ перша похідна $f'(x)$ зберігає знак мінус, але друга похідна $f''(x)$ змінює знак, вона дорівнює 0 в точці $x = \frac{1}{6}$. Ця обставина змушує попередньо звузити проміжок. Випробовуючи значення $x = 0{,}5$, отримуємо: $f(0{,}5) = 1{,}5 > 0$; оскільки $f(1) = -1 < 0$, то ξ_2 міститься всередині проміжку $[0{,}5; 1]$, де $f''(x)$ зберігає знак плюс (випадок b)). І тут правило Ньютена застосовуємо до лівих кінців. Маємо:

$$x_1' = 0{,}5 + \frac{1{,}5}{6{,}5} = 0{,}7307 \doteq 0{,}74, \quad x_1 = 1 - \frac{0{,}5}{2{,}5} = 0{,}80.$$

Округлення x_1' у бік кореня не привело до перескакування через корінь, бо $f(0{,}74) = 0{,}082\,848 > 0$. Нарешті,

$$x_2' = 0{,}74 + \frac{0{,}082\,848}{5{,}1944} = 0{,}755\ldots, \quad x_2 = 0{,}80 - \frac{0{,}012\,96}{0{,}298\,848} = 0{,}756\ldots,$$

так що $0{,}755\ldots < \xi_2 < 0{,}756\ldots$, і можна вважати

$$\xi_2 = 0{,}756_{\pm 0{,}001}.$$

в) На проміжку $[1,2]$ друга похідна зберігає знак плюс, але перша похідна змінює знак, вона дорівнює 0 в точці

$$x = \frac{1+\sqrt{43}}{6} \doteq 1{,}26.$$

Випробовуємо 1,5: $f(1{,}5) = -1$, тоді як $f(2) = 3$, так що $1{,}5 < \xi_3 < 2$; $f'(x)$ на цьому проміжку має знак плюс (випадок a)). Маємо:

$$x_1 = 1{,}5 + \frac{1}{8} \doteq 1{,}6, \quad x_1' = 2 - \frac{3}{13} \doteq 1{,}7;$$

nebayduzhi.math@gmail.com

через корінь і тут не перескочили, бо $f(1{,}7) = 0{,}036$. Нарешті,

$$x_2 = 1{,}6 + \frac{0{,}0568}{0{,}604} = 1{,}6 + 0{,}094\ldots = 1{,}694\ldots,$$

$$x_2' = 1{,}7 - \frac{0{,}036}{6{,}94} = 1{,}7 - 0{,}005\ldots = 1{,}694\ldots,$$

так що $\xi_3 = 1{,}694_{+0{,}001}$.

Зауваження. Оскільки сума коренів, за відомою теоремою В'єта (фр. François Viète, Франсуа́ В'є́т), повинна дорівнювати 0,5, то цим можна скористатися для перевірки.

2) Рівняння

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10\,000 = 0$$

має два дійсні корені: один між -11 і -10, а інший — між 9 і 10. Обчислити їх із точністю до 0,000 01.

а) На проміжку $[-11, -10]$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x + 75 < 0, \quad f''(x) = 12x^2 - 6 > 0$$

(випадок b)). Отримаємо:

$$x_1' = -11 + \frac{3453}{5183} = -10{,}33\ldots \doteq -10{,}3$$

$$x_1 = -10 - \frac{1050}{4503} = -10{,}23\ldots \doteq -10{,}2;$$

у першому випадку ми округлили в бік кореня, але через нього не перескочили. Далі,

$$x_2' = -10{,}3 + \frac{164{,}3181}{4234{,}108} = -10{,}262\ldots \doteq -10{,}262,$$

$$x_2 = -10{,}2 - \frac{25{,}279\,84}{417{,}1165} = -10{,}260\ldots \doteq -10{,}260,$$

(те ж зауваження). Нарешті,

$$x_3' = -10{,}262 + \frac{4{,}334\,569\,118\,736}{4186{,}137\,218\,912} = -10{,}262 + 0{,}001\,035\,4\ldots = -10{,}260\,964\,5\ldots,$$

$$x_3 = -10{,}260 - \frac{0{,}008\,070\,380\,48}{8{,}369\,759\,358\,736} = -10{,}260 - 0{,}000\,964\,2\ldots = -10{,}260\,964\,2\ldots,$$

так що

$$\xi_1 = -10{,}260\,964_{-0{,}000\,001}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

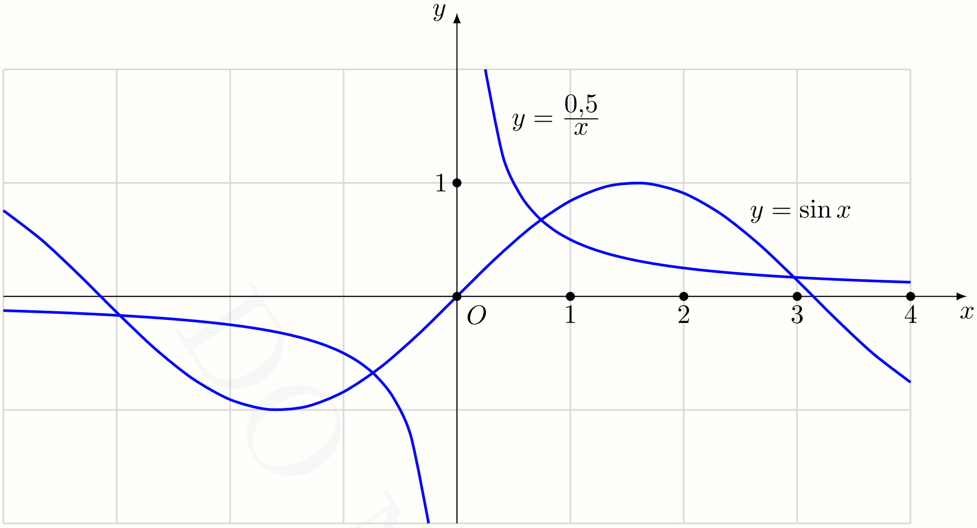


Рис. 158.1

(навіть з більшою точністю, ніж потрібно).

б) На проміжку $[9, 10]$ $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ (випадок a)). Тут:

$$x_1 = 9 + \frac{3007}{3457} = 9 + 0{,}869\ldots \doteq 9{,}87 \quad \text{(у бік кореня!)};$$

$$x_1' = 10 - \frac{450}{4015} = 10 - 0{,}112\ldots \doteq 9{,}89;$$

$$x_2 = 9{,}87 + \frac{1{,}238\,965\,887\,8}{77{,}468\,900\,8} = 9{,}87 + 0{,}015\,99\ldots = 9{,}885\,99\ldots;$$

$$x_2' = 9{,}89 - \frac{15{,}520\,606\,41}{3885{,}106\,676} = 9{,}89 - 0{,}003\,993\ldots = 9{,}886\,006\ldots;$$

отже, очевидно

$$\xi_2 = 9{,}886\,00_{\pm 0{,}000\,01}.$$

3) Розглянемо рівняння

$$f(x) = x \cdot \sin x - 0{,}5 = 0.$$

Побудувавши графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{0{,}5}{x}$ (рис. 158.1), бачимо, що вони перетинаються в безлічі точок, так що наше рівняння має безліч коренів. З графіка видно також, що найменший додатний корінь близький до 0,7; спробуємо обчислити його з точністю 0,000 001. (Тут слід мати на увазі **зауваження** про округлення в частках градуса, зроблене в пр. 156.4.)

Підставляючи у функцію $f(x)$ значення

$$a = 0{,}698\,131\,7\ldots\ \ (40^\circ) \quad \text{і} \quad b = 0{,}785\,398\,2\ldots\ \ (45^\circ),$$

отримуємо в першому випадку від'ємне значення, тоді як у другому — додатне, отже, $a < \xi < b$. Обидві похідні $f'(x)$, $f''(x)$ на цьому проміжку мають знак плюс (випадок *a*)).

Схема обчислень:

$$x_1 = 0{,}698\,131\,7\ldots + 0{,}041\,951\,2\ldots,$$
$$x_1' = 0{,}785\,398\,2\ldots - 0{,}043\,851\,0\ldots,$$

першу поправку "округлюємо" до $0{,}041\,887\,9\ldots\ \ (2^\circ 24')$,
а другу — до $0{,}043\,923\,1\ldots\ \ (2^\circ 31')$, тож остаточно

$$x_1 = 0{,}740\,019\,6\ldots\ \ (42^\circ 24'), \quad x_1' = 0{,}741\,474\,1\ldots\ \ (42^\circ 29').$$

Далі,

$$x_2 = 0{,}740\,019\,6\ldots + 0{,}000\,821\,1\ldots = 0{,}740\,840\,7\ldots,$$
$$x_2' = 0{,}741\,474\,1\ldots - 0{,}000\,632\,9\ldots = 0{,}740\,841\,2\ldots,$$

звідки і отримуємо з необхідною точністю:

$$\xi = 0{,}740\,841_{\pm 0{,}000\,000\,5}.$$

4) На закінчення повернемося до рівняння

$$f(x) = x^4 - x - 1 = 0.$$

Ми бачили в розд. 81, що воно має корінь між $a = 1{,}22$ і $b = 1{,}23$. Встановимо, яку точність у знаходженні цього кореня дає лише дворазове застосування комбінованого методу.

Схема обчислень (випадок *a*)):

$$x_1 = 1{,}22 + \frac{0{,}000\,046\,654\,4}{0{,}063\,531\,15} = 1{,}220\,73\ldots \doteq 1{,}2207,$$

$$x_1' = 1{,}23 - \frac{0{,}058\,866\,41}{6{,}443\,468} = 1{,}220\,86\ldots \doteq 1{,}2209,$$

$$x_2 = 1{,}2207 + \frac{0{,}000\,000\,055\,337\,605\,983\,98}{0{,}001\,255\,538\,012\,096} = 1{,}220\,744\,07\ldots,$$

$$x_2' = 1{,}2209 - \frac{0{,}000\,978\,849\,982\,176\,1}{6{,}279\,478\,581\,316} = 1{,}220\,744\,1\ldots,$$

Отже,

$$\xi = 1{,}220\,744\,1_{\pm 0{,}000\,000\,1}.$$

Глава 5

ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

5.1. Основні поняття

159. Функціональна залежність між змінними. Приклади

Досі ми вивчали спільну зміну **двох** змінних, з яких одна **залежала** від іншої: значенням **незалежної** змінної вже цілком визначалося значення **залежної** змінної чи функції. У науці та в житті нерідкі, однак, випадки, коли **незалежних змінних** виявляється декілька, і для знаходження значення функції необхідно попередньо знати значення, що спільно набуваються всіма цими незалежними змінними.

1) Так, наприклад, об'єм V кругового циліндра є **функцією** від радіуса R його основи і від висоти H; залежність між цими змінними виражається формулою

$$V = \pi R^2 H,$$

яка дає можливість, знаючи значення **незалежних змінних** R і H, обчислити відповідне значення V.

Об'єм V зрізаного конуса, очевидно, є функцією від **трьох** незалежних змінних: радіусів R і r обох його основ і висоти H, за формулою

$$V = \frac{\pi H}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right).$$

2) За законом Ома, напруга V в ланцюзі електричного струму пов'язана з опором R ланцюгу та з силою струму I залежністю $V = RI$. Якщо V і R вважати даними, то звідси визначиться I як **функція** від V і R:

$$I = \frac{V}{R}.$$

3) Нехай температура маси газу, що знаходиться під поршнем циліндра, не постійна; тоді об'єм V і тиск p одного моля газу пов'язані з його (абсолютною) температурою T так званою формулою Кляпейрона (фр. Émile Clapeyron, Еміль Кляпейро́н):

$$pV = RT \quad (R = \text{const}).$$

Звідси, вважаючи, наприклад, V і T **незалежними змінними**, функцію p можна виразити через них так:

$$p = \frac{RT}{V}.$$

4) Вивчаючи фізичний стан якого-небудь тіла, часто доводиться спостерігати зміну його властивостей від точки до точки. Такі: щільність, температура, електричний потенціал тощо. Всі ці величини є “функції точки” або, якщо завгодно, функції від координат x, y, z точки. Якщо фізичний стан тіла змінюється з часом, то до цих незалежних змінних приєднується ще й час, t. У цьому випадку ми маємо справу з функціями від **чотирьох** незалежних змінних.

Число подібних прикладів читач і сам може довільно збільшити.

Уточнення поняття функції у разі кількох незалежних змінних почнемо з найпростішого випадку, коли цих змінних дві.

160. Функції двох змінних і області їх визначення

Говорячи про зміну двох незалежних змінних x і y, ми повинні кожен раз вказувати, **які пари значень** (x, y) **вони можуть набувати спільно**; множина $\mathcal{M}$ цих пар і буде областю зміни змінних x, y.

Саме означення поняття **функції** дається у тих самих висловлюваннях, як і у випадку однієї незалежної змінної.

Змінна z (з областю зміни $\mathcal{Z}$) називається ***функцією незалежних змінних*** *x, y в множині $\mathcal{M}$, якщо кожній парі (x, y) їх значень з $\mathcal{M}$ за деяким правилом чи законом ставиться у відповідність одне певне значення z (з $\mathcal{Z}$).*

Тут мається на увазі **однозначна** функція; легко поширити це означення і на випадок **многозначної** функції.

Множина $\mathcal{M}$, про яку вище йшлося, і є **область визначення** функції. Самі змінні x, y по відношенню до їх функції z називаються її **аргументами**. Функціональна залежність між z і парою x, y позначається, аналогічно до випадку однієї незалежної змінної, так:

$$z = f(x, y), \quad z = \varphi(x, y), \quad z = z(x, y) \quad \text{тощо.}$$

Якщо пара (x_0, y_0) взята з $\mathcal{M}$, то $f(x_0, y_0)$ означає те **окреме (числове)** значення функції $f(x, y)$, яке вона набуває, коли $x = x_0$, $y = y_0$.

nebayduzhi.math@gmail.com

Наведемо декілька прикладів функцій, заданих аналітично (**формулами**), із зазначенням їх областей визначення.

Формули:

$$1)\quad z = xy,$$

$$2)\quad z = x^2 + y^2$$

визначають функції для всіх пар (x, y) без винятку.

Формули:

$$3)\quad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$$4)\quad z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

придатні (якщо ми хочемо мати справу з скінченними дійсними значеннями z) лише для тих пар (x, y), які задовольняють, відповідно, нерівність

$$x^2 + y^2 \leqslant 1 \quad \text{або} \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Формулою:

$$5)\quad z = \arcsin\frac{x}{a} + \arcsin\frac{y}{b}$$

функція визначена для тих значень x і y, які порізно задовольняють нерівності

$$-a \leqslant x \leqslant a \quad \text{і} \quad -b \leqslant y \leqslant b.$$

У всіх цих випадках ми вказували найбільш широку, **природну** (розд. 46, 2), область застосування формули.

Розглянемо тепер такий приклад.

6) Нехай сторони трикутника довільно змінюються, з тим лише обмеженням, що периметр його зберігає сталу величину $2p$. Якщо дві сторони його позначити через x і y, то третя сторона буде $2p - x - y$, так що трикутник цілком визначається сторонами x і y. Як залежить від них площа z трикутника?

За формулою Герона (гр. Ἥρων ο Αλεξανδρεύς, Геро́н) ця площа має такий вираз:

$$z = \sqrt{p(p - x)(p - y)(x + y - p)}.$$

Що ж до **області визначення** $\mathcal{M}$ цієї функції, вона обумовлюється, цього разу, тим конкретним питанням, яке привело до розгляду функції. Оскільки довжина кожної сторони трикутника є додатним числом, яке менше ніж пів периметра, то повинні виконуватися нерівності

$$0 < x < p, \quad 0 < y < p, \quad x + y > p;$$

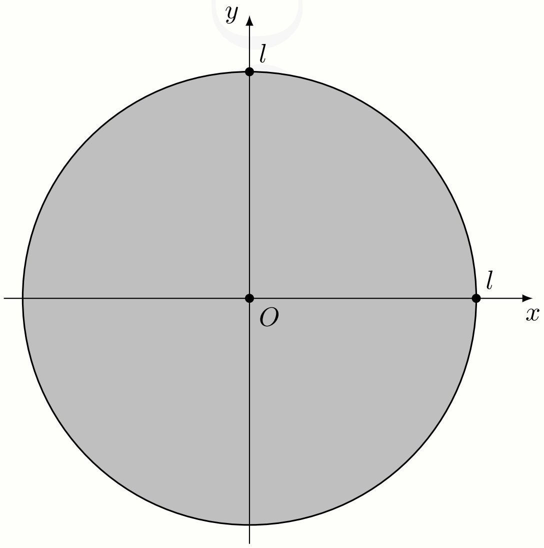


Рис. 160.1

вони і характеризують область $\mathcal{M}$ (незважаючи на те, що отримана формула **сама по собі** має сенс й у ширшій області, наприклад, для $x > p$ і $y > p$).

Отже, тоді як для функції однієї змінної стандартною областю зміни аргументу був (скінченний або нескінченний) **проміжок**, у разі функції двох змінних ми вже стикаємося з більшою різноманітністю та складністю можливих (і природних) областей зміни аргументів.

Розгляд цих областей значно полегшується їхньою геометричною інтерпретацією. Якщо взяти на площині дві взаємно перпендикулярні осі і звичайним чином відкладати на них значення x і y, то, як відомо, кожною парою (x, y) однозначно визначається **точка** на площині, що має ці значення своїми координатами, і навпаки.

Тоді для характеристики тих **пар** (x, y), для яких визначено функцію, найпростіше вказати, яка фігура на площині xy заповнюється відповідними точками.

Так, кажуть, що функції 1) та 2) визначені **на всій площині**; функції 3) та 4) — **в крузі**, відповідно, замкненому (тобто що включає коло) або відкритому (без кола) (рис. 160.1); функція 5) визначена **у прямокутнику** (рис. 160.2); нарешті, функція 6) розглядається у відкритому **трикутнику** (рис. 160.3).

Ця геометрична інтерпретація настільки зручна, що зазвичай самі пари чисел (x, y) називають "точками", а множину таких "точок", що відповідає тим чи іншим геометричним образам, називають назвою цих образів. Так, множина "точок" або пар (x, y), для яких виконуються нерівності

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

є "прямокутник", сторони якого дорівнюють $b - a$ та $d - c$; його будемо позначати

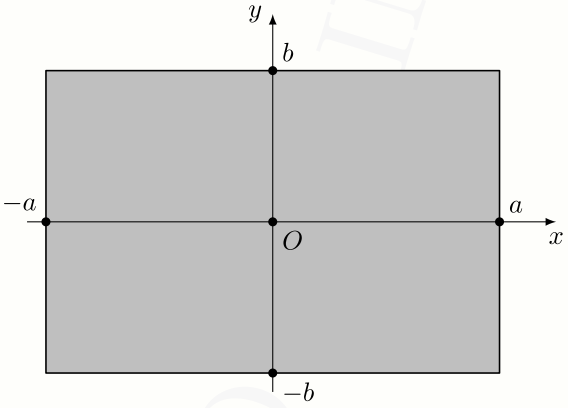


Рис. 160.2

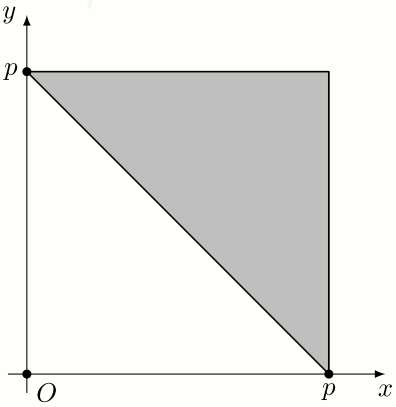


Рис. 160.3

символом $[a, b;\ c, d]$, схожим на позначення проміжку. Множина "точок" або пар (x, y), що задовольняють нерівність

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \leqslant r^2,$$

є "коло" радіуса r, з центром в "точці" (α, β), і так далі.

На зразок того, як функція $y = f(x)$ геометрично зображалася своїм **графіком** (розд. 47), можна геометрично представити і рівняння $z = f(x, y)$. Візьмемо у просторі прямокутну систему координатних осей x, y, z; зобразимо на площині xy область $\mathcal{M}$ зміни змінних x і y; нарешті, у кожній точці $M(x, y)$ цій області побудуємо перпендикуляр до площини xy і відкладемо на ньому значення $z = f(x, y)$. Геометричне місце отриманих таким способом точок і буде свого роду **просторовим графіком** нашої функції. Це буде, взагалі кажучи, деяка поверхня; а рівність $z = f(x, y)$ називається **рівнянням поверхні**.

Наприклад, на рис. 160.4, рис. 160.5, рис. 160.6 зображені геометричні образи функцій:

$$z = xy,$$

$$z = x^2 + y^2,$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Перший з них є **гіперболічний параболоїд**, другий — **параболоїд обертання**, а третій — **напівсфера**.

На закінчення згадаємо, що іноді доводиться розглядати змінну $x_{m,n}$, значення якої занумеровані двома натуральними значками m і n (кожен з яких, незалежно від іншого, пробігає натуральний ряд чисел). Така змінна є, в деякому розумінні, узагальненням **варіанти** x_n.

Можна покласти, наприклад,

$$x_{m,n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}, \quad x_{m,n} = \frac{1}{m^2+n^2}, \quad x_{m,n} = \frac{(m+1)\cdot n}{m\cdot(n+1)}$$

і так далі.

По суті справи, значки m і n слід розглядати як незалежні змінні, а змінну $x_{m,n}$ — як функцію від них. Область зміни незалежних змінних у цьому випадку геометрично ілюструється своєрідною точковою квадратною сіткою у першому координатному куті.

161. Арифметичний n-вимірний простір

Розглянемо функції від n незалежних змінних (при $n \geqslant 3$). Спочатку зупинимося на системах **спільних** значень цих змінних.

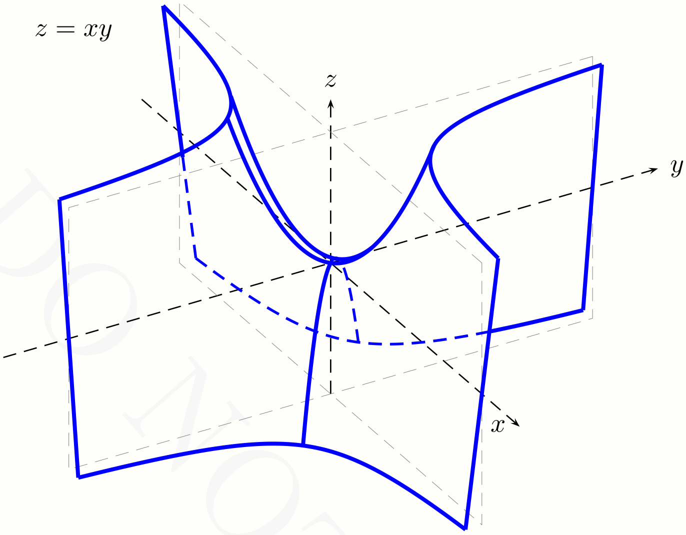


Рис. 160.4

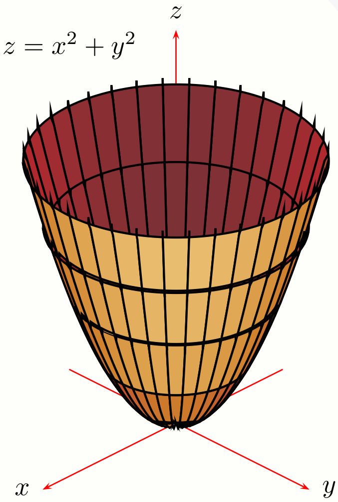


Рис. 160.5

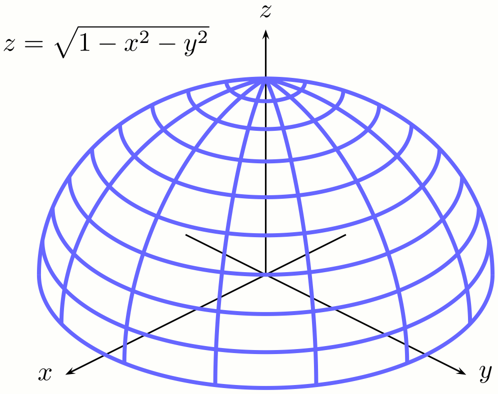


Рис. 160.6

У випадку, коли $n = 3$, така система із трьох чисел (x, y, z), як ясно читачеві, ще може бути геометрично витлумачена як **точка простору**, а множина таких трійок — як частина простору або геометричне **тіло**. Але при $n > 3$ можливості безпосередньої геометричної інтерпретації вже немає, через відсутність у нас інтуїції простору з числом вимірів, більшим за три.

Але, бажаючи поширити геометричні методи (які виявилися плідними для функцій двох і трьох змінних) і на теорію функцій більшої кількості змінних, в аналізі вводять поняття n-вимірного "простору" і при $n > 3$.

Назвемо (n-вимірною) "**точкою**" систему з n дійсних чисел: $M(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$. (Маючи справу з невизначеним числом змінних, є зручним позначати їх не різними літерами, а однією і тією ж літерою лише з різними номерами. Отже, i означає (врозріз з колишньою практикою) не i-е значення якоїсь змінної, а саму i-у змінну, яка сама по собі набуває різних значень.) Самі числа $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ є **координатами** "точки" M. Множина всіх мислимих n-вимірних "точок" становить **n-вимірний "простір"** (який іноді називають **арифметичним**).

Доцільно ввести поняття "відстань" $\overline{MM'}$ між двома (n-вимірними) "точками"

$$M(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) \quad \text{і} \quad M'(x'_1,\ x'_2,\ \dots,\ x'_n).$$

Так само як і в аналітичній геометрії, вважають

$$\overline{MM'} = \overline{M'M} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x'_i - x_i)^2} = \sqrt{(x'_1-x_1)^2+(x'_2-x_2)^2+\dots+(x'_n-x_n)^2}; \tag{161.1}$$

при $n = 2$ або 3 ця "відстань" співпадає зі звичайною відстанню між двома відповідними геометричними точками.

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо взяти ще одну “точку”

$$M''(x_1'',\ x_2'',\ \ldots,\ x_n''),$$

то, як можна довести, для “відстаней” $\overline{MM'}$, $\overline{M'M''}$ та $\overline{MM'}$ виконується нерівність

$$\overline{MM''} \leqslant \overline{MM'} + \overline{M'M''}, \tag{161.2}$$

що нагадує відому теорему геометрії: “сторона трикутника не перевищує суми двох інших сторін”.

Справді, для будь-якого набору дійсних чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ і $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ виконується нерівність

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

Ця нерівність є не що інше як окремий випадок нерівності Мінковського (133.9) при $k = 2$.

Якщо покласти тут

$$a_i = x_i' - x_i, \quad b_i = x_i'' - x_i', \quad \text{так що } a_i + b_i = x_i'' - x_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то отримаємо

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i''-x_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i'-x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i''-x_i')^2},$$

що рівносильно (161.2). Отже, істотна властивість відстані виявляється є і в нашому “просторі”.

У n-вимірному “просторі” можна розглядати і неперервні “криві”.

Відомо (розд. 106), що рівняння

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ є функції **від параметра** t, неперервні на деякому проміжку $[t', t'']$, виражають на площині неперервну криву. Аналогічно, але лише за допомогою трьох неперервних функцій:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (t' \leqslant t \leqslant t''),$$

виражається неперервна крива в (звичайному) просторі. Аналогічно до цього, розглянемо тепер n неперервних функцій від t

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t) \quad (t' \leqslant t \leqslant t''),$$

Тоді множина "точок"

$$(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)),$$

які одержані при різних значеннях **параметра** t, становлять неперервну "криву" в n-вимірному "просторі". Поклавши

$$x_1' = \varphi_1(t'), \quad x_2' = \varphi_2(t'), \quad \ldots, \quad x_n' = \varphi_n(t'),$$

$$x_1'' = \varphi_1(t''), \quad x_2'' = \varphi_2(t''), \quad \ldots, \quad x_n'' = \varphi_n(t''),$$

можна сказати, що ця "крива" з'єднує "точки"

$$M'(x_1',\ x_2',\ \ldots,\ x_n') \quad \text{і} \quad M''(x_1'',\ x_2'',\ \ldots,\ x_n'').$$

У тому випадку, коли всі функції $\varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)$ виявляються **лінійними**, "крива" переходить у "пряму":

$$x_1 = \alpha_1 t + \beta_1, \quad \ldots, \quad x_n = \alpha_n t + \beta_n;$$

тут коефіцієнти $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ вважаються такими, що не дорівнюють усі разом 0, а t змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. Вважатимемо ці "точки" такими, що **розташовані** одна за одною, якщо параметр t збільшується; тобто, якщо $t' < t < t''$, то з відповідних "точок" M', M, M'' саме "точка" M лежить **між** двома іншими, тому що вона іде після M' і перед M''. За цих умов, як легко показати, відстані між ними задовольняють співвідношення:

$$\overline{M'M''} = \overline{M'M} + \overline{MM''},$$

що є характерним для прямої у звичайному просторі.

Рівняння "прямої", що проходить через дві задані "точки"

$$M'(x_1',\ x_2',\ \ldots,\ x_n') \quad \text{і} \quad M''(x_1'',\ x_2'',\ \ldots,\ x_n''),$$

очевидно, можуть бути написані у вигляді:

$$x_1 = x_1' + t(x_1'' - x_1'), \quad \ldots, \quad x_n = x_n' + t(x_n'' - x_n') \quad (-\infty < t < +\infty),$$

причому самі "точки" M' і M'' виходять звідси при $t = 0$ і $t = 1$. Якщо ж змінювати t тільки від 0 до 1, то вийде "прямолінійний відрізок", що з'єднує ці "точки".

"Крива", що складається з скінченного числа "прямолінійних відрізків", називається "ламаною".

162. Приклади областей у n-вимірному просторі

Звернемося тепер до розгляду деяких прикладів “тіл” та “областей” в n-вимірному “просторі”.

1) Множина “точок” $M(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$, координати яких незалежно одна від одної задовольняють нерівності

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \quad a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \quad \dots, \quad a_n \leqslant x_n \leqslant b_n,$$

називається (n-вимірним) “прямокутним паралелепіпедом” і позначається так:

$$[a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ \dots;\ a_n, b_n].$$

При $n = 2$ звідси зокрема випливає той “прямокутник”, про який вже йшлося в розд. 160; тривимірному “паралелепіпеду” відповідає в просторі звичайний прямокутний паралелепіпед.

Якщо у написаних співвідношеннях відкинути рівність:

$$a_1 < x_1 < b_1, \quad a_2 < x_2 < b_2, \quad \dots, \quad a_n < x_n < b_n,$$

то цим визначиться **відкритий** “прямокутний паралелепіпед”

$$(a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ \dots;\ a_n, b_n),$$

на відміну від якого розглянутий вище називається **замкненим**. (Можна розглядати також і **нескінченний** “паралелепіпед”, для якого визначальні його проміжки (або деякі з них) виявляються нескінченними. Говорячи про n-вимірний “паралелепіпед”, якщо не сказано інше, ми завжди матимемо на увазі **скінченний** “паралелепіпед”.) Різниці $b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ \dots,\ b_n - a_n$ називають вимірами обох паралелепіпедів (замкненого і відкритого), а точку

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \quad \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad \dots, \quad \frac{a_n + b_n}{2}\right)$$

— їх **центром**.

Околом “точки” $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0)$ називається будь-який відкритий “паралелепіпед”:

$$\begin{gathered}(x_1^0 - \delta_1,\ x_1^0 + \delta_1;\ x_2^0 - \delta_2,\ x_2^0 + \delta_2;\ \dots;\ x_n^0 - \delta_n,\ x_n^0 + \delta_n)\\ (\delta_1,\ \delta_2,\ \dots,\ \delta_n > 0)\end{gathered} \tag{162.1}$$

з центром у точці M_0; найчастіше це буде “куб”:

$$(x_1^0 - \delta,\ x_1^0 + \delta;\ x_2^0 - \delta,\ x_2^0 + \delta;\ \dots;\ x_n^0 - \delta,\ x_n^0 + \delta) \quad (\delta > 0),$$

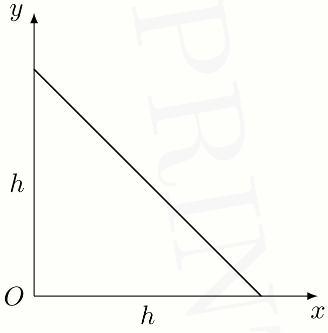


Рис. 162.1

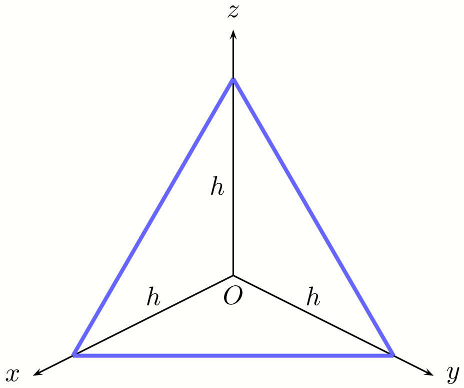


Рис. 162.2

всі виміри якого дорівнюють 2δ.

2) Розглянемо множину “точок” $M(x_1,\ \dots,\ x_n)$, координати яких задовольняють нерівності

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad \dots, \quad x_n \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqslant h \quad (h > 0).$$

При $n = 2$ ця множина є рівностороннім прямокутним трикутником (рис. 162.1), а при $n = 3$ — тетраедром (рис. 162.2). Взагалі його називають **симплексом**. Це тіло **замкнене**, на відміну від **відкритого**, яке вийде, якщо у написаних співвідношеннях відкинути рівність. (З латині: simplex — простий; **симплекс**, справді, є найпростіше многогранне “тіло”, з найменшим можливим для даного простору числом граней.)

3) Нарешті, множина “точок” $M(x_1,\ \dots,\ x_n)$, яка визначена нерівністю

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 \leqslant r^2 \quad (\text{або } < r^2),$$

де $M_0(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)$ є фіксована “точка”, а r — стале додатне число, утворює **замкнену** (або **відкриту**) n-вимірну “кулю” радіуса r з центром у “точці” M_0. Іншими словами “куля” є множина “точок” M, “відстань” яких від деякої фіксованої “точки” M_0 не перевищує (або менше) r. Зрозуміло, що цій “кулі” при $n = 2$ відповідає круг (порівняйте з розд. 150), а при $n = 3$ — звичайна куля.

Відкриту “кулю” будь-якого радіуса $r > 0$ з центром у “точці” $M_0(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)$ можна також розглядати як **окіл** цієї точки; на відміну від того (“паралелепіпедного”) околу, який ми мали раніше, цей окіл називатимемо “сферичним”.

Твердження 162.1. *Корисно раз і назавжди усвідомити, що якщо “точка” M оточена околом одного із зазначених двох типів, то її можна оточити і околом другого типу так, щоб цей окіл містився у першому.*

Доведення. Нехай спочатку маємо “паралелепіпед” (162.1) з центром в “точці” M. Достатньо взяти відкриту “кулю” з тим же центром та радіусом r, меншим за всі δ_i $(i = 1,\ \dots,\ n)$, щоб ця куля вже містилася у названому “паралелепіпеді”. Справді, для будь-якої “точки” $M(x_1,\ \dots,\ x_n)$ цієї “кулі” матимемо (при кожному $i = 1,\ \dots,\ n$):

$$|x_i - x_i^0| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k^0)^2} = \overline{MM_0} < r < \delta_i$$

або

$$x_i^0 - \delta_i < x_i < x_i^0 + \delta_i,$$

так що ця точка належить до заданого “паралелепіпеда”.

Навпаки, якщо задана “куля” радіуса r з центром M_0, то “паралелепіпед” (162.1) в ній міститься, наприклад, при $\delta_1 = \dots = \delta_n = \dfrac{r}{\sqrt{n}}$. Це випливає з того, що будь-яка

nebayduzhi.math@gmail.com

“точка” $M(x_1,\ \dots,\ x_n)$ цього “паралелепіпеда” віддалена від “точки” M, на “відстань”

$$\overline{MM_0} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_k^0)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\delta_k^2} = r$$

і, отже, належить до заданій “кулі”. □

163. Загальне означення відкритої та замкненої області

Назвемо “точку” $M'(x_1',\ \dots,\ x_n')$ **внутрішньою** “точкою” множини $\mathcal{M}$ (у n - вимірному “просторі”), якщо вона належить до множині $\mathcal{M}$ разом з деяким досить малим її околом.

З твердження, доведеного наприкінці попереднього розділу, випливає з очевидністю, що **не важливо** якого типу окіл тут мати на увазі — “паралелепіпедний” або “сферичний”.

Для **відкритого** “прямокутного паралелепіпеда”

$$(a_1, b_1;\ \dots;\ a_n, b_n) \tag{163.1}$$

кожна його “точка” є внутрішньою. Справді, якщо

$$a_1 < x_1' < b_1,\ \dots,\ a_n < x_n' < b_n,$$

то легко знайти таке $\delta > 0$, щоб було

$$a_1 < x_1' - \delta < x_1' < x_1' + \delta < b_1,\ \dots,\ a_n < x_n' - \delta < x_n' < x_n' + \delta < b_n.$$

Аналогічно, у випадку **відкритої** “кулі” радіуса r з центром у “точці” M_0, кожна “точка” M', що належить до неї, також є для неї внутрішньої. Якщо взяти δ так, що

$$0 < \delta < r - \overline{M'M_0},$$

і описати навколо M' “кулю” цим радіусом δ, то вона цілком буде міститися в початковій “кулі”: тільки $\overline{MM'} < \delta$, відразу ж (завдяки (161.2)) маємо

$$\overline{MM_0} \leqslant \overline{MM'} + \overline{M'M_0} < \delta + \overline{M'M_0} < r,$$

так що “точка” M належить до початковій “кулі”.

Такий же висновок можна зробити і про **відкритий** симплекс:

$$x_1 > 0, \quad \dots, \quad x_n > 0, \quad x_1 + \dots + x_n < h \quad (h > 0). \tag{163.2}$$

Подібного роду *множину, що цілком складається з* ***внутрішніх*** *“точок”, будемо називати* ***відкритою*** *“областю”.*

nebayduzhi.math@gmail.com

Отже, відкритий "прямокутний паралелепіпед", відкрита "куля", відкритий симплекс служать прикладами відкритих "областей".

Узагальнимо тепер поняття точки згущення (розд. 52) на випадок множини $\mathcal{M}$ у n-вимірному "просторі". *"Точка" M_0 називається* ***"точкою згущення"*** *множини $\mathcal{M}$, якщо в кожному її околі (і знову — неважливо якого типу) міститься хоч одна "точка" множини $\mathcal{M}$, відмінна від M_0.*

"Точки згущення" для відкритої "області", що не належать до цієї "області", називаються **межовими** "точками" цієї "області". Межові "точки" в їхній сукупності утворюють "межу області". Відкрита "область" разом з її "межею" називається **замкненою** "областю".

Нескладно побачити, що для відкритого "паралелепіпеда" (163.1) межовими будуть "точки" $M(x_1,\ \dots,\ x_n)$, для яких

$$a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1,\ \dots,\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n,$$

причому хоч один раз виконується **рівність**.

Так само, для розглянутої вище відкритої "кулі" межовими будуть "точки" M, для яких $\overline{MM_0} = r$.

Нарешті, для відкритого симплексу (163.2) межовими є "точки" $M(x_1,\ \dots,\ x_n)$, що задовольняють співвідношення:

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \dots,\ x_n \geqslant 0, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqslant h,$$

причому хоч один раз виконується рівність.

Отже, замкнений "прямокутний паралелепіпед", замкнена "куля" і замкнений симплекс дають приклади замкнених областей.

Надалі, говорячи про "область", відкриту або замкнену, ми завжди матимемо на увазі "область" у вказаному тут спеціальному значенні.

Твердження 163.1. *Покажемо тепер, що до замкненій "області" належать вже всі її "точки" згущення.*

Доведення. Нехай дані замкнена "область" $\overline{\mathcal{D}}$ і "точка" M_0 **поза** нею. Доведемо, що тоді M_0 не буде "точкою" згущення для $\overline{\mathcal{D}}$.

Замкнена "область" $\overline{\mathcal{D}}$ виходить з деякої відкритої "області" $\mathcal{D}$ приєднанням до неї її "межі" $\mathcal{E}$. Очевидно, M_0 не є "точкою" згущення для $\mathcal{D}$; отже, M_0 можна оточити такою відкритою "кулею", щоб у ній зовсім не містилося "точок" з $\mathcal{D}$. Але тоді в ній не може бути і "точок" з $\mathcal{E}$: адже, якби якась "точка" M' з $\mathcal{E}$ в неї потрапила, то в ній містився б цілком і деякий окіл "точки" M', і в цьому околі не було б жодної точки з $\mathcal{D}$, всупереч означенню "точки згущення" і множини $\mathcal{E}$ як "межі". Отже, у згаданій "кулі" немає "точок" з $\overline{\mathcal{D}}$, що і доводить наше твердження. □

nebayduzhi.math@gmail.com

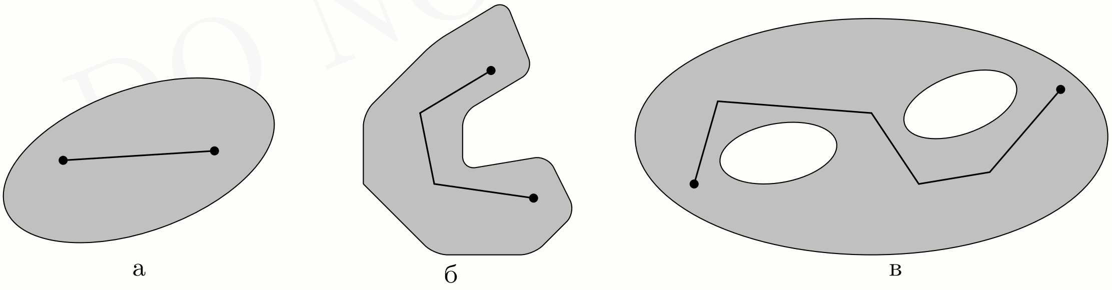


Рис. 163.1

Взагалі "точкову" множину $\mathcal{M}$, що містить усі свої "точки" згущення, називають **замкненою**. Отже, замкнена "область" є окремим випадком замкненої множини.

Введемо ще низку термінів. Множина "точок" $\mathcal{M}$ називається **обмеженою**, якщо вона повністю міститься в деякому "прямокутному паралелепіпеді".

"Область" називається **зв'язною**, якщо будь-які її дві "точки" можна з'єднати "ламаною", що лежить усіма своїми "точками" в області. На рис. 163.1 представлено для ілюстрації кілька зв'язних областей на площині.

Обмежена і зв'язна "область" в n-вимірному "просторі" (відкрита або замкнена) є, в деякому розумінні, аналог скінченного проміжку (відповідно, відкритого чи замкненого). Читач бачить, однак, наскільки ускладнюється картина при переході до n-вимірних (при $n \geqslant 2$) образів. Простим та однотипним проміжкам, межею яких є лише дві точки, тут протиставляється величезне різноманіття "областей" зі складними "межами".

Все викладене в останніх розділах можна розглядати як встановлення лише якоїсь **геометричної мови**; з цим не пов'язано (при $n > 3$) жодних **реальних** геометричних уявлень. Однак корисно підкреслити, що насправді n-вимірний арифметичний простір є лише першим кроком до тих у вищій мірі плідних **узагальненнях** поняття простору, які лежать в основі багатьох більш високих частинах сучасного аналізу.

(Ми поміщали в лапках всі геометричні терміни, які вживалися у значенні, відмінному від звичайного: "точка", "відстань", "область" тощо. Надалі ми цього робити вже не будемо.)

164. Функції n змінних

Нехай маємо n змінних x_1, x_2, …, x_n, спільні значення яких можуть вибиратися довільно з деякої множини $\mathcal{M}$ точок n-вимірного простору: ці змінні називаються **незалежними**. Означення функції та все сказане про це для випадку двох незалежних змінних (розд. 160) безпосередньо переноситься і на випадок, що розглядається, так що немає потреби на цьому зупинятися.

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо точку $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ позначити через M, то функцію $u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ від цих змінних іноді називають **функцією точки** M і позначають тим самим знаком: $u = f(M)$.

Припустимо тепер, що в деякій множині $\mathcal{P}$ точок m-вимірного простору (де m не пов'язано з n) задані n функцій від m змінних $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m$:

$$x_1 = \varphi_1(t_1,\ t_2,\quad \ldots,\quad t_m),\ \ldots,\ x_n = \varphi_n(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m) \tag{164.1}$$

або, коротше,

$$x_1 = \varphi_1(P),\quad \ldots,\quad x_n = \varphi_n(P), \tag{164.2}$$

де P означає точку $(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m)$ m-вимірного простору. Припустимо, понад те, що коли точка $P(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m)$ змінюється в межах множини $\mathcal{P}$, відповідна їй n-вимірна точка M, з координатами (164.1) (або (164.2)), не виходить за межі n-вимірної множини $\mathcal{M}$, де визначена функція $u = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = f(M)$.

Тоді змінну u можна розглядати як **складену функцію** незалежних змінних $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m$ (у множині $\mathcal{P}$) **через посередництво** змінних $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$:

$$u = f(\varphi_1(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m),\ \ldots,\ \varphi_n(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_m));$$

u є **функцією від функцій** $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$ (порівняйте з розд. 51).

Сам процес задання функції за допомогою функцій $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$ і функції f називається (як і у найпростішому випадку функцій однієї змінної) **композицією функцій**.

Клас функцій кількох змінних, з якими безпосередньо на початку доводиться мати справу, дуже невеликий. По суті, він будується за допомогою композицій елементарних функцій **однієї** змінної (розд. 48, розд. 50) і наступних функцій **двох** змінних:

$$z = x \pm y,\quad z = xy,\quad z = \frac{x}{y},\quad z = x^y,$$

тобто будується на чотирьох арифметичних операціях та на так званій **степенево-показниковій** функції.

Арифметичні операції, повторно застосовані, виходячи з незалежних змінних $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ і сталих, приводять насамперед до цілих многочленів:

$$P(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n} C_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}$$

(**ціла раціональна** функція) і до відношення двох таких многочленів

$$Q(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = \frac{\sum C_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_n^{\nu_n}}{\sum C'_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

(дробова раціональна функція). (Ми знаємо, що знак $\sum$ означає суму однотипних доданків. Тут ми маємо складніший випадок, коли доданки залежать від кількох значків.)

Залучення елементарних функцій однієї змінної приводить до таких, наприклад, функцій:

$$f(x,\ y,\ z) = \frac{\ln(x+y+z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ t) = \sin xy + \sin yz + \sin zt + \sin tx$$

і так далі.

Ті зауваження, які були зроблені в розд. 46 з приводу аналітичного задання функцій однієї змінної, можуть бути повторені і тут.

165. Границя функції кількох змінних

Припустимо, що функція $f(x_1,\ \dots,\ x_n)$ визначена в деякій точковій множині $\mathcal{M}$, що має точку згущення $M_0(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)$.

Аналогічно до означення границі функції від однієї змінної, кажуть, що *функція $f(x_1,\ \dots,\ x_n)$ прямує до числа A,* ***коли змінні*** *$x_1,\ \dots,\ x_n$* ***прямують****, відповідно, до $a_1,\ \dots,\ a_n$, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що*

$$|f(x_1,\ \dots,\ x_n) - A| < \varepsilon,$$

як тільки

$$|x_1 - a_1| < \delta,\ \dots,\ |x_n - a_n| < \delta.$$

При цьому точка $(x_1,\ \dots,\ x_n)$ вважається взятою з $\mathcal{M}$ і відмінною від $(a_1,\ \dots,\ a_n)$. Отже, нерівність для функції повинна виконуватися у всіх точках множини $\mathcal{M}$, що лежать у досить малому околі

$$(a_1 - \delta,\ a_1 + \delta;\ \dots;\ a_n - \delta,\ a_n + \delta)$$

точки M_0, але не в самій цій точці (якщо вона належить до $\mathcal{M}$).

Позначають границю функції так:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ \dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1,\ \dots,\ x_n). \tag{165.1}$$

У геометричних термінах, вводячи для точок $(x_1,\ \dots,\ x_n)$ і $(a_1,\ \dots,\ a_n)$ позначення M і M_0, можна було б перефразувати наведене означення так: *число A називається*

nebayduzhi.math@gmail.com

границею функції $f(M)$ ***при прямуванні точки*** M ***до*** M_0 *(або **в точці*** M_0*), якщо для кожного числа* $\varepsilon > 0$ *існує таке число* $r > 0$*, що*

$$|f(M) - A| < \varepsilon,$$

як тільки відстань $\overline{M_0M} < r$.

Як і вище, точка M вважається взятою з $\mathcal{M}$, але відмінною від M_0. Отже, нерівність для функції повинна виконуватись у всіх точках множини $\mathcal{M}$, що лежать у досить малому **сферичному** околі точки M_0, за винятком самої цієї точки.

Позначення границі функції також можна пристосувати до цього означення:

$$A = \lim_{M \to M_0} f(M). \tag{165.2}$$

Із зауваження розд. 161 про околи різних типів безпосередньо ясна тотожність обох наведених визначень.

Аналогічно означується поняття нескінченної границі функції. У випадку $A = +\infty$ або $-\infty$, нерівність

$$|f(x_1,\ \ldots,\ x_n) - A| < \varepsilon$$

лише замінюється, відповідно, нерівністю вигляду

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_n) > E \quad \text{або} \quad f(x_1,\ \ldots,\ x_n) < -E,$$

де E є довільне наперед взяте додатне число.

Згадаємо на закінчення про випадок, коли деякі з **незалежних змінних** $x_1,\ \ldots,\ x_n$ прямують до нескінченних границь.

Можна було б поширити поняття **точки згущення** $M_0(a_1,\ \ldots,\ a_n)$ області $\mathcal{M}$ і на той випадок, коли всі координати цієї точки (або деякі з них) нескінченні (у цьому випадку точка M_0 називається **невласною**).

Наприклад, *точка* $(+\infty, \ldots, +\infty)$ *є для* $\mathcal{M}$ *точкою згущення, якщо в цій області знайдуться точки зі скільки завгодно великими (додатними) координатами.*

Тоді, кажуть, що *функція* $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ *має границю (число* A*) при прямуванні всіх змінних* $x_1,\ \ldots,\ x_n$ *до* $+\infty$*, якщо для кожного числа* $\varepsilon > 0$ *існує таке число* $\Delta > 0$*, що*

$$|f(x_1,\ \ldots,\ x_n) - A| < \varepsilon,$$

як тільки

$$x_1 > \Delta,\ x_2 > \Delta,\ \ldots,\ x_n > \Delta.$$

В позначеннях:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ \ldots \\ x_n \to +\infty}} f(x_1,\ \ldots,\ x_n).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Зокрема, повертаючись до змінної $x_{m,n}$, про яку йшлося в кінці розд. 160, кажуть, що *ця змінна при безмежному зростанні обох номерів* m *і* n *має границю* A, *якщо для кожного* $\varepsilon > 0$ *знайдеться такий номер* N, *що*

$$|x_{m,n} - A| < \varepsilon \quad \text{при} \quad m > N,\ n > N.$$

Записують це так:

$$A = \lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}} x_{m,n} \quad \text{або} \quad A = \lim x_{m,n}.$$

Легко зрозуміти і випадок, коли $A = +\infty$ або $-\infty$.

166. Зведення до випадку варіанти

Розглянемо в n-вимірному просторі **послідовність** точок

$$\left\{M_k\left(x_1^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)}\right)\right\} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Ми говоритимемо, що ця послідовність збігається до **граничної точки** $M_0(a_1,\ \ldots,\ a_n)$, якщо при $k \to +\infty$ відстань

$$\overline{M_0M_k} \to 0. \tag{166.1}$$

Натомість можна було б вимагати, щоб координати точки M_k **нарізно** прямували до відповідних координат точки M_0, тобто щоб було

$$x_1^{(k)} \to a_1, \quad \ldots, \quad x_n^{(k)} \to a_n. \tag{166.2}$$

Твердження 166.1. *Доведемо рівносильність обох означень.*

Доведення. Рівносильність обох означень, власне, випливає з твердження тв. 162.1 про околи двох типів.

Справді, умова (166.1) означає, що, хоч би яке було число $r > 0$, точка M_k для досить великого k задовольняє нерівність

$$\overline{M_0M_k} < r,$$

тобто потрапляє у (відкриту) кулю радіуса r з центром у точці M_0; вимога ж (166.2) має те значення, що хоч би яке було число $\delta > 0$, точка M_k знову для досить великого k задовольняє нерівності

$$|x_1^{(k)} - a_1| < \delta, \quad \ldots, \quad |x_n^{(k)} - a_n| < \delta,$$

тобто міститься у (відкритому) паралелепіпеді

$$(a_1 - \delta,\ a_1 + \delta;\ \ldots;\ a_n - \delta,\ a_n + \delta)$$

з центром у точці M_0. □

Твердження 166.2. *Нехай тепер точка $M_0(a_1, \ldots, a_n)$ є* ***точкою згущення*** *деякої множини $\mathcal{M}$ в n-вимірному просторі. Тоді з $\mathcal{M}$ завжди можна отримати таку послідовність відмінних від M_0 точок: $\{M_k\}$, яка б збігалася до M_0, як до* ***граничної точки****.*

Доведення. Для доведення візьмемо додатну варіанту $r_k \to 0$. За означенням точки згущення розд. 162, у кожному **сферичному** околі точки M_0 радіуса r_k, знайдеться (відмінна від M_0) точка M_k множини $\mathcal{M}$. Послідовність $\{M_k\}$, очевидно, і буде шуканою. □

Твердження 166.3. *Тепер можна сформулювати таку умову, необхідну і достатню для існування граничної рівності (165.1) (або (165.2)). Якщо взяти з $\mathcal{M}$ послідовність $\{M_k\}$ відмінних від M_0 точок, що збігається до M_0, то числова послідовність $\{f(M_k)\}$, що складається з відповідних значень функції, завжди збігається до A.*

Доведення. **Необхідність.** Нехай маємо (165.2), і за заданим $\varepsilon > 0$ знайдено відповідне йому $r > 0$, згідно з означенням попереднього розділу. Якщо послідовність точок $\{M_k\}$ збігається до M_0, то для досить великих k буде

$$\overline{M_0M_k} < r,$$

а це тягне за собою нерівність

$$|f(M_k) - A| < \varepsilon,$$

яке показує, що $f(M_k) \to A$.

Достатність. Припустимо тепер, що виконується висловлена умова. Для того щоб довести наявність рівності (165.2) відповідно до означення попереднього розділу, припустимо протилежне тому, що міститься в цьому означенні. Тоді для **деякого** числа $\varepsilon > 0$ вже не існує відповідного r, тобто, яке б число $r > 0$ не взяти, завжди в $\mathcal{M}$ знайдеться така (відмінна від M_0) точка M', що одночасно

$$\overline{M_0M'} < r, \quad \text{але} \quad |f(M_k) - A| \geqslant \varepsilon.$$

Взявши додатну варіанту $r_k \to 0$, станемо по черзі брати числа r_k; для кожного r_k знайдеться, за сказаним, своя (відмінна від M_0) точка M_k, для якої

$$\overline{M_0M_k} < r_k, \quad \text{але} \quad |f(M_k) - A| \geqslant \varepsilon.$$

Побудована таким способом послідовність точок $\{M_k\}$ збігається до M_0, і водночас числова послідовність $\{f(M_k)\}$ не може мати границею A, всупереч умові. Ця суперечність і доводить наше твердження. □

Читачеві ясно, що висловлена умова дає **іншу форму** (“мовою послідовностей”) означення границі функції.

Отже, і для функції кількох змінних вдається звести питання границі функції до питання границі варіанти (порівняйте з розд. 53). Цей результат легко поширити і на випадок, коли числа A, a_1, …, a_n або деякі з них, нескінченні.

Зазначена обставина дає змогу поширити на новий тип границі всі основні поняття та твердження розвиненої в 1.1-1.4 теорії границь, на зразок того, як це було зроблено в розд. 55 для границі функції від однієї незалежної змінної.

167. Приклади

1) Користуючись теоремою про границі добутку насамперед легко показати, що

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \dots\\ x_n\to a_n}} C\cdot x_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\nu_n} = C\cdot a_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\nu_n},$$

де C, a_1, …, a_n — будь-які дійсні, а ν_1, …, ν_n — невід’ємні цілі числа. Звідси, якщо через $P(x_1,\ \dots,\ x_n)$ позначити **цілу раціональну** функцію (розд. 163):

$$P(x_1,\ \dots,\ x_n) = \sum_{\nu_1,\dots,\nu_n} C_{\nu_1,\dots,\nu_n} x_1^{\nu_1}\dots x_n^{\nu_n},$$

то за теоремою про суму, випливає також

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \dots\\ x_n\to a_n}} P(x_1,\ \dots,\ x_n) = P(a_1,\ \dots,\ a_n).$$

Аналогічно, для **дробової раціональної** функції (розд. 163)

$$Q(x_1,\ \dots,\ x_n) = \frac{\sum C_{\nu_1,\dots,\nu_n} x_1^{\nu_1}\dots x_n^{\nu_n}}{\sum C'_{\mu_1,\dots,\mu_n} x_1^{\mu_1}\dots x_n^{\mu_n}}$$

за теоремою про границю частки,

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ \dots\\ x_n\to a_n}} Q(x_1,\ \dots,\ x_n) = Q(a_1,\ \dots,\ a_n),$$

звісно, за умови, що знаменник у точці $(a_1,\ \dots,\ a_n)$ не дорівнює 0.

2) Розглянемо **степенево-показникову** функцію $f(x,y)=x^y$ при $x>0$ і довільному y. Тоді, якщо $a>0$ і b — будь-яке дійсне число, будемо мати

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} x^y = a^b.$$

Справді, якщо взяти будь-які варіанти $x_n \to a$ і $y_n \to b$, то (порівняйте з розд. 78)

$$x_n^{y_n} = e^{y_n \cdot \ln x_n} \to e^{b \cdot \ln a} = a^b,$$

а це “мовою послідовностей” і доводить необхідний результат.

3) Нехай про варіанти x_n і y_n відомо, що вони мають границі, відповідно, a і b, і порушується питання про границю складеного з них виразу

$$x_n \pm y_n, \quad x_n \cdot y_n, \quad \frac{x_n}{y_n} \quad \text{або} \quad x_n^{y_n}.$$

Для випадку так званих невизначених виразів, які умовно характеризуються символами:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0,$$

як ми знаємо (розд. 130, розд. 78), границя може зовсім не існувати, а якщо існує, то може при тих же a і b мати різні значення, залежно від закону зміни варіант x_n і y_n.

Якщо згадати означення границі функції **двох** незалежних змінних “мовою послідовностей”, то стане зрозуміло, що згадані види “невизначеностей” пов’язані з фактом **неіснування** наступних границь:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x - y), \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to \pm\infty}} (x \cdot y), \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x}{y}, \quad \lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ y \to \pm\infty}} \frac{x}{y},$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to \pm\infty}} x^y, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x^y, \quad \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to 0}} x^y,$$

4) Поставимо питання про границю:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

(Функція тут визначена на усій площині за винятком саме точки $x = 0,\ y = 0$.)

Якщо взяти дві послідовності точок

$$\left\{ M_k \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \right\} \quad \text{і} \quad \left\{ M'_k \left(\frac{2}{k}, \frac{1}{k} \right) \right\}$$

які, очевидно, збігаються до точки $(0, 0)$, то виявиться, що при усіх k

$$f(M_k) = f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2}, \quad \text{а} \quad f(M'_k) = f\left(\frac{2}{k}, \frac{1}{k} \right) = \frac{2}{5}.$$

Звідси вже випливає, що згаданої границі не існує.

Пропонується аналогічно переконатися в тому, що не існує границі

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

5) Навпаки, існує границя

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

Це відразу випливає з нерівності

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|x|.$$

Так само доводиться, що і

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0.$$

168. Повторні границі

Крім розглянутої вище границі функції $f(x_1,\ \dots,\ x_n)$ при **одночасному** прямуванні всіх аргументів до їх границь, доводиться мати справу і з границями іншого роду, які отримуються внаслідок ряду **послідовних** граничних переходів по кожному аргументу окремо, в тому чи іншому порядку. Перша границя називається **n-кратною** (або **подвійною**, **потрійною** і так далі при $n=2,\ 3,\ \dots$), а остання — **повторною**.

Обмежимося для простоти випадком функції двох змінних $f(x,y)$. Припустимо до того ж, що область $\mathcal{M}$ зміни змінних x, y така, що x (**незалежно** від y) може набувати будь-які значення в деякій множині $\mathcal{X}$, для якої a є точкою згущення, але до неї не належить, і аналогічно, y (**незалежно** від x) змінюється в множині $\mathcal{Y}$ з точкою згущення b, що не належить до $\mathcal{Y}$. Таку область $\mathcal{M}$ можна було б символічно позначити як $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$; Наприклад,

$$(a,\ a+H;\ b,\ b+K)=(a,\ a+H)\times(b,\ b+K).$$

Якщо при будь-якому **фіксованому** y з $\mathcal{Y}$ для функції $f(x,y)$ (яка виявляється функцією лише від x) існує границя при $x\to a$, то ця границя, взагалі кажучи, залежатиме від наперед фіксованого y:

$$\lim_{x\to a} f(x,y)=\varphi(y).$$

Потім можна поставити питання про границю функції $\varphi(y)$ при $y\to b$:

$$\lim_{y\to b}\varphi(y)=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$$

nebayduzhi.math@gmail.com

— це і буде одна з двох повторних границь. Інша вийде, якщо граничні переходи зробити у зворотному порядку:

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y).$$

Не слід думати, що ці повторні границі необхідно рівні. Розглянемо приклади в області $\mathcal{M}(0,+\infty;\ 0,+\infty)$.

1)

$$f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$$

Маємо:

$$\varphi(y)=\lim_{x\to 0} f(x,y)=y-1,\quad \lim_{y\to 0}\varphi(y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=-1,$$

в той час як

$$\psi(x)=\lim_{y\to 0} f(x,y)=x+1,\quad \lim_{x\to 0}\psi(x)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=1,$$

Може статися також, що одна з повторних границь існує, а інша — ні. Так буде, наприклад, для наступних функцій.

2)

$$f(x,y)=\frac{x\cdot\sin\frac{1}{x}+y}{x+y},$$

3)

$$f(x,y)=x\cdot\sin\frac{1}{y}.$$

В обох випадках тут існує повторна границя $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, але немає повторної границі $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ (а в останньому прикладі немає навіть простої границі $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$).

Ці прості приклади показують, наскільки обережним потрібно бути при **перестановці двох граничних переходів по різним змінним**: не раз помилкові висновки виникали саме від такої незаконної перестановки. Водночас багато важливих питань аналізу пов'язані саме з перестановкою граничних переходів, але, зрозуміло, що всякий раз перестановка має бути особливо обґрунтована.

Один із шляхів до такого обґрунтування відкриває наступна теорема, яка водночас встановлює зв'язок між подвійними та повторними границями.

Теорема 168.1. *Якщо*
1) існує (скінченна чи ні) ***подвійна*** *границя*

$$A=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)$$

nebayduzhi.math@gmail.com

і
2) при будь-якому y з $\mathcal{Y}$ існує (скінченна) ***проста*** *границя по x*

$$\varphi(y) = \lim_{x\to a} f(x, y),$$

то існує ***повторна границя***

$$\lim_{y\to b} \varphi(y) = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x, y),$$

яка дорівнює ***подвійній границі.***

Доведення. Доведемо це для випадку скінченних A, a і b. Згідно з означенням в розд. 163, за заданим $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon, \tag{168.1}$$

як тільки $|x - a| < \delta$ і $|y - b| < \delta$ (причому x береться з $\mathcal{X}$, а y з $\mathcal{Y}$). Фіксуємо тепер y так, щоб виконувалася нерівність $|y - b| < \delta$, і перейдемо в (168.1) до границі, спрямувавши x до a. Оскільки, зважаючи на умову 2), $f(x, y)$ при цьому прямує до границі $\varphi(y)$, то отримаємо

$$|\varphi(y) - A| \leqslant \varepsilon.$$

Згадуючи, що y тут є будь-яке число з $\mathcal{Y}$, підпорядковане лише умові $|y - b| < \delta$, приходимо до висновку, що

$$A = \lim_{y\to b} \varphi(y) = \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x, y),$$

що й потрібно було довести. ☐

Якщо, виконуються умови 1) і 2) та додатково для будь-якого x з $\mathcal{X}$ існує (скінченна) **проста** границя по y

$$\psi(x) = \lim_{y\to b} f(x, y),$$

то, як випливає з вже доведеного, якщо x і y обміняти ролями, існує також і друга **повторна** границя

$$\lim_{x\to a} \psi(x) = \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y),$$

і дорівнює тому ж числу A: **у цьому випадку обидві повторні границі рівні.**

З доведеної теореми відразу ясно, що в пр. 168.1 та пр. 168.2 подвійна границя не існує (доведіть чому). У цьому легко переконатись і безпосередньо.

У пр. 168.3, навпаки, подвійна границя існує: з нерівності

$$\left|x \cdot \sin\frac{1}{y}\right| \leqslant |x|$$

бачимо, що вона дорівнює 0. Цей приклад показує, що умова 1) теореми не тягне за собою умову 2).

Не слід думати, однак, що існування подвійної границі **необхідно** для рівності повторних границь: у пр. 167.4 попереднього розділу обидві повторні границі існують і дорівнюють 0, хоча подвійної границі немає.

nebayduzhi.math@gmail.com

5.2. Неперервні функції

169. Неперервність і розриви функцій кількох змінних

Нехай функція $f(x_1, \dots, x_n)$ визначена в деякій множині $\mathcal{M}$ точок n-вимірного простору, і $M'(x_1', \dots, x_n')$ є точка згущення цієї множини, що **належить до самій множині**.

Говорять, що *функція $f(x_1, \dots, x_n)$ **неперервна** в точці $M'(x_1', \dots, x_n')$, якщо*

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1' \\ \dots \\ x_n \to x_n'}} f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1', \dots, x_n'); \tag{169.1}$$

*інакше, функція має **розрив** у точці M'.*

"Мовою ε-δ" неперервність функції в точці M' висловиться так (розд. 165): *функція неперервна, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що*

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1', \dots, x_n')| < \varepsilon, \tag{169.2}$$

як тільки

$$|x_1 - x_1'| < \delta, \quad \dots, \quad |x_n - x_n'| < \delta; \tag{169.3}$$

або так: *якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $r > 0$, що*

$$|f(M) - f(M')| < \varepsilon,$$

як тільки відстань

$$\overline{MM'} < r.$$

При цьому точка $M(x_1, \dots, x_n)$ вважається такою, що належить до множини $\mathcal{M}$, зокрема, може співпасти і з точкою M'. Саме тому, що границя функції в точці M' дорівнює значенню функції у цій точці, звичайна вимога, щоб M була відмінна від M', тут стає непотрібною.

Розглядаючи різниці $x_1 - x_1', \dots, x_n - x_n'$ як **прирости** $\Delta x_1', \dots, \Delta x_n'$ незалежних змінних, а різницю

$$f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1', \dots, x_n')$$

— як **приріст** функції; можна сказати (так само як і для функцій однієї змінної), що *функція **неперервна**, якщо нескінченно малим приростам незалежних змінних відповідає нескінченно малий приріст функції.*

Означена вище неперервність функції в точці M' є, так би мовити, неперервність **по всій сукупності змінних** $x_1, \dots, x_n$. Якщо це так, то і

$$\lim_{x_1 \to x_1'} f(x_1, x_2', \dots, x_n') = f(x_1', x_2', \dots, x_n'),$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1' \\ x_2 \to x_2'}} f(x_1,\ x_2,\ x_3',\ \ldots,\ x_n') = f(x_1',\ x_2',\ x_3',\ \ldots,\ x_n'),$$

тощо, тому що тут ми здійснюємо лише **частинні** закони наближення M до M'. Іншими словами, функція виявляється неперервною окремо **по кожній змінній** x_i**, по кожній парі змінних** x_i, x_j, і так далі.

З прикладами неперервних функцій ми вже стикалися. Так, в пр. 167.1 була доведена неперервність **цілої та дробової раціональної** функцій від n аргументів у всіх точках n-вимірного простору (для дробової функції — за винятком тих точок, в яких її знаменник дорівнює 0). У пр. 167.2, була доведена неперервність **степенево-показникової** функції x^y для всіх точок правої півплощини $(x > 0)$.

Якщо знову розглянути функцію

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (\text{для } x^2 + y^2 > 0),$$

визначену цією формулою у всій площині, крім початкової точки, і додатково покласти: $f(0, 0) = 0$, то отримаємо приклад **розриву**. Розрив саме у початковій точці, оскільки (пр. 167.4) при $x \to 0,\ y \to 0$ границі функції не існує.

Тут ми стикаємося з такою цікавою обставиною. Розглянута функція $f(x, y)$, хоч і не є неперервною в точці $(0, 0)$ за обома змінними одночасно, проте буде неперервна в цій точці **як по** x**, так і по** y **окремо**; це випливає з того, що $f(x, 0) = f(0, y) = 0$. Втім, сказане перестає бути дивним, якщо зрозуміти, що, говорячи про неперервність по x і по y окремо, ми враховуємо лише наближення до точки $(0, 0)$ уздовж осі x або осі y, залишаючи осторонь безліч інших законів наближення.

Якщо для функції $f(M)$ при прямуванні M до M' зовсім **не існує** певної скінченної границі

$$\lim_{M \to M'} f(M),$$

то кажуть, що у точці M' функція має розрив, навіть у тому випадку, коли в самій точці M' функція **не визначена** (порівняйте з зауваженням в розд. 66).

Точки розриву функції можуть бути не тільки ізольованими, як у попередньому прикладі, а й заповнювати собою лінії, поверхні тощо. Так, функції двох змінних

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \quad \text{і} \quad f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$$

мають розриви: перша — вздовж прямих $y = \pm x$, а друга — вздовж кола $x^2 + y^2 = 1$.

Для функцій трьох змінних

$$f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{xy - z} \quad \text{і} \quad f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}$$

розриви заповнюють в першому випадку гіперболічний параболоїд $z = xy$, а у другому — конус $z^2 = x^2 + y^2$.

170. Операції над неперервними функціями

Легко сформулювати та довести теорему про неперервність суми, різниці, добутку, частки двох неперервних функцій (порівняйте з розд. 67); залишаємо це читачеві.

Ми зупинимося лише на теоремі **про композицію неперервних функцій**. Як і в розд. 164, ми припустимо, що крім функції $u = f(x_1, \dots, x_n)$, заданої в множині $\mathcal{M}$ n-вимірних точок $M(x_1, \dots, x_n)$, нам дані ще n функцій

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, \dots, t_m) \tag{170.1}$$

в деякій множині $\mathcal{P}$ m-вимірних точок $P(t_1, \dots, t_m)$, причому точка M з координатами (170.1) не виходить за межі згаданої множини $\mathcal{M}$.

Теорема 170.1. *Якщо функції $\varphi_i(P)$ $(i = 1, \dots, n)$ всі неперервні в точці $P'(t'_1, \dots, t'_m)$ з $\mathcal{P}$, а функція $f(M)$ неперервна в **відповідній** точці $M'(x'_1, \dots, x'_n)$ з координатами*

$$x'_1 = \varphi_1(t'_1, \dots, t'_m), \dots, x'_n = \varphi_n(t'_1, \dots, t'_m),$$

то й композиція функцій

$$u = f\Big(\varphi_1(t_1, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_m)\Big) = f\Big(\varphi_1(P), \dots, \varphi_n(P)\Big)$$

буде функцією неперервною в точці P'.

Доведення. Справді, спочатку візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. За цим ε визначиться число $\delta > 0$, таке що з (169.3) випливає (169.2) (зважаючи на неперервність функції f). Потім для числа δ (через неперервність функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n$) знайдеться число $\eta > 0$ таке, що нерівності

$$|t_1 - t'_1| < \eta, \quad \dots, \quad |t_m - t'_m| < \eta \tag{170.2}$$

тягнуть за собою нерівності

$$\begin{aligned}
&|x_1 - x'_1| = |\varphi_1(P) - \varphi_1(P')| < \delta,\\
&\dots\\
&|x_n - x'_n| = |\varphi_n(P) - \varphi_n(P')| < \delta.
\end{aligned}$$

Але тоді, за наявності (170.2), буде також

$$\begin{aligned}
&|f(x_1, \dots, x_n) - f(x'_1, \dots, x'_n)| =\\
&= |f(\varphi_1(t_1, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_m)) -\\
&\quad - f(\varphi_1(t'_1, \dots, t'_m), \dots, \varphi_n(t'_1, \dots, t'_m))| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

що і доводить наше твердження. □

nebayduzhi.math@gmail.com

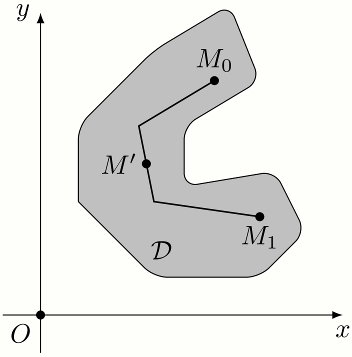


Рис. 171.1

171. Функції, неперервні в області. Теореми Бользано – Коші

Ми говоритимемо, що *функція* $f(x_1, \ \ldots, \ x_n)$ *неперервна в деякій множині* $\mathcal{M}$ *точок* n*-вимірного простору, якщо вона неперервна у кожній точці цієї множини, яка є для неї точкою згущення.* Надалі, як правило, ми обмежимося випадком, коли множина $\mathcal{M}$ є відкрита або замкнена **область** (розд. 163), на зразок того, як неперервні функції однієї змінної ми розглядали в **проміжку**.

Перейдемо тепер до вивчення властивостей функції кількох змінних, неперервної в деякій області n-вимірного простору. Вони цілком аналогічні властивостям функції однієї змінної, неперервної на проміжку (дивіться 2.5).

При викладі ми лише для стислості обмежимося випадком **двох** незалежних змінних. Перенесення на загальний випадок робиться безпосередньо і не становить труднощів. Втім, деякі зауваження щодо цього все ж такі будуть зроблені.

Сформулюємо тепер теорему, аналогічну до 1-й теоремі Бользано – Коші для функції однієї змінної (теор. 80.1).

Теорема 171.1. *Нехай функція* $f(x, y)$ *визначена і неперервна в деякій зв'язній області* $\mathcal{D}$*. Якщо у двох точках* $M_0(x_0, y_0)$ *та* $M_1(x_1, y_1)$ *цієї області функція набуває значення різних знаків:*

$$f(x_0, y_0) < 0 \quad \text{і} \quad f(x_1, y_1) > 0,$$

то в цій області знайдеться і точка $M'(x', y')$*, в якій функція дорівнює нулю:*

$$f(x', y') = 0.$$

Доведення. Спробуємо звести доведення до випадку функції однієї незалежної змінної.

Зважаючи на зв'язність області $\mathcal{D}$, точки M_0 і M_1 можна з'єднати ламаною, яка всіма точками лежить у $\mathcal{D}$ (рис. 171.1). Якщо послідовно перебирати вершини ламаної, або виявиться, що в будь-якій з них функція дорівнює 0 — і тоді теорема

nebayduzhi.math@gmail.com

доведена, або цього не буде. В останньому випадку знайдеться така прямолінійна **частина** ламаноЇ, на кінцях якої функція набуває значення різних знаків. Змінивши позначення точок, вважатимемо, що M_0 і M_1 якраз і є кінцями цієї прямолінійної частини. Її рівняння мають вигляд (розд. 161):

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Якщо точка $M(x, y)$ пересувається саме вздовж цієї прямолінійної частини, то наша початкова функція $f(x, y)$ перетворюється на складену функцію однієї змінної t:

$$F(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0),\ y_0 + t(y_1 - y_0)) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Очевидно, вона неперервна (за теоремою попереднього розділу) через неперервність як функції $f(x, y)$, так і лінійних функцій від t, підставлених замість її аргументів. Для $F(t)$ маємо:

$$F(0) = f(x_0, y_0) < 0, \quad F(1) = f(x_1, y_1) > 0.$$

Застосовуючи до функції $F(t)$ **однієї** змінної вже доведену теор. 80.1, робимо висновок, що $F(t') = 0$ при деякому значенні t' між 0 та 1. Отже, згадуючи означення функції $F(t)$, маємо

$$f(x_0 + t'(x_1 - x_0), y_0 + t'(y_1 - y_0)) = 0.$$

Точка $M'(x', y')$, де $x' = x_0 + t'(x_1 - x_0),\ y' = y_0 + t'(y_1 - y_0)$ і є шуканою. □

Звідси випливає, як і в розд. 82, 2-а теорема Больцано – Коші, яка, втім, могла бути отримана і відразу.

Читач бачить, що перехід до простору n вимірювань (при $n > 2$) не створює жодних труднощів, бо в n-вимірній зв'язній області точки також можуть бути з'єднані “ламаною” і питання зведеться до розгляду її прямолінійної частини, вздовж якої функція залежатиме від одного параметра, і так далі.

172. Лема Больцано – Ваярштрасса

Для подальшого викладу нам знадобиться узагальнення доведеної леми Больцано – Ваярштрасса (лем. 41.1) на випадок послідовності точок у просторі будь-якого числа вимірів. Як завжди, ми обмежимося випадком на площині.

Лема 172.1 (Лема Больцано – Ваярштрасса). *З будь-якої* ***обмеженої*** *нескінченної послідовності точок*

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ \dots,\ M_n(x_n, y_n),\ \dots$$

завжди можна витягнути таку часткову послідовність

$$M_{n_1}(x_{n_1}, y_{n_1}),\ M_{n_2}(x_{n_2}, y_{n_2}),\ \dots,\ M_{n_k}(x_{n_k}, y_{n_k}),\ \dots$$

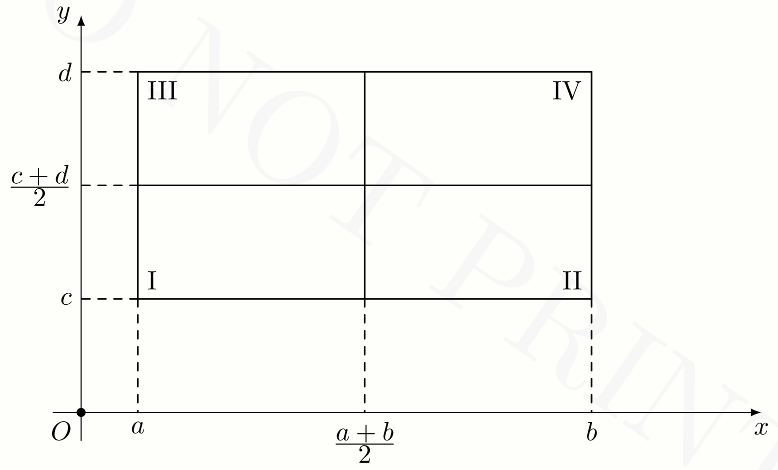


Рис. 172.1

$$(n_1 < n_2 < \ldots < n_k \to +\infty),$$

яка збігалася б до граничної точки.

Доведення. **1-е доведення** ми проведемо, перенісши на цей випадок міркування, якими ми користувалися в “лінійному” випадку (лем. 41.1).

Зважаючи на **обмеженість** даної послідовності точок, знайдеться такий (скінченний) прямокутник $[a, b;\ c, d]$, в якому вона цілком міститься. Розділимо проміжки $[a, b]$ і $[c, d]$ навпіл:

$$\left[a,\ \frac{a+b}{2}\right], \quad \left[\frac{a+b}{2},\ b\right], \quad \left[c,\ \frac{c+d}{2}\right], \quad \left[\frac{c+d}{2},\ d\right].$$

Комбінуючи кожну половину першого проміжку з кожною половиною другого, ми отримаємо чотири прямокутники:

$$\text{(I)}\ \left[a,\ \frac{a+b}{2};\ c,\ \frac{c+d}{2}\right],$$

$$\text{(II)}\ \left[\frac{a+b}{2},\ b;\ c,\ \frac{c+d}{2}\right],$$

$$\text{(III)}\ \left[a,\ \frac{a+b}{2};\ \frac{c+d}{2},\ d\right],$$

$$\text{(IV)}\ \left[\frac{a+b}{2},\ b;\ \frac{c+d}{2},\ d\right],$$

на які розкладається основний прямокутник $[a, b;\ c, d]$ (рис. 172.1).

nebayduzhi.math@gmail.com

Хоча б в одній з цих частин буде **нескінченна множина** точок даної послідовності, бо, в іншому випадку, і в усьому прямокутнику їх містилося б лише скінченне число, що неможливо. Нехай $[a_1, b_1;\ c_1, d_1]$ буде той із прямокутників (I), (II), (III), (IV), в якому міститься **нескінченна множина** точок нашої послідовності (або один з таких прямокутників, якщо їх декілька).

Отриманий прямокутник знову розкладемо на чотири менші прямокутники, і візьмемо той з них, в якому міститься **нескінченна множина** точок даної послідовності; позначимо його через $[a_2, b_2;\ c_2, d_2]$.

Цей процес послідовного поділу прямокутників ми уявляємо собі таким, що триває нескінченно. На k-му кроці ми виберемо прямокутник $[a_k, b_k;\ c_k, d_k]$, в якому міститься нескінченна множина точок M_n. Вимірювання цього прямокутника

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \quad \text{і} \quad d_k - c_k = \frac{d-c}{2^k}$$

прямують до 0 при $k \to +\infty$.

Застосуємо тепер окремо до послідовності проміжків $\{[a_k, b_k]\}$ значень x і до послідовності проміжків $\{[c_k, d_k]\}$ значень y лему про вкладені проміжки (лем. 38.1). З неї випливає, що кінці проміжків a_k і b_k, а також c_k і d_k, прямують, відповідно, до спільних границь:

$$\lim a_k = \lim b_k = \overline{x} \quad \text{і} \quad \lim c_k = \lim d_k = \overline{y}. \tag{172.1}$$

Можна сказати, що послідовність прямокутників $\{[a_k, b_k;\ c_k, d_k]\}$ “стягується” в точку $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y})$.

Тепер візьмемо будь-яку точку нашої послідовності, що потрапляє у прямокутник $[a_1, b_1;\ c_1, d_1]$; це буде M_{n_1}. Потім ми станемо по черзі виділяти точки $M_{n_2},\ M_{n_3},\ \ldots,$ вибираючи, в загальному випадку, будь-яку точку послідовності, що **йде за раніше обраною точкою** і міститься в k-му прямокутнику $\{[a_k, b_k;\ c_k, d_k]\}$. Це зробити можна саме тому, що кожен з прямокутників містить **нескінченну множину** точок M_n.

Оскільки

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k \quad \text{і} \quad c_k \leqslant y_{n_k} \leqslant d_k,$$

то, зважаючи на (172.1),

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \overline{x} \quad \text{і} \quad \lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = \overline{y},$$

так що виділена часткова послідовність $\{M_{n_k}\}$ збігається до точки $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y})$, як до **граничної** (розд. 166). □

2-е доведення.

nebayduzhi.math@gmail.com

Доведення. Простіше, однак, вчинити інакше, використавши лем. 41.1, вже доведену для випадку лінійної послідовності. Якщо точки нашої послідовності містяться в скінченному прямокутнику $[a, b;\ c, d]$, то

$$a \leqslant x_n \leqslant b \quad \text{і} \quad c \leqslant y_n \leqslant d \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Застосувавши лем. 41.1 спочатку до послідовності $\{x_n\}$, виділимо часткову послідовність $\{x_{n_k}\}$, що збігається до деякої границі $\overline{x}$. Отже, для часткової послідовності точок

$$(x_{n_1}, y_{n_1}),\ (x_{n_2}, y_{n_2}),\ \dots,\ (x_{n_k}, y_{n_k}),\ \dots$$

перші координати вже мають границю. Вдруге застосуємо згадану лему до послідовності других координат $\{y_{n_k}\}$ і виділимо таку часткову послідовність $\{y_{n_{k_m}}\}$, яка теж прямує до деякої границі $\overline{y}$. Тоді, очевидно, часткова послідовність точок

$$(x_{n_{k_1}}, y_{n_{k_1}}),\ (x_{n_{k_2}}, y_{n_{k_2}}),\ \dots,\ (x_{n_{k_m}}, y_{n_{k_m}}),\ \dots$$

прямуватиме до граничної точки $(\overline{x}, \overline{y})$. □

Зауважимо і тут, що обидва міркування легко переносяться на випадок простору $n > 2$ вимірів. У першому з них, наприклад, змінюється лише число частин, на які розпадається задана прямокутна область, якщо розділити навпіл кожен із її проміжків; у загальному випадку цих проміжків буде n, а частин усього 2^n.

173. Теореми Вейєрштрасса

За допомогою доведеної теореми насамперед може бути доведена перша теорема Вейєрштрасса для функцій двох змінних.

Теорема 173.1. *Якщо функція $f(x, y)$ визначена і неперервна у **обмеженій замкненій** області $\mathcal{D}$ (яка, цього разу, може бути й **незв'язною**), то функція обмежена, тобто всі її значення містяться між двома скінченними межами:*

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M.$$

Доведення. Доведення (від протилежного) цілком аналогічне до міркування в теор. 84.1. Нехай функція $f(x, y)$ при зміні (x, y) в $\mathcal{D}$ виявляється **необмеженою**. Тоді для будь-якого n знайдеться в $\mathcal{D}$ така точка $M_n(x_n, y_n)$, що

$$|f(x_n, y_n)| > n. \tag{173.1}$$

За лем. 172.1 з обмеженої послідовності $\{M_n\}$ можна витягти часткову послідовність $\{M_{n_k}\}$, що збігається до граничної точки $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y})$.

Зазначимо, що ця точка $\overline{M}$ необхідно належить до області $\mathcal{D}$. Справді, інакше точки M_{n_k}, усі були б від неї відмінні, і точка $\overline{M}$ була б **точкою згущення** області $\mathcal{D}$, і до неї не належала б, що неможливо зважаючи на замкненість області $\mathcal{D}$ (дивіться розд. 163).

Внаслідок неперервності функції у точці $\overline{M}$ має бути

$$f(M_{n_k}) = f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(\overline{M}) = f(\overline{x}, \overline{y}),$$

а це суперечить (173.1). □

Друга теорема Ваярштрасса формулюється і доводиться (з посиланням на попередню теорему) так само, як і в розд. 85.

Зауважимо, що без істотних змін у міркуваннях **обидві** теореми Ваярштрасса переносяться і на випадок, коли **функція неперервна в будь-якій обмеженій замкненій множині** $\mathcal{M}$ (область чи ні).

Як і у випадку функції однієї змінної, для функції $f(x, y)$, визначеної та **обмеженої** у множині $\mathcal{M}$, різниця між точними верхньою і нижньою межами значень функції в множині $\mathcal{M}$ називається її **коливанням** у цій множині. Якщо $\mathcal{M}$ обмежена і замкнена (зокрема, якщо $\mathcal{M}$ є обмежена область), і функція в ній неперервна, то коливання є просто різниця між найбільшим та найменшим її значеннями.

174. Рівномірна неперервність

Ми знаємо, що неперервність функції $f(x, y)$ у **деякій** точці (x_0, y_0) множини $\mathcal{M}$, де функція задана, "мовою ε-δ" виражається так: для будь-якого $\varepsilon > 0$ повинно знайтися таке $\delta > 0$, що нерівність

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

виконується для будь-якої точки (x, y) з $\mathcal{M}$, як тільки

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{і} \quad |y - y_0| < \delta.$$

Нехай тепер функція $f(x, y)$ неперервна **у всій множині** $\mathcal{M}$; тоді виникає питання, чи можна по даному $\varepsilon > 0$, знайти таке $\delta > 0$, яке годилося б, у вказаному сенсі, для **всіх** точок (x_0, y_0) з $\mathcal{M}$ **одночасно**. Якщо це можливо (при будь-якому ε), то кажуть, що функція в $\mathcal{M}$ **рівномірно неперервна**.

Теорема 174.1 (Теорема Кантора)**.** *Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в **обмеженій замкненій** області $\mathcal{D}$, то вона буде і **рівномірно** неперервна в $\mathcal{D}$.*

Доведення. Доведення поведемо від протилежного. Припустимо, що для деякого числа $\varepsilon > 0$ **немає** числа $\delta > 0$, яке годилося б одночасно для всіх точок (x_0, y_0) області $\mathcal{D}$.

nebayduzhi.math@gmail.com

Візьмемо послідовність додатних чисел, що прямують до 0

$$\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_n > \ldots > 0, \quad \delta_n \to 0.$$

Оскільки жодне з чисел δ_n, не може годитися у вказаному сенсі одночасно для всіх точок (x_0, y_0) області $\mathcal{D}$, то для кожного δ_n знайдеться в $\mathcal{D}$ така конкретна точка (x_n, y_n), для якої δ_n не годиться. Це означає, що існує в $\mathcal{D}$ точка (x_n', y_n'), для якої

$$|x_n' - x_n| < \delta_n, \quad |y_n' - y_n| < \delta_n,$$

але

$$|f(x_n', y_n') - f(x_n, y_n)| \geqslant \varepsilon. \tag{174.1}$$

З обмеженої послідовності точок $\{(x_n, y_n)\}$, за лемою Бользано – Ваярштрасса (лем. 172.1), витягнемо таку часткову послідовність $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$, що $x_{n_k} \to \overline{x}$, $y_{n_k} \to \overline{y}$, причому гранична точка $(\overline{x}, \overline{y})$ необхідно належить до області $\mathcal{D}$ (через її замкненість).

Оскільки, далі

$$|x_{n_k}' - x_{n_k}| < \delta_{n_k} \quad \text{і} \quad |y_{n_k}' - y_{n_k}| < \delta_{n_k}$$

і, в міру зростання k, $n_k \to +\infty$ і $\delta_{n_k} \to 0$, то

$$x_{n_k}' - x_{n_k} \to 0 \quad \text{і} \quad y_{n_k}' - y_{n_k} \to 0,$$

так що і

$$x_{n_k}' \to \overline{x} \quad \text{і} \quad y_{n_k}' \to \overline{y}.$$

Зважаючи на неперервність функції $f(x, y)$ у точці $(\overline{x}, \overline{y})$, що належить до області $\mathcal{D}$, ми повинні мати як

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(\overline{x}, \overline{y}),$$

так і

$$f(x_{n_k}', y_{n_k}') \to f(\overline{x}, \overline{y}),$$

звідки

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) - f(x_{n_k}', y_{n_k}') \to 0,$$

що суперечить (174.1). Теорема доведена. □

Для формулювання наслідку, що випливає звідси, нам знадобиться поняття **діаметра** точкової множини: так називається точна верхня границя відстаней між будь-якими двома точками множини.

Наслідок 174.1.1. *Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій області $\mathcal{D}$, то за заданим $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що на які б часткові замкнені області $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ з діаметрами, меншими δ, не розбити цю область (ці часткові області можуть мати спільними лише межові точки), коливання функції в кожній частині окремо буде менше ε.*

Доведення. Достатньо за δ взяти те число, про яке йдеться у означенні рівномірної неперервності. Якщо діаметр часткової області $\mathcal{D}_i$, менше δ, то відстань будь-яких двох її точок (x, y) та (x_0, y_0) менше δ: $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Звідси і $|x - x_0| < \delta$, і $|y - y_0| < \delta$, отже $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$. Якщо ці точки вибрати так, щоб $f(x, y)$ і $f(x_0, y_0)$ були відповідно, найбільшим і найменшим із значень функції в області $\mathcal{D}_i$, то й отримаємо необхідне твердження. ☐

Легко побачити, що доведена теорема без змін переноситься (подібно до теорем Ваярштрасса) на випадок **функції, неперервної в будь-якій обмеженій замкненій множині $\mathcal{M}$.**

175. Лема Бореля

Корисна лем. 88.1, доведена в розд. 88 може бути узагальнена на многовимірний випадок.

Нехай маємо систему Σ **відкритих областей** σ на площині; якщо кожна точка множини $\mathcal{M}$ міститься хоч в одній з цих областей σ, то будемо говорити, що **система Σ покриває множину $\mathcal{M}$.**

Лема 175.1 (Лема Бореля)**.** *Якщо обмежена замкнена множина $\mathcal{M}$ точок площині покривається* ***нескінченною*** *системою $\Sigma = \{\sigma\}$ відкритих областей, то з неї завжди можна виділити* ***скінченну*** *підсистему*

$$\Sigma^* = \{\sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots,\ \sigma_n\},$$

яка також покриває усю множину $\mathcal{M}$.

Доведення. Припустимо протилежне, що множина $\mathcal{M}$ не може бути покрита **скінченним** числом областей σ з Σ.

Зважаючи на обмеженість множини $\mathcal{M}$, вона міститься в деякому прямокутнику $[a, b;\ c, d]$. Розділивши кожен із двох проміжків $[a, b]$ і $[c, d]$ навпіл, ми розкладемо цей прямокутник, як і при доведенні леми Бользано – Ваярштрасса (лем. 172.1), на чотири прямокутники. Разом з тим і множина $\mathcal{M}$ розкладеться на частини, що містяться відповідно у цих часткових прямокутниках; частин, втім, може виявитися і менше чотирьох, якщо будь-який прямокутник не містить зовсім точок множини $\mathcal{M}$. Хоча б одна з цих частин (скажімо, $\mathcal{M}_1$) не може бути покрита **скінченним** числом областей σ (бо в іншому випадку уся множина $\mathcal{M}$, всупереч припущенню, була б покрита **скінченним** числом областей σ). Той із часткових прямокутників, який містить саме частину $\mathcal{M}_1$ множини $\mathcal{M}$, позначимо через $[a_1, b_1;\ c_1, d_1]$.

Цей прямокутник знову розкладемо на чотири прямокутники. Хоча б один із них — позначимо його через $[a_2, b_2;\ c_2, d_2]$ — містить частину $\mathcal{M}_2$, множини $\mathcal{M}$, яка не може бути покрита **скінченним** числом областей σ.

Продовжуючи цей процес до нескінченності, на k-й стадії його ми прийдемо до прямокутника $[a_k, b_k;\ c_k, d_k]$, що містить таку частину $\mathcal{M}_k$ множини $\mathcal{M}$, яка не може бути покрита **скінченним** числом областей σ.

Як і в розд. 172, ми зробимо висновок звідси, що прямокутники $[a_k, b_k;\ c_k, d_k]$ "стягуються" в точку $(\overline{x}, \overline{y})$, так що

$$\lim a_k = \lim b_k = \overline{x} \quad \text{і} \quad \lim c_k = \lim d_k = \overline{y}.$$

Ця точка $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y})$ належить до множині $\mathcal{M}$. Справді, який би окіл $(\overline{x}-\delta,\ \overline{x}+\delta;\ \overline{y}-\delta,\ \overline{y}+\delta)$ точки $\overline{M}$ не взяти, для досить великих k буде

$$\overline{x}-\delta < a_k < b_k < \overline{x}+\delta \quad \text{і} \quad \overline{y}-\delta < c_k < d_k < \overline{y}+\delta,$$

так що в згаданий окіл потрапляє частина $\mathcal{M}_k$ множини $\mathcal{M}$ (за самим вибором ця частина напевно містить нескінченну множину точок). Отже, точка $\overline{M}$ є **точкою згущення** для множини $\mathcal{M}$ і повинна до неї належати, через її замкненість.

У такому випадку, точка $\overline{M}$ міститься в одній з областей σ, скажімо, σ_0.

Оскільки σ_0 є **відкрита** область, то в неї входить і деякий окіл

$$(\overline{x}-\delta,\ \overline{x}+\delta;\ \overline{y}-\delta,\ \overline{y}+\delta)$$

цієї точки. Як і тільки що, легко показати, що в цей окіл цілком потрапить (якщо k досить велике) прямокутник $[a_k, b_k;\ c_k, d_k]$, а з ним і частина $\mathcal{M}_k$, що міститься в ньому. Отже, вся множина $\mathcal{M}_k$, покривається **однією** областю σ_0, тоді як вибирали її ми так, щоб вона не могла бути покрита жодним **скінченним** числом областей σ. Отримана суперечність і доводить лему. ☐

У тих застосуваннях леми Бореля, які читач знайде в наступному розділі та в інших частинах курсу, множина $\mathcal{M}$ буде зазвичай **замкнена область**. Але іншим разом доведеться застосовувати її і до інших замкнених множин, наприклад, до **неперервної кривої**.

176. Нові доведення основних теорем

Перша теорема Вяярштрасса (дивіться теор. 84.1).

Доведення. Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в обмеженій замкненій області $\mathcal{D}$. Отже, кожну точку (x', y') цієї області можна оточити таким околом σ', що в його межах (якщо через ε позначено наперед взяте число)

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$$

або

$$f(x', y') - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y') + \varepsilon.$$

Отже, в області σ' функція виявляється **обмеженою**.

Застосовуючи лему Бореля до системи $\Sigma = \{\sigma'\}$ цих околів, можна виділити з Σ скінченне число околів $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, які разом покривають всю область $\mathcal{D}$. Якщо

$$m_i \leqslant f(x, y) \leqslant M_i \quad \text{в} \quad \sigma_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

то, взявши найменше m_i (позначимо m) і найбільше M_i (позначимо M), будемо мати в $\mathcal{D}$

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M$$

що й потрібно було довести. □

Теорема Кантора (дивіться теор. 87.1).

Доведення. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. Кожну точку (x', y') оточимо таким околом

$$\sigma' = (x' - \delta', \ x' + \delta'; \ y' - \delta', \ y' + \delta'),$$

що для будь-якої точки (x, y) з σ' (та з $\mathcal{D}$) буде

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Якщо (x_0, y_0) є інша подібна точка з σ', так що і

$$|f(x', y') - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

то в результаті

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon. \tag{176.1}$$

Замінимо кожен прямокутник σ' вчетверо меншим прямокутником, з тим же центром:

$$\overline{\sigma}' = \left(x' - \frac{\delta'}{2}, \ x' + \frac{\delta'}{2}; \ y' - \frac{\delta'}{2}, \ y' + \frac{\delta'}{2}\right).$$

Система $\overline{\Sigma} = \{\overline{\sigma}'\}$ цих відкритих прямокутників покриває область $\mathcal{D}$. За лемою Бореля (лем. 175.1), з неї виділяємо **скінченну** систему прямокутників

$$\overline{\sigma}_i = \left(x_i - \frac{\delta_i}{2}, \ x_i + \frac{\delta_i}{2}; \ y_i - \frac{\delta_i}{2}, \ y_i + \frac{\delta_i}{2}\right).$$

з тією самою властивістю. Нарешті, позначимо через δ найменше з усіх чисел $\frac{\delta_i}{2}$.

Нехай (x, y) і (x_0, y_0) — будь-які дві точки області $\mathcal{D}$, для яких

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{і} \quad |y - y_0| < \delta. \tag{176.2}$$

Точка (x_0, y_0) належить до одного з околів $\overline{\sigma}_i$, наприклад, околу

$$\overline{\sigma}_{i_0} = \left(x_{i_0} - \frac{\delta_{i_0}}{2},\ x_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{2};\ y_{i_0} - \frac{\delta_{i_0}}{2},\ y_{i_0} + \frac{\delta_{i_0}}{2}\right).$$

так що

$$|x_0 - x_{i_0}| < \frac{\delta_{i_0}}{2} \quad \text{і} \quad |y_0 - y_{i_0}| < \frac{\delta_{i_0}}{2}.$$

З (176.2), оскільки $\delta \leqslant \frac{\delta_{i_0}}{2}$, випливає, що $|x - x_0| < \frac{\delta_{i_0}}{2}$ і $|y - y_0| < \frac{\delta_{i_0}}{2}$. Звідси

$$|x - x_{i_0}| < \delta_{i_0} \quad \text{і} \quad |y - y_{i_0}| < \delta_{i_0}$$

і точки (x, y), (x_0, y_0) обидві знаходяться в одному з **спочатку** побудованих околів

$$(x_i - \delta_{i_0},\ x_i + \delta_{i_0};\ y_i - \delta_{i_0},\ y_i + \delta_{i_0}),$$

а тоді, за доведеним, для них виконується (176.1).

Отже, вдалося для заданого $\varepsilon > 0$ вибрати $\delta > 0$ **незалежно** від положення точки (x_0, y_0), чим і доведено, що функція $f(x, y)$ **рівномірно** неперервна. □

5.3. Похідні і диференціали функцій кількох змінних

177. Частинні похідні і частинні диференціали

Для спрощення запису та викладу ми обмежимося випадком функцій трьох змінних; все подальше, однак, справедливе і для функцій будь-якого числа змінних.

Отже, нехай у деякій (відкритій) області $\mathcal{D}$ маємо функцію $u = f(x, y, z)$; візьмемо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ у цій області. Якщо ми візьмемо для y і z сталі значення y_0 і z_0 і змінюватимемо x, то u буде функцією від однієї змінної x (в околі x_0); можна поставити питання про обчислення її похідної у точці $x = x_0$. Додамо цьому значенню x_0 приріст Δx, тоді функція отримає приріст

$$\Delta_x u = \Delta_x f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

який можна було б назвати її **частинним приростом** (по x), оскільки він спричинений зміною значення лише однієї змінної. За означенням похідної, вона є границею

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

Ця похідна називається *частинною похідною функції $f(x, y, z)$ за аргументом x у точці*
(x_0, y_0, z_0).

Як бачимо, у цьому означенні не всі координати рівноправні, оскільки y_0 і z_0 наперед фіксовані, а x змінюється, прямуючи до x_0.

Частинну похідну позначають одним із символів:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \ \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}; \quad u'_x, \ f'_x(x_0, y_0, z_0); \quad D_x u, \ D_x f(x_0, y_0, z_0).$$

Якобі (нім. Carl Jacobi, Ка́рл Яко́бі) у 1841 році запропонував користуватися круглим ∂ замість прямого d у позначенні саме **частинної** похідної. (Раніше у 1770 це запропонував Кондорсе (фр. Marquis de Condorcet, Ніколя́ де Кондорсе́), а у 1786 Льожандр.)

Зауважимо, що літера x внизу в цих позначках лише вказує, за якою із змінних береться похідна, і не пов'язана з тим, в якій точці (x_0, y_0, z_0) ми похідну обчислюємо.

(І тут **цілісні** символи

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_x, \quad D_x f$$

можна розглядати як **функціональні позначення** для частинної похідної за x. Подібних зауважень надалі ми повторювати вже не станемо.)

nebayduzhi.math@gmail.com

Аналогічно, вважаючи x і z сталими, а y змінною, можна розглядати границю

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta y}.$$

Границя ця називається *частинною похідною функції* $f(x,y,z)$ *за аргументом* y *в точці*
(x_0,y_0,z_0) і позначається символами, аналогічними до попередніх:

$$\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y};\quad u'_y,\ f'_y(x_0,y_0,z_0);\quad D_y u,\ D_y f(x_0,y_0,z_0).$$

Так само визначається і *частинна похідна функції* $f(x,y,z)$ *за аргументом* z *у точці* (x_0,y_0,z_0).

Саме обчислення частинної похідної не становить нічого нового в порівнянні з обчисленням звичайної похідної.

Приклади.

1) Нехай $u=x^y$ $(x>0)$; частинні похідні цієї функції будуть:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\cdot x^{y-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^y\cdot\ln x.$$

Перша з них обчислюється як похідна степеневої функції від x (при $y=\text{const}$), а друга — як похідна показникової функції від y (при $x=\text{const}$).

2)

$$u=\operatorname{arctg}\frac{x}{y},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

3)

$$u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

4) Нехай $z=y\cdot f(x^2-y^2)$, де $f(u)$ — **довільна** функція (що має похідну). Показати, що для z завжди виконується співвідношення:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2},$$

для будь-якої функції $f(u)$.

За правилом диференціювання композиції функцій (позначаючи штрихом похідну за u) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot f'(x^2-y^2)\cdot 2x=2xy\cdot f'(x^2-y^2),$$

nebayduzhi.math@gmail.com

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f(x^2 - y^2) - 2y^2 \cdot f'(x^2 - y^2),$$

і звідси

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cdot f'(x^2 - y^2) + \frac{1}{y} \cdot f(x^2 - y^2) - 2y \cdot f'(x^2 - y^2) = \frac{z}{y^2}.$$

5) Сторона a трикутника визначається двома іншими сторонами b, c і кутом α між ними так:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}.$$

Тоді

$$\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{b - c \cdot \cos\alpha}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}} = \frac{b - c \cdot \cos\alpha}{a}, \qquad \frac{\partial a}{\partial \alpha} = \frac{bc \cdot \sin\alpha}{a}.$$

6) Відома з фізики формула Кляпейрона $pV = RT$ (де $R = \mathrm{const}$) виражає зв'язок між об'ємом V, тиском p і абсолютною температурою T одного моля ідеального газу і визначає одну з величин p, V, T як функцію двох інших.

Якщо p, V — незалежні змінні, а T — функція від них: $T = \frac{pV}{R}$, то

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R}, \qquad \frac{\partial T}{\partial V} = \frac{p}{R}.$$

Якщо роль незалежних змінних відіграють p і T, а V — функція від них: $V = \frac{RT}{p}$, то

$$\frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}, \qquad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p}.$$

Нехай, нарешті, V і T — незалежні змінні, p — функція від них: $p = \frac{RT}{V}$; тоді

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}, \qquad \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V}.$$

Звідси, між іншим, випливає важливе в термодинаміці співвідношення

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{R}{p} \cdot \frac{V}{R} = -\frac{RT}{pV} = -1.$$

Зауважимо, що позначення Якобі для частинних похідних (з круглими ∂) слід розглядати **лише** як цілісні символи, а не як частки або дроби. Отримане щойно з особливою ясністю підкреслює цю істотну відмінність у характері позначень звичайних та частинних похідних: якби виписані в лівій частині похідні були звичайними, то можна було б їх розглядати як частки одних і тих же диференціалів, і після скорочення ми отримали б 1, замість -1; тут же, як ми бачимо, цього робити не можна.

Добуток частинної похідної $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ і довільного приросту Δx називається *частинним диференціалом за аргументом x функції u*; його позначають символом

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x.$$

Якщо і тут *диференціал dx незалежної змінної x розуміти як приріст Δx*, то попередня формула напишеться так:

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx.$$

Аналогічно,

$$d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy, \quad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz.$$

Отже, ми бачимо, що можна було б і частинні похідні подати у вигляді **дробів**

$$\frac{d_x u}{dx}, \quad \frac{d_y u}{dy}, \quad \frac{d_z u}{dz},$$

але за неодмінної умови вказувати, по якій змінній береться диференціал.

178. Повний приріст функції

Якщо, виходячи із значень $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ незалежних змінних, надати всім трьом деякі прирости Δx, Δy, Δz, то функція $u = f(x, y, z)$ отримає приріст

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

який називається *повним приростом функції.*

У випадку функції $y = f(x)$ від однієї змінної, припускаючи існування в точці x_0 (скінченної) похідної $f'(x_0)$, для приросту функції мали таку формулу (96.1)

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

де α залежить від Δx і $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Ми збираємося довести аналогічну формулу для приросту функції $u = f(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta f(x_0, y_0, z_0) = \\ &= f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + \\ &+ \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z, \end{aligned} \tag{178.1}$$

де α, β, γ залежать від Δx, Δy, Δz і разом з ними прямують до нуля. Однак, цього разу доведеться накласти на функцію додаткові обмеження.

nebayduzhi.math@gmail.com

Теорема 178.1. *Якщо частинні похідні* $f'_x(x,y,z)$, $f'_y(x,y,z)$, $f'_z(x,y,z)$ *існують не тільки в точці* (x_0,y_0,z_0), *але і в деякому її околі, і, крім того неперервні (як функції від* x, y, z*) у цій точці, то справедлива формула* (178.1)*.*

Доведення. Для доведення представимо повний приріст функції Δu у виді:

$$\begin{aligned}\Delta u = {}&[f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)-f(x_0,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)]+\\&+[f(x_0,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)-f(x_0,\ y_0,\ z_0+\Delta z)]+\\&+[f(x_0,\ y_0,\ z_0+\Delta z)-f(x_0,\ y_0,\ z_0)].\end{aligned}$$

Кожна з цих різниць є **частинний** приріст функції лише за однією змінною. Оскільки ми припустили існування частинних похідних в околі точки (x_0,y_0,z_0), то (якщо Δx, Δy, Δz досить малі) до цих різниць окремо можна застосувати формулу скінченних приростів (розд. 112).

(Якщо взяти, наприклад, першу різницю, то її можна розглядати як приріст функції $f(x_0,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)$ від однієї змінної x, що відповідає переходу від $x=x_0$ до $x=x_0+\Delta x$. Похідна за x от цієї функції, тобто $f'_x(x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)$, за припущенням, існує для всіх значень x на проміжку $[x_0,x_0+\Delta x]$, отже можна застосовувати формулу скінченних приростів, і так далі.)

Ми отримаємо

$$\begin{aligned}\Delta u = {}&f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)\cdot\Delta x+\\&+f'_y(x_0,\ y_0+\theta_2\Delta y,\ z_0+\Delta z)\cdot\Delta y+\\&+f'_z(x_0,\ y_0,\ z_0+\theta_3\Delta z)\cdot\Delta z.\end{aligned}$$

Якщо покласти тут:

$$\begin{aligned}f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)&=f'_x(x_0,y_0,z_0)+\alpha,\\f'_y(x_0,\ y_0+\theta_2\Delta y,\ z_0+\Delta z)&=f'_y(x_0,y_0,z_0)+\beta,\\f'_z(x_0,\ y_0,\ z_0+\theta_3\Delta z)&=f'_z(x_0,y_0,z_0)+\gamma,\end{aligned}$$

то отримаємо вираз (178.1) для Δu. При $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$ аргументи похідних у лівих частинах цих рівностей прямують до x_0, y_0, z_0 (бо θ_1, θ_2, θ_3 — правильні дроби). За умовою теореми похідні **неперервні в точці** (x_0,y_0,z_0). Отже, похідні прямують до похідних у правих частинах, а величини α, β, γ — до нуля. Цим і завершується доведення. □

Доведена теорема дає можливість, між іншим, стверджувати, що *з існування та неперервності у цій точці частинних похідних випливає неперервність у цій точці самої функції*; справді, якщо $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$, то, очевидно, і $\Delta u\to 0$.

Для того щоб формулу (178.1) можна було написати в більш компактній формі, введемо до розгляду вираз:

$$\varrho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta x^z}.$$

Це **відстань** між точками

$$(x_0,\ y_0,\ z_0) \quad \text{і} \quad (x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z).$$

Користуючись ним, можемо написати:

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\varrho} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\varrho} + \gamma \cdot \frac{\Delta z}{\varrho}\right) \cdot \varrho.$$

Позначивши вираз, що стоїть у дужках, через ε, матимемо

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z = \varepsilon \cdot \varrho,$$

де ε залежить від $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$ і прямує до нуля, якщо $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0,\ \Delta z \to 0$ або, коротше, якщо $\varrho \to 0$. Отже, формулу (178.1) можна тепер переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta f(x_0, y_0, z_0) = \\ &= f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + \varepsilon \cdot \varrho, \end{aligned} \tag{178.2}$$

де $\varepsilon \to 0$ при $\varrho \to 0$. Величина $\varepsilon \cdot \varrho$, очевидно, може бути записана як $o(\varrho)$ (якщо поширити введене в розд. 60 позначення і на випадок функцій кількох змінних).

Зауважимо, що в нашому міркуванні не було формально відкинуто випадок, коли приріст $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$ порізно чи навіть усі відразу дорівнюють 0. Отже, говорячи про граничні співвідношення

$$\alpha \to 0, \quad \beta \to 0, \quad \gamma \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

коли $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0,\ \Delta z \to 0$, ми розуміємо їх у широкому значенні і не відкидаємо для цих приростів можливості у процесі зміни дорівнювати нулю. (Порівняйте з аналогічним зауваженням в розд. 96.)

При доведенні попередньої теореми ми вимагали від функції кількох змінних більше, ніж у випадку функції однієї змінної. Для того щоб показати, що без дотримання цих вимог формула (178.1) або (178.2) тут **могла б** виявитися і непридатною, розглянемо, насамкінець, наступний **приклад** (де для простоти ми маємо справу лише з двома незалежними змінними).

Визначимо функцію $f(x, y)$ рівностями:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (\text{якщо } x^2 + y^2 > 0) \quad \text{і} \quad f(0, 0) = 0.$$

Ця функція неперервна на всій площині; для точки $(0,0)$ це випливає з пр. 167.5. Далі, існують частинні похідні за x і y також на всій площині. При $x^2+y^2>0$, очевидно,

$$f'_x(x,y)=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{і} \quad f'_y(x,y)=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

У початковій точці маємо: $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$; це безпосередньо випливає, за означенням частинних похідних, з того, що $f(x,0)=f(0,y)=0$. Легко показати, що у точці $(0,0)$ неперервність похідних порушується (для першої з них достатньо, наприклад, покласти $y=x=\frac{1}{n}\to 0$).

Формула (178.1) або (178.2) для нашої функції у точці $(0,0)$ не придатна. Справді, якщо допустити протилежне, то було б

$$\Delta f(0,0)=\frac{\Delta x^2\cdot\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}=\varepsilon\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

де $\varepsilon\to 0$ при $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$. Поклавши, зокрема, $\Delta y=\Delta x>0$, мали б

$$\frac{1}{2}\Delta x=\varepsilon\cdot\sqrt{2}\cdot\Delta x, \quad \text{звідки} \quad \varepsilon=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

і не прямувало б до нуля при $\Delta x\to 0$, що суперечить припущенню.

Аналогічну особливість у точці $(0,0)$ виявляє і функція

$$f(x,y)=\sqrt{|xy|}.$$

Залишаємо читачеві розібратися у цьому.

179. Повний диференціал

У разі функції $y=f(x)$ однієї змінної, ми розглядали в розд. 103 питання про вираз для її приросту $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ у вигляді

$$\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x) \quad (A=\mathrm{const}). \tag{179.1}$$

Виявилося (розд. 104), що для можливості такого запису **необхідно і достатньо**, щоб існувала в точці $x=x_0$ скінченна похідна $f'(x_0)$, причому написана рівність здійснювалася саме при $A=f'(x_0)$. Лінійну частину

$$A\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot\Delta x=y'_x\cdot\Delta x$$

приросту функції ми називали її диференціалом, dy.

nebayduzhi.math@gmail.com

Переходячи до функції кількох, наприклад, трьох змінних: $u = f(x, y, z)$, визначеної в деякій (скажімо, відкритій) області $\mathcal{D}$, природно поставити аналогічне питання про запис приросту

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z) - f(x_0,\ y_0,\ z_0)$$

у вигляді

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + o(\varrho), \tag{179.2}$$

де $A,\ B,\ C$ — сталі, а $\varrho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Як і в розд. 103, легко показати, що якщо розклад (179.2) справедливий, то в точці (x_0, y_0, z_0) існують частинні похідні за кожною із змінних, причому

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0, z_0) = B, \quad f'_z(x_0, y_0, z_0) = C.$$

Справді, наприклад, вважаючи (179.2) $\Delta y = \Delta z = 0$ і $\Delta x \neq 0$, отримаємо

$$\frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0,\ z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x},$$

звідки й випливає, що існує

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0,\ z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} = A.$$

Отже, співвідношення (179.2) завжди виконується лише у вигляді

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z + o(\varrho) \tag{179.3}$$

або у більш короткому записі

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z + o(\varrho). \tag{179.4}$$

Однак, тоді як у випадку функції однієї змінної існування похідної $y'_x = f'(x)$ в точці, що розглядається, було вже достатньо для наявності співвідношення (179.1), в нашому випадку існування частинних похідних

$$u'_x = f'_x(x_0, y_0, z_0), \quad u'_y = f'_y(x_0, y_0, z_0), \quad u'_z = f'_z(x_0, y_0, z_0)$$

ще не забезпечує розкладу (179.2). Для випадку функції двох змінних ми це бачили на прикладі попереднього розділу. Там же, в теоремі, були зазначені **достатні** умови для виконання співвідношення (179.2): це існування частинних похідних в **околі** точки (x_0, y_0, z_0) та їх **неперервність** у цій точці. Втім, легко показати, що ці умови аж ніяк не необхідні для формули (179.3) або (179.4). Це, власне кажучи, випливає вже з того, що для функції однієї змінної (яку, якщо завгодно, можна розглядати і як функцію від будь-якої кількості змінних) подібні умови не потрібні.

За наявності формули (179.3) *функція* $u = f(x, y, z)$ *називається* ***диференційовною*** *у точці* (x_0, y_0, z_0) *і (тільки в цьому випадку!) вираз*

$$u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z,$$

тобто лінійна частина приросту функції, називається її (повним) диференціалом і позначається символом du *або* $df(x_0, y_0, z_0)$.

У випадку функції кількох змінних твердження: “функція диференційовна” в заданій точці, як бачимо, вже не рівнозначне твердженню “функція має частинні похідні за всіма змінними” в цій точці, а означає щось **більше**. Втім, ми зазвичай будемо припускати існування та неперервність частинних похідних, а це вже перекриває **диференційовність**.

Довільні прирости Δx, Δy, Δz прийнято називати диференціалами незалежних змінних dx, dy, dz. (**Якщо** ототожнити диференціал **незалежної змінної** x з диференціалом x, як функції від незалежних змінних x, y, z, то, за загальною формулою, можна написати

$$dx = x'_x \cdot \Delta x + x'_y \cdot \Delta y + x'_z \cdot \Delta z = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + 0 \cdot \Delta z = \Delta x,$$

тоді рівність $dx = \Delta x$ виявляється **доведеною**.)

Отже можна написати:

$$df(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot dy + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot dz, \qquad (179.5)$$

або

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz. \qquad (179.6)$$

Повний *диференціал виявляється рівним сумі* ***частинних*** *диференціалів* (розд. 177).

180. Геометрична інтерпретація для випадку функції двох змінних

Бажаючи дати геометричне тлумачення сказаному вище, аналогічне до геометричного тлумаченню похідної і диференціала функції однієї змінної (розд. 91, розд. 104), повернемося до поняття дотичної до кривої $\mathcal{K}$ в заданій на ній точці M_0.

Ми визначили дотичну M_0T (рис. 180.1) як граничне положення січної M_0M при прямуванні $\overline{M_0M}$ до нуля (розд. 91).

Очевидно, можна дати і таке, рівносильне цьому означення.

Пряма M_0T *називається* ***дотичною*** *до кривої* $\mathcal{K}$ *в точці* M_0 *на ній, якщо відстань* $\overline{MP}$ *змінної точки* M *кривої* $\mathcal{K}$ *від прямої* M_0T*, при прямуванні відстані*

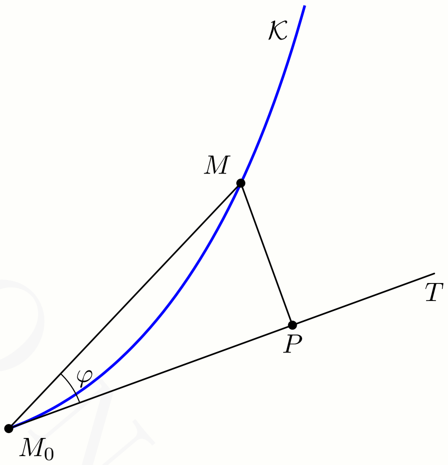


Рис. 180.1

$\overline{M_0M}$ *до нуля, є нескінченно малою* ***вищого*** *порядку, ніж* $\overline{M_0M}$ (тобто якщо відношення $\overline{MP}$ до $\overline{M_0M}$ при цьому прямує до нуля.

А це означає, що прямує до нуля $\sin\varphi$, а з ним і кут φ між січною M_0M та прямій M_0T (рис. 180.1).

Розглянемо тепер деяку поверхню $\mathcal{S}$ і на ній точку M_0 (рис. 180.2).

Аналогічно до означення дотичної прямої, дамо означення дотичної площини.

Площина M_0K називається ***дотичною площиною*** *до поверхні $\mathcal{S}$ у точці M_0 на ній, якщо відстань $\overline{MP}$ змінної точки M поверхні $\mathcal{S}$ від цієї площини, при прямуванні відстані $\overline{M_0M}$ до нуля, є нескінченно малою* ***вищого*** *порядку, ніж* $\overline{M_0M}$ (тобто якщо відношення $\overline{MP}$ до $\overline{M_0M}$ при цьому прямує до нуля).

Нехай (розд. 159) поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$ у прямокутних координатах.

Візьмемо на ній точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (де $z_0 = f(x_0, y_0)$) і досліджуємо, за яких умов площина $\mathcal{P}$, що проходить через точку M_0 і має рівняння

$$Z - z_0 = A(X - x_0) + B(Y - y_0), \tag{180.1}$$

задовольняє це означення.

Проведемо ML паралельно осі z (рис. 180.2) і з M_0 опустимо на ML перпендикуляр M_0N. Оскільки довжина відрізка $\overline{MK}$ відрізняється від $\overline{MP}$ сталим множником (не рівним нулю), то замість відношення $\overline{MP}/\overline{MM_0}$ можна розглядати відношення $\overline{MK}/\overline{MM_0}$. Покажемо тепер, що, не змінюючи по суті означення дотичної площини, можна, нарешті, замінити тут відстань $r = \overline{MM_0}$ довжиною відрізка $\varrho = \overline{M_0N}$.

Якщо при $M \to M_0$ прямує до нуля відношення $\overline{MK}/\varrho$, то це тим вірніше для відношення $\overline{MK}/r$, бо $r > \varrho$. **Припустимо тепер, що $\overline{MK}/r$ прямує до нуля, і**

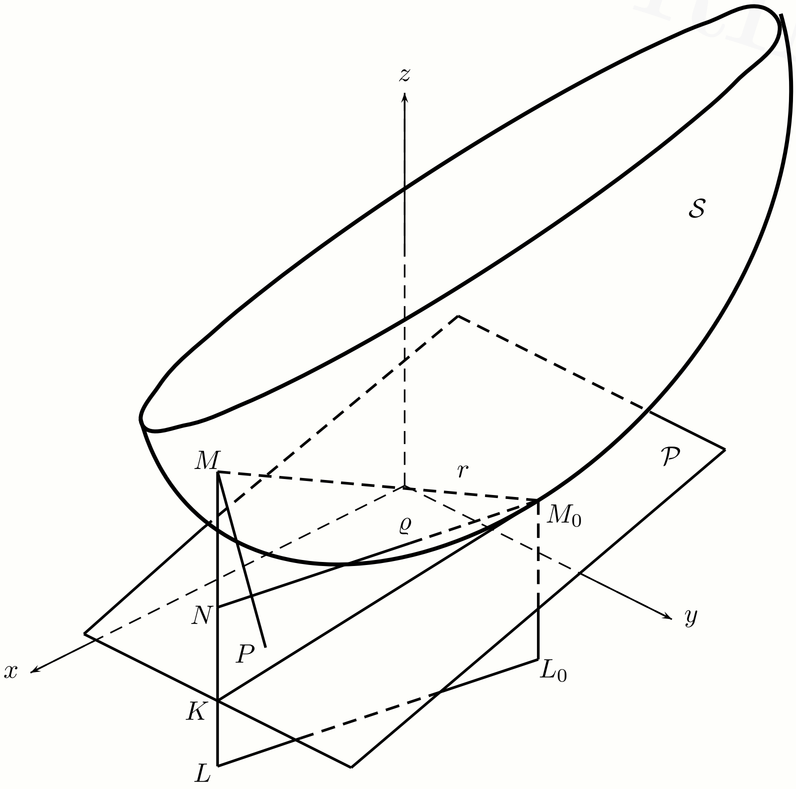


Рис. 180.2

покажемо, що тоді прямує до нуля і $\overline{MK}/\varrho$**.** Для цього достатньо довести, що при $M \to M_0$ відношення $\frac{r}{\varrho}$ залишається обмеженим.

Довжина відрізку $\overline{MK}$, з точністю до знака, дорівнює виразу

$$\overline{MK} = z - Z = z - z_0 - A(x - x_0) - B(y - y_0)$$

або, якщо ввести позначення

$$x - x_0 = \Delta x, \quad y - y_0 = \Delta y, \quad z - z_0 = \Delta z = \Delta f(x_0, y_0),$$

то

$$\overline{MK} = z - Z = \Delta z - (A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y).$$

Зважаючи на зроблене припущення ($\overline{MK}/r \to 0$), принаймні для точок M, досить близьких до M_0, матимемо

$$|\Delta z - (A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y)| < \frac{1}{2} r = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\varrho^2 + \Delta z^2},$$

так що

$$\frac{|\Delta z|}{\varrho} < |A| \cdot \frac{|\Delta x|}{\varrho} + |B| \cdot \frac{|\Delta y|}{\varrho} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{|\Delta z|}{\varrho}\right)^2} <$$
$$< |A| + |B| + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|\Delta z|}{\varrho}\right) < 2(|A| + |B|) + 1.$$

А отже,

$$\frac{r}{\varrho} = \sqrt{1 + \left(\frac{|\Delta z|}{\varrho}\right)^2} < 2(|A| + |B| + 1),$$

що й потрібно було довести.

Отже, площина (180.1) буде дотичною до поверхні тоді й тільки тоді, коли відношення

$$\frac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\varrho}$$

прямує до нуля разом з ϱ, тобто якщо виконується розклад

$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + o(\varrho)$$

(порівняйте з (179.2)).

Ми приходимо до остаточного висновку: *для того, щоб поверхня $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, де $z_0 = f(x_0, y_0)$, мала дотичну площину (мається на увазі площина, не паралельна осі z), необхідно і достатньо, щоб при $x = x_0$, $y = y_0$ функція $f(x, y)$ була* ***диференційовна****.*

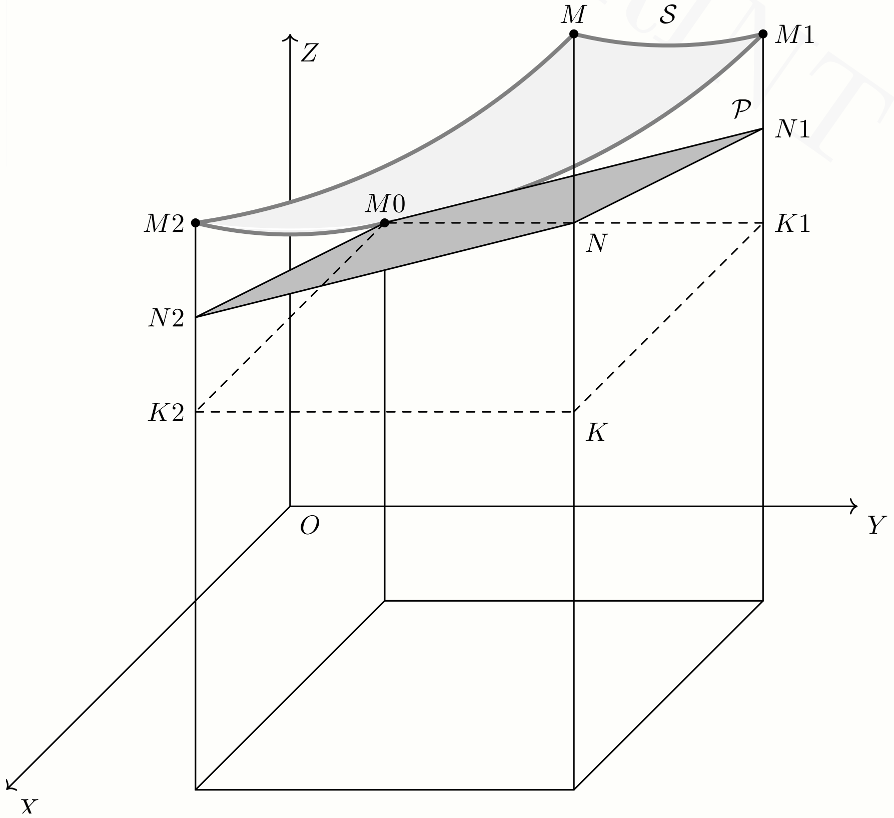


Рис. 180.3

Оскільки при виконанні цієї умови коефіцієнти A і B необхідно дорівнюють частинним похідним $f'_x(x_0, y_0)$ і $f'_y(x_0, y_0)$, то дотична площина виразиться рівнянням

$$Z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (X - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(Y - y_0).$$

Зазвичай значки при x, y, z не пишуть; тоді рівняння дотичної площини набуває вигляду

$$Z - z = f'_x(x, y) \cdot (X - x) + f'_y(x, y)(Y - y). \tag{180.2}$$

Нескладно побачити, що якщо перетнути поверхню та дотичну до неї площину будь-якої площиною, паралельною осі z і що проходить через точку M_0, то в перерізі з поверхнею виходить деяка крива, а в перерізі з площиною — дотична до неї пряма (нижче в розд. 234, буде розглянуто загальне питання про дотичні до будь-яких кривих, проведених на поверхні через дану точку).

Зокрема, у перерізі поверхні площинами $Y = y_0$ і $X = x_0$ вийдуть криві, кутові коефіцієнти яких відповідно дорівнюють:

$$f'_x(x_0, y_0) \quad \text{і} \quad f'_y(x_0, y_0)$$

Легко зрозуміти, стосовно яких координатних систем обчислюються ці кутові коефіцієнти.

На рис. 180.3 відрізки K_1M_1, K_2M_2, і KM представляють частинні та повний приріст функції, а відрізки K_1N_1, K_2N_2 і KN — частинні та повний її диференціали (порівняйте з розд. 104 і рис. 104.1).

181. Похідні композиції функцій

Нехай маємо функцію

$$u = f(x, y, z),$$

визначену у (відкритій) області $\mathcal{D}$, причому кожна із змінних x, y, z теж є функцією від змінної t на деякому проміжку:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

Нехай, крім того, при зміні t точки (x, y, z) не виходять за межі області $\mathcal{D}$.

Підставивши значення x, y та z у функцію f, отримаємо складену функцію:

$$u = f\Big(\varphi(t),\ \psi(t),\ \chi(t)\Big).$$

Твердження 181.1. *Припустимо, що u має неперервні частинні похідні u'_x, u'_y, u'_z (власне, досить припустити диференційовність функції $u = f(x, y, z)$) і що x'_t, y'_t, і z'_t існують. Тоді можна довести існування похідної складеної функції і водночас обчислити її.*

nebayduzhi.math@gmail.com

Доведення. Справді, придамо змінній t деякий приріст Δt, тоді x, y, z отримають відповідні прирости $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, а функція u отримає приріст Δu.

Представивши приріст Δu у формі (178.1) (це ми можемо зробити, тому що припустили існування **неперервних** частинних похідних u'_x, u'_y, u'_z), отримаємо

$$\Delta u = u'_x \cdot \Delta x + u'_y \cdot \Delta y + u'_z \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y + \gamma \cdot \Delta z,$$

де $\alpha, \beta, \gamma \to 0$ при $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$. Розділивши обидві частини рівності на Δt, матимемо

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = u'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + u'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + u'_z \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \gamma \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t},$$

Спрямуємо тепер приріст Δt до нуля; тоді $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ будуть прямувати до нуля, оскільки функції x, y, z від t неперервні (ми припустили існування похідних x'_t, y'_t, z'_t), а тому α, β, γ також прямуватимуть до нуля. Перейдемо до границі і отримаємо:

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t. \tag{181.1}$$

Бачимо, що при зроблених припущеннях похідна складеної функції справді існує. Якщо скористатися диференціальним позначенням, формулу (181.1) можна записати так:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \tag{181.2}$$

□

Тепер розглянемо той випадок, коли x, y, z залежать не від однієї змінної t, а від кількох змінних; наприклад,

$$x = \varphi(t, v), \quad y = \psi(t, v), \quad z = \chi(t, v).$$

Крім існування та неперервності частинних похідних функції $u = f(x, y, z)$, ми припускаємо тут існування похідних від функцій x, y, z за t і v.

Після підстановки функцій φ, ψ, χ у функцію f ми будемо мати деяку функцію від **двох** змінних t, v, і виникає питання про існування та обчислення частинних похідних u'_t і u'_v. Але цей випадок не відрізняється суттєво від вже вивченого, бо при обчисленні частинної похідної функції від двох змінних ми одну зі змінних фіксуємо, і в нас залишається функція лише від **однієї** змінної. Отже, для цього випадку формула (181.1) залишається без зміни, а формулу (181.2) потрібно переписати у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}. \tag{181.3}$$

182. Приклади

1) Розглянемо степенево-показникову функцію

$$u = x^y.$$

Нехай $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Обчислимо похідну u'_t застосувавши формулу (181.1). Отримаємо відому вже нам формулу Ляйбніца – Й. Бернуллі:

$$u'_t = y \cdot x^{y-1} \cdot x'_t + x^y \cdot \ln x \cdot y'_t.$$

Раніше ми отримали її (в інших позначеннях) за допомогою штучного способу (пр. 99.23).

2) Нехай $u = f(x, y, z)$ має неперервні частинні похідні, і

$$x = \eta - \zeta, \quad y = \zeta - \xi, \quad z = \xi - \eta.$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

3) Якщо (при тих самих припущеннях щодо функції f), **зберігаючи x незалежною змінною**, покласти

$$y = y(x) \quad \text{і} \quad z = z(x),$$

де функції $y(x)$, $z(x)$ диференційовні за x, то u, як композиція функцій, матиме похідну за x:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}$$

або

$$\frac{du}{dx} = f'_x(x,\ y(x), z(x)) + f'_y(x,\ y(x), z(x)) \cdot y'(x) + f'_z(x,\ y(x), z(x)) \cdot z'(x).$$

Тут саме x відіграє роль змінної t у (181.1).

4) Якщо ж обидві змінні x, y залишити незалежними, а замість z підставити функцію $z = z(x, y)$, що має частинні похідні за x і за y, то для функції $u = f(x, y, z(x, y))$ матимемо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(x, y, z(x, y)) + f'_z(x, y, z(x, y)) \cdot z'_x(x, y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x, y, z(x, y)) + f'_z(x, y, z(x, y)) \cdot z'_y(x, y),$$

nebayduzhi.math@gmail.com

5) Обчислимо похідну **визначника** матриці застосувавши формулу (181.2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Нехай елементи a_{ik} $(i,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$ є функції від деякого параметра t, для яких існують похідні за t: $\dfrac{da_{ik}}{dt}$.

Згадуючи розклад визначника по елементам k-го стовпця

$$\Delta = A_{1k} \cdot a_{1k} + A_{2k} \cdot a_{2k} + \dots + A_{ik} \cdot a_{ik} + \dots + A_{nk} \cdot a_{nk}\,,$$

де алгебраїчні доповнення $A_{1k},\ \dots,\ A_{nk}$ не містять елемента a_{ik}, приходимо до висновку, що

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} = A_{ik}\,.$$

У такому разі, за формулою (181.2),

$$\frac{d\Delta}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}} \cdot \frac{da_{ik}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} \cdot \frac{da_{ik}}{dt}\,.$$

Зауважимо, що сума $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{ik} \cdot \frac{da_{ik}}{dt}$ дає розклад визначника, що відрізняється від даного лише тим, що елементи його k-го стовпця замінені їхніми похідними за t. Звідси правило: *похідна визначника* Δ *дорівнює сумі* n *визначників, що виходять з* Δ *заміною, по черзі, елементів його* 1*-го,* 2*-го, …,* n*-го стовпця похідними.*

Формула (181.1) схожа с формулою $u'_t = u'_x \cdot x'_t$ для випадку функції u від **однієї** змінної x. Підкреслимо, однак, знову різницю в **умовах**, за яких було виведено ці формули. Якщо u залежить від **однієї** змінної, то досить було припустити існування похідної u'_x; у випадку кількох змінних — ми змушені були припустити ще й неперервність похідних $u'_x, u'_y, \dots$. Наступні приклади показують, що **існування** цих похідних для дійсності формули (181.1) взагалі недостатньо.

6) Визначимо функцію $u = f(x, y)$, вважаючи:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (\text{при } x^2 + y^2 > 0), \quad f(0,0) = 0.$$

Ця функція, як ми бачили, має частинні похідні у всіх точках (і в початковій точці $(0, 0)$), причому

$$f'_x(0,0) = 0, \quad f'_y(0,0) = 0;$$

nebayduzhi.math@gmail.com

зауважимо, що саме в цій точці похідні мають розрив.

Якщо ввести нову змінну t, поклавши $x = t$ і $y = t$, то отримаємо складену функцію від t. За формулою (181.1) похідна цієї функції при $t = 0$ **дорівнювала б**

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t = 0.$$

Але, з іншого боку, якщо насправді підставити значення x і y в задану функцію $u = f(x, y)$, отримаємо

$$u = \frac{t^2 \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}t.$$

Продиференціювавши тепер безпосередньо за t, матимемо $u'_t = \frac{1}{2}$ при будь-якому значенні t, отже і при $t = 0$.

Виявляється, що формула (181.1) в даному випадку непридатна.

7) Нехай

$$f(x, y) = \frac{x^{\frac{5}{3}} \cdot y}{x^2 + y^2} \quad (\text{при } x^2 + y^2 > 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

Поведінка функції у точці $(0, 0)$ цілком аналогічна. Взявши тут $x = y = t$ отримаємо функцію

$$u = \frac{1}{2}t^{\frac{2}{3}},$$

яка при $t = 0$ має **нескінченні** однобічні похідні. Якщо ж покласти:

$$x = t,$$

$$y = t^{\frac{4}{3}} \sin\frac{1}{t} \quad (\text{при } t \neq 0) \quad \text{і} \quad y = 0 \quad (\text{при } t = 0),$$

то отримана функція, яка визначається рівностями:

$$u = \frac{t \cdot \sin\frac{1}{t}}{1 + t^{\frac{2}{3}} \cdot \sin^2\frac{1}{t}} \quad (\text{при } t \neq 0) \quad \text{і} \quad u = 0 \quad (\text{при } t = 0),$$

при $t = 0$ **ніякої** похідної не матиме.

183. Формула скінченних приростів

Твердження 183.1. *Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена і неперервна в* ***замкненій*** *області $\mathcal{D}$ і має неперервні частинні похідні f'_x, f'_y, f'_z* ***всередині*** *цієї області (тобто у будь-якій* ***внутрішній*** *її точці). Розглянемо дві точки із $\mathcal{D}$*

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \quad і \quad M_1(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z),$$

які можна з'єднати прямолінійним відрізком M_0M_1*, що цілком лежить в області* $\mathcal{D}$.

Тоді виконується формула:

$$\begin{aligned}&\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) = \\ &= f'_x(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y,\ z_0+\theta\Delta z)\cdot\Delta x + \\ &+ f'_y(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y,\ z_0+\theta\Delta z)\cdot\Delta y + \\ &+ f'_z(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y,\ z_0+\theta\Delta z)\cdot\Delta z \\ &(0<\theta<1),\end{aligned} \tag{183.1}$$

яка цілком аналогічна до відомої ***формули скінченних приростів*** *функції однієї змінної* (112.4).

Доведення. Для доведення її покладемо у функції $f(x, y, z)$

$$x = x_0 + t\cdot\Delta x, \quad y = y_0 + t\cdot\Delta y, \quad z = z_0 + t\cdot\Delta z \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{183.2}$$

тобто розглянемо нашу функцію саме у точках прямолінійного відрізка M_0M_1. Складена функція від t

$$F(t) = f(x_0 + t\cdot\Delta x,\ y_0 + t\cdot\Delta y,\ z_0 + t\cdot\Delta z)$$

неперервна на всьому проміжку $[0, 1]$ (розд. 170), а всередині нього має похідну, яка, за формулою (181.1), дорівнює

$$F'_t = f'_x(x_0 + t\cdot\Delta x,\ y_0 + t\cdot\Delta y,\ z_0 + t\cdot\Delta z)\cdot\Delta x + f'_y(\dots)\cdot\Delta y + f'_z(\dots)\cdot\Delta z,$$

бо з (183.2)

$$\frac{dx}{dt} = \Delta x, \quad \frac{dy}{dt} = \Delta y, \quad \frac{dz}{dt} = \Delta z.$$

Застосуємо до функції $F(t)$ на проміжку $[0, 1]$ формулу (112.4):

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \quad (0 < \theta < 1).$$

Якщо помітити, що, за означенням функції $F(t)$,

$$F(1) - F(0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0),$$

і підставити замість похідної $F'(\theta)$ щойно знайдений вираз (при $t = \theta$), то й прийдемо до формули (183.1). □

Як простий приклад застосування доведеної формули згадаємо таке твердження.

Твердження 183.2. *Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в замкненій і* ***зв'язній*** *області $\mathcal{D}$, всередині області має частинні похідні рівні 0:*

$$f'_x = f'_y = f'_z = 0,$$

то ця функція у всій області зводиться до сталої:

$$f = \text{const}\,.$$

Доведення. Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x,y,z)$ будуть будь-які дві точки області $\mathcal{D}$. Зважаючи на припущену зв'язність $\mathcal{D}$, ці точки можна з'єднати ламаною, яка не виходить за межі $\mathcal{D}$. Якщо $M_1(x_1, y_1, z_1)$ є наступна за M_0 вершина ламаної, то поклавши в (183.2) $x_0 + \Delta x = x_1,\ y_0 + \Delta y = y_1,\ z_0 + \Delta z = z_1$ відразу отримаємо

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_0, y_0, z_0);$$

переходячи так послідовно від вершини до вершини, остаточно знайдемо:

$$f(x,y,z) = f(x_0, y_0, z_0),$$

що й потрібно було довести. □

184. Похідна за заданим напрямком

Частинні похідні функції $f(M) = f(x,y,z)$ за x, за y, за z виражають "швидкість зміни" функції у напрямку координатних осей. Наприклад, f'_x є "швидкість зміни" функції по x: вважається, що точка переміщується лише по паралелі осі x. Між тим, у багатьох фізичних питаннях може представити інтерес також "швидкість зміни" функції $f(M)$ і за іншими напрямками. Так буде, наприклад, якщо дано **поле температури**, тобто якщо задана **температура** $f(M)$ у кожній точці M деякого тіла. Закони розподілу та переміщення тепла істотно залежать від швидкості падіння (або зростання) температури за усіма напрямками. Уточнимо поняття "швидкості зміни" або похідної функції за будь-яким заданим напрямком. Тут ми також матимемо нагоду застосувати формулу (181.2).

Нехай функція визначена в деякій (відкритій) області. Розглянемо будь-яку точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ цієї області і будь-яку спрямовану пряму (вісь) l, що проходить через цю точку (рис. 184.1).

Нехай $M(x,y,z)$ — якась інша точка цієї осі, M_0M — довжина відрізка між M_0 і M, взята з належним знаком, саме зі знаком плюс, якщо напрямок M_0M співпадає з напрямком осі l, і зі знаком мінус — інакше.

Нехай M необмежено наближається до M_0. Границя

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$$

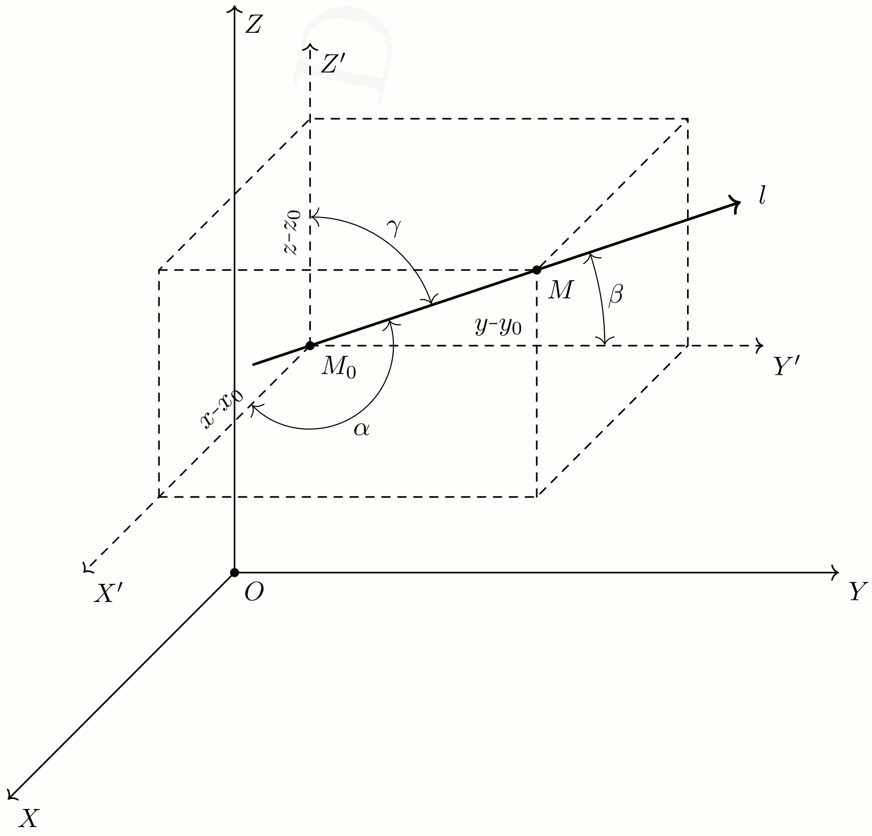


Рис. 184.1

nebayduzhi.math@gmail.com

називається **похідною від функції** $f(M)$ **за напрямком** l (або вздовж осі l) і позначається так:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial l}.$$

Ця похідна характеризує “швидкість зміни” функції у точці M_0 за напрямком l.

Зокрема, як згадувалося, і звичайні частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ теж можна розглядати як похідні “за напрямком”.

Твердження 184.1. *Припустимо тепер, що функція $f(x,y,z)$ має в заданій області* ***неперервні*** *частинні похідні (власне, досить припустити диференційовність функції $u=f(x,y,z)$). Нехай вісь l утворює з осями координат кути α,β,γ. Доведемо, що при зроблених припущеннях похідна за напрямком l існує і виражається формулою*

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\cos\gamma. \tag{184.1}$$

Доведення. Для доведення зауважимо, що якщо покласти $M_0M=t$, то матимемо

$$x-x_0=t\cdot\cos\alpha,\quad y-y_0=t\cdot\cos\beta,\quad z-z_0=t\cdot\cos\gamma.$$

Отже, уздовж осі l координати x,y,z можна розглядати як функції від t:

$$x=x_0+t\cdot\cos\alpha,\quad y=y_0+t\cdot\cos\beta,\quad z=z_0+t\cdot\cos\gamma, \tag{184.2}$$

а функцію $f(M)=f(x,y,z)$ — як складену функцію $\varphi(t)$ від t. При цьому точці M_0 відповідає значення $t=0$.

Отже, маємо:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial t}=\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}=\lim_{t\to0}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}=\varphi'(0),$$

якщо існує похідна $\varphi'(0)$. Але похідна $\varphi'(t)$ при зроблених припущеннях існує і виражається за формулою (181.2) в такий спосіб:

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

Використовуючи формули (184.2), отримуємо

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\cos\gamma,$$

звідки і випливає наше твердження. □

nebayduzhi.math@gmail.com

Поставимо тепер питання: *за яким напрямком функція в цій точці буде швидше за все зростати?* Звичайно, це питання має сенс лише в тому випадку, якщо похідні

$$a = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \tag{184.3}$$

не рівні одночасно нулю (бо інакше похідна за будь-яким напрямком була б нулем).

Перетворимо вираз (184.1):

$$a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{\cdots}} \cdot \cos\alpha + \frac{b}{\sqrt{\cdots}} \cdot \cos\beta + \frac{c}{\sqrt{\cdots}} \cdot \cos\gamma \right).$$

Дроби в дужках можна розглядати як косинуси деякого напрямку g:

$$\frac{a}{\sqrt{\cdots}} = \cos\lambda, \quad \frac{b}{\sqrt{\cdots}} = \cos\mu, \quad \frac{c}{\sqrt{\cdots}} = \cos\nu,$$

і тоді ми отримаємо

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot (\cos\lambda \cdot \cos\alpha + \cos\mu \cdot \cos\beta + \cos\nu \cdot \cos\gamma).$$

Якщо, нарешті, через (g, l) позначити кут між напрямками g і l, то за відомою формулою аналітичної геометрії отримаємо

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \cos(g, l). \tag{184.4}$$

Тепер ясно, що, якщо l співпаде з g, ця похідна досягне **найбільшого** значення

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Вектор $\vec{g}$, що має проєкції (184.3) на осі координат, вказує напрямок найбільш швидкого зростання функції, а його довжина $|\vec{g}|$ дає величину відповідної похідної. Цей вектор називають ***градієнтом*** *функції* $f(M) = f(x, y, z)$.

Переписавши формулу (184.4) у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial l} = |\vec{g}| \cdot \cos(g, l),$$

легко побачити, що вектор, який вийде якщо на напрямку l відкласти відрізок $\dfrac{\partial f}{\partial l}$, являє собою проєкцію градієнта на цей напрямок.

nebayduzhi.math@gmail.com

185. Інваріантність форми (першого) диференціала

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ має неперервні частинні похідні u'_x, u'_y, u'_z, причому x, y, z є функціями від нових змінних t і v:

$$x = \varphi(t, v), \quad y = \psi(t, v), \quad z = \chi(t, v),$$

що також мають неперервні частинні похідні x'_t, x'_v, y'_t, y'_v, z'_t, z'_v. Тоді (розд. 181) не тільки існують похідні від складеної функції u за t і v, але ці похідні також неперервні за t і v, як це легко побачити з (181.1).

Якби x, y, z були незалежними змінними, то як ми знаємо, (повний) диференціал функції u дорівнював би

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz.$$

У даному ж випадку u залежить, через посередництво x, y, z, від змінних t і v. Отже, по відношенню до цих змінних, диференціал напишеться так:

$$du = u'_t \cdot dt + u'_v \cdot dv.$$

Але, застосувавши формулу (181.1), маємо

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t$$

і, аналогічно,

$$u'_v = u'_x \cdot x'_v + u'_y \cdot y'_v + u'_z \cdot z'_v.$$

Підставивши ці значення у вираз для du, матимемо:

$$du = (u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t) \cdot dt + (u'_x \cdot x'_v + u'_y \cdot y'_v + u'_z \cdot z'_v) \cdot dv.$$

Перегрупуємо члени так:

$$du = u'_x \cdot (x'_t \cdot dt + x'_v \cdot dv) + u'_y \cdot (y'_t \cdot dt + y'_v \cdot dv) + u'_z \cdot (z'_t \cdot dt + z'_v \cdot dv).$$

Нескладно побачити, що вирази, що стоять у дужках, є не що інше, як диференціали **функцій** x, y, z (від t, v), так що ми можемо написати:

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz.$$

Ми прийшли до тієї ж **форми** диференціала, що і у випадку, коли x, y, z були незалежними змінними (але значення символів dx, dy, dz тут, звісно, вже інше).

Отже, *для функцій кількох змінних маємо **інваріантність** форми (першого) диференціала*, як і для функцій однієї змінної.

(Зазначимо, що той самий висновок справедливий і при одному припущенні **диференційовності** всіх функцій, що розглядаються. Щоб переконатися у цьому, достатньо показати, що результатом композиції диференційовних функцій буде також диференційовна функція.)

Може статися, що x, y, z залежатимуть від різних змінних, наприклад,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t, w), \quad z = \chi(v, w).$$

У такому разі ми завжди можемо вважати, що

$$x = \varphi(t, v, w), \quad y = \psi(t, v, w), \quad z = \chi(t, v, w),$$

і всі попередні міркування будуть застосовні і до цього випадку.

Наслідки. Для випадку, коли x і y були функціями однієї змінної, ми мали такі формули:

$$d(cx) = c \cdot dx, \quad d(x \pm y) = dx \pm dy,$$
$$d(x \cdot y) = y \cdot dx + x \cdot dy,$$
$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y \cdot dx - x \cdot dx}{dy^2}.$$

Ці формули справедливі й у тому випадку, коли x і y є функціями будь-якого числа змінних, тобто коли

$$x = \varphi(t,\ v,\ \dots), \quad y = \psi(t,\ v,\ \dots).$$

Доведемо, наприклад, останню формулу.

Для цього приймемо спочатку x і y за незалежні змінні; тоді

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)'_x \cdot dx + \left(\frac{x}{y}\right)'_y \cdot dy = \frac{1}{y} \cdot dx - \frac{x}{y^2} \cdot dy = \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{y^2}.$$

Бачимо, що при цьому припущенні диференціал має той самий вигляд, що й для функцій x і y **однієї** змінної. На підставі ж інваріантності форми диференціала можна стверджувати, що ця формула справедлива й у тому випадку, коли x і y є функціями будь-якого числа змінних.

Доведена властивість повного диференціала та наслідки з нього дають змогу спрощувати обчислення диференціалів, наприклад:

1)

$$d \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y \cdot dx - x \cdot dy}{x^2 + y^2};$$

nebayduzhi.math@gmail.com

2)

$$d\frac{x}{x^2+y^2+z^2} = \frac{(x^2+y^2+z^2)\,dx - x\cdot d(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$
$$= \frac{(-x^2+y^2+z^2)\,dx - 2xy\cdot dy - 2xz\cdot dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Оскільки коефіцієнтами при диференціалах незалежних змінних є відповідні **частинні похідні**, то звідси відразу ж виходять значення цих останніх. Наприклад,

$$u = arctg\frac{x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y\cdot dx}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x\cdot dy}{x^2+y^2};$$

$$u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

(порівняйте з пр. 177.2 та пр. 177.3).

186. Застосування повного диференціала у наближених обчисленнях

Аналогічно до диференціала функції від однієї змінної (розд. 108) і повний диференціал функції від декількох змінних з успіхом застосовується у наближених обчисленнях при оцінюванні похибок. Нехай, наприклад, ми маємо функцію $u = f(x,y)$, причому, визначаючи значення x і y, ми допускаємо похибки, скажімо, Δx та Δy. Тоді і значення u, обчислене за неточними значеннями аргументів, також вийде з похибкою $\Delta u = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,y)$. Йдеться про **оцінку** цієї похибки, якщо відомі оцінки похибок Δx та Δy.

Замінюючи (наближено) приріст функції її диференціалом (що виправдано лише для досить малих значеннях Δx і Δy), отримаємо

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy. \tag{186.1}$$

Тут і похибки Δx та Δy, і коефіцієнти при них можуть бути як додатними, так і від'ємними; замінюючи ті та інші їх абсолютними величинами, прийдемо до нерівності

$$|\Delta u| \leqslant \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\cdot|\Delta x| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\cdot|\Delta y|.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо через $\delta u, \delta x, \delta y$ позначити **максимальні** абсолютні похибки (чи **границі** для абсолютних похибок), можна, очевидно, прийняти

$$\delta u = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \cdot \delta x + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \cdot \delta y. \tag{186.2}$$

Наведемо приклади.

1) Насамперед, за допомогою виведених формул легко отримати **правила**, які зазвичай застосовуються при наближених обчисленнях. Нехай $u = xy$, $(x >, \ y > 0)$, так що
$du = y{\cdot}dx{+}x{\cdot}dy$; замінюючи диференціали приростами, отримаємо $\Delta u = y{\cdot}\Delta x{+}x{\cdot}\Delta y$ (186.1) або, переходячи до границі похибок (186.2);

$$\delta u = y \cdot \delta x + x \cdot \delta y.$$

Ділячи обидві частини цієї рівності на $u = xy$, прийдемо до остаточної формули

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}, \tag{186.3}$$

що виражає таке **правило**: *(максимальна) відносна похибка добутку дорівнює сумі (максимальних) відносних похибок множників.*

Можна було б зробити простіше — спочатку прологарифмувати формулу $u = xy$, а потім продиференціювати:

$$\ln u = \ln x + \ln y, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} \quad \text{і так далі.}$$

(Звертаємо увагу читача на те, що диференціал $\ln u$ ми обчислюємо так, **якби** u була незалежною змінною, хоча насправді вона є функцією від x та y (розд. 175). Це зауваження слід мати на увазі і нижче.)

Якщо $u = \frac{x}{y}$, то за цим методом знайдемо

$$\ln u = \ln x - \ln y, \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y};$$

переходячи до абсолютних величин і до максимальних похибок, ми отримаємо знову формулу (186.3). Отже, *(максимальна) відносна похибка частки дорівнює сумі (максимальних) відносних похибок діленого і дільника.*

2) Часте застосування знаходить обчислення похибок у топографії, головним чином, при обчисленні не виміряних безпосередньо елементів трикутника — за виміряними його елементами. Наведемо приклади з цієї галузі.

nebayduzhi.math@gmail.com

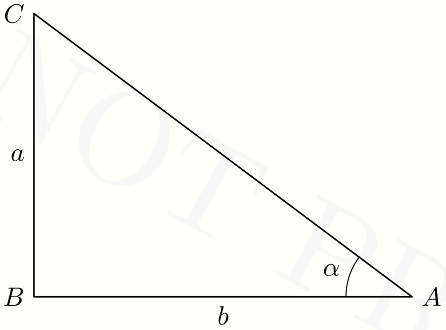


Рис. 186.1

Нехай у прямокутному трикутнику ABC (рис. 186.1) катет $AB = b$ та прилеглий кут $\angle BAC = \alpha$ виміряні; другий же катет обчислюється за формулою: $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Як позначаються на значенні a похибки при вимірюванні b і α?

Диференціюючи, отримаємо

$$da = \operatorname{tg} \alpha \cdot db + \frac{b}{\cos^2 \alpha} \cdot d\alpha,$$

і

$$\delta a = \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta b + \frac{b}{\cos^2 \alpha} \cdot \delta \alpha.$$

Нехай, наприклад, вимірювання дали такі результати:

$$b = 121{,}56 \text{ м} \pm 0{,}05 \text{ м}, \quad \alpha = 25^\circ 21' 40'' \pm 12'',$$

тоді

$$a = 57{,}62 \text{ м}.$$

Визначаючи по нашій формулі δa, покладемо в ній $\delta b = 0{,}05$, а $\delta \alpha = \dfrac{12''}{206265''}$ (адже $\delta \alpha$ треба виразити в радіанах, а один радіан дорівнює саме $\dfrac{60'' \cdot 60 \cdot 360}{2\pi} \doteq 206265''$). Ми отримаємо

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \delta b = 0{,}0237, \quad \frac{b}{\cos^2 \alpha} \delta \alpha = 0{,}0087,$$

отже, округляючи, можна вважати $\delta a = 0{,}04$. Отже, $a = 57{,}62 \text{ м} \pm 0{,}04$ м.

3) Знайдемо похибку при знаходженні сторони a косокутного трикутника ABC (рис. 186.2) за такою формулою

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

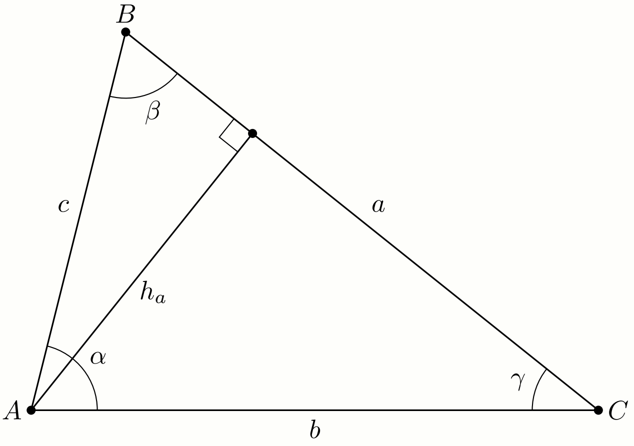


Рис. 186.2

Користуючись результатами пр. 177.5, можна за формулою (186.2) відразу написати:

$$\delta a = \frac{b - c\cdot\cos\alpha}{a}\cdot\delta b + \frac{c - b\cdot\cos\alpha}{a}\cdot\delta c + \frac{bc\cdot\sin\alpha}{a}\cdot\delta\alpha.$$

З креслення ж маємо безпосередньо:

$$b - c\cdot\cos\alpha = a\cdot\cos\gamma,\quad c - b\cdot\cos\alpha = a\cdot\cos\beta,\quad bc\cdot\sin\alpha = a\cdot h_a,$$

де h_a є висота трикутника, опущена з вершини A. Отже, виявляється, що

$$\delta a = \cos\gamma\cdot\delta b + \cos\beta\cdot\delta c + h_a\cdot\delta\alpha;$$

за цією формулою легко судити про вплив на a окремих похибок $\delta b, \delta c, \delta\alpha$.

187. Однорідні функції

Як відомо, однорідними многочленами називаються многочлени, що складаються з членів одного і того ж виміру. Наприклад, вираз

$$3x^2 - 2xy + 5y^2$$

є однорідний многочлен другого степеня. Якщо помножити тут x і y на деякий множник t, то весь многочлен отримає множник t другого степеня. Подібна обставина справедлива для будь-якого однорідного многочлена.

Однак і функції більш складної природи можуть мати таку ж властивість; якщо взяти, наприклад, вираз

$$x\cdot\frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x - y}\cdot\ln\frac{x}{y},$$

то й він набуває множника t^2 при множенні обох аргументів x і y на t, як і однорідний многочлен другого степеня. Подібну функцію природно також назвати **однорідною функцією** другого степеня.

Дамо загальне означення.

Функція $f(x_1,\ \dots,\ x_n)$ *від* n *аргументів, визначена в області* $\mathcal{D}$, *називається* ***однорідною функцією*** m***-го степеня***, *якщо при множенні всіх її аргументів на множник* t *функція набуває цього ж множника* m*-ого степеня*, тобто якщо тотожно виконується рівність

$$f(tx_1,\ \dots,\ tx_n) = t^m \cdot f(x_1,\ \dots,\ x_n). \tag{187.1}$$

Для простоти ми обмежимося припущенням, що $x_1,\ \dots,\ x_n$ і t тут набувають лише додатних значень. Нехай область $\mathcal{D}$, в якій ми розглядаємо функцію f, разом з будь-якою своєю точкою $M(x_1,\ \dots,\ x_n)$ містить і всі точки вигляду $M_t(tx_1,\ \dots,\ tx_n)$ при $t > 0$, тобто весь промінь, що виходить із початкової точки і проходить через точку M.

Степінь однорідності m може бути будь-яким дійсним числом; так, наприклад, функція

$$x^\pi \cdot \sin\frac{x}{y} + y^\pi \cdot \cos\frac{x}{y}$$

є однорідною функцією степеня π від аргументів x і y.

Спробуємо тепер отримати **загальний вираз** однорідної функції степеня m.

Нехай спершу $f(x_1,\ \dots,\ x_n)$ є однорідна функція **нульового** степеня; тоді

$$f(tx_1,\ tx_2,\ \dots,\ tx_n) = f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n).$$

Поклавши $t = \dfrac{1}{x_1}$ отримаємо

$$f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = f\left(1,\ \frac{x_2}{x_1},\ \dots,\ \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Якщо ввести функцію від $n-1$ аргументів:

$$\varphi(u_1,\ \dots,\ u_{n-1}) = f(1,\ u_1,\ \dots,\ u_{n-1}),$$

то виявиться, що

$$f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1},\ \dots,\ \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Отже, будь-яка однорідна функція нульового степеня задається у вигляді функції частки всіх аргументів і одного з них. Навпаки, очевидно, також справедливо, так що попередня рівність дає **загальний вираз однорідної функції нульового степеня.**

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо $f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$ є однорідна функція m-го степеня (і лише в цьому випадку), відношення її до x_1^m буде однорідною функцією нульового степеня, так що

$$\frac{f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)}{x_1^m} = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1},\ \dots,\ \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Отже, ми отримуємо **загальний вигляд однорідної функції степеня m:**

$$f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = x_1^m \cdot \varphi\left(\frac{x_2}{x_1},\ \dots,\ \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Приклад:

$$x \cdot \frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y} \cdot \ln\frac{x}{y} = x^2 \cdot \frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}}{\frac{y}{x}-1} \cdot \ln\frac{y}{x}.$$

188. Формула Ойлера

Припустимо тепер, що однорідна (степеня m) функція $f(x,y,z)$ має у (відкритій) області $\mathcal{D}$ неперервні частинні похідні за всіма аргументами. (Лише для спрощення запису ми обмежуємося тут випадком трьох змінних.) Фіксуючи довільну точку x_0, y_0, z_0 з $\mathcal{D}$, з основної тотожності (187.1) матимемо для будь-якого $t > 0$:

$$f(tx_0,\ ty_0,\ tz_0) = t^m \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

Продиференціюємо тепер цю рівність за t: ліву частину рівності — за правилом диференціювання композиції функцій (саме для того, щоб мати право застосувати це правило, ми і припустили неперервність частинних похідних (розд. 181)), праву — просто як степеневу функцію. Отримаємо

$$f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot x_0 + f'_y(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot y_0 + f'_z(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot z_0 = mt^{m-1} \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

Якщо покласти тут $t = 1$, то прийдемо до наступної формули:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) \cdot x_0 + f'_y(x_0, y_0, z_0) \cdot y_0 + f'_z(x_0, y_0, z_0) \cdot z_0 = m \cdot f(x_0, y_0, z_0).$$

Отже, для будь-якої точки (x_0, y_0, z_0) виконується рівність

$$f'_x(x,y,z) \cdot x + f'_y(x,y,z) \cdot y + f'_z(x,y,z) \cdot z = m \cdot f(x,y,z). \tag{188.1}$$

Ця рівність зветься *формулою Ойлера.*

Твердження 188.1. *Ми бачили, що цю рівність задовольняє будь-яка однорідна функція степеня m, що має неперервні похідні. Покажемо тепер, що й навпаки кожна функція, яка неперервна разом зі своїми частинними похідними і задовольняє рівність Ойлера* (188.1), *необхідно є однорідною функцією степеня m.*

nebayduzhi.math@gmail.com

Доведення. Справді, нехай $f(x, y, z)$ буде такою функцією. Фіксуючи довільні значення x_0, y_0, z_0, розглянемо таку функцію від t (при: $t > 0$):

$$\varphi(t) = \frac{f(tx_0,\ ty_0,\ tz_0)}{t^m}.$$

Вона визначена і неперервна при всіх $t > 0$. Обчисливши її похідну $\varphi'(t)$ за правилом диференціювання дробу, отримаємо також дріб, чисельник якого дорівнює

$$[f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot x_0 + f'_y(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot y_0 + f'_z(tx_0, ty_0, tz_0) \cdot z_0] \cdot t - m \cdot f(tx_0, ty_0, tz_0).$$

Замінивши у формулі Ойлера (188.1) x, y, z на tx_0, ty_0, tz_0, бачимо, що цей чисельник дорівнює нулю, отже $\varphi'(t) = 0$ і $\varphi(t) = c = \text{const}$ (при $t > 0$). Щоб визначити сталу c, покладемо $t = 1$ у рівності, що визначає $\varphi(t)$. Отримаємо що

$$c = f(x_0, y_0, z_0).$$

Отже,

$$\varphi(t) = \frac{f(tx_0,\ ty_0,\ tz_0)}{t^m} = f(x_0, y_0, z_0)$$

або

$$f(tx_0,\ ty_0,\ tz_0) = t^m \cdot f(x_0, y_0, z_0),$$

що й потрібно було довести. □

Можна сказати, що формула Ойлера так само характеризує однорідну функцію степеня m, як і основна рівність (187.1).

5.4. Похідні і диференціали вищих порядків

189. Похідні вищих порядків

Ми тут для спрощення запису обмежуємось випадком функції трьох змінних. Якщо функція $u = f(x, y, z)$ має в деякій (відкритій) області $\mathcal{D}$ частинну похідну за однією із змінних, то названа похідна, сама будучи функцією від x, y, z, може в деякій точці (x_0, y_0, z_0) мати частинні похідні за тією ж чи за будь-якою іншою змінною. Для початкової функції $u = f(x, y, z)$ ці останні похідні будуть частинними похідними **другого порядку** (або другими частинними похідними).

Якщо перша похідна була взята, наприклад, за x, то її похідні за x, y, z позначаються так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x\,\partial z}$$

або

$$u''_{x^2} = f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0), \quad u''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0, z_0), \quad u''_{xz} = f''_{xz}(x_0, y_0, z_0).$$

(Зрозуміло, диференціальні позначення слід розглядати як цілісні символи. Квадрат ∂x^2 у знаменнику замінює умовно $\partial x \partial x$ та вказує на диференціювання **двічі** за x; так само значок x^2 внизу замінює xx. Це потрібно мати на увазі й надалі.)

Аналогічним чином визначаються похідні 3-го, 4-го тощо **порядків** (**треті, четверті**, ... похідні). Загальне означення частинної похідної n-го **порядку** може бути дано індуктивно.

Зауважимо, що частинна похідна вищого порядку, взята за різним змінним, наприклад,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial z\,\partial y\,\partial z}, \quad \dots,$$

називається **змішаною** частинною похідною.

Приклади.

1) Нехай $u = x^4 y^3 z^2$, тоді;

$$u'_x = 4x^3y^3z^2, \quad u''_{xy} = 12x^3y^2z^2,$$

$$u'_y = 3x^4y^2z^2, \quad u''_{yx} = 12x^3y^2z^2,$$

$$u'_z = 2x^4y^3z, \quad u''_{zx} = 8x^3y^3z,$$

$$u'''_{xyz} = 24x^3y^2z, \quad u^{(4)}_{xyzx} = 72x^2y^2z,$$

$$u'''_{yxx} = 36x^2y^2z^2, \quad u^{(4)}_{yxxz} = 72x^2y^2z,$$

$$u'''_{zxy} = 24x^3y^2z, \quad u^{(4)}_{zxyx} = 72x^2y^2z,$$

2) Ми мали вже (розд. 177) частинні похідні для функції $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2};$$

обчислимо тепер подальші похідні:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

3) Для функції

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -x\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3x^2\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}};$$

аналогічні вирази отримаємо і для $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Склавши їх, переконаємося, що функція u задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

4) Нехай $y = f(x+at)+\varphi(x-at)$, де $a = \text{const}$, а $f(u), \varphi(u)$ — дві **довільні** функції, що мають першу і другу похідні. Показати, що y задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

для будь-яких функцій f і φ.

Користуючись правилом диференціювання композиції функцій знаходимо (штрихи в позначеннях f', φ', ... означають похідні за аргументом u функцій $f(u)$, $\varphi(u)$):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x+at) + \varphi'(x-at),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x+at) + \varphi''(x-at),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f'(x+at)\cdot a + \varphi'(x-at)\cdot(-a),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f''(x+at)\cdot a^2 + \varphi''(x-at)\cdot(-a)^2 = a^2\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

що й потрібно було довести.

5) Довести, що вираз

$$z = x\cdot\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

(де φ і ψ **довільні** функції, що мають першу та другу похідні), задовольняє рівняння

$$x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\cdot\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^2}\cdot\psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}\cdot\psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^3}\cdot\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2y}{x^3}\cdot\psi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4}\cdot\psi''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{y}{x^2}\cdot\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\cdot\psi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x^3}\cdot\psi''\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{x}\cdot\varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\cdot\psi''\left(\frac{y}{x}\right);$$

помножуючи останні три похідні, відповідно, на x^2, $2xy$, y^2 і додаючи, справді отримуємо 0.

190. Теорема про змішані похідні

Розглядаючи пр. 189.1 та пр. 189.2 ми мали збіг змішаних похідних, узятих за одними і тими же змінними, але в різному порядку.

Потрібно відразу ж зазначити, що це зовсім не випливає з необхідністю з **означення** змішаних похідних, так що існують випадки, коли згаданого збігу немає.

Наприклад розглянемо функцію

$$f(x,y)=xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\quad (\text{при } x^2+y^2>0),\quad f(0,0)=0.$$

Маємо

$$f'_x(0,0)=y\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\quad (\text{при } x^2+y^2>0),\quad f'_x(0,0)=0.$$

Надавши x окреме значення, що дорівнює нулю, будемо мати при будь-якому y (у тому числі і при $y=0$): $f'_x(0,y)=-y$. Продиференціювавши цю функцію за y, отримаємо $f''_{xy}(0,y)=-1$. Звідси випливає, зокрема, що в точці $(0,0)$ матимемо

$$f''_{xy}(0,0)=-1.$$

Обчисливши так само f''_{yx} в точці $(0,0)$, отримаємо

$$f''_{yx}(0,0)=1.$$

Отже, для цієї функції $f''_{xy}(0,0)\neq f''_{yx}(0,0)$.

Проте, помічений на прикладах збіг змішаних похідних, що відрізняються лише порядком диференціювань, не випадковий: це справедливо для широкого класу випадків, при дотриманні певних умов. Почнемо з наступної простої теореми.

Теорема 190.1. *Припустимо, що*
1) $f(x,y)$ визначена у (відкритій) області $\mathcal{D}$,
2) в цій області існують перші похідні f'_x і f'_y, а також другі ***змішані*** *похідні f''_{xy} та f''_{yx} і, нарешті,*
3) ці останні похідні f''_{xy} і f''_{yx}, як функції x і y, неперервні у деякій точці (x_0,y_0) області $\mathcal{D}$. Тоді у цій точці

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0).\tag{190.1}$$

Доведення. Розглянемо вираз

$$W=\frac{f(x_0+h,y_0+k)-(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)}{hk},$$

де h, k відмінні від нуля, наприклад, додатні, і до того ж настільки малі, що в $\mathcal{D}$ міститься весь прямокутник $[x_0,\ x_0+h;\ y_0,\ y_0+k]$; такими ми їх фіксуємо до кінця міркування.

Введемо тепер допоміжну функцію від x:

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0+k) - f(x, y_0)}{k},$$

яка на проміжку $[x_0,\ x_0+h]$ (з умови 2) має похідну

$$\varphi'(x) = \frac{f'_x(x, y_0+k) - f'_x(x, y_0)}{k}$$

і, отже, неперервна. За допомогою цієї функції вираз W, який дорівнює

$$W = \frac{1}{h}\left(\frac{f(x_0+h, y_0+k) - (x_0+h, y_0)}{k} - \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}\right), \tag{190.2}$$

можна переписати у вигляді:

$$W = \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}.$$

Оскільки для функції $\varphi(x)$ на проміжку $[x_0,\ x_0+h]$ виконуються всі умови теореми Лаґранжа (теор. 112.1), то ми можемо, за формулою скінченних приростів, переписати вираз W так:

$$W = \varphi'(x_0+\theta_1 h) = \frac{f'_x(x_0+\theta_1 h,\ y_0+k) - f'_x(x_0+\theta_1 h,\ y_0)}{k}, \quad (0 < \theta_1 < 1).$$

Користуючись існуванням другої похідної $f''_{xy}(x, y)$, знову застосуємо формулу скінченних приростів, цього разу до функції від y: $f'_x(x_0+\theta_1 h,\ y)$ на проміжку $[y_0,\ y_0+k]$. Остаточно, отримаємо

$$W = f''_{xy}(x_0+\theta_1 h,\ y_0+\theta_2 k) \quad (0 < \theta_2 < 1). \tag{190.3}$$

Але вираз W містить x і y з одного боку і h й k з іншого однаковим чином. Тому можна обміняти їх ролі та, ввівши допоміжну функцію

$$\psi(y) = \frac{f(x_0+h,\ y) - f(x_0, y)}{h},$$

аналогічними міркуваннями отримати результат:

$$W = f''_{yx}(x_0+\theta_3 h,\ y_0+\theta_4 k) \quad (0 < \theta_3,\ \theta_4 < 1). \tag{190.4}$$

З порівняння (190.3) і (190.4), знаходимо:

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1 h,\ y_0+\theta_2 k) = f''_{yx}(x_0+\theta_3 h,\ y_0+\theta_4 k).$$

Спрямувавши тепер h і k до нуля, перейдемо в цій рівності до границі. Зважаючи на обмеженість множників θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, аргументи і справа, і зліва прямують, відповідно, до x_0, y_0. А тоді, використовуючи умову 3) теореми, остаточно отримаємо:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0),$$

що й потрібно було довести. □

Отже, **неперервні** змішані похідні f''_{xy} і f''_{yx} завжди рівні.

У наведеному вище прикладі ці похідні

$$f''_{xy} = f''_{yx} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\left(1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \quad (x^2+y^2>0)$$

не мають границі при $x\to 0$, $y\to 0$ і, отже, у точці $(0,0)$ мають **розрив**: до цього випадку наша теорема непридатна.

Цікаво з'ясувати, як рівність змішаних похідних (190.1) пов'язана з питанням про повторні границі, розглянуті в розд. 168. Якщо припустити існування перших похідних, то, написавши вираз W у вигляді (190.2), легко побачити, що

$$\lim_{k\to 0} W = \frac{f'_y(x_0+h,\ y_0) - f'_y(x_0,\ y_0)}{h} \quad (h=\mathrm{const}) \tag{190.5}$$

і, аналогічно,

$$\lim_{h\to 0} W = \frac{f'_x(x_0,\ y_0+k) - f'_y(x_0,\ y_0)}{k} \quad (k=\mathrm{const}). \tag{190.6}$$

Тоді, за означенням похідної,

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'_y(x_0+h,\ y_0) - f'_y(x_0,\ y_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} W, \tag{190.7}$$

$$f_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0}\frac{f'_x(x_0,\ y_0+k) - f'_y(x_0,\ y_0)}{k} = \lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0} W. \tag{190.8}$$

Отже, питання про існування та рівність змішаних похідних тотожне з питанням про існування та рівність **повторних границь** для виразу W (що залежить від h і k).

Це зауваження дає змогу **посилити** доведену теорему так.

Теорема 190.2. *Припустимо, окрім існування перших похідних, існування лише однієї із змішаних похідних, наприклад,* $f''_{xy}(x,y)$ *в околі точки* (x_0,y_0) *(але можливо не в самій цій точці). Нехай, далі, існує скінченна границя*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f''_{xy}(x,y)=A.$$

Звідси вже випливає існування у точці (x_0,y_0) *обох змішаних похідних і їх рівність* (190.1).

Це твердження належить Шварцу (нім. Hermann Schwarz, Хе́рман Шва́рц).

Доведення. Справді, виходячи із зроблених припущень, можна, як і вище, прийти до рівності (190.3), а потім, користуючись існуванням границі функції $f''_{xy}(x,y)$ у точці (x_0,y_0), прийти до існування **подвійної границі** при одночасному прямуванні h і k до нуля:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} W=A.$$

Але **прості границі** (190.5) і (190.6), за припущенням, існують: тоді за теор. 168.1, існують також повторні границі (190.7) і (190.8) і дорівнюють подвійній. А це означає, що існують і рівні між собою похідні $f''_{xy}(x_0,y_0)$ і $f''_{yx}(x_0,y_0)$. ☐

191. Узагальнення

Звернемося, нарешті, до доведення **загальної** теореми про змішані похідні.

Теорема 191.1. *Нехай функція* $u=f(x_1,\ \dots,\ x_n)$ *від* n *змінних визначена у (відкритій)* n*-вимірній області* $\mathcal{D}$ *і має в цій області всілякі частинні похідні до* $(k-1)$*-го порядку включно і* ***змішані*** *похідні* k*-го порядку, причому всі ці похідні неперервні в* $\mathcal{D}$*.*

За цих умов значення будь-якої k*-ї* ***змішаної*** *похідної не залежить від порядку, у якому робляться послідовні диференціювання.*

Доведення. Для $k=2$ теорема вже доведена, отже, наприклад,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i}.$$

Справді, щоб звести цей випадок до першої теореми, достатньо помітити, що при обчисленні цих похідних можна всім іншим змінним (крім x_i і x_j) надати сталі значення, причому названі похідні, неперервні по всій сукупності змінних, будуть неперервні і по змінним x_i і x_j, при фіксуванні інших. Нехай тепер $k>2$.

Доведемо спочатку нашу теорему для того випадку, коли при обчисленні похідної k-го порядку зроблена перестановка тільки між двома **послідовними** диференціюваннями, тобто доведемо справедливість рівності

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_h} \partial x_{i_{h+1}} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{h+1}} \partial x_{i_h} \dots \partial x_{i_k}}. \tag{191.1}$$

(Тут $i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_h,\ i_{h+1},\ \dots,\ i_k$ є деяке **розміщення** з n знаків $1,\ 2,\ \dots,\ n$ по k, з можливими повтореннями.)

Зробивши послідовно необхідні для обчислення цих похідних диференціювання, бачимо, що похідні $(h-1)$-го порядку в обох випадках однакові. Застосувавши до них вже доведену для $k = 2$ теорему, отримаємо, що і похідні $(h+1)$-го порядку рівні. Далі ж в обох випадках потрібно робити однакові операції, які і приведуть до однакових результатів.

Отже, рівність (191.1), справді, справедлива, і теорема для цього випадку доведена. Але оскільки будь-яка перестановка елементів може бути досягнута послідовністю перестановок **двох послідовних** елементів, то теорема доведена і в загальному випадку: за умови неперервності відповідних похідних завжди можна переставляти між собою диференціювання за різними змінними. ☐

Неперервність похідних ми надалі завжди припускатимемо, так що для нас порядок послідовних диференціювань буде неважливим. Це дає нам право далі при позначенні змішаної похідної збирати разом диференціювання за однією і тією самою змінною. Якщо u є функція від $x_1,\ \dots,\ x_n$, то ми будемо записувати таку похідну у вигляді

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

де $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$; якщо u є функція від $x,\ y,\ \dots,\ z$, то — у вигляді

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \dots \partial z^{\gamma}},$$

де $\alpha + \beta + \dots + \gamma = k$. Окремі “показники” $\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n$ або $\alpha,\ \beta,\ \dots,\ \gamma$ можуть бути і нулями: наявність диференціала з “показником” 0 означає **відсутність** диференціювання за відповідною змінною.

192. Похідні вищих порядків композиції функцій

Теорема 192.1. *Нехай маємо функцію*

$$u = f(x_1,\ \dots,\ x_n),$$

де $x_1,\ \ldots,\ x_n$ *є функції від змінних* $t_1,\ \ldots,\ t_m$*:*

$$x_i = \varphi_i(t_1,\ \ldots,\ t_m) \quad (i = 1,\ \ldots,\ n).$$

Щодо функцій f *та* φ_i *припустимо, що вони мають неперервні частинні похідні за всіма змінними до* k*-го порядку включно. Розглядаючи и як складену функцію від змінних* $t_1,\ \ldots,\ t_m$*:*

$$u = F(t_1,\ \ldots,\ t_m) = f\Big((\varphi_1(t_1,\ \ldots,\ t_m),\ \ldots,\ \varphi_n(t_1,\ \ldots,\ t_m)\Big),$$

доведемо, що складена функція має також усі похідні до k*-го порядку включно, і до того ж неперервні.*

Точніше кажучи, ми доводитимемо таке твердження: ***кожна похідна*** k***-го порядку функції*** F ***існує та утворюється з похідних функції*** f ***(за її аргументами*** $x_1,\ \ldots,\ x_n$***) та функцій*** φ_i ***(за їх аргументами*** $t_1,\ \ldots,\ t_m$***), порядку не вище*** k***-го, за допомогою множень та додавань.***

Доведення. Доведення вестимемо за методом математичної індукції. Для $k = 1$ це твердження справедливе; воно випливає з виведеної раніше формули для похідної композиції функцій (розд. 181).

Припустимо, що теорема справедлива для похідних всіх порядків, нижчих, ніж k; доведемо, що вона справедлива і для похідних k-го порядку. Кожна k-а похідна виходить із деякої $(k-1)$-ї за допомогою диференціювання за одним з t_j. Уявимо собі похідну $(k-1)$-го порядку. Вона за припущенням виходить з похідних функцій f і φ_i за змінними x і t порядків не вище $k-1$ за допомогою множень і додавань, тобто є сумою добутків згаданих похідних. Диференціюючи за t_j будь-який із цих добутків, ми повинні по черзі диференціювати кожен із множників. Якщо цей множник є похідною порядку не вище $k-1$ від однієї з функцій φ, то в результаті його диференціювання ми отримаємо похідну тієї ж функції порядку не вище k. Якщо це буде похідна порядку не вище $k-1$ функції f, то розглядаючи цю похідну як складену функцію від змінних t і диференціюючи її за t_j, ми замінимо її відомою сумою добутків. (Саме припущення про **неперервність** всіх похідних функції f і забезпечує право користуватися відомим нам правилом для обчислення похідних композиції функцій (розд. 181).)

В результаті, для аналізованої похідної k-го порядку вийде, очевидно, вираз саме зазначеного вигляду, що і доводить наше твердження.

Неперервність похідних складеної функції F випливає з самого способу складання їх з похідних f і φ_i, оскільки останні неперервні за припущенням. ☐

193. Диференціали вищих порядків

Нехай в області $\mathcal{D}$ задана деяка функція $u = f(x_1, \ldots, x_n)$, що має неперервні частинні похідні першого порядку. Тоді, як ми знаємо, (повним) диференціалом du називається вираз:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n,$$

де $dx_1, \ldots, dx_n$ — довільні прирости незалежних змінних $x_1, \ldots, x_n$.

Ми бачимо, що du також є деякою функцією від $x_1, \ldots, x_n$. Якщо припустити існування неперервних частинних похідних другого порядку для u, то du буде мати неперервні частинні похідні першого порядку, і можна говорити про (повний) диференціал від цього диференціала du, $d(du)$, який називається **диференціалом другого порядку** (або **другим диференціалом**) від u; він позначається символом d^2u.

Важливо підкреслити, що прирости $dx_1, \ldots, dx_n$, при цьому розглядаються як сталі і залишаються одними і тими ж при переході від одного диференціала до наступного.

Отже, якщо скористатися правилами диференціювання з розд. 185, будемо мати

$$\begin{aligned} d^2u = d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n\right) = \\ = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \cdot dx_1 + \cdots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \cdot dx_n \end{aligned}$$

або, розкриваючи,

$$\begin{aligned} d^2u = &\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_n} dx_n\right) \cdot dx_1 + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\, \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2\, \partial x_n} dx_n\right) \cdot dx_2 + \\ &\ldots \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_n\, \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n\, \partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} dx_n\right) \cdot dx_n = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} dx_n^2 + \\ &+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_2} dx_1 dx_2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\, \partial x_3} dx_1 dx_3 + \cdots + \\ &+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\, \partial x_3} dx_2 dx_3 + \cdots + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}\, \partial x_n} dx_{n-1} dx_n. \end{aligned}$$

Аналогічно визначається **диференціал третього порядку**, d^3u, тощо. Взагалі, якщо диференціал $(k-1)$-го порядку, $d^{k-1}u$, вже визначений, то **диференціал k-го порядку** d^ku визначається як (повний) диференціал від диференціала $(k-1)$-го порядку:

$$d^ku = d(d^{k-1}u).$$

(Легко ввести поняття і про **частинні** диференціали будь-якого порядку; на цьому зупинятись не будемо.)

Якщо для функції u існують неперервні частинні похідні всіх порядків до k-го порядку включно, то існування цього k-го диференціала забезпечено. Але розгорнуті вирази послідовних диференціалів стають дедалі більш складними. З метою спрощення їх запису вдаються до наступного способу.

Насамперед, у виразі першого диференціала **умовно** “винесемо букву u за дужки”; тоді його **символічно** можна буде записати так:

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)\cdot u.$$

Тепер помічаємо, що якщо у виразі для другого диференціала також “винести u за дужки”, то вираз в дужках **формально** становить у розгорнутому вигляді квадрат виразу

$$\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n;$$

тому другий диференціал **символічно** можна записати так:

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2\cdot u.$$

Аналогічно можна записати третій диференціал тощо. Це правило — загальне.

Твердження 193.1. *При будь-якому k матимемо* ***символічну*** *рівність*

$$d^ku = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k\cdot u, \qquad (193.1)$$

Це правило можна розуміти так: спочатку многочлен, що стоїть у дужках, **формально** зводиться за правилами алгебри до степеня k, потім усі отримані члени “помножуються” на u (яке дописується у чисельниках при ∂^k), і лише після цього всім символам повертається їх значення як похідних та диференціалів.

Доведення. Ми бачили, що це правило справедливе при $k = 1,\ 2$; тому досить показати, що якщо воно справедливе для d^ku, то воно буде також справедливе і для $d^{k+1}u$.

Припустивши, що цей закон для $d^k u$ виконується, матимемо у розгорнутому вигляді:

$$d^k u = \sum C_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \cdot \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \cdot dx_1^{\alpha_1} \dots dx_n^{\alpha_n},$$

де підсумовування поширюється на всілякі групи невід'ємних цілих чисел $\alpha_1, \ \dots, \ \alpha_n$, що задовольняють умову $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$, а

$$C_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} = \frac{k!}{\alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!}$$

є "поліноміальні" коефіцієнти.

Припускаючи, що існують неперервні похідні $(k+1)$-го порядку, продиференціюємо попередню формулу; ми отримаємо

$$\begin{aligned} d^{k+1}u = \sum C_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \cdot \Bigg[& \frac{d^{k+1}u}{\partial x_1^{\alpha_1+1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1+1} dx_2^{\alpha_2} \dots dx_n^{\alpha_n} + \\ & + \frac{d^{k+1}u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2+1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2+1} \dots dx_n^{\alpha_n} + \dots \\ & \dots + \frac{d^{k+1}u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n+1}} dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \dots dx_n^{\alpha_n+1} \Bigg]. \end{aligned}$$

Очевидно, те ж саме ми могли б отримати, формально перемноживши символічні вирази:

$$\left(\sum C_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \cdot \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \cdot dx_1^{\alpha_1} \dots dx_n^{\alpha_n} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)$$

і потім приписавши u. Але цей "добуток" є не що інше, як

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^{k+1}$$

так що

$$d^{k+1}u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^{k+1} \cdot u,$$

що й потрібно було довести. □

З попередніх міркувань бачимо, що k-й диференціал є **однорідним цілим многочленом степеня** k, або, як кажуть, є **формою** k**-го степеня** відносно диференціалів незалежних змінних, коефіцієнтами при яких служать частинні похідні k-го порядку, помножені на цілі сталі ("поліноміальні" коефіцієнти).

Наприклад, якщо $u = f(x, y)$, то

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3,$$

$$d^4u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}dx^4 + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y}dx^3dy + 6\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}dx^2dy^2 + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y^3}dx\,dy^3 + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}dy^4,$$

Поклавши конкретно $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, будемо мати

$$du = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}, \qquad d^2u = \frac{2xy(dy^2 - dx^2) + 2(x^2-y^2)\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$d^3u = \frac{(6x^2y - 2y^3)dx^3 + (18xy^2 - 6x^3)dx^2dy + (6y^3 - 18x^2y)dx\,dy^2 + (2x^3 - 6xy^2)dy^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

Складність виразу для диференціала зростає зі збільшенням числа змінних. Якщо $u = f(x, y, z)$, то, скажімо, третій диференціал d^3u в розгорнутому вигляді такий:

$$\begin{aligned}
d^3u = {} & \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^3 u = \\
& = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}dx^3 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}dy^3 + \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}dz^3 + \\
& + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial z}dx^2dz + \\
& + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2}dx\,dz^2 + 3\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\,\partial z}dy^2dz + 3\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z^2}dy\,dz^2 + \\
& + \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\,dx\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

194. Диференціали композиції функцій

Нехай ми тепер маємо складену функцію

$$u = f(x_1,\ \dots,\ x_n),$$

де

$$x_i = \varphi_i(t_1,\ \dots,\ t_m) \quad (i = 1,\ \dots,\ n).$$

У цьому випадку перший диференціал може бути збережений у виді

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$$

(на підставі інваріантності форми першого диференціала, розд. 185). Але тут $x_1, \ \ldots, \ x_n$ є диференціалами не незалежних змінних, а функцій і, отже, самі будуть функціями, і **можуть не бути сталими**, як у попередньому випадку.

Обчисливши тепер другий диференціал нашої функції, будемо мати (якщо скористатися **правилами** диференціювання розд. 185):

$$\begin{aligned} d^2u = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \cdot dx_1 + \cdots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \cdot dx_n + \\ + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot d(dx_1) + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot d(dx_n) = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot d^2x_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot d^2x_n. \end{aligned}$$

Ми бачимо, що для диференціала порядку вище першого інваріантність форми взагалі не має місця.

Розглянемо тепер **окремий** випадок, коли $x_1, \ \ldots, \ x_n$ є **лінійними** функціями від $t_1, \ \ldots, \ t_m$, тобто коли

$$x_i = \alpha_i^{(1)} t_1 + \cdots + \alpha_i^{(m)} t_m + \beta_i \quad (i = 1, \ \ldots, \ n),$$

де $\alpha_i^{(j)}$ і β_i — сталі.

У цьому випадку матимемо

$$dx_i = \alpha_i^{(1)} dt_1 + \cdots + \alpha_i^{(m)} dt_m = \alpha_i^{(1)} \Delta t_1 + \cdots + \alpha_i^{(m)} \Delta t_m = \Delta x_i.$$

Ми бачимо, що всі перші диференціали функцій $x_1, \ \ldots, \ x_n$ у цьому випадку **сталі**, не залежать від $t_1, \ \ldots, \ t_m$; отже, ми можемо застосувати без змін викладки розд. 193. Звідси випливає, що *у разі заміни незалежних змінних* $x_1, \ \ldots, \ x_n$ ***лінійними*** *функціями від нових змінних* $t_1, \ \ldots, \ t_m$, *можуть бути збережені колишні вирази навіть для диференціалів вищих порядків.* У них диференціали $dx_1, \ \ldots, \ dx_n$, співпадають з приростами $\Delta x_1, \ \ldots, \ \Delta x_n$, але ці прирости не довільні, а залежать від приростів $\Delta t_1, \ \ldots, \ \Delta t_m$.

Це просте і важливе зауваження (що належить Коші) ми використовуємо безпосередньо в наступному розділі.

195. Формула Тейлора

Ми вже знаємо (126.2), що функція $F(t)$ за умови існування її $n+1$ перших похідних, може бути розкладена за формулою Тейлора:

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)\cdot(t-t_0) + \frac{1}{2!}F''(t_0)\cdot(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}F^{(n)}(t_0)\cdot(t-t_0)^n + \\ + \frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(t_0+\theta(t-t_0))\cdot(t-t_0)^{n+1} \quad (0<\theta<1)$$

(додатковий член узятий у формі Лаґранжа). Цю формулу, поклавши

$$t - t_0 = \Delta t = dt, \quad F(t) - F(t_0) = \Delta F(t_0),$$

можна переписати так:

$$\Delta F(t_0) = dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nF(t_0) + \\ + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(t_0+\theta\cdot\Delta t) \quad (0<\theta<1).$$

При цьому важливо підкреслити, що *величина dt, що входить в різних степенях у вирази диференціалів праворуч, точно дорівнює тому приросту Δt, яке фігурує в прирості функції зліва.*

Саме у останній формі формула Тейлора поширюється і на випадок функції кількох змінних.

Для спрощення запису обмежимося функцією $f(x,y)$ двох змінних.

Твердження 195.1. *Припустимо, що в околі деякої точки (x_0,y_0) ця функція має неперервні похідні всіх порядків до $(n+1)$-го включно. Надамо x_0 і y_0 деякі прирости Δx і Δy так, щоб прямолінійний відрізок, що з'єднує точки (x_0,y_0) і $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$, не вийшов за межі околу.*

Потрібно довести, що при зроблених припущеннях щодо функції $f(x,y)$ виконується наступна рівність:

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0,y_0) &= f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \\ &= df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y) \quad (0<\theta<1),\end{aligned} \tag{195.1}$$

причому диференціали dx і dy (що стоять праворуч в різних степенях) дорівнюють саме тим приростам Δx і Δy незалежних змінних, які породили приріст функції зліва.

nebayduzhi.math@gmail.com

Доведення. Для доведення (як і в розд. 183) введемо нову незалежну змінну t, поклавши

$$x = x_0 + t \cdot \Delta x, \quad y = y_0 + t \cdot \Delta y \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{195.2}$$

Підставивши ці значення x і y в функцію $f(x, y)$, отримаємо складену функцію від однієї змінної t:

$$F(t) = f(x_0 + t \cdot \Delta x,\ y_0 + t \cdot \Delta y).$$

Ми знаємо, що формули (195.2) геометрично виражають прямолінійний відрізок, що з'єднує точки $M_0(x_0, y_0)$ та $M_1(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$.

Тепер ми бачимо, що замість приросту

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

ми можемо розглядати приріст допоміжної функції:

$$\Delta F(0) = F(1) - F(0),$$

тому що обидва прирости рівні. Але $F(t)$ є функцією однієї змінною і має (розд. 192) $n+1$ неперервних похідних; отже, застосувавши до неї вже виведену раніше формулу Тейлора, отримаємо

$$\begin{aligned} &\Delta F(0) = F(1) - F(0) = \\ &= dF(0) + \frac{1}{2!} d^2 F(0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n F(0) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(\theta) \quad (0 < \theta < 1); \end{aligned} \tag{195.3}$$

при цьому диференціал dt дорівнює $\Delta t = 1 - 0 = 1$.

Тепер, користуючись тим, що при **лінійній** заміні змінних властивість інваріантності форми виконується і для вищих диференціалів, можемо написати, що

$$dF(0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot dx + f'_y(x_0, y_0) \cdot dy = df(x_0, y_0),$$

$$d^2 F(0) = f''_{x^2}(x_0, y_0) \cdot dx^2 + f''_{xy}(x_0, y_0) \cdot dx\, dy + f''_{y^2}(x_0, y_0) \cdot dy^2 = d^2 f(x_0, y_0),$$

і так далі. Нарешті, для $(n+1)$-го диференціала матимемо

$$d^{n+1} F(\theta) = d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y).$$

Важливо зазначити, що *тут диференціали dx і dy нічим не відрізняються від раніше взятих приростів Δx і Δy*. Справді,

$$dx = \Delta x \cdot dt = \Delta x, \quad dy = \Delta y \cdot dt = \Delta y.$$

Підставивши все це в розклад (195.3), ми й прийдемо до необхідного розкладу (195.1). □

Читач повинен усвідомити, що, хоча в диференціальній формі формула Тейлора для випадку функції кількох змінних має такий самий простий вигляд, як і для випадку функції однієї змінної, але в розгорнутому вигляді вона набагато складніша. Ось як виглядають перші три її члени навіть для функції лише двох змінних:

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)= \\
&=\left[f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y\right]+ \\
&+\frac{1}{2!}\left[f''_{x^2}(x_0,y_0)\cdot\Delta x^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)\cdot\Delta x\Delta y+f''_{y^2}(x_0,y_0)\cdot\Delta y^2\right]+ \\
&+\frac{1}{3!}[f'''_{x^3}(x_0,y_0)\cdot\Delta x^3+3f'''_{x^2y}(x_0,y_0)\cdot\Delta x^2\Delta y+ \\
&+3f'''_{xy^2}(x_0,y_0)\cdot\Delta x\Delta y^2+f'''_{y^3}(x_0,y_0)\cdot\Delta y^3]+\ldots\,.
\end{aligned}
$$

Формула (195.1) справедлива і при $n=0$; цей окремий випадок ми вже розглядали у розд. 183.

5.5. Екстремуми, найбільші і найменші значення

196. Екстремуми функції кількох змінних. Необхідні умови

Нехай функція $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ визначена в області $\mathcal{D}$ і $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — **внутрішня** точка цієї області.

Говорять, що *функція $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ в точці $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ має* ***максимум (мінімум)*** *якщо її можна оточити таким околом*

$$(x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta; \ \ldots; \ x_n^0 - \delta, x_n^0 + \delta),$$

щоб для всіх точок цього околу виконувалася нерівність

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

$$(\geqslant)$$

Якщо цій окіл можна взяти настільки малим, щоб знак рівності був відкинутий, тобто щоб у кожній його точці, крім самої точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, виконувалася строга нерівність

$$f(x_1, \ldots, x_n) < f(x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

$$(>)$$

то кажуть, що у точці $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ функція має **власний** максимум (мінімум); в іншому випадку, максимум (мінімум) називається **невласним**.

Для позначення максимуму та мінімуму використовується і загальний термін — **екстремум**.

Твердження 196.1. *Припустимо, що наша функція в деякій точці $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ має екстремум.*

Покажемо, що ***якщо*** *у цій точці існують (скінченні) частинні похідні:*

$$f'_{x_1}(x_1^0, \ldots, x_n^0), \quad \ldots, \quad f'_{x_n}(x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

то всі ці частинні похідні дорівнюють нулю, тобто це є ***необхідною*** *умовою існування екстремуму.*

Доведення. З цією метою покладемо $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$, зберігаючи x_1 змінним; тоді у нас вийде функція однієї змінної x_1:

$$u = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

Оскільки ми припустили, що у точці $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)$ існує екстремум (для визначеності — нехай це буде максимум), то, зокрема, звідси випливає, що в деякому околі $(x_1^0-\delta,\ x_1^0+\delta)$ точки $x_1=x_1^0$ необхідно повинна виконуватися нерівність

$$f(x_1,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0)\leqslant f(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0),$$

так що згадана вище функція **однієї** змінної в точці $x_1=x_1^0$ буде мати максимум, а звідси за теоремою Ферма (теор. 109.1) випливає,

$$f'_{x_1}(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0)=0.$$

Так само можна показати, що у точці $(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots,\ x_n^0)$ і інші частинні похідні також дорівнюють нулю. □

Отже, "підозрілими" щодо екстремуму є ті точки, в яких частинні похідні першого порядку всі дорівнюють нулю; їх координати можна знайти, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1,\ \dots,\ x_n)=0,\\ f'_{x_2}(x_1,\ \dots,\ x_n)=0,\\ \dots\\ f'_{x_n}(x_1,\ \dots,\ x_n)=0. \end{cases} \tag{196.1}$$

(Для випадку функції двох змінних $z=f(x,y)$, припускаючи її диференційовність, умови

$$f'_x(x,y)=0,$$

$$f'_y(x,y)=0$$

допускають просте геометричне тлумачення: *дотична площина* (180.1) *до поверхні $z=f(x,y)$ у її точці, що відповідає екстремуму, повинна бути* ***паралельна*** *площині xy.*)

Як і у випадку функції однієї змінної, такі точки називають **стаціонарними**.

Зауваження 1. Необхідну умову існування екстремуму у разі диференційовної функції коротко можна записати ще так:

$$df(x_1,\ \dots,\ x_n)=0,$$

оскільки, якщо $f'_{x_1}=f'_{x_2}=\dots=f'_{x_n}=0$, то, хоч би які були $dx_1,\ \dots,\ dx_n$, завжди

$$df(x_1,\ \dots,\ x_n)=f'_{x_1}\cdot dx_1+f'_{x_2}\cdot dx_2+\dots+f'_{x_n}\cdot dx_n=0.$$

І навпаки: якщо в заданій точці тотожно виконується ця умова, то **через довільність** $dx_1,\ \dots,\ dx_n$ похідні $f'_{x_1},\ f'_{x_2},\ \dots,\ f'_{x_n}$ порізно дорівнюють нулю.

Зауваження 2. Зазвичай функція $f(x_1,\ \dots,\ x_n)$ має (скінченні) частинні похідні у всій області, і тоді точки, що доставляють функції екстремуми, слід шукати лише серед **стаціонарних точок**. Однак трапляються випадки, коли в окремих точках деякі частинні похідні мають нескінченні значення або зовсім не існують (в той час як в інших дорівнюють 0). Подібні точки теж слід віднести до “підозрілих” щодо екстремуму, як і стаціонарні точки. (Дивіться нижче: пр. 201.6).

197. Достатні умови (випадок функції двох змінних)

Як і у випадку функції однієї змінної, у стаціонарній точці зовсім не забезпечено наявність екстремуму. Якщо, наприклад, взяти просту функцію $z = xy$, то для неї $z'_x = y$ і $z'_y = x$ дорівнюють одночасно 0 в єдиній точці $(0, 0)$, в якій $z = 0$. Водночас безпосередньо ясно, що в будь-якому околі цієї точки функція набуває як додатні, так і від'ємні значення, і екстремуму немає. На рис. 160.4 зображена поверхня (**гіперболічний параболоїд**), що виражається рівнянням $z = xy$; поблизу початкової точки вона має **форму сідла**, згинаючись в одній вертикальній площині вгору, а в іншій вниз.

Отже, постає питання про умови, **достатні** для існування (або відсутності) екстремуму в стаціонарній точці, тобто про додаткове **дослідження** для цієї точки.

Ми розглянемо спочатку випадок функції двох змінних $f(x, y)$. Припустимо, що ця функція визначена, неперервна і має неперервні частинні похідні першого та другого порядків в околі деякої точки (x_0, y_0), яка є стаціонарною, тобто задовольняє умови

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{і} \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{197.1}$$

Щоб встановити, чи справді наша функція має в точці (x_0, y_0) екстремум чи ні, природно звернутися до розгляду різниці

$$\Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

Розкладемо її за формулою Тейлора (розд. 195), обмежуючись двома членами. Втім, оскільки точка (x_0, y_0) за припущенням стаціонарна, то перший член зникає, і ми матимемо просто

$$\Delta = \frac{1}{2!}\left(f''_{x^2} \cdot \Delta x^2 + 2f''_{xy} \cdot \Delta x \Delta y + f''_{y^2} \cdot \Delta y^2\right). \tag{197.2}$$

При цьому роль приростів $\Delta x, \Delta y$ відіграють різниці $x - x_0$, $y - y_0$, і похідні усі обчислені у деякій точці

$$(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y) \quad (0 < \theta < 1).$$

Введемо на розгляд значення цих похідних у досліджуваній точці:

$$a_{11} = f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad a_{22} = f''_{y^2}(x_0, y_0) \tag{197.3}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

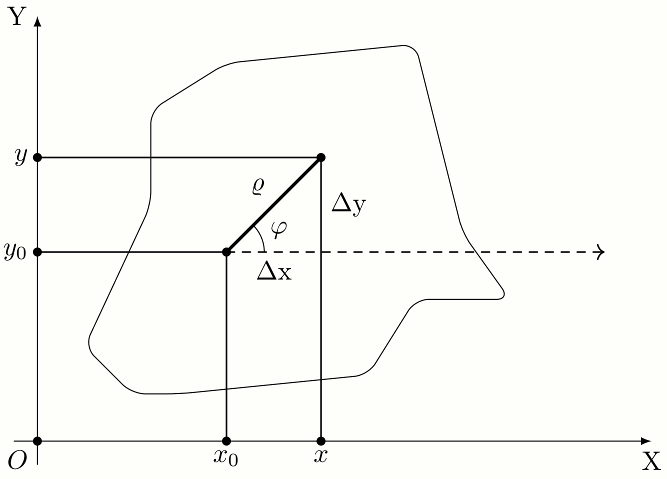


Рис. 197.1

і покладемо

$$\begin{aligned} f''_{x^2}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y) &= a_{11}+\alpha_{11},\\ f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y) &= a_{12}+\alpha_{12},\\ f''_{y^2}(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y) &= a_{22}+\alpha_{22}, \end{aligned}$$

так що, зважаючи на неперервність других похідних,

$$\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{22}\to 0 \quad \text{при } \Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0. \tag{197.4}$$

Різниця Δ напишеться у вигляді:

$$\Delta=\frac{1}{2}\left\{a_{11}\Delta x^2+2a_{12}\Delta x\Delta y+a_{22}\Delta y^2+\alpha_{11}\Delta x^2+2\alpha_{12}\Delta x\Delta y+\alpha_{22}\Delta y^2\right\}.$$

Як ми встановимо, поведінка різниці Δ суттєво залежить від знака виразу $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$.

Для полегшення міркувань введемо "полярні координати", взявши за полюс точку (x_0,y_0) і провівши через неї полярну вісь паралельно осі x (рис. 197.1).

Нехай $\varrho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ є відстань між точками (x_0,y_0) та (x,y), а φ є кут складений відрізком, що з'єднує точки, з полярною віссю, так що

$$\Delta x=\varrho\cdot\cos\varphi \quad \text{і} \quad \Delta y=\varrho\cdot\sin\varphi.$$

Тоді різницю Δ можна переписати так:

$$\begin{aligned}\Delta=\frac{\varrho^2}{2}\{&a_{11}\cos^2\varphi+2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi+a_{22}\sin^2\varphi+\\ &+\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi\}.\end{aligned}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

1) Нехай, спочатку, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

У цьому випадку $a_{11}a_{22} > a_{12}^2 > 0$, так що $a_{11} \neq 0$, і **перший** тричлен в дужках $\{...\}$ може бути представлений у вигляді:

$$\frac{1}{a_{11}} \cdot \left[(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\cdot\sin^2\varphi\right]. \tag{197.5}$$

Звідси ясно, що вираз у дужках $[...]$ завжди додатний, так що **згаданий тричлен при всіх значеннях φ, не дорівнює нулю і зберігає знак коефіцієнта a_{11}.** Цей виразу у дужках $[...]$ є неперервна на проміжку $[0, 2\pi]$ функція від φ, а тому його абсолютна величина має (очевидно, **додатне**) найменше значення m (розд. 85):

$$|a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi| \geqslant m > 0.$$

З іншого боку, якщо звернутися до **другого** тричлену в дужках $\{...\}$, то, зважаючи на (197.4),

$$|\alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi| \leqslant |\alpha_{11}| + 2|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| < m$$

одночасно для всіх φ, якщо тільки ϱ (а з ним і Δx, Δy) досить малі. Але тоді весь вираз у дужках $\{...\}$, а значить і різниця Δ, буде зберігати той самий знак, що й **перший** із тричленів, тобто знак a_{11}.

Отже, якщо $a_{11} > 0$, то і $\Delta > 0$, тобто функція в аналізованій точці (x_0, y_0) має **мінімум**, а при $a_{11} < 0$ буде і $\Delta < 0$, тобто функція у точці (x_0, y_0) має **максимум**.

2) Припустимо тепер, що $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$.

Випадок 2.1. Нехай $a_{11} \neq 0$, тоді можна і тут використовувати перетворення (197.5). При $\varphi = \varphi_1 = 0$ вираз у дужках $[...] = a_{11}^2 > 0$. Навпаки, якщо визначити $\varphi = \varphi_2$, з умови

$$a_{11}\cos\varphi_2 + a_{12}\sin\varphi_2 = 0 \quad (\sin\varphi_2 \neq 0),$$

то цей вираз у дужках $[...] = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\sin^2\varphi_2 < 0$. При досить малому ϱ **другий** тричлен в дужках $\{...\}$ як при $\varphi = \varphi_1$, так і при $\varphi = \varphi_2$, буде як завгодно малий, і знак Δ визначиться знаком **першого** тричлена. Отже, у будь-якій близькості від розглянутої точки (x_0, y_0) — на променях, що визначаються кутами $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = \varphi_2$, різниця Δ буде мати значення протилежних знаків. Отже, в цій точці екстремуму бути не може.

Випадок 2.2. Нехай $a_{11} = 0$, тоді перший тричлен у дужках $\{...\}$ зведеться до

$$2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi = \sin\varphi(2a_{12}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi),$$

і, користуючись тим, що напевно $a_{12} \neq 0$, можна визначити кут φ_1 так, що

$$|a_{22}|\cdot|\sin\varphi_1| < 2\cdot|a_{12}|\cdot|\cos\varphi_1|.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Тоді при $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = \varphi_2 = -\varphi_1$ згаданий тричлен матиме протилежні знаки, і міркування завершується, як і вище.

Отже, *якщо* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, *то у* ***стаціонарній*** *точці* (x_0, y_0) *функція* $f(x, y)$ *має екстремум, саме, власний* ***максимум*** *при* $a_{11} < 0$ *і власний* ***мінімум*** *при* $a_{11} > 0$. *Якщо ж* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, *то екстремуму немає.*

У випадку $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ для вирішення питання доводиться залучати вищі похідні; цей “сумнівний” випадок ми залишимо осторонь.

Приклади.

1) Досліджуємо на максимум та мінімум функцію

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \quad (p > 0,\ q > 0).$$

Обчислимо частинні похідні:

$$z'_x = \frac{x}{p} \quad \text{і} \quad z'_y = \frac{y}{q}.$$

Звідси відразу бачимо, що єдиною стаціонарною точкою є початок координат (0,0).

Обчисливши $a_{11},\ a_{12},\ a_{22}$, отримаємо

$$a_{11} = \frac{1}{p}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = \frac{1}{q};$$

звідси $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Отже, у точці $(0, 0)$ функція z має мінімум; втім, це ясно і безпосередньо.

Геометричним зображення нашої функції буде **еліптичний параболоїд** з вершиною у початковій точці (порівняйте з рис. 160.5).

2)

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \quad (p > 0,\ q > 0);$$

$$z'_x = \frac{x}{p}, \quad z'_y = -\frac{y}{q}.$$

І тут бачимо, що стаціонарною точкою є $(0, 0)$. Обчислюємо

$$a_{11} = \frac{1}{p}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = -\frac{1}{q};$$

звідси $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$. Отже, екстремуму немає.

Геометрично ми маємо справу з **гіперболічним параболоїдом**, вершина якого в початку координат.

3)

$$z = y^2 + x^4 \quad \text{або} \quad z = y^2 + x^3;$$

в обох випадках стаціонарною є точка $(0, 0)$, і в ній $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.

Наш критерій не дає відповіді; при цьому, у першому випадку, як безпосередньо видно, маємо **мінімум**, а в другому — **екстремуму зовсім немає**.

Зауваження. Результати цього розділу згодом (розд. 236) виявляться пов'язаними з геометричним питанням про поведінку кривої поблизу її "особливої" точки.

198. Достатні умови (загальний випадок)

Звернемося тепер до розгляду загального випадку. Нехай функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ визначена, неперервна і має неперервні похідні першого та другого порядків в околі деякої **стаціонарної** точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Розкладаючи різницю

$$\Delta = f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

за формулою Тейлора отримаємо, як і вище,

$$\begin{aligned}\Delta = \frac{1}{2}\Big\{ & f''_{x_1^2} \cdot \Delta x_1^2 + f''_{x_2^2} \cdot \Delta x_2^2 + \cdots + f''_{x_n^2} \cdot \Delta x_n^2 + \\ & + 2f''_{x_1x_2} \cdot \Delta x_1 \Delta x_2 + 2f''_{x_1x_3} \cdot \Delta x_1 \Delta x_3 + \cdots + 2f''_{x_{n-1}x_n} \cdot \Delta x_{n-1}\Delta x_n \Big\} = \\ & = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} f''_{x_ix_k} \cdot \Delta x_i \Delta x_k,\end{aligned}$$

де $\Delta x_i = x_i - x_i^0$; похідні всі обчислені в деякій точці

$$(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \theta\Delta x_n) \quad (0 < \theta < 1).$$

Введемо і тут значення

$$f''_{x_ix_k}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = a_{ik} \quad (i,\ k = 1, \ldots, n), \tag{198.1}$$

так що

$$f''_{x_ix_k}(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \theta\Delta x_n) = a_{ik} + \alpha_{ik},$$

та

$$\alpha_{ik} \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0. \tag{198.2}$$

(Зрозуміло, що $a_{ik} = a_{ki}$ та $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$.) Тепер Δ можна написати у виді

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_i \Delta x_k + \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\Delta x_i \Delta x_k\right). \tag{198.3}$$

На першому місці у дужках тут стоїть **другий диференціал** функції f у точці; він є однорідним многочленом другого степеня або, як кажуть, *квадратичною формою* від змінних Δx_1, $\ldots$, Δx_n. (Друга сума має схожий вигляд, але в ній і самі коефіцієнти є функції від тих самих змінних.) **Від властивостей цієї квадратичної форми, як ми побачимо, і залежить вирішення питання, що цікавить нас.**

У вищій алгебрі квадратичну форму

$$Q(y)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}y_iy_k \quad (a_{ik}=a_{ki}) \tag{198.4}$$

від змінних y_1, $\ldots$, y_n називають *додатно (від'ємно) визначеною*, якщо вона має **додатні (від'ємні)** значення ($Q(y)>0$ або $Q(y)<0$) при всіх значеннях аргументів, не рівних одночасно нулю. Так, наприклад, форма

$$6y_1^2+5y_2^2+14y_3^2+4y_1y_2-8y_1y_3-2y_2y_3$$

буде додатно визначеною. Це стає зрозумілим, якщо записати її у вигляді

$$(2y_1-3y_3)^2+2(y_1+y_2+y_3)^2+3(y_2-y_3)^2.$$

Ми не маємо можливості вдаватися тут з цього приводу в подробиці. Обмежимося згадкою про необхідну і достатню умову для того, щоб форма (198.4) була додатно визначеною. Цей критерій належить
Сильвестру (англ. James Sylvester, Джéймс Сильвéстар) і виражається ланцюгом нерівностей:

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}>0,\quad \ldots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}>0,$$

Звертаємо увагу, що член з y_iy_k $(i\neq k)$ зустрічається у сумі (198.4) двічі, так що $a_{ik}=a_{ki}$ є **половина** коефіцієнта при y_iy_k. Для нашого прикладу умова легко перевіряється, якщо врахувати, що

$$M=\begin{vmatrix} 6 & 2 & -4\\ 2 & 5 & -1\\ -4 & -1 & 14\end{vmatrix};$$

$$a_{11}=6,\quad a_{22}=5,\quad a_{33}=14,\quad a_{12}=a_{21}=2,\quad a_{13}=a_{31}=-4,\quad a_{23}=a_{32}=-1.$$

Оскільки від'ємно визначена форма зі зміною знака всіх її членів перетворюється на додатно визначену, і навпаки, то звідси легко знайти і характеристику від'ємної форми: вона дається ланцюгом нерівностей, що випливає з написаного вище зміною змісту нерівностей **через одне** (починаючи з першої).

Користуючись цими поняттями, сформулюємо достатні для існування екстремуму умови.

Теорема 198.1. *Якщо другий диференціал, тобто квадратична форма*

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_i \Delta x_k \tag{198.5}$$

зі значеннями (198.1) *коефіцієнтів виявляється* ***додатно (від'ємно) визначеною*** *формою, то в точці* $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)$ *буде власний мінімум (максимум).*

Доведення. Для доведення введемо відстань

$$\varrho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$$

між точками $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)$ і $(x_1,\ \dots,\ x_n)$. Виносячи в (198.3) за дужку ϱ^2 і вважаючи

$$\frac{\Delta x_i}{\varrho} = \xi_i \quad (1 = 1,\ \dots,\ n),$$

перепишемо вираз для Δ у вигляді

$$\Delta = \frac{\varrho^2}{2}\left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k + \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\xi_i\xi_k\right). \tag{198.6}$$

Числа ξ_i усі відразу не дорівнюють нулю, тому, якщо форма (198.5) **додатна**, перша сума у дужках у формулі (198.6) має додатний знак. Більш того, оскільки

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1, \tag{198.7}$$

то знайдеться таке стале **додатне** число m, що при всіх можливих значеннях ξ_i, буде

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k \geqslant m.$$

Справді, ця сума є неперервною функцією від аргументів ξ_i у всьому просторі, зокрема і в множині $\mathcal{M}$ тих точок $\xi_1,\ \dots,\ \xi_n$, які задовольняють співвідношення (198.7) ("сферична поверхня"). Але множина ця, як нескладно побачити, замкнена, тобто містить усі свої точки згущення; а тоді, за теоремою Ваярштрасса (теор. 173.1) і зауваженням після її доведення, названа сума матиме в $\mathcal{M}$ і **найменше** значення m, необхідно додатне (як і всі її значення в $\mathcal{M}$).

З іншого боку, зважаючи на (198.5), друга сума в (198.6) для досить малих ϱ, очевидно, буде за абсолютною величиною вже менше m, так що вся дужка виявиться **додатною**. Отже, у досить малій кулі, з центром у точці $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)$, різниця Δ буде додатна, звідки і виявляється, що в названій точці функція $f(x_1,\ \dots,\ x_n)$ має власний мінімум.

Аналогічно досліджується і випадок, коли форма (198.5) буде **від'ємно визначеною.** ☐

199. Умови відсутності екстремуму

Квадратична форма (198.4) називається невизначеною, якщо вона здатна набувати значення **протилежних** знаків. Така, наприклад, форма

$$Q(y_1, y_2, y_3) = 6y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 8y_1y_2 - 8y_1y_3 - 2y_2y_3.$$

Справді, наприклад,

$$Q(1, 0, 0) = +6, \quad Q(1, -1, 0) = -1.$$

Тепер ми можемо доповнити доведену в попередньому розділі теорему так.

Теорема 199.1. *Якщо квадратична форма* (198.5) *буде* ***невизначеною***, *то у точці* $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)$ *свідомо немає екстремуму.*

Доведення. Нехай при $\Delta x_i = h_i$ $(i = 1,\ \dots,\ n)$ форма (198.5) набуває додатного значення:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}h_ih_k > 0, \tag{199.1}$$

а при $\Delta x_i = \overline{h}_i$ $(i = 1,\ \dots,\ n)$ — від'ємне:

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\overline{h}_i\overline{h}_k < 0.$$

Покладемо спочатку

$$\Delta x_i = h_it \quad \text{при} \quad t \neq 0 \quad (i = 1,\ \dots,\ n),$$

що відповідає пересуванню вздовж **по прямій**, що з'єднує точки $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)$ і $(x_1^0 + h_1,\ \dots,\ x_n^0 + h_n)$. Тоді, виносячи в (198.3) за дужки t^2, отримуємо для цього випадку

$$\Delta = \frac{t^2}{2}\left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}h_ih_k + \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}h_ih_k\right).$$

Перша сума в дужках є **деяким додатним** числом, зважаючи на (199.1). Що ж до другої суми, її коефіцієнти прямують до 0 при $t \to 0$, бо при цьому, очевидно, і всі $\Delta x_i \to 0$. Значить, для досить малого t, вираз у дужках (а з ним і вся різниця Δ) стає **додатним**, тобто в точках згаданої вище прямої, досить близьких до $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)$, буде

$$f(x_1,\ \dots,\ x_n) > f(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0).$$

З іншого боку, якщо взяти

$$\Delta x_i = \overline{h}_it \quad \text{при} \quad t \neq 0 \quad (i = 1,\ \dots,\ n),$$

тобто пересуватися вздовж іншої прямої, що з’єднує точку $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ з точкою $(x_1^0+\overline{h}_1,\ \ldots,\ x_n^0+\overline{h}_n)$, то в її точках, досить близьких до $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$ (тобто, що відповідають досить малому t), виявиться

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_n) < f(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0).$$

Цим доведено, що у досліджуваній точці не може бути ні максимуму, ні мінімуму. □

Може статися, що форма (198.4), не здатна набувати значення **різних** знаків, все ж таки не є визначеною, бо дорівнює 0 не тільки при нульових значеннях аргументів: у цьому разі форму називають *напіввизначеною.* Це стосується, наприклад, до форми:

$$Q(y_1,y_2,y_3) = y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_1y_2+2y_1y_3+2y_2y_3 = (y_1+y_2+y_3)^2;$$

від’ємних значень вона не набуває, але дорівнює 0 кожен раз, коли

$$y_1+y_2+y_3 = 0,$$

наприклад, $Q(0{,}5,\ 0{,}5,\ -1) = 0$.

Випадок, коли форма (198.5) виявляється **напіввизначеною**, є “сумнівним” випадком. Залежно від поведінки вищих похідних, у цьому випадку може бути екстремум, а може його і не бути. Зокрема, вищі похідні мають бути залучені і тоді, коли всі похідні другого порядку у досліджуваній точці дорівнюють 0.

Дослідженням “сумнівного” випадку ми не займатимемося.

Зауваження. Для функції $f(x)$ однієї змінної форма (198.5) зводиться до одного члена

$$f''(x_0)\cdot\Delta x^2,$$

де x_0 — досліджувана точка. Ця “форма”, очевидно, є додатно визначеною, якщо $f''(x_0) > 0$, і від’ємно визначеною, якщо $f''(x_0) < 0$. Отже, ознака, яка була наведена у розд. 137, є окремим випадком теор. 198.1.

Переходячи до випадку функції $f(x,y)$ двох змінних, зауважимо, що і результат розд. 197 також полягає в тому, що було отримано в розд. 198 і розд. 199. Легко побачити, що в розд. 197 було доведено, що форма

$$a_{11}\Delta x^2+2a_{12}\Delta x\Delta y+a_{22}\Delta y^2$$

у випадку, коли $a_{11}a_{22}-a_{12}^2 > 0$, буде **визначеною** (додатно при $a_{11} > 0$ і від’ємно при $a_{11} < 0$), а якщо $a_{11}a_{22}-a_{12}^2 < 0$ — **невизначеною**.

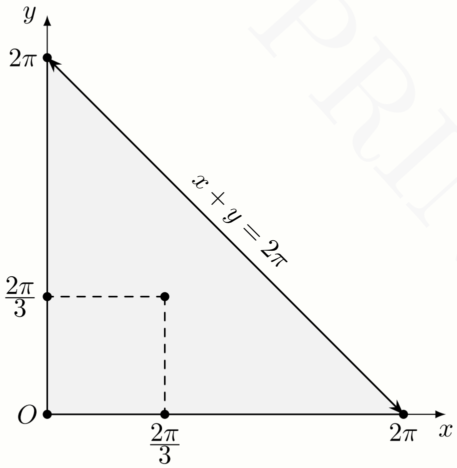


Рис. 200.1

200. Найбільше і найменше значення функцій. Приклади

Нехай функція $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ визначена та неперервна в деякій **обмеженій замкненій** області $\mathcal{D}$ і, за винятком, можливо, окремих точок, має в цій області скінченні частинні похідні. За теоремою Ваярштрасса (теор. 173.1), у цій області знайдеться точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, в якій функція набуває **найбільшого (найменшого)** з усіх значень. Якщо точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ лежить **всередині** області $\mathcal{D}$, то в ній функція, очевидно, має максимум (мінімум), так що в цьому випадку точка, що цікавить нас, напевно міститься серед "підозрілих" щодо екстремуму точок. Однак свого найбільшого (найменшого) значення функція u може досягати і на межі області. Тому, *для того щоб знайти найбільше (найменше) значення функції* $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *в області* $\mathcal{D}$ *потрібно знайти всі внутрішні точки, "підозрілі" щодо екстремуму, обчислити значення функції в них і порівняти зі значеннями функції у межових точках області: найбільше (найменше) із цих значень і буде найбільшим (найменшим) значенням функції у всій області.*

Пояснимо сказане прикладами.

1) Нехай потрібно знайти найбільше значення функції

$$u = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$$

у трикутнику, обмеженому віссю x, віссю y та прямою $x + y = 2\pi$ (рис. 200.1).

Маємо

$$u'_x = \cos x - \cos(x+y) \quad \text{і} \quad u'_y = \cos y - \cos(x+y).$$

Усередині області похідні дорівнюють нулю в єдиній точці $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, в якій $u = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Оскільки на межі області, тобто на прямих $x = 0$, $y = 0$ і $x + y = 2\pi$, наша фун-

nebayduzhi.math@gmail.com

кція дорівнює 0, то, очевидно, знайдена вище точка $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ і доставляє функції найбільше значення.

2) Знайти найбільше та найменше значення функції

$$u = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2 \quad (a > b > c > 0)$$

за умови, що змінні x, y, z пов'язані залежністю $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Визначивши звідси z^2 і підставивши його вираз в u, прийдемо до функції

$$u = (a^2 - c^2)x^2 + (b^2 - c^2)y^2 + c^2 - \left((a - c)x^2 + (b - c)y^2 + c\right)^2$$

від двох незалежних змінних x, y у крузі $x^2 + y^2 \leqslant 1$..

Похідні

$$u'_x = 2x(a - c)\left\{(a + c) - 2\left[(a - c)x^2 + (b - c)y^2 + c\right]\right\},$$
$$u'_y = 2y(b - c)\left\{(b + c) - 2\left[(a - c)x^2 + (b - c)y^2 + c\right]\right\},$$

одночасно дорівнюють нулю в точках

$$\text{а)} \quad x = y = 0, \quad (u = 0),$$

$$\text{б)} \quad x = 0, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left(u = \frac{1}{4}(b - c)^2\right),$$

$$\text{в)} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = 0, \quad \left(u = \frac{1}{4}(a - c)^2\right),$$

Тепер слід звернутися до межі області, тобто до кола $x^2 + y^2 = 1$. Визначаючи звідси y^2 і підставляючи його вираз в u, отримаємо функцію однієї змінної x

$$u = (a^2 - b^2)x^2 + b^2 - \left((a - b)x^2 + b\right)^2$$

у проміжку $[-1, 1]$. Усередині цього проміжку похідна

$$u'_x = 2(a - b)^2x(1 - 2x^2)$$

дорівнює нулю при

$$\text{г)} \quad x = 0 \quad (u = 0),$$

$$\text{ґ)} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(u = \frac{1}{4}(a - b)^2\right).$$

Нарешті, згадаємо про кінці проміжку $[-1, 1]$

$$\text{д)} \quad x = \pm 1 \quad (u = 0).$$

Отже, потрібно порівняти значення

$$u = 0; \quad u = \frac{1}{4}(b-c)^2; \quad u = \frac{1}{4}(a-c)^2; \quad u = \frac{1}{4}(a-b)^2;$$

з них найменшим буде 0, а найбільшим $\frac{1}{4}(a-c)^2$. Це і будуть шукані найменші та найбільші значення функції, які досягаються, відповідно, у точках

$$(0,0,\pm 1), \quad (0,\pm 1,0), \quad (\pm 1,0,0)$$

і

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Взагалі, у випадку функції двох змінних $u = f(x,y)$, область зазвичай виявляється обмеженою **кривою** (або декількома кривими). Уздовж цієї кривої (або кожної з кривих, якщо їх кілька) змінні x, y або залежать одна від іншиий або обидві залежать від одного параметра, так що **на межі** наша функція $u = f(x,y)$ виявляється залежною від **однієї** змінної, та її найбільше (найменше) значення знаходиться вже методами розд. 139. Якщо, скажімо, крива задана параметричними рівняннями:

$$x = \varphi(t) \quad \text{і} \quad y = \psi(t),$$

де t змінюється на проміжку $[t_0, T]$, то на цій кривій наша функція буде (складеною) функцією від t:

$$u = f(\varphi(t), \psi(t)),$$

для якої ми вже вміємо знаходити найбільше (найменше) значення.

3) Знайти найбільше значення добутку

$$u = xyzt$$

невід'ємних чисел x, y, z, t, за умови, що сума їх зберігає сталу величину:

$$x + y + z + t = 4c.$$

Покажемо, що найбільше для u значення вийде, коли всі множники рівні: $x = y = z = t = c$. (Ми лише для визначеності взяли число множників рівним чотирьом; результат буде той самий для будь-якого числа множників.)

Визначивши t з початкової умови: $t = 4c - x - y - z$, підставимо в u цей вираз:

$$u = xyz(4c - x - y - z).$$

Ми маємо тут функцію від трьох **незалежних** змінних x, y, z у тривимірній області, яка визначається умовами

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad x + y + z \leqslant 4c.$$

Геометрично ця область має вигляд **тетраедра**, обмеженого площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 4c$.

Обчислюємо похідні та прирівнюємо їх до нуля:

$$u'_x = yz(4c-2x-y-z) = 0, \quad u'_y = xz(4c-x-2y-z) = 0, \quad u'_z = xy(4c-x-y-2z) = 0.$$

Усередині області ці рівняння виконуються лише в точці $x = y = z = c$, в якій $u = c^4$. Оскільки на межі області $u = 0$, то в знайденій точці, справді, функція має найбільше значення.

Наше твердження доведене (бо при $x = y = z = c$ також і $t = c$).

Зі сказаного випливає, що добуток додатних чисел $xyzt$, сума яких дорівнює $4c$, не перевищує c^4, так що

$$\sqrt[4]{xyzt} \leqslant c = \frac{x+y+z+t}{4},$$

тобто **середнє геометричне не перевищує середнього арифметичного**. Цей результат справедливий для будь-якої кількості розглянутих чисел, нам уже відомий (133.5).

Взагалі, у разі функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ область обмежується поверхнею (або декількома поверхнями). Уздовж такої поверхні змінні x, y, z залежать вже від двох параметрів (ними можуть служити і дві з цих змінних, як, наприклад, тільки що: $z = 4c - x - y$). Тоді і функція u буде залежати тільки від двох параметрів, тому знаходження найбільшого (найменшого) її значення на межі є вже більш простим завданням, про яке йшлося вище. І так далі.

Якщо функція $u = f(x_1, \dots, x_n)$ задана лише у **відкритій** (або **необмеженій**) області $\mathcal{D}$, то вже не можна заздалегідь стверджувати, що вона досягає в області свого найбільшого (найменшого) значення. Проте таке значення в окремих випадках може існувати; ми пояснимо на прикладі, як в цьому можна переконатися.

4) Знайти найменше значення для суми

$$u = x + y + z + t$$

додатних чисел x, y, z, t, за умови, що добуток їх зберігає сталу величину

$$xyzt = c^4.$$

Покажемо, що найменше значення для u вийде, коли всі доданки рівні, тобто $x = y = z = t = c$. І тут кількість доданків може бути будь-якою.

Визначимо t: $t = \frac{c^4}{xyz}$, підставимо цей вираз в u:

$$u = x + y + z + \frac{c^4}{xyz}.$$

Нам необхідно знайти найменше значення для цієї функції трьох змінних x, y, z в області, що визначається нерівностями $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, тобто в першому координатному октанті, відкритому та безмежному.

Спробуймо застосувати колишній метод: якщо в області є точка, де наша функція досягає найменшого значення, то ця точка, як і раніше, повинна бути серед стаціонарних. Маємо

$$u'_x = 1 - \frac{c^4}{x^2yz} = 0, \quad u'_y = 1 - \frac{c^4}{xy^2z} = 0, \quad u'_z = 1 - \frac{c^4}{xyz^2} = 0;$$

звідси $x = y = z = c$, тоді $t = c$; а $u = 4c$.

Як тепер перевірити, що це значення справді буде **найменшим**?

Ясно, що при наближенні до межових площин $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, рівно як і при віддаленні в нескінченність, наша функція нескінченно зростає. Знайдену точку можна оточити кубом $[\varepsilon,\ E;\ \varepsilon,\ E;\ \varepsilon,\ E]$, взявши $E > 0$ настільки великим, а $\varepsilon > 0$ настільки малим, щоб поза цим кубом і **на його поверхні** було $u > 4c$. Але в кубі, як у замкненій та обмеженій області, функція u повинна мати найменше значення; тепер уже ясно, що це значення досягається саме у знайденій вище точці і що воно буде найменшим і для всієї початкової області, що й потрібно було довести.

Зауваження. У прикладах 1), 3), 4) усередині аналізованої області існувала лише одна "підозріла" точка. Можна було б переконатися, що в ній є максимум (або мінімум). Однак, на відміну від того, що було зазначено для випадку функції однієї змінної (дивіться зауваження в розд. 139), *тут з цього одного не можна було б зробити висновок, що ми маємо справу з* ***найбільшим (найменшим)*** *значенням функції в області.*

Наступний простий приклад показує, що такий висновок насправді може привести до хибного результату. Розглянемо в прямокутнику $[-5, 5;\ -1, 1]$ функцію

$$u = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2.$$

Її похідні

$$u'_x = 3x^2 - 8x + 2y \quad \text{і} \quad u'_y = 2x - 2y$$

у межах області дорівнюють нулю лише у точці $(0, 0)$. Як легко переконатися за допомогою критерію розд. 197, у ній функція має **максимум** (рівний 0). Однак, значення це не буде **найбільшим** в області, бо, наприклад, в точці $(5, 0)$ функція $u = 25$.

Внаслідок цього, у разі функції кількох змінних, при знаходженні найбільшого або найменшого значення функції в області, дослідження на максимум і мінімум виявляється практично **непотрібним**.

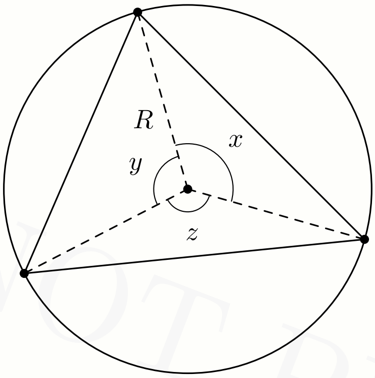


Рис. 201.1

201. Задачі

Багато задач, як із області математики, так і з інших галузей науки й техніки, приводять до знаходження найбільшого або найменшого значення деякої функції.

Розв'язування задач 1)-4) пов'язане з вже розглянутими в попередньому розділі прикладами.

1) Серед усіх трикутників, вписаних у коло радіуса R, знайти той, площа якого найбільша (рис. 201.1).

Якщо через x, y, z позначити центральні кути, що спираються на сторони трикутника, то вони пов'язані залежністю

$$x + y + z = 2\pi,$$

звідки

$$z = 2\pi - x - y.$$

Площа трикутника S через них виражається так:

$$S = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x + \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin y + \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin z = \frac{1}{2}R^2 \cdot (\sin x + \sin y - \sin(x+y))\,.$$

Область зміни змінних x і y тут визначається умовами: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 2\pi$. Потрібно знайти значення змінних, при яких вираз у дужках має найбільше значення.

Ми вже знаємо (пр. 200.1), що це будуть $x = y = z = \frac{2\pi}{3}$; виходить **рівносторонній** трикутник.

2) Серед усіх трикутників даного периметра $2p$ знайти той, площа якого S найбільша.

Нехай x, y, z означають сторони трикутника; тоді за формулою Герона

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Можна було б, підставивши сюди $z = 2p - x - y$, переписати S у вигляді

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

і шукати найбільше значення цієї функції в трикутній області, про яку вже йшлося в пр. 160.6).

Ми зробимо інакше: задача зводиться до знаходження найбільшого значення для добутку додатних чисел

$$u = (p-x)(p-y)(p-z)$$

за умови, що їх сума стала:

$$(p-x)+(p-y)+(p-z) = 3p - 2p = p.$$

А ми вже знаємо (пр. 200.3), що для цього всі множники повинні бути рівними, так що $x = y = z = \frac{2p}{3}$. Знову виходить **рівносторонній** трикутник.

3) Серед вписаних в еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

прямокутних паралелепіпедів (з ребрами, паралельними його осям) знайти той, який має найбільший об'єм.

Якщо через x, y, z позначити координати тієї з вершин, що лежить в першому координатному тригранному куті, то об'єм $v = 8xyz$. Замість v можна розглянути величину

$$u = \frac{v^2}{64a^2b^2c^2} = \frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{b^2} \cdot \frac{z^2}{c^2},$$

бо вони, очевидно, досягають своїх найбільших значень при одних і тих же x, y, z. По відношенню до u питання знову зводиться до пр. 200.3 попереднього розділу.

Відповідь:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}, \quad \text{так що} \quad x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

4) Припустимо, що який-небудь газ (наприклад, повітря) стискається в **поршневому компресорі** від атмосферного тиску p_0 до тиску $p > p_0$. Робота, що витрачається при цьому на стиск 1 моля газу, обчислюється так:

$$A = RT_0 \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\dfrac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right);$$

тут R є “газова стала”, T_0 — абсолютна температура газу до стиснення, а γ є деяке число (> 1), що залежить від конструкції компресора. Робота A, очевидно, тим менша, чим менша початкова температура T_0. При великих степенях стиснення, коли економія в роботі, що витрачається, є важливою, то розбивають весь процес стиснення на кілька ступенів, в проміжках охолоджуючи стиснений (і водночас розігрітий) газ.

Нехай, наприклад, ми маємо **триступеневий компресор** з двома проміжними холодильниками, у яких температура доводиться знову до T_0. Якщо позначити через p_1 і p_2 тиск в кінці першої та другої ступені, то загальна робота стиснення тепер буде

$$A = RT_0 \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1}\left\{\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] + \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] + \left[\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]\right\};$$

Тоді виникає питання, як при заданих p_0, p, T_0 вибрати проміжні значення тиску p_1 і p_2 с таким розрахунком, щоб величина роботи, що витрачається була найменшою.

Якщо відкинути сталий множник і сталі доданки, які не впливають на шукані величини p_1 і p_2, то справа зведеться до дослідження виразу

$$u = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Оскільки добуток

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \cdot \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

зберігає сталу величину, то, скориставшись пр. 200.4, відразу бачимо, що сума u досягає свого найменшого значення тоді, коли всі доданки рівні:

$$\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

або

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p}{p_2},$$

отже послідовні тиски становлять геометричну прогресію. Звідси,

$$p_1 = \sqrt[3]{p_0^2 \cdot p} \quad \text{і} \quad p_2 = \sqrt[3]{p_0 \cdot p^2}.$$

5) На площині дано трикутник зі сторонами a, b, c (рис. 201.2); на ньому можна побудувати нескінченну безліч пірамід з даною висотою h. Потрібно з них знайти ту, яка має найменшу бічну поверхню S.

nebayduzhi.math@gmail.com

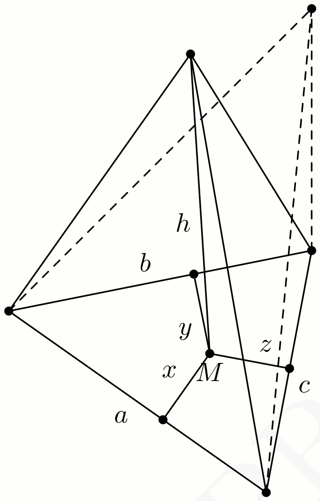


Рис. 201.2

Питання зводиться до знаходження проєкції M вершини піраміди. Положення її визначається величинами трьох перпендикулярів x, y, z, опущених відповідно на сторони a, b, c. Кожному перпендикуляру ми приписуємо знак плюс, якщо точка лежить з тієї ж сторони, що і сам трикутник, і знак мінус інакше. Величини x, y, z пов'язані співвідношенням (P означає площу трикутника)

$$ax + by + cz = 2P, \quad \text{звідки} \quad z = \frac{2P - ax - by}{c}.$$

Бічна поверхня S, що нас цікавить, тепер має такий вираз:

$$S = \frac{a}{2}\sqrt{x^2 + h^2} + \frac{b}{2}\sqrt{y^2 + h^2} + \frac{c}{2}\sqrt{z^2 + h^2},$$

де z має бути замінено знайденим виразом; областю зміни **незалежних** змінних x, y є вся площина xy. Маємо

$$2S'_x = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{cz}{\sqrt{z^2 + h^2}} \cdot \frac{a}{c} = 0 \quad \text{і} \quad 2S'_y = \frac{by}{\sqrt{y^2 + h^2}} - \frac{cz}{\sqrt{z^2 + h^2}} \cdot \frac{b}{c} = 0,$$

або

$$\frac{x}{\sqrt{y^2 + h^2}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + h^2}} = \frac{z}{\sqrt{y^2 + h^2}}, \quad \text{звідки} \quad x = y = z.$$

Відповідна точка M є центр вписаного в трикутник кола.

Що цим значенням x і y відповідає найменше значення для S, легко показати, як у пр. 200.4 попереднього розділу, спираючись на те, що при безмежному зростанні x

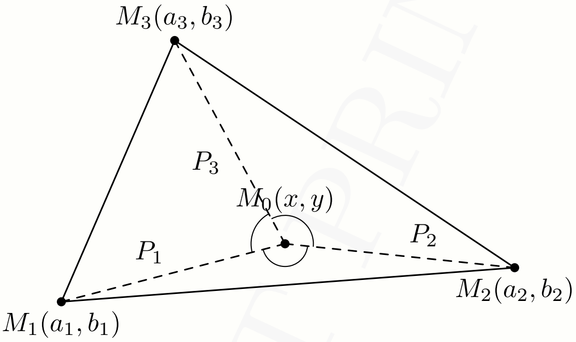


Рис. 201.3

або y, S зростає до нескінченності.

6) Нехай дані на площині три точки $M_1(a_1,b_1)$, $M_2(a_2,b_2)$, $M_3(a_3,b_3)$, які не лежать на одній прямій. Потрібно знайти в цій площині таку точку, щоб сума її відстаней до даних точок була найменшою.

Взявши будь-яку точку $M(x,y)$, покладемо

$$\varrho_i = \sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_1)^2} \quad (i=1,\ 2,\ 3).$$

Тоді потрібно дослідити функцію

$$u = \sum \varrho_i = \sum \sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_1)^2}.$$

Для неї існують **скрізь, крім даних точок**, частинні похідні

$$u'_x = \sum \frac{x-a_i}{\varrho_i} = \sum \cos\theta_i \quad \text{i} \quad u'_y = \sum \frac{y-b_i}{\varrho_i} = \sum \sin\theta_i,$$

де θ_i означає кут прямої M_iM з віссю x.

Отже, “підозрілими” щодо екстремуму точками є насамперед точки M_1, M_2, M_3, в яких похідних немає, а потім та точка M_0 (ми побачимо, що вона не завжди існує), в якій похідні зараз дорівнюють 0. Оскільки при нескінченному зростанні x або y наша функція u, очевидно, також нескінченно зростає, то найменшого значення вона досягає в одній із згаданих точок.

Щоб знайти стаціонарну точку M_0, прирівняємо до нуля обидві частинні похідні; це дасть нам умови:

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=0 \quad \text{i} \quad \sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0.$$

Помножимо перше на $\sin\theta_2$, а друге на $\cos\theta_2$ і віднімемо; ми отримаємо

$$\sin(\theta_1-\theta_2)=\sin(\theta_2-\theta_3),$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Звідки $\theta_1 - \theta_2 = \theta_2 - \theta_3$. Аналогічно знайдемо, що $\theta_2 - \theta_3 = \theta_3 - \theta_1$. Отже, кути між прямими M_1M_0, M_2M_0, M_3M_0, взятими попарно, всі повинні бути рівні $\frac{2\pi}{3}$, і точка M_0 виходить у перетині дуг, побудованих на сторонах трикутника $M_1M_2M_3$ і що вміщують кут $\frac{2\pi}{3}$.

Якщо у цьому трикутнику немає кута, більшого або рівного $\frac{2\pi}{3}$, то названі дуги справді перетинаються всередині трикутника і визначають точку M_0, з якої сторони його видно під кутами, рівними $\frac{2\pi}{3}$ (рис. 201.3). У цьому випадку слід порівняти значення, які u отримує у названих чотирьох точках. Ми доведемо, що значення u в стаціонарній точці M_0 буде менше інших (а отже, і взагалі найменшим). Справді, за “теоремою косинусів”

$$\overline{M_1M_2}^2 = \overline{M_0M_1}^2 + \overline{M_0M_2}^2 - 2 \cdot \overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} \cdot \cos\frac{2\pi}{3} =$$

$$= \overline{M_0M_1}^2 + \overline{M_0M_2}^2 + \overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} > \left(\overline{M_0M_2} + \frac{1}{2}\overline{M_0M_1}\right)^2,$$

так що

$$\overline{M_1M_2} > \overline{M_0M_2} + \frac{1}{2}\overline{M_0M_1}\,.$$

Аналогічно,

$$\overline{M_1M_3} > \overline{M_0M_3} + \frac{1}{2}\overline{M_0M_1}\,.$$

Додаючи, отримаємо

$$\overline{M_1M_2} + \overline{M_1M_3} > \overline{M_0M_1} + \overline{M_0M_2} + \overline{M_0M_3}\,,$$

тобто

$$u(M_1) > u(M_0).$$

Очевидно, точка M_1 тут може бути замінена точкою M_2 або M_3, що і завершує доведення.

Інша річ, **якщо один із кутів трикутника $M_1M_2M_3$ дорівнює або більше $\frac{2\pi}{3}$.** Тоді стаціонарної точки зовсім не існує і найменшого значення функція u набуває в одній з точок M_1, M_2, M_3 — саме тій, яка служить вершиною тупого кута.

Цікавою особливістю цієї задачі є те, що у ній доводиться, крім стаціонарної точки, розглядати і точки, у яких похідних не існує (порівняйте з розд. 196, зауваження 2).

7) Узагальнимо задачу 1): будемо шукати вписаний в круг (радіуса R) $(n+1)$-кутник з найбільшою площею S.

Позначимо через $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1}$ центральні кути, що спираються на сторони многокутника; тоді

$$x_1 + \cdots + x_{n+1} = 2\pi,$$

звідки

$$x_{n+1} = 2\pi - (x_1 + \dots + x_n).$$

Площа S дорівнює

$$S = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x_1 + \dots + \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x_n + \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x_{n+1};$$

якщо підставити замість x_{n+1} його вираз, то питання зведеться до знаходження найбільшого значення для функції

$$u = \sin x_1 + \dots + \sin x_n + \sin[2\pi - (x_1 + \dots + x_n)],$$

причому область $\mathcal{D}$ зміни незалежних змінних $x_1,\ \dots,\ x_n$ визначається нерівностями

$$x_1 \geqslant 0, \quad \dots, \quad x_n \geqslant 0, \quad x_1 + \dots + x_n \leqslant 2\pi,$$

тобто являє собою n-вимірний **симплекс** (розд. 162).

За загальним правилом обчислюємо частинні похідні та прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{aligned} &\cos x_1 - \cos(x_1 + \dots + x_n) = 0, \\ &\dots \\ &\cos x_n - \cos(x_1 + \dots + x_n) = 0; \end{aligned}$$

єдиною **внутрішньою** точкою області, в якій виконуються ці умови, буде точка

$$x_1 = \dots = x_n = \frac{2\pi}{n+1};$$

тоді і $x_{n+1} = \frac{2\pi}{n+1}$, а $u = (n+1)\sin\frac{2\pi}{n+1}$.

Для того щоб довести, що це справді буде найбільшим значенням u, скористаємося методом математичної індукції. При $n = 2$ наше твердження вже доведене в пр. 200.1 попереднього розділу. Припустимо, що воно справедливе для випадку n доданків синусів (так що для їх суми найбільшим значенням буде $n \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$, і доведемо його справедливість для нашої суми $n+1$ синусів.

Відповідно до загальних вказівок, зроблених вище, слід порівняти значення $(n+1)\sin\frac{2\pi}{n+1}$ зі значеннями, які функція набуває на межі області $\mathcal{D}$. Візьмемо, наприклад, “грань симплекса” $x_n = 0$; на ній u буде функцією лише від $n-1$ змінних:

$$u = \sin x_1 + \dots + \sin x_{n-1} + \sin[2\pi - (x_1 + \dots + x_{n-1})]$$

і, за припущенням, найбільшим значенням тут буде $n \cdot \sin\frac{2\pi}{n}$. Те саме можна встановити і для інших “граней”. Зважаючи на те, що функція $\frac{\sin z}{z}$ монотонно спадає, коли z зростає від 0 до π (дивіться пр. 133.1), маємо

$$n \cdot \sin\frac{2\pi}{n} < (n+1) \cdot \sin\frac{2\pi}{n+1}.$$

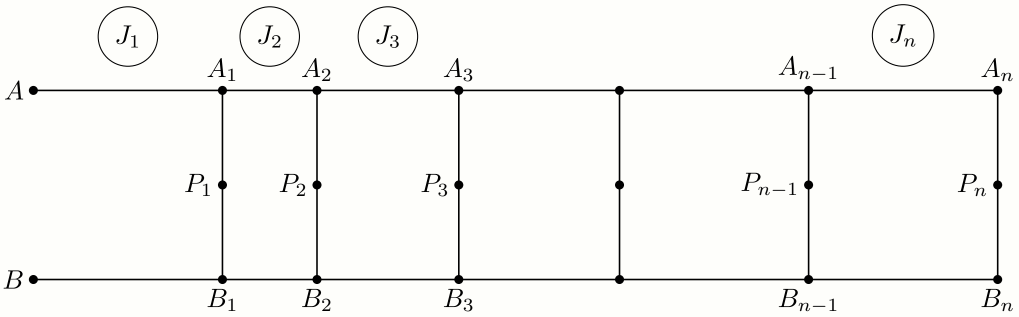


Рис. 201.4

Це доводить наше твердження. Найбільшу площу матиме **правильний** многокутник.

8) Розглянемо **електричну мережу** з паралельним включенням. На рис. 201.4 представлена схема мережі, причому A і B — затискачі джерела струму і $P_1, \ldots, P_n$ — приймачі струму, що споживають, відповідно, струми $i_1, \ldots, i_n$. Потрібно, при заздалегідь заданому допустимому загальному падінні потенціалу в ланцюгу $2e$, визначити перерізи дротів так, щоб на всю магістраль пішла найменша кількість міді.

Очевидно, достатньо обмежитися розглядом одного з дротів, скажімо AA_n, тому що інший дріт знаходиться в абсолютно аналогічних умовах. Позначимо через $l_1, \ldots, l_n$ довжини частин $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ (м), через $q_1, \ldots, q_n$ — площі їх поперечних перерізів (мм^2). Тоді вираз

$$u = l_1q_1 + \cdots + l_nq_n$$

якраз і представить об'єм усієї витраченої міді (в см^3); для нього нам потрібно знайти найменшу величину, враховуючи, що загальне падіння потенціалу у дроті AA_n має дорівнювати e.

Легко підрахувати, які струми $J_1, \ldots, J_n$ протікатимуть у відрізках $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ ланцюгу:

$$J_1 = i_1 + \cdots + i_n; \quad J_2 = i_2 + \cdots + i_n; \quad \ldots; \quad J_{n-1} = i_{n-1} + i_n; \quad J_n = i_n.$$

Якщо позначити через ϱ опір мідного дроту завдовжки 1 м і с перетином 1 мм^2, то опори цих відрізків будуть

$$r_1 = \frac{\varrho l_1}{q_1}, \quad \ldots, \quad r_n = \frac{\varrho l_n}{q_n},$$

так що відповідні падіння потенціалу у цих відрізках, згідно з законом Ома (нім. Georg Simon Ohm, Ґеórг Óм), запишуться так:

$$e_1 = r_1J_1 = \frac{\varrho l_1 J_1}{q_1}, \quad \ldots, \quad e_n = r_nJ_n = \frac{\varrho l_n J_n}{q_n}.$$

Щоб уникнути складних викладок, ми замість змінних q_i введемо саме ці величини e_i, які зв'язані простою умовою

$$e_1+\dots+e_n=e,\quad e_i>0\quad(i=1,\ \dots,\ n).$$

Тоді $e_n=e-(e_1+\dots+e_{n-1})$, та

$$q_1=\frac{\varrho l_1J_1}{e_1},\quad \dots,\quad q_{n-1}=\frac{\varrho l_{n-1}J_{n-1}}{e_{n-1}},\quad q_n=\frac{\varrho l_nJ_n}{e_n}=\frac{\varrho l_nJ_n}{e-(e_1+\dots+e_{n-1})};$$

$$u=\varrho\left(\frac{l_1^2J_1}{e_1}+\dots+\frac{l_{n-1}^2J_{n-1}}{e_{n-1}}+\frac{l_n^2J_n}{e-(e_1+\dots+e_{n-1})}\right),$$

причому область зміни **незалежних** змінних $e_1,\ \dots,\ e_{n-1}$ визначається нерівностями

$$e_1>0,\quad \dots,\quad e_{n-1}>0;\quad e_1+\dots+e_{n-1}<e;$$

це відкритий **симплекс**.

Прирівнюючи похідні за всіма змінними до нуля, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}
&-\frac{l_1^2J_1}{e_1^2}+\frac{l_n^2J_n}{(e-e_1-\dots-e_{n-1})^2}=0,\\
&-\frac{l_2^2J_2}{e_2^2}+\frac{l_n^2J_n}{(e-e_1-\dots-e_{n-1})^2}=0,\\
&\dots\\
&-\frac{l_{n-1}^2J_{n-1}}{e_{n-1}^2}+\frac{l_n^2J_n}{(e-e_1-\dots-e_{n-1})^2}=0,
\end{aligned}$$

звідки (знов вводячи e_n)

$$\frac{l_1^2J_1}{e_1^2}=\frac{l_2^2J_2}{e_2^2}=\dots=\frac{l_n^2J_n}{e_n^2}.$$

Зручно позначити спільну величину цих відносин через $\frac{1}{\lambda^2}$ $(\lambda>0)$. Тоді

$$e_1=\lambda l_1\sqrt{J_1},\quad \dots,\quad e_n=\lambda l_n\sqrt{J_n},$$

причому λ легко визначається з умови $e_1+\dots+e_n=e$:

$$\lambda=\frac{e}{l_1\sqrt{J_1}+\dots+l_n\sqrt{J_n}}.$$

Оскільки, при наближенні точки $(e_1,\ \dots,\ e_{n-1})$ до межі області, u росте до нескінченності, то знайдені значення $e_1,\ \dots,\ e_{n-1}$ (e_n) справді доставляють функції u найменше значення.

Нарешті, повертаючись до наших основних змінних $q_1, \ \dots, \ q_n$, знаходимо

$$q_1 = \frac{\varrho}{\lambda}\sqrt{J_1}, \quad \dots, \quad q_n = \frac{\varrho}{\lambda}\sqrt{J_n},$$

так що найвигідніші перерізи дротів виявляються пропорційними квадратним кореням з відповідних сил струму.

9) **Метод найменших квадратів.** Так називається дуже поширений метод обробки спостережень, суть якого полягає в наступному.

Нехай потрібно визначити значення трьох (ми обмежуємося трьома величинами лише для простоти письма) величин x, y, z, якщо для них встановлено $n > 3$ лінійних рівнянь

$$a_i x + b_i y + c_i z = d_i \quad (i = 1, \ \dots, \ n),$$

причому деякі з коефіцієнтів a_i, b_i, c_i отримані дослідним способом і відомі лише наближено. При цьому ми припустимо, що хоч якісь три з цих рівнянь мають визначник, відмінний від нуля: наприклад, нехай

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{201.1}$$

Однак обчислені з перших трьох рівнянь значення x, y, z, взагалі кажучи, не будуть точно задовольняти інші (або через неминучі похибки у коефіцієнтах рівнянь, або через те, що самі рівності виявляються лише наближеними). Не маючи підстав віддати перевагу одним рівнянням перед іншими і зважаючи на неминучість похибок

$$\delta_i = a_i x + b_i y + c_i z - d_i,$$

хоч би які брати значення x, y, z, намагаються досягти лише того, щоб **сума квадратів** цих похибок

$$W = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i y + c_i z - d_i)^2$$

була **найменшою** (звідси й назва методу). Іншими словами, найкращими вважаються такі значення x, y, z, при яких функція $W = W(x, y, z)$ набуває найменшого значення.

За загальним правилом, щоб знайти ці значення, прирівнюємо похідні W за x, y, z

до нуля:

$$
\begin{aligned}
2\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i(a_ix+b_iy+c_iz-d_i)=0,\\
2\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i(a_ix+b_iy+c_iz-d_i)=0,\\
2\cdot\sum_{i=1}^{n} c_i(a_ix+b_iy+c_iz-d_i)=0.
\end{aligned}
$$

Ґаусс ввів інші позначення сум однотипних доданків, які відрізняються лише покажчиками; саме, він пише

$$[aa] \quad \text{замість} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2\,; \quad [ab] \quad \text{замість} \quad \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \quad \text{тощо.}$$

В позначеннях Ґаусса отримані для знаходження значень x, y, z рівняння перепишуться так:

$$
\begin{aligned}
[aa]x+[ab]y+[ac]z=[ad],\\
[ba]x+[bb]y+[bc]z=[bd],\\
[ca]x+[cb]y+[cc]z=[cd];
\end{aligned}
$$

їх називають **нормальними** рівняннями.

Для того щоб бути впевненими, що цими рівняннями однозначно визначаться значення x, y, z, потрібно показати, що визначник системи відмінний від нуля. Але за відомою теоремою алгебри квадрат цього визначника можна задати у вигляді

$$\begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac]\\ [ba] & [bb] & [bc]\\ [ca] & [cb] & [cc]\end{vmatrix}^2 = \sum_{(i,j,k)} \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i\\ a_j & b_j & c_j\\ a_k & b_k & c_k\end{vmatrix}^2,$$

причому підсумовування поширюється на всі можливі **сполучення** (i, j, k) із n значків
1, ..., n по три. Оскільки з усіх визначників праворуч, за нашим припущенням (201.1), хоч один відмінний від нуля, то звідси і випливає, що визначник зліва також не нуль.

Залишається ще переконатися, що визначені з нормальних рівнянь значення змінних справді доставляють функції W найменше значення. Для цього досить, наприклад, встановити, що поза сферою досить великого радіуса W буде як завгодно велике.

З цією метою розглянемо значення перших трьох дужок у виразі W

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = u_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z - d_2 = u_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z - d_3 = u_3, \end{aligned}$$

Зважаючи на (201.1), і x, y, z лінійно виражаються через ці значення з цілком певними сталими коефіцієнтами, так що, поки всі три величини u_1, u_2, u_3 залишаються обмеженими, обмеженими необхідно будуть і самі x, y, z. Звідси вже ясно, що при нескінченному зростанні $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ також росте до нескінченності $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ (а отже, і W).

Глава 6

ФУНКЦІОНАЛЬНІ ВИЗНАЧНИКИ; ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

6.1. Формальні властивості функціональних визначників

202. Означення функціональних визначників (якобіанів)

У цьому розділі (так само як і в інших частинах курсу) важливим формальним інструментом для дослідження для нас стануть особливого роду **визначники**, складені з частинних похідних. Вивчимо попередньо основні їх властивості.

Нехай дані n функцій від n змінних

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,\ \dots,\ x_n), \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1,\ \dots,\ x_n), \end{cases} \tag{202.1}$$

які визначені в деякій n-вимірній області $\mathcal{D}$ і мають в ній неперервні частинні похідні

nebayduzhi.math@gmail.com

за всіма змінними. Складемо з цих похідних визначник

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Цей визначник називається зазвичай *функціональним визначником Якобі (нім. Carl Jacobi, Ка́рл Яко́бі)* або *якобіаном системи* (202.1) — на честь німецького математика Якобі, який у 1841 році вперше вивчив його властивості і застосування.

У науку якобіани були введені одночасно з Якобі і Остроградським (укр. Михайло Остроградський, Миха́йло Васи́льович Острогра́дський). Коротко позначають його символом

$$\frac{D(y_1,\ \dots,\ y_n)}{D(x_1,\ \dots,\ x_n)},$$

схожим на позначення похідної. Якобіан має ряд властивостей подібних до властивостей звичайної похідної.

203. Множення якобіанів

Окрім системи функцій (202.1), візьмемо систему функцій

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1,\ \dots,\ t_n), \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(t_1,\ \dots,\ t_n), \end{cases} \tag{203.1}$$

визначених і таких, що мають неперервні частинні похідні в області $\mathcal{P}$. Нехай при зміні точки $(t_1,\ \dots,\ t_n)$ в $\mathcal{P}$ відповідна точка $(x_1,\ \dots,\ x_n)$ не виходить з області $\mathcal{D}$, так що $y_1,\ \dots,\ y_n$ можна розглядати як складені функції від $(t_1,\ \dots,\ t_n)$ з проміжними змінними $x_1,\ \dots,\ x_n$.

Помножимо тепер якобіан системи (202.1) на якобіан системи (203.1):

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} & \dots & \dfrac{\partial x_2}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_2} & \dots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

З теорії визначників нам відома теорема про множення визначників (визначник добутку матриць дорівнює добутку їх визначників), що виражається формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

де загальний елемент останнього визначника такий:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} \quad (i, k = 1, \ \dots, \ n)$$

(множення за правилом “рядок на стовпець”). Застосовуючи цю формулу до функціональних визначників, отримаємо

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dots + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_1}\right) & \dots & \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_n} + \dots + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_n}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\dfrac{\partial y_n}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dots + \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_1}\right) & \dots & \left(\dfrac{\partial y_n}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_n} + \dots + \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial t_n}\right) \end{vmatrix}.$$

Помічаючи, що за формулою для похідної композиції функцій загальний елемент цього визначника є

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k} = \frac{\partial y_i}{\partial t_k} \quad (i, k = 1, \ \dots, \ n),$$

ми можемо останній визначник переписати у вигляді

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Доведену щойно **першу властивість** якобіана в коротких позначеннях можна переписати так:

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)} = \frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(t_1, \ldots, t_n)}. \tag{203.2}$$

Якби мали одну функцію y від x, де x є функція від t, то отримали б відому формулу для похідної композиції функцій: $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$; отже, виведена властивість якобіанів є узагальненням формули для похідної композиції функцій.

Зазначимо особливо той випадок, коли змінні $t_1, \ldots, t_n$ тотожні з $y_1, \ldots, y_n$, так що система функцій (203.1) є результатом **обертання** системи (202.1). (Саму можливість такого **обертання** ми тут припускаємо. Дивіться наступний розділ.) Тоді отримане співвідношення зведеться до наступного:

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \cdot \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} = 1$$

або

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{1}{\dfrac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}}. \tag{203.3}$$

У цьому вигляді воно нагадує формулу для похідної оберненої функції.

204. Множення функціональних матриць (матриць Якобі)

Нехай маємо m функцій $y_1, \ldots, y_m$ від n $(n > m)$ змінних $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

причому змінні $x_1, \ldots, x_n$ є функції від m змінних $t_1, \ldots, t_m$:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_m), \\ \ldots \\ x_n = \varphi_n(t_1, \ldots, t_m), \end{cases}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Припускаючи в обох випадках існування неперервних частинних похідних, спробуємо знайти вираз для якобіана $y_1, \ldots, y_m$ як функцій від $t_1, \ldots, t_m$.

В теорії визначників існує загальна теорема **про множення матриць** (для якої використана вище теорема про множення визначників є окремим випадком). Розглянемо дві **матриці** (таблиці)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (n > m).$$

Їх **добутком** є квадратна матриця

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix},$$

елементи якої обчислюються за формулами

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} \quad (i, k = 1, \ldots, m).$$

Визначник, що відповідає цій матриці, дорівнює сумі

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_m)} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mi_1} & \cdots & a_{mi_m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{i_1 1} & \cdots & b_{i_1 m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_m 1} & \cdots & b_{i_m m} \end{vmatrix},$$

що поширюється на всі можливі **сполучення** $(i_1, \ldots, i_m)$ з n значків $1, \ldots, n$ по m.

Застосувавши цей результат до **функціональних матриць** (або **матриць Якобі**)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial t_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{pmatrix},$$

ми отримаємо

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\dots+\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}\right) & \dots & \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\dots+\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}\right) \\ \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\dots+\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}\right) & \dots & \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\dots+\frac{\partial y_2}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial y_m}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\dots+\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1}\right) & \dots & \left(\frac{\partial y_m}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\dots+\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_m)} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_1}} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_{i_1}} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_{i_m}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_{i_m}}{\partial t_m} \end{vmatrix}.$$

Якщо знову згадати формулу для похідної композиції функцій, то визначник у лівій частині цієї рівності перепишеться так:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial t_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial t_m} \end{vmatrix}.$$

У коротких позначеннях отриманий результат має вигляд

$$\frac{D(y_1,\ \dots,\ y_m)}{D(t_1,\ \dots,\ t_m)} = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_m)} \frac{D(y_1,\ \dots,\ y_m)}{D(x_{i_1},\ \dots,\ x_{i_m})} \cdot \frac{D(x_{i_1},\ \dots,\ x_{i_m})}{D(t_1,\ \dots,\ t_m)}, \tag{204.1}$$

де сума поширюється на всі можливі **сполучення** з n значків $1,\ \dots,\ n$ по m.

При $m = 1$ доведена формула перетворюється на відому формулу для диференціювання композиції функцій (через кілька проміжних змінних):

$$\frac{dy}{dt} = \sum_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}$$

і, отже, є її узагальненням.

Зазначимо окремий випадок нашої формули, який випливає при $n = 3$ і $m = 2$:

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(t_1, t_2)} = \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \cdot \frac{D(x_1, x_2)}{D(t_1, t_2)} + \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_2, x_3)} \cdot \frac{D(x_2, x_3)}{D(t_1, t_2)} + \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_3, x_1)} \cdot \frac{D(x_3, x_1)}{D(t_1, t_2)}. \quad (204.2)$$

Ця формула часто застосовується.

Ми встановили ряд формальних властивостей якобіанів, аналогічних до властивостей звичайних похідних; до них примикає і формула (210.1), яку ми виведемо в одному із найближчих розділів. Але більш глибока аналогія між похідними і якобіанами виявляється по тій ролі, яку вони відіграють у **теорії неявних функцій** (дивіться наступний розділ) і, особливо, у питанні **про заміну змінних в подвійних, потрійних і, взагалі, кратних інтегралах** (у третьому томі, 16.4, 18.3).

6.2. Неявні функції

205. Поняття неявної функції від однієї змінної

Припустимо, що значення двох змінних x і y зв'язані між собою рівнянням, яке, якщо всі члени його перенести наліво, у загальному випадку має вигляд

$$F(x, y) = 0. \tag{205.1}$$

Тут $F(x, y)$ є функцією двох змінних, що задана в будь-якій області. Якщо для кожного значення x (в деякому проміжку) існує одне або кілька значень y, які спільно з x задовольняють рівняння (205.1), то цим визначається однозначна або многозначна, функція $y = f(x)$, для якої рівність

$$F(x, f(x)) = 0. \tag{205.2}$$

виконується **тотожно** відносно x.

Візьмемо, наприклад, рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \tag{205.3}$$

воно, очевидно, визначає y як **двозначну** функцію від x на проміжку $[-a, a]$:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

І, якщо замість y підставити в рівняння (205.3) цю функцію, то виходить **тотожність**.

Тут вдалося знайти для y дуже простий аналітичний вираз через x, навіть в елементарних функціях. Так не завжди буває. Якщо взяти рівняння

$$y - x - \varepsilon \cdot \sin y = 0 \quad (0 < \varepsilon < 1),$$

яке нам вже траплялося (при інших позначеннях змінних, пр. 83.1), то ми знаємо, що цим рівнянням y визначається як однозначна функція від x, хоча в остаточному вигляді вона через елементарні функції і не виражається.

Функція $y = f(x)$ називається *неявною*, якщо вона задана за допомогою **нерозв'язаного** (відносно y) рівняння (205.1); вона стає *явною*, якщо розглядається **безпосередня** залежність y від x. Читачеві ясно, що ці терміни характеризують лише спосіб задання функції $y = f(x)$ і не мають відношення до її природи. (Строго кажучи, протиставлення **неявного** та **явного** задання функції з повною чіткістю можливе лише, якщо під явним заданням розуміти явне **аналітичне** задання; якщо

nebayduzhi.math@gmail.com

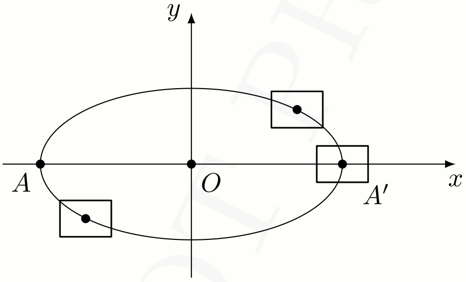


Рис. 205.1

ж за явне допускати задання за допомогою будь-якого правила (розд. 45), то задання функції y від x за допомогою рівняння (205.1) нічим не гірше за будь-яке інше.)

У найпростішому випадку, коли рівняння (205.1) алгебраїчне, тобто коли функція $F(x, y)$ є цілий відносно x і y многочлен, визначена ним **неявна** функція y від x (взагалі многозначна) називається **алгебраїчною**. Якщо степінь рівняння (відносно y) не вище чотирьох, то алгебраїчна функція допускає явний вираз у радикалах, при степені вище чотирьох такий вираз можливий лише як виняток.

Зараз нас буде цікавити лише питання ***про існування та однозначність*** *"неявної функції" (як і про інші її властивості), незалежно від можливості подати її в "явному" вигляді аналітичною формулою.* Втім, це питання для нас не нове, з окремим випадком його ми мали справу, коли йшлося про існування і властивості оберненої функції; і рівнянням

$$y - f(x) = 0$$

змінна x визначалася як "неявна" функція від y.

Повчальне геометричне трактування вказаного питання. Рівняння (205.1), за відомих умов, виражає криву на площині (наприклад, рівняння (205.3), як відомо, виражає еліпс, зображений на рис. 205.1); у цьому випадку воно називається **неявним рівнянням** кривої. Питання полягає в тому, чи може крива (205.1) (або її частина) бути виражена звичайним рівнянням вигляду $y = f(x)$, з **однозначною** функцією праворуч; геометрично це означає, що крива (або її частина) перетинається прямою, паралельною осі y, лише в одній точці.

Якщо ми хочемо мати однозначну функцію, то, як видно на прикладі того ж еліпса, потрібно обмежити не лише область зміни x, але й область зміни y.

Ми будемо говорити, для стислості, що *у прямокутнику* $(a, b;\ c, d)$ *рівняння* (205.1) *визначає* y *як однозначну функцію від* x, *якщо для кожного значення* x *на проміжку* (a, b) *рівняння* (205.1) *має один, і тільки один, корінь на проміжку* (c, d).

Зазвичай нас цікавитиме певна точка (x_0, y_0), яка задовольняє рівняння (205.1) (тобто лежить на кривій), а в ролі згаданого прямокутника фігуруватиме **окіл** цієї точки. Так, наприклад, у випадку еліпса (рис. 205.1), очевидно, можна стверджувати,

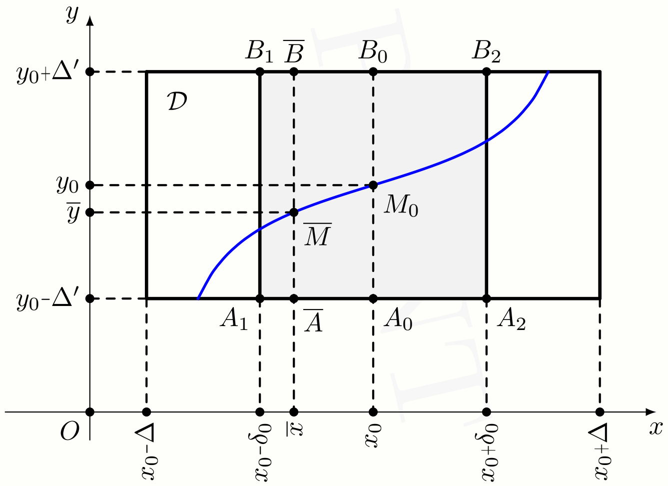


Рис. 206.1

що рівняння (205.3) визначає ординату y як однозначну функцію від абсциси x у досить малому околі будь-якої точки еліпса, крім його вершин A, A' на великій осі.

206. Існування неявної функції

Тепер з'ясуємо умови, що забезпечують існування однозначної і неперервної неявної функції.

Теорема 206.1 (Теорема існування). *Припустимо, що*
1) функція $F(x, y)$ визначена та неперервна в деякому прямокутнику

$$\mathcal{D} = [x_0 - \Delta, x_0 + \Delta;\ y_0 - \Delta',\ y_0 + \Delta']$$

з центром у точці (x_0, y_0);
2) $F(x, y)$ у цій точці дорівнює нулю: $F(x_0, y_0) = 0$;
3) при сталому x функція $F(x, y)$ монотонно зростає (або монотонно спадає) зі зростанням y.

Тоді:
а) в деякому околі точки (x_0, y_0) рівняння (205.1) визначає y як однозначну функцію від x: $y = f(x)$;
б) при $x = x_0$, ця функція набуває значення y_0: $f(x_0) = y_0$;
нарешті,
в) функція $f(x)$ неперервна.

Доведення. Станемо рухатись вздовж **вертикалі**, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 206.1), тобто фіксуємо $x = x_0$; тоді розглянута функція $F(x, y)$ зведеться до функції $F(x_0, y)$ від **однієї** змінної y. За умовою 2), вона при $y = y_0$ дорівнює 0. Водночас за умовою 3) функція $F(x_0, y)$ **зростає** разом з y, так що для $y < y_0$, її значення менше нуля, а для $y > y_0$ — більше нуля. Зокрема, вона матиме значення різних знаків у точках $A_0(x_0,\ y_0 - \Delta')$ і $B_0(x_0,\ y_0 + \Delta')$, саме

$$F(A_0) = F(x_0,\ y_0 - \Delta') < 0 \quad \text{і} \quad F(B_0) = F(x_0,\ y_0 + \Delta') > 0.$$

Перейдемо тепер до **горизонтальних** прямих, що проходять через ці точки A_0 і B_0, тобто фіксуємо цього разу $y = y_0 - \Delta'$ або $y = y_0 + \Delta'$. Отримаємо дві функції від **однієї** змінної x: $F(x,\ y_0 - \Delta')$ і $F(x,\ y_0 + \Delta')$, які, як ми бачили, при $x = x_0$ мають: перша — від'ємне значення, а друга — додатне. Але за умовою 1) ці функції неперервні. (Ми припустили неперервність функції $F(x, y)$ за сукупністю змінних x, y; але в такому разі вона буде неперервною і за кожною змінною окремо.) А тому знайдеться деякий окіл $(x_0 - \delta_0,\ x_0 + \delta_0)$ точки x_0 $(0 < \delta_0 \leqslant \Delta)$, в якому обидві функції зберігають свій знак (лем. 80.1), тому при $x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0$

$$F(x,\ y_0 - \Delta') < 0 \quad \text{і} \quad F(x,\ y_0 + \Delta') > 0.$$

Позначимо $A_1(x_0 - \delta_0,\ y_0 - \Delta')$, $A_2(x_0 + \delta_0,\ y_0 - \Delta')$, $B_1(x_0 - \delta_0,\ y_0 + \Delta')$, $B_2(x_0 + \delta_0,\ y_0 + \Delta')$. Отже, вздовж відрізків A_1A_2 і B_1B_2, довжини $2\delta_0$, з центрами в точках A_0 і B_0, задана функція $F(x, y)$ має від'ємні значення на першому відрізку і додатні — на другому.

Фіксуємо на проміжку $(x_0 - \delta_0,\ x_0 + \delta_0)$ **будь-яке** значення $x = \overline{x}$ і розглянемо **вертикальний** відрізок, що з'єднує точки $\overline{A}(\overline{x},\ y_0 - \Delta')$ і $\overline{B}(\overline{x},\ y_0 + \Delta')$. Вздовж нього наша функція знову зведеться до функції $F(\overline{x}, y)$ від однієї змінної y. Оскільки вона, за умовою 1), неперервна і, як сказано, на кінцях проміжку $[y_0 - \Delta',\ y_0 + \Delta']$ має значення різних знаків:

$$F(\overline{A}) = F(\overline{x},\ y_0 - \Delta') < 0 \quad \text{і} \quad F(\overline{B}) = F(\overline{x},\ y_0 + \Delta') > 0,$$

то, за теоремою Бользано – Коші (теор. 80.1), при деякому значенні $y = \overline{y}$, що міститься між $y_0 - \Delta'$ і $y_0 + \Delta'$, ця функція $F(\overline{x}, y)$ дорівнює нулю:

$$F(\overline{x}, \overline{y}) = 0.$$

І тут з умови 3) випливає, що при $y \gtreqless \overline{y}$ матимемо, відповідно, $F(\overline{x}, y) \gtreqless 0$, так що $\overline{y}$ є **єдине** значення y на проміжку $(y_0 - \Delta',\ y_0 + \Delta')$, яке разом із $x = \overline{x}$ задовольняє рівняння (205.1). На кожному вертикальному відрізку $\overline{A}\,\overline{B}$ знайдеться **тільки одна** точка $\overline{M}(\overline{x},\ \overline{y})$, в якій ліва частина рівняння дорівнює нулю.

Отже, в **околі**

$$(x_0 - \delta_0,\ x_0 + \delta_0;\ y_0 - \Delta',\ y_0 + \Delta')$$

nebayduzhi.math@gmail.com

точки $(x_0,\ y_0)$ **рівняння** (205.1)**, справді, визначає** y **як однозначну функцію від** x**:** $y = f(x)$**.**

Водночас попереднє міркування, зважаючи на умову 2), показує також, що $f(x_0) = y_0$. Саме, з того, що $F(x_0, y_0) = 0$, випливає, що y_0 і є те **єдине** значення y на проміжку $(y_0 - \Delta',\ y_0 + \Delta')$, яке разом з $x = x_0$ задовольняє рівняння (205.1).

Залишається лише довести неперервність функції $y = f(x)$ на проміжку $(x_0 - \delta_0,\ x_0 + \delta_0)$. Для точки $x = x_0$, це випливає безпосередньо з попереднього міркування, яке можна застосувати і до будь-якого меншого прямокутника з центром у точці $M_0(x_0, y_0)$. Замінивши число Δ' будь-яким числом $\varepsilon < \Delta'$, ми знайшли б, як і вище, таке $\delta \leqslant \delta_0$, щоб для будь-якого x із проміжку $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ відповідне йому **єдине** значення y, яке разом з x задовольняє рівняння (205.1), виявилося саме між $y_0 - \varepsilon$ і $y_0 + \varepsilon$. Отже, при $|x - x_0| < \delta$ мали б

$$|f(x) - y_0| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

що і доводить неперервність функції $f(x)$ у точці $x = x_0$.

Доведення для будь-якої точки $x = \overline{x}$ проводиться аналогічно до доведення для $x = x_0$. Точка $\overline{M}(\overline{x},\ \overline{y})$, де $\overline{y} = f(\overline{x})$, задовольняє ті самі умови, що і точка $M_0(x_0,\ y_0)$, бо $F(\overline{x}, \overline{y}) = 0$. Тому, як і вище, в околі точки $\overline{M}(\overline{x},\ \overline{y})$ рівнянням (205.1) змінна y визначається як **однозначна** функція від x, неперервна в точці $x = \overline{x}$. Але, саме через однозначність, ця функція є не що інше, як $f(x)$, і тим доводиться неперервність $f(x)$ при $x = \overline{x}$. ☐

Ми довели **теорему існування** неявної функції не ставлячи питання про **обчислення** її значень або про її **аналітичне задання**; цим ми займемося пізніше.

Доведена теорема, очевидно, є узагальненням теор. 83.1.

207. Диференційовність неявної функції

Тепер ми посилимо припущення щодо функції $F(x, y)$ і тоді отримаємо можливість довести існування похідної для функції $y = f(x)$.

Теорема 207.1. *Припустимо, що*
1) функція $F(x, y)$ *визначена і неперервна у прямокутнику*

$$\mathcal{D} = [x_0 - \Delta,\ x_0 + \Delta;\ y_0 - \Delta',\ y_0 + \Delta']$$

з центром у точці (x_0, y_0)*;*
2) частинні похідні F'_x *і* F'_y *існують і неперервні в* $\mathcal{D}$*;*
3) $F(x, y)$ *у точці* (x_0, y_0) *дорівнює нулю:* $F(x_0, y_0) = 0$*;*
нарешті,
4) похідна $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

nebayduzhi.math@gmail.com

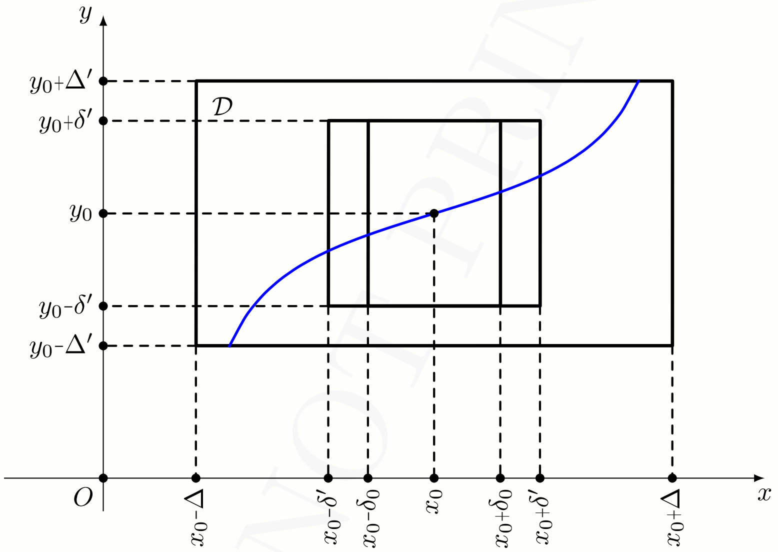


Рис. 207.1

Тоді виконуються висновки а), б), в) попередньої теор. 206.1 і, крім того, г) функція $f(x)$ має неперервну похідну.

Доведення. Нехай, наприклад, $F'_y(x_0, y_0) > 0$; оскільки похідна $F'_y(x, y)$, за умовою 2), неперервна, то можна побудувати такий квадрат:

$$[x_0 - \delta',\ x_0 + \delta';\ y_0 - \delta',\ y_0 + \delta'] \quad (\delta' < \Delta,\ \delta' < \Delta'),$$

щоб для всіх його точок було: $F'_y(x, y) > 0$. (Для функції кількох змінних справедливе твердження, аналогічне до лем. 80.1 для функцій однієї змінної.) Тоді $F(x, y)$ монотонна по y при $x = \text{const}$ (розд. 132) у цьому квадраті. Отже для цього квадрата виконані усі умови теор. 206.1, і виконуються висновки а), б), в).

Переходячи до доведення твердження *г*), будемо розуміти саме ту неявну функцію $y = f(x)$, яка визначається рівнянням (205.1) і тотожно його задовольняє. Надамо x приріст Δx; значенню $x + \Delta x$ відповідатиме значення $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, що разом з ним задовольняє рівняння (205.1): $F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = 0$. Очевидно, і приріст

$$\Delta F(x, y) = F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

Представивши ΔF за формулою (178.1), отримаємо

$$0 = \Delta F(x, y) = F'_x(x, y) \cdot \Delta x + F'_y(x, y) \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

де α і β залежать від $\Delta x, \Delta y$ і прямують до нуля, коли $\Delta x, \Delta y$ **одночасно** прямують до нуля. Звідси

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y) + \alpha}{F'_y(x, y) + \beta}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Спрямуємо до нуля Δx; через доведену вже неперервність функції $y = f(x)$ (дивіться умову в)), маємо, що Δy також прямує до нуля, а тому $\alpha \to 0, \beta \to 0$. Оскільки $F'_y \neq 0$, то існує границя правої частини, отже, існує і похідна y за x:

$$f'(x) = y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{207.1}$$

Підставляючи $f(x)$ замість y, матимемо

$$f'(x) = \frac{-F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))};$$

оскільки в чисельнику і в знаменнику маємо неперервні функції від неперервних функцій, і знаменник не дорівнює нулю, то звідси ясно, що $f'(x)$ — також неперервна функція. Теорема доведена. ☐

Чудово, що за властивостями функції $F(x, y)$, яка нам дана безпосередньо, ми можемо судити про властивості функції $y = f(x)$, для якої безпосереднього задання ми не маємо.

208. Неявні функції кількох змінних

Аналогічно до рівняння (205.1) можна розглядати і рівняння з більшим числом змінних

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0. \tag{208.1}$$

За відомих умов цим рівнянням y визначається як “неявна” функція від n змінних $x_1, \dots, x_n$:

$$y = f(x_1, \dots, x_n),$$

яка, взагалі кажучи, буде многозначною. Якщо підставити її замість y, то матимемо

$$F\Big(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)\Big) = 0$$

вже **тотожно** відносно $x_1, \dots, x_n$.

Ми говоритимемо, що у $(n+1)$-вимірному паралелепіпеді

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n; c, d)$$

рівняння (208.1) визначає y як однозначну функцію від $x_1, \dots, x_n$, якщо для будь-якої точки $(x_1, \dots, x_n)$, що міститься у n-вимірному паралелепіпеді

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n),$$

рівняння (208.1) має один, і тільки один, корінь y на проміжку (c, d).

У ролі такого паралелепіпеда зазвичай фігуруватиме **окіл** точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Сформулюємо тепер теорему, що стосується рівняння (208.1).

Теорема 208.1. *Припустимо, що*
1) функція $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ *визначена і неперервна в* $(n+1)$*-вимірному паралелепіпеді*

$$\mathcal{D} = [x_1^0 - \Delta_1,\ x_1^0 + \Delta_1;\ \ldots;\ x_n^0 - \Delta_n,\ x_n^0 + \Delta_n;\ y_0 - \Delta',\ y_0 + \Delta']$$

з центром у точці $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ y_0)$*;*
2) частинні похідні $F'_{x_1},\ \ldots,\ F'_{x_n},\ F'_y$ *існують і неперервні в* $\mathcal{D}$*;*
3) функція F *в точці* $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ y_0)$ *дорівнює нулю; і, нарешті,*
4) похідна F'_y *у цій точці не дорівнює нулю.*

Тоді
а) в деякому околі точки $(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ y_0)$ *рівняння* (208.1) *визначає* y *як однозначну функцію від* $x_1,\ \ldots,\ x_n$*:* $y = f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$*;*
б) при $x = x_1^0,\ \ldots,\ x = x_n^0$ *ця функція набуває значення* y_0*:* $f(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0) = y_0$*;*
в) функція $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ *неперервна за сукупністю своїх аргументів і*
г) має неперервні частинні похідні $f'_{x_1},\ \ldots,\ f'_{x_n}$*.*

На доведенні ми зупинятися не будемо, оскільки воно абсолютно аналогічне до доведення теор. 206.1 і теор. 207.1.

Нарешті, у самому загальному випадку може бути дана система з m рівнянь з $n+m$ змінними

$$\begin{cases} F_1(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_m) = 0, \\ F_2(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_m) = 0, \\ \ldots \\ F_m(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_m) = 0. \end{cases} \tag{208.2}$$

Тут ідеться про визначення із цієї системи m змінних $y_1,\ \ldots,\ y_m$ як “неявних” функцій від n змінних $x_1,\ \ldots,\ x_n$:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1,\ \ldots,\ x_n), \\ y_2 = \varphi_2(x_1,\ \ldots,\ x_n), \\ \ldots \\ y_m = \varphi_m(x_1,\ \ldots,\ x_n), \end{cases}$$

так що при підстановці в (208.2) виходять **тотожності**

$$\begin{cases} F_1(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi_1(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots,\ \varphi_m(x_1,\ \ldots,\ x_n)) = 0, \\ F_2(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi_1(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots,\ \varphi_m(x_1,\ \ldots,\ x_n)) = 0, \\ \ldots \\ F_m(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \varphi_1(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots,\ \varphi_m(x_1,\ \ldots,\ x_n)) = 0. \end{cases}$$

Кажуть, що *в* $(n+m)$*-вимірному паралелепіпеді*

$$(a_1,\ b_1;\ \ldots;\ a_n,\ b_n;\ c_1,\ d_1;\ \ldots;\ c_m,\ d_m)$$

система (208.2) ***визначає*** $y_1,\ \ldots,\ y_m$ ***як однозначні функції*** *від* $x_1,\ \ldots,\ x_n$*, якщо для кожної точки* $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ *в* n*-вимірному паралелепіпеді*

$$(a_1,\ b_1;\ \ldots;\ a_n,\ b_n)$$

система рівнянь (208.2) *має одну, і лише одну, систему розв'язків* $y_1,\ \ldots,\ y_m$*, що належить до* m*-вимірного паралелепіпеда*

$$(c_1,\ d_1;\ \ldots;\ c_m,\ d_m).$$

Ми бачили, що в питанні про існування однозначної неявної функції, що визначається **одним** рівнянням (205.1) або (208.1), вирішальну роль відігравала вимога, щоб у точці, що розглядається і задовольняє рівняння, похідна F'_y не дорівнювала нулю — похідна саме за тією змінною, яку потрібно знайти як неявну функцію. У питанні ж про існування однозначних неявних функцій $y_1,\ \ldots,\ y_m$, що визначаються системою рівнянь (208.2), до якої ми зараз переходимо, аналогічну роль відіграватиме **якобіан** від функцій, що стоять у лівих частинах, за змінними $y_1,\ \ldots,\ y_m$:

$$J=\frac{D(F_1,\ \ldots,\ F_m)}{D(y_1,\ \ldots,\ y_m)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}. \tag{208.3}$$

Теорема 208.2. *Припустимо, що:*
1) всі функції $F_1,\ \ldots,\ F_m$ *визначені і неперервні в* $(n+m)$*-вимірному прямокутному паралелепіпеді*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}=[&x_1^0-\Delta_1,\ x_1^0+\Delta_1;\ \ldots;\ x_n^0-\Delta_n,\ x_n^0+\Delta_n;\\ &y_1^0-\Delta'_1,\ y_1^0+\Delta'_1;\ \ldots;\ y_m^0-\Delta'_m,\ y_m^0+\Delta'_m]\end{aligned}$$

з центром у точці $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_m^0)$*;*
2) існують і неперервні в $\mathcal{D}$ *частинні похідні всіх цих функцій за всіма аргументами;*
3) точка $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_m^0)$ *задовольняє систему* (208.2)*;*
4) якобіан J (208.3) *у цій точці відмінний від нуля.*

Тоді:

а) в деякому околі точки $(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_m^0)$ *система рівнянь* (208.2) *визначає*

$y_1,\ \dots,\ y_m$ як однозначні функції від $x_1,\ \dots,\ x_n$:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,\ \dots,\ x_n), \\ y_2 = f_2(x_1,\ \dots,\ x_n), \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1,\ \dots,\ x_n); \end{cases}$$

б) при $x = x_1^0,\ \dots,\ x = x_n^0$ ці функції набувають, відповідно, значень $y_1^0,\ \dots,\ y_m^0$:

$$\begin{cases} f_1(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0) = y_1^0, \\ f_2(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0) = y_2^0, \\ \dots \\ f_m(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0) = y_m^0; \end{cases}$$

в) усі функції $f_1,\ \dots,\ f_m$ неперервні і
г) мають неперервні частинні похідні за всіма аргументами.

Доведення. Доведення поведемо методом математичної індукції. При $m = 1$, коли система зводиться до одного рівняння, теорема справедлива (це теор. 208.1). Припустимо тепер, що теорема справедлива у випадку, коли система складається з $m-1$ рівнянь, і ідеться про знаходження $m-1$ неявної функції; і доведемо її для системи з m рівнянь.

Оскільки якобіан J у точці $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_m^0)$ відмінний від нуля, в останньому стовпці його хоч один елемент у цій точці також не дорівнює нулю; нехай, наприклад,

$$\frac{\partial F_m(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_m^0)}{\partial y_m} \neq 0.$$

У такому випадку, за теор. 208.1, **останнє** рівняння системи (208.2) **в деякому околі** $\mathcal{D}^*$ **точки** $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_m^0)$ визначає y_m як однозначну функцію від інших аргументів:

$$y_m = \varphi(x_1,\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_{m-1}), \tag{208.4}$$

так що тотожно (щодо цих аргументів) маємо

$$F_m\Big(x_1,\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_{m-1},\ \varphi(x_1,\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_{m-1})\Big) = 0. \tag{208.5}$$

Ця функція φ неперервна і має неперервні частинні похідні; крім того

$$\varphi(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_{m-1}^0) = y_m^0, \tag{208.6}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Важливо підкреслити, що **оскільки ми обмежуємося далі згаданим околом** $\mathcal{D}^*$, то рівняння

$$F_m(x_1,\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_m)=0$$

рівносильне рівнянню (208.4): в межах $\mathcal{D}^*$ його задовольняють одні й ті самі системи значень змінних $x_1,\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_m$.

Замінюючи останнє з рівнянь (208.2) цим рівнянням (208.4) і підставляючи функцію φ замість y_m в інші рівняння системи (208.2), ми отримаємо нову систему вже з $m-1$ рівнянь з $n+m-1$ змінними

$$\begin{cases}\Phi_1(x_1,\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_{m-1})=0,\\ \Phi_2(x_1,\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_{m-1})=0,\\ \dots\\ \Phi_{m-1}(x_1,\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_{m-1})=0.\end{cases} \tag{208.7}$$

де для скорочення позначено (при $j=1,\ 2,\ \dots,\ m-1$)

$$\begin{gathered}\Phi_j(x_1,\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_{m-1})=\\ =F_j\Big(x_1,\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_{m-1},\ \varphi(x_1,\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_{m-1})\Big).\end{gathered} \tag{208.8}$$

Якщо виходити за межі околу $\mathcal{D}^*$, то система (208.2) виявляється **рівносильною** системі (208.7) з додаванням рівняння (208.4). Тому, якщо нам вдасться довести, що системою (208.7) у досить малому околі d^* точки $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_{m-1}^0)$ $(m-1)$-а змінних $y_1,\ \dots,\ y_{m-1}$ визначаються як однозначні функції від $x_1,\ \dots,\ x_n$:

$$\begin{cases}y_1=f_1(x_1,\ \dots,\ x_n),\\ \dots\\ y_{m-1}=f_{m-1}(x_1,\ \dots,\ x_n),\end{cases} \tag{208.9}$$

то зможемо застосувати (208.4) і змінна y_m визначиться як така однозначна функція:

$$y_m=f_m(x_1,\ \dots,\ x_n)=\varphi\Big(x_1,\ \dots,\ x_n,\ f_1(x_1,\ \dots,\ x_n),\ \dots,\ f_{m-1}(x_1,\ \dots,\ x_n)\Big), \tag{208.10}$$

і висновок а) буде повністю доведено.

Пояснимо, що $(n+m-1)$-вимірний (відкритий) паралелепіпед d^* вважається настільки малим, щоб визначальні його проміжки містилися в відповідних проміжках, що визначають $(n+m)$-вимірний паралелепіпед $\mathcal{D}^*$. Той окіл точки $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_m^0)$, про який згадується у висновку а), і визначиться всіма проміжками, пов'язаними з d^*, з приєднанням до них останнього з проміжків, пов'язаних з $\mathcal{D}^*$.

Звернемося до системи (208.7) і покажемо, що в околі точки $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_{m-1}^0)$ для неї виконуються умови, аналогічні до 1), 2), 3), 4). Справедливість перших двох безпосередньо випливає із властивостей функцій F_j і φ, зважаючи на (208.8). Так само умова 3), у зв'язку з (208.8) і (208.6), дає нам (для $j = 1,\ \dots,\ m-1$)

$$\begin{aligned}&\Phi_j(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_{m-1}^0) =\\ =&F_j(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_{m-1}^0,\ \varphi(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_{m-1}^0)) =\\ =&F_j(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_{m-1}^0,\ y_m^0) = 0.\end{aligned}$$

Залишається лише розглянути **якобіан** (аналогічний до J)

$$J^* = \frac{D(\Phi_1,\ \dots,\ \Phi_{m-1})}{D(y_1,\ \dots,\ y_{m-1})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y_{m-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_2} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} \end{vmatrix}$$

і переконатися, що він відмінний від нуля в точці $(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_{m-1}^0)$. З цією метою перетворимо визначник J, додаючи до елементів перших його $m-1$ стовпців елементи m-го стовпця, помножені відповідно на $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1},\ \dots,\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}}$:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} + \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}.$$

Ми тут виконали елементарні перетворення матриці $(A\cdot K = B)$, причому визначник $|K| = 1$, та $|B| = |A|\cdot|K|$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 & k_2 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + k_1 a_{1m} & a_{12} + k_2 a_{1m} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} + k_1 a_{1m} & a_{22} + k_2 a_{1m} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + k_1 a_{1m} & a_{m2} + k_2 a_{1m} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо вважати тут $y_m = \varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1})$, то всі елементи, крім тих, що знаходяться в останньому рядку і в останньому стовпці, будуть частинними похідними функцій Φ_j (по $y_1, \ldots, y_{m-1}$). Саме, зважаючи на (208.8), диференціюючи Φ_j як складену функцію за $y_1, \ldots, y_{m-1}$ (користуючись правилом розд. 181), отримаємо для $j = 1, \ldots, m-1$

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_1} = \frac{\partial F_j}{\partial y_1} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_1},$$
$$\ldots$$
$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_{m-1}} = \frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}}.$$

З іншого боку, якщо продиференціювати за $y_1, \ldots, y_{m-1}$ тотожність (208.5), то виявиться, що

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_1} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0,$$
$$\ldots$$
$$\frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} = 0.$$

(Адже якщо (складена) функція, що стоїть у (208.5) зліва, тотожно дорівнює нулю, то й похідні її за будь-яким аргументом також нулі.)
Отже, в останньому рядку усі елементи (крім останнього) дорівнюють нулю. Остаточно

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

Розклавши цей визначник по елементах останнього рядка, прийдемо до результату

$$J = J^* \cdot \frac{\partial F_m}{\partial y_m}.$$

Покладемо, нарешті, тут $x_1 = x_1^0, \ldots, x_n = x_n^0, y_1 = y_1^0, \ldots, y_{m-1} = y_{m-1}^0$, тоді $y_m = \varphi(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_{m-1}^0) = y_m^0$ (208.6). Оскільки в цьому випадку, за умовою 4), J відмінний від нуля, то не може бути нулем і J^*, що й потрібно було довести.

nebayduzhi.math@gmail.com

Для системи (208.7), що містить $m-1$ рівнянь, наша теорема за припущенням справедлива. Отже, система ця в околі точки $(x_1,\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ \dots,\ y_{m-1})$ визначає однозначні функції (208.9), неперервні і які мають неперервні похідні; крім того, ці функції задовольняють і вимогу б):

$$\begin{cases} f_1(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0) = y_1^0, \\ f_2(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0) = y_2^0, \\ \dots \\ f_{m-1}(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0) = y_{m-1}^0. \end{cases} \tag{208.11}$$

Звідси випливає, що m-а функція (208.10) також неперервна і має неперервні похідні, і, нарешті, враховуючи (208.11) та (208.6):

$$\begin{aligned} &f_m(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0) = \\ &= \varphi(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ f_1(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0),\ \dots,\ f_{m-1}(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)) = \\ &= \varphi(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ y_1^0,\ \dots,\ y_{m-1}^0) = \\ &= y_m^0. \end{aligned}$$

Теорема доведена. □

Зауваження. Ми звертаємо увагу читача на **локальний** характер усіх теорем існування неявних функцій: *мова йде весь час лише про деякий окіл точки.* Але й у такому вигляді ці теореми корисні; наприклад, читач побачить це далі в 7 (Аналітичне задання кривих і поверхонь), де при вивченні властивостей **геометричного образу** у точці цілком достатньо обмежитися околом точки.

209. Обчислення похідних неявних функцій

Хід міркувань, за допомогою яких доводилися теореми існування неявних функцій, у загальному випадку не давав уявлення про сам **спосіб обчислення** похідних (першого порядку) неявних функцій. Про похідні вищого порядку взагалі не було мови. Тепер на цих важливих питаннях ми зупинимося окремо.

Почнемо з найпростішого випадку, коли дано рівняння (205.1). Будемо вважати виконаними в околі точки, що розглядається, умови теор. 206.1; суттєву роль надалі відіграватиме вимога $F'_y \neq 0$.

Покажемо простий спосіб для **обчислення** похідної y'_x, (якщо її **існування** наперед відоме). Ми знаємо, що якщо неявну функцію $y = f(x)$ підставити в рівняння (205.1), то воно обернеться в тотожність (205.2). Отже, якщо y є саме ця функція від x, то ліва частина рівності (205.1), $F(x, y)$, буде **складеною** функцією від x, яка **тотожно** дорівнює нулю. Тоді і похідна її за x також є нуль. Якщо продиференціювати

nebayduzhi.math@gmail.com

цю функцію за правилом розділу розд. 181, то отримаємо

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y)\cdot y'_x = 0, \tag{209.1}$$

звідки (оскільки $F'_y \neq 0$)

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}, \tag{209.2}$$

ми дійшли вже до відомої нам формули (порівняйте з (207.1)).

Тепер можемо йти далі. **Якщо** функція $F(x,y)$ має неперервні похідні **другого** порядку, то вираз, що стоїть у формулі (209.2) праворуч, може бути продиференційований за x, отже існує і похідна від y'_x, тобто **друга** похідна y''_{x^2}, від неявної функції y. Виконуючи диференціювання і підставляючи щоразу замість y'_x її вираз (209.2), знайдемо

$$\begin{aligned} y''_{x^2} &= \frac{\left(F''_{xy} + F''_{y^2}\cdot y'_x\right)\cdot F'_x - \left(F''_{x^2} + F''_{xy}\cdot y'_x\right)\cdot F'_y}{F'^{\,2}_y} = \\ &= \frac{2F'_x\cdot F'_y\cdot F''_{xy} - F'^{\,2}_y\cdot F''_{x^2} - F'^{\,2}_x\cdot F''_{y^2}}{F'^{\,3}_y}; \end{aligned}$$

звідси бачимо, що друга похідна буде неперервною функцією від x.

Якщо функція $F(x,y)$ має неперервні похідні **третього** порядку, то, очевидно, існує і **третя** похідна від неявної функції: y'''_{x^3}; її вираз знову можна отримати безпосереднім диференціюванням виразу для y''_{x^2}, і так далі. За допомогою математичної індукції легко довести, що *існування неперервних похідних функції $F(x,y)$ до k-го порядку ($k > 1$) включно забезпечує і існування (неперервної) похідної k-го порядку від неявної функції.*

Після того, як сам факт існування послідовних похідних від неявної функції доведено, обчислення їх простіше робити повторним диференціюванням тотожності (209.1), з урахуванням того, що y є функція від x. Наприклад, перше диференціювання цієї тотожності дасть нам

$$F''_{x^2} + F''_{xy}\cdot y'_x + \left(F''_{xy} + F''_{y^2}\cdot y'_x\right)\cdot y'_x + F'_y\cdot y''_{x^2} = 0, \tag{209.3}$$

звідки (адже $F'_y \neq 0$)

$$y''_{x^2} = -\frac{F''_{x^2} + 2F''_{xy}\cdot y'_x + F''_{y^2}\cdot y'^2_x}{F'_y};$$

підставивши замість y'_x, його вираз (209.2), повернемося до вже знайденого виразу для y''_{x^2}; і так далі.

Аналогічно робимо і у випадку рівняння (208.1) з більшою кількістю змінних. Тут припускаємо виконаними умови теор. 208.1. Якщо y є та сама неявна функція, що визначається рівнянням (208.1), то (208.1) перетворюється на **тотожність**. Фіксуючи значення $x_2,\ \dots,\ x_n$ і розглядаючи y як функцію лише від x_1, продиференціюємо цю тотожність за x_1:

$$F'_{x_1} + F'_y \cdot y'_{x_1} = 0, \quad \text{звідки} \quad y'_{x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_y};$$

так само отримаємо

$$y'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y} \quad (i = 1,\ \dots,\ n).$$

Якщо потрібні **всі** похідні першого, другого порядку, то простіше відразу обчислювати $dy,\ d^2y,\ \dots$. Продиференціюємо ж нашу тотожність **повним чином**, тобто прирівняємо до нуля повний диференціал від його лівої частини, використовуючи при цьому **інваріантність форми** першого диференціала (розд. 185):

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0,$$

так що

$$dy = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \cdot dx_1 - \dots - \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \cdot dx_n.$$

Водночас

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \cdot dx_n.$$

Зважаючи на довільність $dx_1,\ \dots,\ dx_n$, звідси зрозуміло, що

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \quad (i = 1,\ \dots,\ n),$$

як ми і отримали вище.

Диференціюючи ще раз, отримаємо

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_n}dx_n + \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial y}dy\right)dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot (dy)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}d^2y = 0$$

і визначимо d^2y, що приведе нас до виразів для

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1\,\partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}, \quad \dots$$

Ми бачимо, що у всіх цих викладках основну роль відіграє умова, що

$$F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Перейдемо тепер до системи рівнянь (208.2). Припустимо, що в околі взятої точки виконуються умови теор. 208.2. Знову звертаємо увагу на роль, яку відіграватиме вимога $J \neq 0$.

Ми знаємо, що неявні функції $y_1,\ \dots,\ y_m$ мають частинні похідні за $x_1,\ \dots,\ x_n$. Їх **обчислення** робиться диференціюванням тотожностей, що виходять з (208.2), якщо $y_1,\ \dots,\ y_m$ розуміти як згадані неявні функції. Диференціювання за x_1, наприклад, дає

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} = 0, \\ \dots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dots + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$$

Це система **лінійних** рівнянь відносно невідомих $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1},\ \dots,\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1}$, з **відмінним від нуля** визначником

$$J = \frac{D(F_1,\ \dots,\ F_m)}{D(y_1,\ \dots,\ y_m)}.$$

Звідси, за методом Крамера (швейц. Gabriel Cramer, Ґабріє́ль Краме́р),

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{D(F_1,\ \dots,\ F_m)}{D(x_1,\ y_2,\ \dots,\ y_m)}}{\dfrac{D(F_1,\ \dots,\ F_m)}{D(y_1,\ \dots,\ y_m)}},\quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{D(F_1,\ \dots,\ F_m)}{D(y_1,\ x_1,\ \dots,\ y_m)}}{\dfrac{D(F_1,\ \dots,\ F_m)}{D(y_1,\ \dots,\ y_m)}},\ \dots,$$

$$\frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{D(F_1,\ \dots,\ F_m)}{D(y_1,\ \dots,\ y_{m-2},\ x_1,\ y_m)}}{\dfrac{D(F_1,\ \dots,\ F_m)}{D(y_1,\ \dots,\ y_m)}},\quad \frac{\partial y_m}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{D(F_1,\ \dots,\ F_m)}{D(y_1,\ \dots,\ y_{m-2},\ y_{m-1},\ x_1))}}{\dfrac{D(F_1,\ \dots,\ F_m)}{D(y_1,\ \dots,\ y_m)}}.$$

Аналогічні вирази виходять і для похідних від $y_1,\ \dots,\ y_m$ за $x_2,\ \dots,\ x_n$.

Якщо функції $F_1,\ \dots,\ F_m$ мають неперервні частинні похідні **другого** порядку, то праві частини усіх отриманих формул мають (неперервні) похідні за всіма аргументами, отже, існують (неперервні) **другі** похідні від неявних функцій. Взагалі (як це легко довести індуктивно) *існування для функцій $F_1,\ \dots,\ F_m$ неперервних похідних до k-го порядку включно тягне за собою існування та неперервність всіх похідних k-го порядку і для неявних функцій.*

Обчислення похідних від неявних функцій і в загальному випадку також робиться або диференціюванням **тотожностей** (208.2) за тими чи іншими змінними, або диференціюванням їх **повним чином**. Отримана для знаходження похідних або диференціалів система **лінійних** рівнянь своїм визначником завжди має відмінний від нуля якобіан J. Ці зауваження стануть більш зрозумілими на прикладах.

210. Приклади

1) Нехай y пов'язано з x рівнянням

$$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Диференціюючи послідовно за x (причому y вважаємо функцією від x), отримаємо

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2}=\frac{xy'-y}{x^2+y^2}\quad\text{або}\quad x+yy'=xy'-y;$$

потім

$$1+y'^2+yy''=xy'';$$

і так далі. З першого рівняння знаходимо

$$y'=\frac{x+y}{x-y},$$

з другого (якщо підставити знайдене значення y')

$$y''=\frac{1+y'^2}{x-y}=2\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3},$$

і так далі.

2) Дано рівняння

$$F(x,y)=x^3+y^3-3axy=0.$$

Потрібно знайти **екстремуми** визначеної ним неявної функції y від x.

Маємо тут

$$F'_x=3(x^2-ay)\quad\text{і}\quad F'_y=3(y^2-ax).$$

Використовуючи (209.2), щоб було $y'_x=0$, має виконуватися рівність $F'_x=0$. Розв'язуючи спільно рівняння $F=0$ і $F'_x=0$ знайдемо **дві** пари значень x і y:

$$(0,\ 0)\quad\text{і}\quad(a\sqrt[3]{2},\ a\sqrt[3]{4}).$$

Але в першій точці F'_y дорівнює нулю, так що ми не можемо стверджувати, що в її околі наше рівняння визначає y як однозначну функцію від x; тому точку $(0,0)$ залишаємо осторонь.

У другій точці $F'_y = 3a^2\sqrt[3]{2} > 0$, так що в цій точці можна застосувати теор. 207.1. Щоб переконатися в наявності екстремуму, обчислимо y''_{x^2} при $x = a\sqrt[3]{2}$; найпростіше виходити з (209.3), вважаючи там $y'_x = 0$:

$$y''_{x^2} = -\frac{F''_{x^2}}{F'_y}$$

(це не загальний вираз для y''_{x^2}; він годиться лише в нашій точці).
Оскільки $F''_{x^2} = 6x > 0$ при $x = a\sqrt[3]{2}$, то $y''_{x^2} < 0$, і очевидно маємо **максимум**.

3) Нехай неявна функція z від x, y визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Маємо послідовно

$$\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} + \frac{z\,dz}{c^2} = 0, \quad dz = -\frac{c^2x}{a^2z}dx - \frac{c^2y}{b^2z}dy,$$

так що

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z}.$$

Потім (dx, dy — довільні диференціали, dz — ні, тому $d(z\cdot dz) = dz\cdot dz + z\cdot d^2z$):

$$\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2} + \frac{z\,d^2z}{c^2} = 0,$$

звідки (якщо скористатися вже відомим виразом для dz)

$$d^2z = -\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2b^2}dx\,dy + \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right],$$

що дає нам

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^4}{a^2z^3}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^4}{b^2z^3}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$

і так далі.

4) Нехай z визначається, як функція від x, y, з рівняння

$$z = x + y\cdot\varphi(z).$$

Припускаючи $1 - y\cdot\varphi'(z) \neq 0$, довести, що

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1-y\cdot\varphi'(z)}\quad\text{і}\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi(z)}{1-y\cdot\varphi'(z)},$$

звідки і випливає потрібне.

5) Нехай із рівняння

$$y=x\cdot\varphi(z)+\psi(z)$$

змінна z визначається як неявна функція від x, y. Припускаючи $x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)\neq 0$, довести, що ця функція задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=0$$

або

$$r\cdot q^2-2pq\cdot s+t\cdot p^2=0,$$

де для стислості позначено

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\quad\frac{\partial z}{\partial y}=q,\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\quad\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=s,\quad\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t.$$

Послідовно диференціюючи за x і за y, отримаємо

$$\varphi(z)+[x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)]\cdot p=0,\quad[x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)]\cdot q=1$$

і далі

$$\begin{aligned}2\varphi'(z)\cdot p+[x\cdot\varphi''(z)+\psi''(z)]\cdot p^2+[x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)]\cdot r&=0,\\ \varphi'(z)\cdot q+[x\cdot\varphi''(z)+\psi''(z)]\cdot pq+[x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)]\cdot s&=0,\\ [x\cdot\varphi''(z)+\psi''(z)]\cdot q^2+[x\cdot\varphi'(z)+\psi'(z)]\cdot t&=0.\end{aligned}$$

Додавши останні три рівності, попередньо помножені на $q^2,\ -2pq,\ p^2$, і прийдемо до необхідного співвідношення.

6) Нехай дана система

$$x+y+z+u=a,\quad x^2+y^2+z^2+u^2=b^2,\quad x^3+y^3+z^3+u^3=c^3,$$

яка визначає y, z, u як функції від x. Маємо

$$1+y'+z'+u'=0,\quad x+yy'+zz'+uu'=0,\quad x^2+y^2y'+z^2z'+u^2u'=0.$$

Припустимо, що визначник

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\ y&z&u\\ y^2&z^2&u^2\end{vmatrix}=(z-y)(u-y)(u-z)$$

nebayduzhi.math@gmail.com

не дорівнює нулю. Звідси маємо

$$y' = -\frac{(z-x)(u-x)}{(z-y)(u-y)}$$

і так далі.

7) Нехай змінні x, y, z пов'язані зі змінними r, θ, φ співвідношеннями

$$x = r \cdot \cos\theta\cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\theta\cos\varphi, \quad z = r \cdot \sin\varphi,$$

де $0 < r < +\infty$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Якобіан

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi > 0.$$

Згадані співвідношення визначають r, θ, φ як функції від x, y, z. Для обчислення похідних цих функцій продиференціюємо ці співвідношення **повним чином**:

$$\begin{aligned} \cos\theta\cos\varphi \cdot dr - r\sin\theta\cos\varphi \cdot d\theta - r\cos\theta\sin\varphi \cdot d\varphi &= dx, \\ \sin\theta\cos\varphi \cdot dr + r\cos\theta\cos\varphi \cdot d\theta - r\sin\theta\sin\varphi \cdot d\varphi &= dy, \\ \sin\varphi \cdot dr + r\cos\varphi \cdot d\varphi &= dz. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо:

$$\begin{aligned} dr &= \frac{r^2 \cdot \cos\theta\cos^2\varphi}{J}dx + \frac{r^2 \cdot \sin\theta\cos^2\varphi}{J}dy + \frac{r^2 \cdot \sin\varphi\cos\varphi}{J}dz, \\ d\theta &= -\frac{r \cdot \sin\theta}{J}dx + \frac{r \cdot \cos\theta}{J}dy, \\ d\varphi &= -\frac{r \cdot \cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}{J}dx - \frac{r \cdot \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi}{J}dy + \frac{r \cdot \cos^2\varphi}{J}dz. \end{aligned}$$

Цим, власне, вже і знайдені похідні, що цікавлять нас (якщо врахувати вказане вище значення J):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta\cos\varphi, && \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta\cos\varphi, && \frac{\partial r}{\partial z} = \sin\varphi, \\ &\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r \cdot \cos\varphi}, && \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r \cdot \cos\varphi}, && \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}, && \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\sin\theta\sin\varphi}{r}, && \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\cos\varphi}{r}. \end{aligned}$$

Рівняння легко розв'язати:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Це дає змогу обчислити всі ці похідні і тим самим перевірити знайдені результати.

8) Розглянемо останній приклад на диференціювання неявних функцій, де виведемо ще одну формулу, що знову підкреслює аналогію між якобіаном системи функцій та похідною однієї функції.

Нехай дана система n рівнянь з $2n$ змінними:

$$F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Припускаючи якобіан

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}$$

відмінним від нуля, розглянемо $y_1, \dots, y_n$ як функції від $x_1, \dots, x_n$, визначені цією системою рівнянь і, отже, F_i тотожно дорівнюють 0 при будь-яких x_j. Диференціюючи ці тотожності за кожним x_j, результати можемо подати у вигляді

$$-\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Визначник, складений із лівих частин цих рівностей, є

$$(-1)^n \frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)};$$

а визначник, складений з правих частин, очевидно, є добуток визначників

$$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \quad \text{і} \quad \frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$$

(дивіться (203.2)). Звідси випливає формула

$$\frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = (-1)^n \frac{\dfrac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}}{\dfrac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}}, \tag{210.1}$$

що є аналогом формули (209.2).

Розглянемо випадок, коли рівняння дані у вигляді функцій від $y_1, \dots, y_n$:

$$x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n),$$

тобто $F_i = \varphi_i - x_i$. Оскільки тут $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = -1$ або 0, дивлячись на те, чи буде $i = j$ або $i \neq j$, то чисельник зведеться до

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^n,$$

і формула набуде вигляду

$$\frac{D(y_1,\ \dots,\ y_n)}{D(x_1,\ \dots,\ x_n)} = \frac{1}{\dfrac{D(x_1,\ \dots,\ x_n)}{D(y_1,\ \dots,\ y_n)}},$$

Цей результат нам уже знайомий (203.3).

6.3. Деякі застосування теорії неявних функцій

211. Відносні екстремуми

Розглянемо питання про екстремум функції $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ від $n+m$ змінних припускаючи, що ці змінні підпорядковані ще **рівнянням зв'язку**

$$\Phi_i(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \tag{211.1}$$

Ми уточнимо поняття такого **відносного екстремуму** і вкажемо способи для його знаходження.

Кажуть, що *у точці* $M_0(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0)$, *що* ***задовольняє рівняння зв'язку****, функція* $f(x_1, \dots, x_{n+m})$ *має* ***відносний*** *максимум (мінімум), якщо нерівність*

$$\begin{gathered} f(x_1, \dots, x_{n+m}) \leqslant f(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0) \\ (\geqslant) \end{gathered}$$

виконується в деякому околі точки M_0 *для всіх його точок* $(x_1, \dots, x_{n+m})$*, які* ***задовольняють рівняння зв'язку****.*

Ми припускатимемо, що як функція f, так і функції Φ_i мають в околі точки M_0 неперервні частинні похідні за всіма аргументами. Нехай, далі, у точці M_0 **відмінний від нуля хоч один** із визначників m-го порядку, складених із матриці частинних похідних (в цьому випадку говорять, що матриця (211.2) має (у точці M_0) **ранг** m)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+1}} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+1}} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_{n+m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_n} & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+1}} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{pmatrix}, \tag{211.2}$$

наприклад, визначник

$$J = \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_m)}{D(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+1}} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n+m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+1}} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_m}{\partial x_{n+m}} \end{vmatrix}. \tag{211.3}$$

Тоді, якщо обмежитися досить малим околом точки M_0, за теор. 208.2 система (211.1) **рівносильна** системі вигляду

$$x_{n+i} = \varphi_i(x_1,\ \dots,\ x_n) \quad (i = 1,\ \dots,\ m), \tag{211.4}$$

де φ_i є **неявні** функції, що визначаються системою (211.1). Іншими словами, вимогу, щоб значення змінних $x_1,\ \dots,\ x_n,\ x_{n+1},\ \dots,\ x_{n+m}$ задовольняли **рівняння зв'язку** (211.1), можна замінити припущенням, що змінні $x_{n+1},\ \dots,\ x_{n+m}$ є неявні функції (211.4) від $x_1, \dots, x_n$. Отже, питання про **відносний** екстремум для функції $f(x_1,\ \dots,\ x_n,\ x_{n+1},\ \dots,\ x_{n+m})$ від $n+m$ змінних у точці $M_0(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0,\ x_{n+1}^0,\ \dots,\ x_{n+m}^0)$ зводиться до питання про звичайний (**абсолютний**) екстремум для складеної функції від n змінних

$$f(x_1,\ \dots,\ x_n,\ \varphi_1(x_1,\ \dots,\ x_n),\ \dots,\ \varphi_m(x_1,\ \dots,\ x_n)) \tag{211.5}$$

у точці $P_0(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0)$.

Ці міркування вказують і реальний шлях для знаходження точки, що доставляє відносний екстремум функції $f(x_1,\ \dots,\ x_{n+m})$: якщо ми вміємо фактично розв'язати рівняння зв'язку, наприклад, відносно змінних $x_{n+1},\ \dots,\ x_{n+m}$, і знайти **явні** вирази для функцій (211.4), то справа зводиться до знаходження абсолютного екстремуму для складеної функції (211.5). Власне кажучи, ми так і робили для раніше розв'язаних задач (розд. 200, розд. 201), наприклад, коли ми шукали найменше значення для суми $x + y + z + t$ за умови $xyzt = c^4$ в пр. 200.4, тощо.

Вкажемо тепер інший шлях (**метод виключення залежних диференціалів**) для знаходження точки M_0, не припускаючи, що маємо явні вирази для (неявних) функцій (211.4), хоча існуванням цих функцій ми будемо користуватися й тут.

Отже, нехай у точці M_0 функція $f(x_1,\ \dots,\ x_{n+m})$ має **відносний** екстремум або, що теж саме, складена функція (211.5) у точці P_0 має **абсолютний** екстремум. Тоді, за зауваженням 1 розд. 196, у цій точці повинен дорівнювати нулю її диференціал і до того ж тотожно відносно диференціалів **незалежних** змінних $dx_1,\ \dots,\ dx_n$. Використовуючи інваріантність форми першого диференціала (розд. 185), цю умову можна записати так:

$$\sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = 0, \tag{211.6}$$

де $dx_{n+1},\ \dots,\ dx_{n+m}$ є диференціали функції (211.4) в точці P_0, тоді як частинні похідні обчислені в точці M_0, бо (як випливає з теор. 208.2)

$$\varphi_i(x_1^0,\ \dots,\ x_n^0) = x_{n+i}^0 \quad (i = 1,\ \dots,\ m). \tag{211.7}$$

З (211.6) *неможливо, звісно, зробити висновок про рівність нулю коефіцієнтів при диференціалах, оскільки не усі ці диференціали довільні.* Для того щоб звести справу до диференціалів, що довільно обираються, тобто до диференціалів $dx_1,\ \dots,\ dx_n$ **незалежних** змінних, ми спробуємо виключити звідси диференціали $dx_{n+1},\ \dots,\ dx_{n+m}$ **залежних** змінних. Це легко зробити, якщо продиференціювати **повним чином** рівняння зв'язку (211.1), вважаючи $x_{n+1},\ \dots,\ x_{n+m}$ функціями (211.4):

$$\sum_{j=1}^{n+m} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1,\ \dots,\ m). \tag{211.8}$$

Точніше кажучи, ми диференціюємо ті тотожності, які виходять із рівнянь (211.1), якщо замість $x_{n+1},\ \dots,\ x_{n+m}$ в них підставити неявні функції (211.4). Подібний спосіб мови ми застосовуватимемо і надалі.

Тут, як і вище, ми використали (211.7), для обчислення частинних похідних в точці M_0. Оскільки, за припущенням, визначник (211.3) у цій точці не нуль, то диференціали $dx_{n+1},\ \dots,\ dx_{n+m}$ можуть бути звідси лінійно виражені через $dx_1,\ \dots,\ dx_n$. Якщо ці вирази підставити в (211.6), то вийде рівність вигляду

$$A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = 0,$$

де $A_1,\ \dots,\ A_n$ означають n виразів, раціональних відносно частинних похідних функцій Φ_j, і тут взятих у точці M_0. Оскільки у цій рівності фігурують лише диференціали $dx_1,\ \dots,\ dx_n$ **незалежних** змінних, то в точці M_0 маємо

$$A_1 = 0,\ \dots,\ A_n = 0.$$

Разом з рівняннями зв'язку це дає $n + m$ рівнянь для знаходження $n + m$ невідомих $x_1,\ \dots,\ x_{n+m}$.

Звичайно, ми отримали лише **необхідні** умови для екстремальної точки M_0. Але й у такому вигляді умови можуть бути корисні навіть для знаходження найбільшого (або найменшого) значення функції f за умов (211.1), якщо за характером питання наперед видно, що всередині цієї області повинна існувати точка, де це найбільше (найменше) значення досягається, або якщо таке припущення зроблено в порядку наведення, щоб знайдену точку перевірити іншими міркуваннями.

Приклади наведені нижче, в розд. 214.

212. Метод невизначених множників Лаґранжа

У викладеному вище способі порушується симетрія щодо змінних: частина їх трактується як незалежні, частина — як залежні, одні диференціали виключаються, інші зберігаються. Іноді це спричиняє ускладнення викладок. Лаґранж запропонував метод, при якому всі змінні зберігають однакову роль.

Помножимо рівності (211.8), відповідно, на довільні поки що ("невизначені") множники λ_i $(i = 1,\ \dots,\ m)$ та результати почленно складемо з (211.6). Ми отримаємо рівність

$$\sum_{j=1}^{n+m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\dots+\lambda_m\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}\right)dx_j=0, \tag{212.1}$$

де, як і раніше, $dx_{n+1}, \ \dots, \ dx_{n+m}$ означають диференціали неявних функцій (211.4) (у **міркуванні** ми поки що зберігаємо нерівноправність змінних); похідні обчислені у точці M_0.

Виберемо тепер значення множників $\lambda_i=\lambda_i^0$ $(i=1, \ \dots, \ m)$ так, щоб саме коефіцієнти при **залежних** диференціалах $dx_{n+1}, \ \dots, \ dx_{n+m}$ дорівнювали нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1^0\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\dots+\lambda_m^0\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}=0 \quad (j=n+1, \ \dots, \ n+m). \tag{212.2}$$

Це можна зробити, оскільки визначник (211.3) системи лінійних рівнянь, що виходить для знаходження $\lambda_1, \ \dots, \ \lambda_m$, відмінний від нуля. При вибраних значеннях множників рівність (212.1) набуде вигляд

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1^0\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\dots+\lambda_m^0\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}\right)dx_j=0, \tag{212.3}$$

Тут ми знову маємо справу лише з диференціалами **незалежних** змінних, тому коефіцієнти при них мають бути нулями, тобто поряд з (212.2) маємо і

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1^0\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\dots+\lambda_m^0\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}=0 \quad (j=1, \ \dots, \ n). \tag{212.4}$$

Отже, для знаходження $n+m$ невідомих $x_1, \ \dots, \ x_{n+m}$, і ще m множників $\lambda_1, \ \dots, \ \lambda_m$, маємо стільки ж рівнянь, саме m рівнянь зв'язку (211.1) і $n+m$ рівнянь

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}+\lambda_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_j}+\dots+\lambda_m\frac{\partial \Phi_m}{\partial x_j}=0 \quad (j=1, \ \dots, \ n+m).$$

(дивіться (212.2) і (212.4)).

Щоб полегшити виписування цих рівнянь, зазвичай вводять **допоміжну** функцію

$$F=f+\lambda_1\Phi_1+\dots+\lambda_m\Phi_m;$$

тоді згадані рівняння можуть бути записані у вигляді

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=0 \quad (j=1, \ \dots, \ n+m). \tag{212.5}$$

Вони виглядають так само, як і умови звичайного екстремуму для функції F. Це слід розглядати лише як вказівку, що полегшує **запам'ятовування**.

І метод Лаґранжа приводить до **необхідних** умов. Далі тут може бути повторено те, що було сказано наприкінці попереднього розділу.

Зауваження. У викладеній теорії суттєву роль відігравало **припущення про ранг матриці** (211.2), яким ми користувалися тричі. При розв'язуванні задач одним із зазначених методів для впевненості в тому, що не пропущено жодної точки, що доставляє функції відносний екстремум, слід було б попередньо переконатися, що згадане припущення виконується насправді в усіх точках області, що задовольняють рівняння зв'язку. У простих випадках ми надаватимемо це читачеві.

213. Достатні умови для відносного екстремуму

З цього приводу ми обмежимося небагатьма зауваженнями. Припустимо існування та неперервність других похідних для функцій f і Φ_j ($j = 1, \dots, m$). Нехай тепер точка $M_0(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0)$, разом з множниками $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ задовольняє наведені вище **необхідні** умови.

Питання наявності у цій точці (відносного) екстремуму залежить, як й у розд. 198, від знака різниці

$$\Delta = f(x_1, \dots, x_{n+m}) - f(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0),$$

з тим лише суттєвим обмеженням, що і точка $(x_1, \dots, x_{n+m})$ задовольняє рівняння зв'язку (211.1) або, що теж саме, рівняння (211.4). Легко зрозуміти, що **для таких** точок приріст функції f може бути замінений приростом функції F (де всі множники λ_i ми вважаємо рівними λ_i^0):

$$\Delta = F(x_1, \dots, x_{n+m}) - F(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0).$$

Зважаючи на те, що в точці M_0 виконуються умови (212.5) (у цьому і полягає вигода переходу до функції F), цей приріст, за формулою Тейлора, може бути записаний так (порівняйте з (198.3)):

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\sum_{j,k=1}^{n+m} A_{jk}\Delta x_j\Delta x_k + \sum_{j,k=1}^{n+m} \alpha_{jk}\Delta x_j\Delta x_k\right),$$

де

$$\Delta x_j = x_j - x_j^0, \quad A_{jk} = F''_{x_jx_k}(x_1^0, \dots, x_{n+m}^0) \quad (j, k = 1, \dots, n+m)$$

і $\alpha_{jk} \to 0$, якщо $\Delta x_1 \to 0, \dots, \Delta x_n \to 0$ (решта приростів $\Delta x_{n+1}, \dots, \Delta x_{n+m}$ при цьому самі собою будуть нескінченно малими за неперервністю функцій (211.4)).

Якщо замінити тут всі прирости Δx_j відповідними диференціалами dx_j, то по відношенню до **незалежних** змінних це взагалі нічого не змінить; що ж стосується **залежних** змінних, то зроблена заміна викличе лише необхідність поставити замість

nebayduzhi.math@gmail.com

коефіцієнтів α_{jk} інші нескінченно малі β_{jk}:

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\sum_{j,k=1}^{n+m} A_{jk}dx_j dx_k + \sum_{j,k=1}^{n+m} \beta_{jk}dx_j dx_k\right).$$

Перехід до диференціалів вигідний тому, що диференціали залежних та незалежних змінних пов'язані системою **лінійних** співвідношень (211.8). Оскільки визначник (211.3) у точці M_0, за припущенням, не нуль, то звідси залежні диференціали виразяться лінійно через незалежні. Підставивши їх вирази в Δ, ми, замість першої суми, отримаємо **квадратичну форму відносно диференціалів** $dx_1, \ \ldots, \ dx_n$**.**

А тепер, так само як і в розд. 198 та розд. 199, можна показати, що: *якщо ця форма буде* ***визначеною*** *і до того ж* ***додатною (від'ємною)****, то в досліджуваній точці буде відносний мінімум (максимум); якщо ж форма виявляється* ***невизначеною****, то відносного екстремуму немає.*

Втім, практичне значення цього критерію невелике (порівняйте з зауваженням розд. 200).

Перейдемо до прикладів та задач.

214. Приклади і задачі

1) Нехай потрібно знайти екстремум функції

$$f = x + y + z + t$$

за умови

$$\Phi = xyzt - c^4 = 0;$$

область зміни змінних визначається нерівностями $x > 0, \ y > 0, \ z > 0, \ t > 0$. Ми вже розв'язували цю задачу (пр. 200.4), фактично виражаючи t з останньої умови. Тепер, диференціюючи ці функції **повним чином**, знайдемо

$$df = dx + dy + dz + dt,$$

$$d\Phi = yzt\,dx + xzt\,dy + xyt\,dz + xyz\,dt = 0, \qquad \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{dt}{t} = 0,$$

звідки

$$dt = -t\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}\right).$$

Виключаючи dt з рівності $df = dx + dy + dz + dt = 0$, отримаємо

$$0 = dx + dy + dz - t\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}\right) = \left(1 - \frac{t}{x}\right)dx + \left(1 - \frac{t}{y}\right)dy + \left(1 - \frac{t}{z}\right)dz,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

яка, зважаючи на довільність dx, dy, dz, розпадається на три:

$$1 - \frac{t}{x} = 0, \quad 1 - \frac{t}{y} = 0, \quad 1 - \frac{t}{z} = 0,$$

так що $x = y = z = t = c$.

Застосовуючи до тієї ж задачі метод Лаґранжа, введемо допоміжну функцію

$$F = x + y + z + t + \lambda xyzt$$

(якщо згадати роль цієї функції, то стане зрозуміло, що сталий доданок у складі Φ тут можна опустити без шкоди). Складемо умови:

$$F'_x = 1 + \lambda yzt = 0, \quad F'_y = 1 + \lambda xzt = 0,$$

$$F'_z = 1 + \lambda xyt = 0, \quad F'_t = 1 + \lambda xyz = 0,$$

звідки

$$yzt = xzt = xyt = xyz \quad \text{і} \quad x = y = z = t = c.$$

Для того, щоб скористатися результатом попереднього розділу, обчислимо $\lambda = -\frac{1}{c^3}$ і розглянемо функцію

$$F = x + y + z + t - \frac{xyzt}{c^3}.$$

Її другий диференціал (у точці $x = y = z = t = c$) буде

$$d^2F = -\frac{2}{c}(dx\,dy + dx\,dz + dx\,dt + dy\,dz + dy\,dt + dz\,dt).$$

Диференціюючи рівняння зв'язку (в тій самій точці), отримаємо

$$dx + dy + dz + dt = 0.$$

Якщо визначити звідси dt і підставити в попередній вираз, то остаточно знайдемо

$$-\frac{2}{c}\left[dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz - (dx + dy + dz)^2\right] = \frac{1}{c}\left[(dx + dy + dz)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right].$$

Оскільки ця форма, очевидно, додатно визначена, то у знайденій точці буде відносний мінімум.

(Звідси, однак, не можна робити висновок, що цей мінімум буде і **найменшим** значенням функції при зазначеному зв'язку між значеннями її аргументів; порівняйте з пр. 200.4.)

2) Будемо знову (порівняйте з пр. 200.2) шукати найменше та найбільше значення функції

$$u = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2 \quad (a > b > c > 0)$$

за наявності зв'язку:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

тобто на сферичній поверхні, що виражена цим рівнянням. (Зважаючи на те, що ця поверхня становить замкнену обмежену множину, то існування на ній точок, де функція набуває найменшого і найбільшого значення, випливає з теореми Ваярштрасса (дивіться зауваження наприкінці розд. 173.))

З цією метою спочатку знайдемо за методом Лаґранжа всі відносні екстремуми функції. Допоміжна функція

$$F = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - (ax^2 + by^2 + cz^2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

приводить до умов:

$$\begin{aligned}
x[(a^2 + \lambda) - 2a(ax^2 + by^2 + cz^2)] &= 0,\\
y[(b^2 + \lambda) - 2b(ax^2 + by^2 + cz^2)] &= 0,\\
z[(c^2 + \lambda) - 2c(ax^2 + by^2 + cz^2)] &= 0,
\end{aligned}$$

до яких слід приєднати ще рівняння зв'язку. Звідси знаходимо точки і значення u:

$$\begin{aligned}
&u(0, 0, \pm 1) = 0;\\
&u(0, \pm 1, 0) = 0;\\
&u(\pm 1, 0, 0) = 0;\\
&u\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}(b - c)^2;\\
&u\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}(a - c)^2;\\
&u\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{4}(a - b)^2.
\end{aligned}$$

Вибираючи із зазначених значень u найменше та найбільше, ми й прийдемо до розв'язку задачі (порівняйте з пр. 200.2).

3) Повернемося до задачі про найвигідніші перерізи дротів в електричній мережі з паралельним включенням (пр. 201.8). Зберігаючи прийняті там позначення, будемо шукати екстремум функції

$$f(q_1, \ldots, q_n) = l_1 q_1 + \cdots + l_n q_n$$

за умови, що

$$\Phi(q_1, \ldots, q_n) = \frac{\varrho l_1 J_1}{q_1} + \cdots + \frac{\varrho l_n J_n}{q_n} = e;$$

при цьому ми не станемо навіть вводити, замість $q_1, \ldots, q_n$, інші змінні, як зробили це раніше, бо нашими новими методами задача і так розв'язується просто.

Отже, диференціюючи **повним чином** рівняння $\Phi = 0$ отримаємо наступний вираз для диференціала dq_n:

$$dq_n = -\frac{q_n^2}{l_n J_n}\left(\frac{l_1 J_1}{q_1^2}dq_1 + \cdots + \frac{l_{n-1}J_{n-1}}{q_{n-1}^2}dq_{n-1}\right).$$

Підставляючи їх у рівність $df = l_1 dq_1 + \cdots + l_n dq_n = 0$, прийдемо до результату:

$$\left(l_1 - \frac{q_n^2}{J_n}\cdot\frac{l_1 J_1}{q_1^2}\right)dq_1 + \cdots + \left(l_{n-1} - \frac{q_n^2}{J_n}\cdot\frac{l_{n-1}J_{n-1}}{q_{n-1}^2}\right)dq_{n-1} = 0.$$

Оскільки $dq_1,\ \ldots,\ dq_{n-1}$ вже довільні, то коефіцієнти при них порізно нулі, звідки

$$\frac{q_1^2}{J_1} = \ldots = \frac{q_n^2}{J_n} = \lambda^2$$

і

$$q_i = \lambda\sqrt{J_i} \quad (i = 1,\ \ldots,\ n).$$

Множник пропорційності λ легко визначити з рівняння зв'язку:

$$\lambda = \frac{\varrho}{e}\sum_{i=1}^{n} l_i\sqrt{J_i}.$$

Якщо застосувати метод Лаґранжа, то потрібно побудувати допоміжну функцію. (“Невизначений множник” ми для зручності беремо у формі λ^2 і включаємо до нього сталу ϱ.)

$$F(q_1,\ \ldots,\ q_n) = l_1 q_1 + \cdots + l_n q_n + \lambda^2\left(\frac{l_1 J_1}{q_1} + \cdots + \frac{l_1 J_1}{q_1}\right)$$

і треба прирівняти до нуля її похідні:

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = l_i - \frac{\lambda^2 l_i J_i}{q_i^2} = 0 \quad (i = 1,\ \ldots,\ n),$$

звідки знову отримуємо

$$q_i = \lambda\sqrt{J_i} \quad (i = 1,\ \ldots,\ n)$$

і так далі.

4) Розглянемо складніший приклад: тривісний еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0)$$

перетнутий площиною

$$lx + my + nz = 0,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

що проходить через його центр; потрібно визначити півосі еліпса, що отримується в перерізі. Інакше кажучи, потрібно знайти екстремальні значення функції

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

якщо змінні підпорядковані зазначеним вище двом **рівнянням зв'язку**.

Метод виключення залежних диференціалів (розд. 211) тут приводить до складних викладок; тому ми відразу вдамося до методу Лаґранжа.

Для того, щоб переконатися, що ранг матриці

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

дорівнює 2 у всіх точках перетину еліпсоїда з площиною (дивіться зауваження у розд. 212), припустимо протилежне. З того, що усі визначники другого порядку дорівнюють 0 випливає пропорційність елементів верхнього і нижнього рядків; але тоді рівність $lx + my + nz = 0$ тягне за собою $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, що неможливо.

Склавши допоміжну функцію

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) + 2\mu(lx + my + nz),$$

прирівняємо її похідні до нуля:

$$x + \lambda \cdot \frac{x}{a^2} + \mu l = 0, \quad y + \lambda \cdot \frac{y}{b^2} + \mu m = 0, \quad z + \lambda \cdot \frac{z}{c^2} + \mu n = 0. \tag{214.1}$$

Помножуючи ці рівняння, відповідно, на x, y, z і додаючи, отримаємо (з урахуванням рівнянь зв'язку), що $\lambda = -r^2$.

Якщо припустити, для визначеності, що жодне з чисел l, m, n не дорівнює нулю, то з (214.1) можна побачити, що r не дорівнює ні a, ні b, ні c. Тоді рівняння (214.1) перепишуться у вигляді:

$$x = -\mu \frac{la^2}{a^2 - r^2}, \quad y = -\mu \frac{mb^2}{b^2 - r^2}, \quad z = -\mu \frac{nc^2}{c^2 - r^2}.$$

Звідси легко знайти μ, а з ним і x, y, z; але минаючи це, можна, склавши ці рівності, попередньо помножені на l, m, n, отримати рівняння

$$\frac{l^2a^2}{a^2 - r^2} + \frac{m^2b^2}{b^2 - r^2} + \frac{n^2c^2}{c^2 - r^2} = 0,$$

звідки безпосередньо і визначаються цікаві для нас два екстремальні значення r^2.

Оскільки існування цих екстремальних значень наперед відоме, то тут виходить, що ми маємо повне вирішення питання.

5) Нарешті, спробуємо знайти найменше та найбільше значення квадратичної форми

$$f(x_1,\ \dots,\ x_n) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

за умови

$$\varphi(x_1,\ \dots,\ x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1. \tag{214.2}$$

(Як і раніше, зважаючи на те, що ця поверхня становить замкнену обмежену множину, то існування на ній точок, де функція набуває найменшого і найбільшого значення, випливає з теореми Ваярштрасса (дивіться зауваження наприкінці розд. 173.))

Складемо функцію Лаґранжа

$$F(x_1,\ \dots,\ x_n) = f(x_1,\ \dots,\ x_n) - \lambda(x_1^2 + \dots + x_n^2).$$

Виключаючи $x_1,\ \dots,\ x_n$ з умов

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = (a_{11} - \lambda)\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \dots + a_{1n}\cdot x_n = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x_2} = a_{21}\cdot x_1 + (a_{22} - \lambda)\cdot x_2 + \dots + a_{2n}\cdot x_n = 0, \\ \dots \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x_n} = a_{n1}\cdot x_n + a_{n2}\cdot x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\cdot x_n = 0, \end{cases} \tag{214.3}$$

прийдемо до рівняння n-го степеня

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{214.4}$$

відносно λ. Якщо λ є один з його коренів, то систему (214.3) лінійних рівнянь можна задовольнити значеннями $x_1,\ \dots,\ x_n$, які не всі разом дорівнюють нулю; помноживши їх на деякий множник, можна досягти і виконання умови (214.2). Однак знаходження цих значень не є нашою метою. Як побачимо, питання про найменше і найбільше значення функції f вирішується і без них.

Справді, помножуючи рівності (214.3), відповідно, на $x_1, \dots, x_n$, і почленно додаючи, прийдемо до рівності

$$f(x_1, \dots, x_n) - \lambda(x_1^2 + \dots + x_n^2) = 0$$

або, зважаючи на (214.2),

$$f(x_1, \dots, x_n) = \lambda.$$

Отже, якщо λ задовольняє рівняння (214.4), то значення функції f в відповідній точці $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ дорівнює λ.

Ми приходимо до витонченого результату: найменше і найбільше значення функції f, за умови (214.2), збігаються з найменшим і найбільшим з (дійсних) коренів рівняння (214.4). (Втім, можна довести, що всі корені цього рівняння будуть дійсними.)

215. Поняття незалежності функцій

Розглянемо систему функцій

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{215.1}$$

визначених і неперервних, разом зі своїми частинними похідними, в деякій n-вимірній відкритій області $\mathcal{D}$.

Розглянемо випадок, коли значення однієї з них, наприклад, y_j, **однозначно** визначається сукупністю тих значень, які набувають інші функції

$$(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m).$$

Точніше кажучи, якщо

$$y_j = \varphi(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m) \tag{215.2}$$

для всіх точок $(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m)$ з деякої $(m-1)$-вимірної множини $\mathcal{E}_0$, що відповідає всіляким точкам $(x_1, \dots, x_n)$ з $\mathcal{D}$; причому це рівняння **тотожне** відносно точок $(x_1, \dots, x_n)$ з $\mathcal{D}$, якщо замість всіх y_i підставити функції (215.1). (Істотно, що функція φ у числі своїх **безпосередніх** аргументів не містить $x_1, \dots, x_n$.) Тоді кажуть, що в **області $\mathcal{D}$ функція y_j залежить від інших функцій**. Втім, для того, щоб мати можливість застосовувати диференціальне числення, ми включимо до означення ще вимогу, щоб функція φ була визначена і неперервна зі своїми частинними похідними в деякій відкритій області $\mathcal{E}$ $(m-1)$-вимірного простору, що містить множину $\mathcal{E}_0$.

Якщо, зокрема, одна з функцій (215.1), y_j, дорівнює деякій сталій, то вона явно залежить від інших: тут можна просто покласти $\varphi = \text{const}$. Функції $y_1, \ldots, y_m$ взагалі називаються **залежними** в області $\mathcal{D}$, якщо одна з них (все одно яка) залежить від решти.

Приклади.

1) Якщо

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ y_2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \\ y_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, \end{cases}$$

то нескладно перевірити, що у всьому n-вимірному просторі буде виконуватися тотожність

$$y_2 = y_1^2 - 2y_3.$$

2) Аналогічно, для функцій

$$\begin{cases} y_1 = x_1x_2 - x_3, \\ y_2 = x_1x_3 + x_2, \\ y_3 = (x_1^2+1)(x_2^2+x_3^2) - (x_1^2-1)x_2x_3 - x_1(x_2^2-x_3)^2 \end{cases}$$

маємо тотожно (у тривимірному просторі)

$$y_3 = y_1^2 - y_1y_2 + y_2^2.$$

Все це — **залежні** функції.

Якщо ні в області $\mathcal{D}$, ні в будь-якій частковій області, що міститься в ній, не має тотожності вигляду (215.2), то функції $y_1, \ldots, y_m$ називають **незалежними** в області $\mathcal{D}$.

Відповідь на питання про незалежність функцій дає розгляд так званої **матриці Якобі**, складеної з частинних похідних цих функцій за всіма незалежними змінними $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_3} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{215.3}$$

Вважаючи $n \geqslant m$ насамперед наведемо таку теорему.

Теорема 215.1. *Якщо хоч один визначник m-го порядку, складений із елементів матриці (215.3), відмінний від нуля в області $\mathcal{D}$, то в цій області функції $y_1, \dots, y_m$ незалежні.*

Доведення. Нехай

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{215.4}$$

Якби не цей, а якийсь інший визначник не дорівнював нулю, то, змінивши нумерацію змінних, можна було б звести питання до випадку (215.4).

Доведення теореми вестимемо від протилежного. Припустимо, що одна з функцій, наприклад, y_m, виражається через інші, так що

$$y_m = \varphi(y_1, \dots, y_{m-1}), \tag{215.5}$$

хоча б у деякій частині $\mathcal{D}_0$, області $\mathcal{D}$.

Продиференціювавши цю тотожність за кожною із змінних x_i $(i = 1, \dots, m)$, ми отримаємо m тотожностей (в $\mathcal{D}_0$) вигляду

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \frac{\partial y_m}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial y_m}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}} \cdot \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, m).$$

Ми бачимо, що елементи останнього рядка визначника (215.4) можуть бути отримані додаванням відповідних елементів перших $m-1$ рядків, помножених попередньо на множники $\dfrac{\partial y_m}{\partial y_1}, \dots, \dfrac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}$. Такий визначник, як відомо, дорівнює нулю. Це суперечить умові теореми. Отримана суперечність доводить неможливість рівності (215.5). □

216. Ранг матриці Якобі

Переходячи до загального випадку, введемо наступне означення. Назвемо **рангом** матриці Якобі (215.3) (**в області** $\mathcal{D}$) найвищий з порядків визначників, побудованих з елементів цієї матриці, і які не дорівнюють нулю **тотожно** в $\mathcal{D}$. Може, звісно, статися, що всі елементи матриці (215.3) тотожно дорівнюють нулю; тоді кажуть, що ранг матриці є 0; але цей випадок не становить інтересу, бо тут просто всі функції $y_1, \dots, y_m$ зводяться до сталих (тв. 183.2). Якщо ранг матриці (215.3) є $\mu \geqslant 1$, то існує хоча б один визначник μ-го порядку, складений з елементів матриці (це, звісно, передбачає $m \geqslant \mu$ та $n \geqslant \mu$) і який не дорівнює у $\mathcal{D}$ тотожно нулю, тоді як усі визначники порядку вище за μ (якщо такі є) тотожно дорівнюють нулю. Кажуть, що ранг μ **досягається** в деякій точці області, якщо згаданий визначник μ-го порядку саме в цій точці відмінний від нуля.

Теорема 216.1. *Нехай ранг матриці Якобі в області $\mathcal{D}$ є $\mu \geqslant 1$ і досягається він у точці*

$$M_0(x_1^0, \ \dots, \ x_n^0)$$

цієї області. Тоді в деякому околі $\mathcal{D}_0$ названої точки μ функцій з числа наших m (саме ті, похідні яких входять у визначник μ-го порядку, що не дорівнює нулю в точці M_0) будуть ***незалежні****, а інші від них залежать.*

Доведення. Без зменшення загальності можна припустити, що в точці M_0 відмінний від нуля саме визначник

$$\frac{D(y_1, \ \dots, \ y_\mu)}{D(x_1, \ \dots, \ x_\mu)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_\mu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_\mu}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_\mu}{\partial x_\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\mu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} \end{vmatrix}. \tag{216.1}$$

Зважаючи на неперервність частинних похідних, те саме буде і в деякому околі згаданої точки, і, отже, за теор. 215.1, функції $y_1, \ \dots, \ y_\mu$ будуть в цьому околі незалежні.

Позначимо тепер через $y_1^0, \ \dots, \ y_\mu^0$ значення цих функцій в точці M_0. За теор. 208.2 в деякому $(n+\mu)$-вимірному паралелепіпеді

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 = (&x_1^0 - \delta_1, \ x_1^0 + \delta_1; \ \dots; \ x_n^0 - \delta_n, \ x_n^0 + \delta_n; \\ &y_1^0 - \Delta_1, \ y_1^0 + \Delta_1; \ \dots; \ y_\mu^0 - \Delta_\mu, \ y_\mu^0 + \Delta_\mu) \end{aligned} \tag{216.2}$$

перші μ рівнянь системи (215.1)

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ \dots, \ x_\mu, \ x_{\mu+1}, \ \dots, \ x_n) - y_1 = 0, \\ \dots \\ f_\mu(x_1, \ \dots, \ x_\mu, \ x_{\mu+1}, \ \dots, \ x_n) - y_\mu = 0, \end{cases} \tag{216.3}$$

визначають $x_1, \ \dots, \ x_\mu$ як однозначні функції від інших змінних $y_1, \ \dots, \ y_\mu; x_{\mu+1}, \ \dots, \ x_n$, що фігурують у цих рівняннях:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \ \dots, \ y_\mu, \ x_{\mu+1}, \ \dots, \ x_n), \\ \dots \\ x_\mu = \varphi_\mu(y_1, \ \dots, \ y_\mu, \ x_{\mu+1}, \ \dots, \ x_n). \end{cases} \tag{216.4}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

У згаданій області системи рівнянь (216.3) **і** (216.4) **виявляються цілком рівносильними**, тобто задовольняються одними і тими ж значеннями змінних $x_1, \dots, x_n$ і $y_1, \dots, y_\mu$. З самої теореми, на яку ми спиралися, випливає, що якщо замість $x_1, \dots, x_\mu$ підставити в (216.3) функції (216.4), то отримаємо **тотожності** відносно $y_1, \dots, y_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n$. Але для нас зараз важливе й інше: *якщо замість $y_1, \dots, y_\mu$ підставити в* (216.4) *функції $f_1, \dots, f_\mu$, то вийдуть* ***тотожності*** *відносно змінних $x_1, \dots, x_n$*, які справедливі принаймні в деякому околі точки M_0. Саме, достатньо вибрати цей окіл

$$\mathcal{D}_0 = (x_1^0 - \delta_1', \, x_1^0 + \delta_1'; \, \dots; \, x_n^0 - \delta_n', \, x_n^0 + \delta_n')$$

так, щоб було

$$0 < \delta_i' \leqslant \delta_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

і, крім того, щоб для його точок значення $y_1, \dots, y_\mu$ (тобто значення функцій $f_1, \dots, f_\mu$), відрізнялися від $y_1^0, \dots, y_\mu^0$, відповідно, менше, ніж на $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$. (Це можна здійснити оскільки f_i неперервні функцій в точці M_0.) Справді, тоді $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_\mu)$ є точкою з $\mathcal{M}_0$, і одночасно з рівностями (216.3) повинні виконуватись і рівності (216.4).

Візьмемо тепер (якщо $m > \mu$) будь-яку з інших функцій (215.1), наприклад $y_{\mu+1}$, і доведемо, що вона залежить від перших μ функцій $y_1, \dots, y_\mu$. Якщо у рівність $y_{\mu+1} = f_{\mu+1}(x_1, \dots, x_n)$ замість $x_1, \dots, x_\mu$ підставити функції (216.4), то $y_{\mu+1}$ можна записати у вигляді (складеної) функції від $y_1, \dots, y_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n$:

$$y_{\mu+1} = f_{\mu+1}(\varphi_1, \dots, \varphi_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n) \equiv F_{\mu+1}(y_1, \dots, y_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n). \qquad (216.5)$$

На підставі зробленого вище зауваження, якщо в цю рівність замість $y_1, \dots, y_\mu, y_{\mu+1}$ підставити, відповідно, функції $f_1, \dots, f_\mu, f_{\mu+1}$, то вона буде справедливою **тотожно** відносно $x_1, \dots, x_n$ в області $\mathcal{D}_0$.

Для того щоб переконатися в **залежності** функції $y_{\mu+1}$ від функцій $y_1, \dots, y_\mu$ залишається лише довести, що *функція $F_{\mu+1}$* ***насправді*** *аргументів $x_{\mu+1}, \dots, x_n$ не містить.*

З цією метою досить показати, що

$$\frac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}} = 0, \quad \frac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+2}} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_n} = 0$$

тотожно відносно $y_1, \dots, y_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_n$ (порівняйте з розд. 183). Зупинимося, наприклад, на першій рівності; інші доводяться аналогічно.

Продиференціюємо за $x_{\mu+1}$ рівняння (216.3), вважаючи $x_1, \dots, x_\mu$ функціями

(216.4) від $y_1,\ \dots,\ y_\mu,\ x_{\mu+1},\ \dots,\ x_n$; ми отримаємо рівності:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}} + \dots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\mu}\dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}} + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{\mu+1}} = 0, \\ \dots \\ \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}} + \dots + \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu}\dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}} + \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_{\mu+1}} = 0, \end{cases} \tag{216.6}$$

лінійні відносно значень $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}},\ \dots,\ \dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}}$.

З цих μ лінійних рівностей, ***як наслідок****, випливає наступна $(\mu+1)$-а лінійна рівність*

$$\frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{\mu+1}} + \dots + \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_\mu}\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_{\mu+1}} + \frac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}} = 0, \tag{216.7}$$

тому що визначник $(\mu+1)$-го порядку, побудований з коефіцієнтів і вільних членів з усіх $\mu+1$ рівностей (216.6) і (216.7), тобто визначник:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\mu} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{\mu+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_\mu} & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_{\mu+1}} \\ \dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_\mu} & \dfrac{\partial f_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}} \end{vmatrix} = 0$$

тотожно (адже ранг матриці (215.3) є μ!). Але ліва частина рівності (216.7), за самим означенням (216.5) функції $F_{\mu+1}$ є похідна $\dfrac{\partial F_{\mu+1}}{\partial x_{\mu+1}}$. Отже, через (216.7), ця похідна справді дорівнює нулю.

Отже, в функції $F_{\mu+1}$, аргументи $x_{\mu+1},\ \dots,\ x_n$ можуть бути опущені: $y_{\mu+1}$ залежить лише від $y_1,\ \dots,\ y_\mu$, що й потрібно було довести. □

1) У пр. 215.1, матриця Якобі має вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \dots & 2x_n \\ x_2 + x_3 + \dots + x_n & x_1 + x_3 + \dots + x_n & \dots & x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \end{pmatrix}$$

Якщо до елементів третього рядка додати, відповідно, елементи другого, помножені на $\frac{1}{2}$, то вийде рядок, що складається (подібно до першого) з рівних елементів. Звідси вже ясно, що всі визначники третього порядку дорівнюють нулю. Ранг матриці дорівнює двом, і справді дві функції з трьох незалежні, а третя залежить від цих двох.

2) Аналогічно сказане застосовується і до пр. 215.2.

На закінчення зауважимо, що можливі випадки, коли в одній частині області існує одна залежність між функціями, а в іншій — інша залежність, або ж функції виявляються незалежними, тощо.

3) Нехай, наприклад, функції y_1 і y_2 від двох незалежних змінних x_1, x_2 визначаються на площині x_1x_2 такими рівняннями:

$$y_1 = \begin{cases} x_1^3 x_2^2 & , \quad \text{якщо} \quad x_1 \geqslant 0, \\ 0 & , \quad \text{якщо} \quad x_1 < 0, \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} x_1^2 x_2^3 & , \quad \text{якщо} \quad x_2 \geqslant 0, \\ 0 & , \quad \text{якщо} \quad x_2 < 0. \end{cases}$$

Легко перевірити, що ці функції неперервні разом зі своїми похідними на всій площині.

У даному випадку ранг матриці Якобі дорівнює **двом** для першого координатного кута, **одиниці** — для другого і четвертого кутів і, нарешті, **нулю** — для третього. Лише у першому координатному куті функції незалежні.

6.4. Заміна змінних

217. Функції однієї змінної

Мета цього розділу — описати **формальний процес** заміни змінних. Тому ми не будемо тут відволікати увагу з'ясуванням усіх умов, за яких маніпуляції законні (що не становить жодних труднощів).

Значна частина змісту цього розділу могла б бути викладена і раніше; проте нам здавалося доцільним зосередити весь матеріал, пов'язаний зі заміною змінних, в одному місці.

Нехай дано деякий вираз

$$W = F(x, y, y'_x, y''_{x^2}, \dots),$$

що містить незалежну змінну x, функцію від неї y і ряд похідних функції y за x до деякого порядку. Іноді потрібно перейти в подібному виразі до **нових** змінних — незалежної t та функції від неї u, з якими **старі** змінні x і y пов'язані певними співвідношеннями (що мають назву **формул перетворення**). Точніше кажучи, потрібно записати W як функцію від t, u і похідних u за t.

Така **заміна змінних** зазвичай мотивується або особливим інтересом, який представляють змінні t і u, або тим спрощенням, яке ця заміна вносить у вираз W.

Зупинимося спочатку на випадку, коли замінюється лише незалежна змінна і дана формула перетворення, що безпосередньо пов'язує x з новою незалежною змінною t.

Припустимо, що ця формула перетворення має явний вираз для x (функція від нової змінної t):

$$x = \varphi(t). \tag{217.1}$$

Якщо y є функція від x, то через посередництво x вона є і функцією від t. Ми мали вже в розд. 121 формули, що виражають похідні від y за x через похідні від x і y за t:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{x^2} = \frac{x'_t y''_{y^2} - x''_{t^2} y'_t}{x'^3_t}, \quad y'''_{x^3} = \frac{x'_t(x'_t y'''_{t^3} - x'''_{t^3} y'_t) - 3x''_{t^2}(x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t)}{x'^5_t} \tag{217.2}$$

Оскільки x'_t, x''_{t^2}, x'''_{t^3}, ... можна вважати відомими функціями від t (вони виходять з (217.1) диференціюванням), то залишається лише підставити в W замість y'_x, y''_{x^2}, ... ці їх вирази через t, y'_t, y''_{t^2}, ...

Якщо формула перетворення дана в неявному вигляді відносно x:

$$\Phi(x, t) = 0, \tag{217.3}$$

то задача, по суті, розв'язується так само, лише похідні x'_t, x''_{t^2}, ... обчислюються за правилами диференціювання неявних функцій. Втім, при цьому може виявитися, що в остаточному виразі W ще залишиться x; його доведеться виключати за допомогою (217.3).

Переходячи до загального випадку, коли замінюються обидві змінні, припустимо, що дані формули перетворення у явному вигляді для старих змінних (функції від нових змінних):

$$x = \varphi(t,u), \quad y = \psi(t,u). \tag{217.4}$$

Якщо y залежить від x, то звідси u буде залежати від t, а тоді, зважаючи на (217.4), x і y виявляться складеними функціями від t. За правилом диференціювання композиції функцій матимемо

$$x'_t = \varphi'_t + \varphi'_u u'_t, \quad y'_t = \psi'_t + \psi'_u u'_t;$$
$$x''_{t^2} = \varphi''_{t^2} + 2\varphi''_{tu}u'_t + \varphi''_{u^2}u'^2_t + \varphi'_u u''_{t^2}, \quad y''_{t^2} = \psi''_{t^2} + 2\psi''_{tu}u'_t + \psi''_{u^2}u'^2_t + \psi'_u u''_{t^2}$$

Звертаємо увагу читача на те, що через x'_t, y'_t ми позначаємо "повні" похідні від x і y за t, тобто з урахуванням залежності u від t; навпаки, φ'_t, ψ'_t, ... означають похідні за t лише настільки, наскільки t входить до функцій φ, ψ, ... як **один** з двох аргументів.

Підставивши ці вирази у формули (217.2), знайдемо вирази похідних від y за x через t, u і похідні від u за t, і так далі.

Якщо формули перетворення дані у неявному вигляді відносно x і y:

$$\Phi(x,y,t,u) = 0, \quad \Psi(x,y,t,u) = 0, \tag{217.5}$$

то похідні $x'_t, y'_t, x''_{t^2}, y''_{t^2}, \ldots$ обчислюються звідси за правилами диференціювання неявних функцій. Наприклад, диференціюючи (217.5) за t (причому не тільки x і y, але й u вважається функцією від t), отримаємо рівняння

$$\Phi'_x x'_t + \Phi'_y y'_t + \Phi'_t + \Phi'_u u'_t = 0, \quad \Psi'_x x'_t + \Psi'_y y'_t + \Psi'_t + \Psi'_u u'_t = 0,$$

з яких знайдуться x'_t, y'_t, і так далі.

У тому окремому випадку, коли формули перетворення дані у явному вигляді для нових змінних (функції від старих змінних):

$$t = \alpha(x,y), \quad u = \beta(x,y), \tag{217.6}$$

можна насамперед користуватися викладеним вище загальним методом. Наприклад, диференціюючи формули (217.6) за t (причому x, y, u вважаємо функціями від t), отримаємо

$$1 = \alpha'_x x'_t + \alpha'_y y'_t, \quad u'_t = \beta'_x x'_t + \beta'_y y'_t,$$

звідки

$$x'_t = \frac{\beta'_y - \alpha'_y u'_t}{\alpha'_x\beta'_y - \alpha'_y\beta'_x}, \quad y'_t = \frac{\alpha'_x u'_t - \beta'_x}{\alpha'_x\beta'_y - \alpha'_y\beta'_x}$$

і, нарешті
$$y'_x = \frac{\alpha'_x u'_t - \beta'_x}{\beta'_y - \alpha'_y u'_t}$$

Простіше, однак, у цьому випадку вчинити так, якби ми робили **зворотний перехід** від змінних t, u до змінних x, y. Продиференціювавши формули (217.6) за x (вважаючи y функцією від x), отримаємо
$$t'_x = \alpha'_x + \alpha'_y y'_x, \quad u'_x = \beta'_x + \beta'_y y'_x,$$
так що
$$u'_t = \frac{u'_x}{t'_x} = \frac{\beta'_x + \beta'_y y'_x}{\alpha'_x + \alpha'_y y'_x}, \tag{217.7}$$
звідки для y'_x виходить той самий вираз, що й вище.

І тут ми розрізняємо похідні t'_x, u'_x і α'_x, β'_x: t'_x, u'_x означають “повні” похідні за x, з урахуванням залежності y від x, а для α'_x, β'_x змінна x це лише один із двох аргументів функцій α, β.

Зауважимо, що перехід від змінних x, y до змінних t, u за формулами (217.6) можна тлумачити геометрично як деяке **точкове перетворення площини** (або її частини): якщо x, y розглядати як координати деякої точки M площини, а t, u — як координати деякої точки P, то перетворення переводить точку M у точку P. Візьмемо потім якусь криву $\mathcal{K}$, на площині, з рівнянням $y = f(x)$; цій функціональній залежності між x і y відповідає деяка залежність між t і u: $u = g(t)$, яка також визначає на площині деяку криву $\mathcal{L}$. Отже, у аналізованому перетворенні крива $\mathcal{K}$ переходить у криву $\mathcal{L}$. Якщо у точці M першої кривої провести дотичну з кутовим коефіцієнтом y'_x, то у відповідній точці P друга крива матиме дотичну з кутовим коефіцієнтом u'_t, який визначається за формулою (217.7). Отже, по координатам точки M на кривій $\mathcal{K}$ та кутовому коефіцієнту дотичної в M **однозначно** визначаються як координати відповідної точки P на перетвореній кривій $\mathcal{L}$, так і кутовий коефіцієнт дотичної в P. Тому, якщо через точку M провести дві криві, що дотикаються в цій точці, то перетворені криві будуть також дотикатися у відповідній точці P. Розглянуте *точкове перетворення площині зберігає дотик* (порівняйте з пр. 218.5, наведеним нижче).

218. Приклади

1) Нехай дано рівняння
$$x^2 y''_{x^2} + x y'_x + y = 0;$$
перетворити його, вважаючи $x = e^t$.

Використаємо формулу (217.2); маємо
$$y'_x = e^{-t} \cdot y'_t, \quad y''_{x^2} = e^{-2t} \cdot (y''_{t^2} - y'_t),$$

nebayduzhi.math@gmail.com

і рівняння буде виглядати простіше:

$$y''_{t^2} + y = 0.$$

2) Перетворити вираз

$$W = \frac{y''_{x^2} - y'_x(1 + y'_x)^2}{(1 + y'_x)^3},$$

вважаючи $x = t - y$.

Під загальну схему це перетворення підійде, якщо написати $x = t - u$ і $y = u$. За формулами (217.2)

$$W = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t - y'_t(x'_t + y'_t)^2}{(x'_t + y'_t)^3}.$$

З іншого боку, формула перетворення дає $x'_t = 1 - y'_t$; підставляючи, знайдемо остаточно $W = y''_{t^2} - y'_t$.

3) **Перестановка ролей змінних.** Припустимо, що незалежна змінна x і функція від неї y обмінюються ролями; загальну схему і тут можна застосувати, якщо покласти $x = u$, $y = t$. Спробуємо виразити похідні від y за x через похідні від x за y. Знову застосуємо формулу (217.2), замінюючи t через y. Якщо врахувати, що $y'_y = 1$ (і $y''_{y^2} = y'''_{y^3} = \dots = 0$), то одразу отримаємо

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \quad y''_{x^2} = \frac{x''_{y^2}}{{x'_y}^3}, \quad y'''_{x^3} = \frac{3x''^2_{y^2} - x'_y x'''_{y^3}}{{x'_y}^5}, \quad \dots$$

Наприклад, вираз $W = y'_x y'''_{x^3} - 3y''^2_{x^2}$ якщо застосувати до нього це перетворення, набуде вигляд $W = -\dfrac{x'''_{y^3}}{x'^5_y}$.

4) **Перехід до полярних координат.** Якщо x, y розглядати як прямокутні координати точки, то рівняння $y = f(x)$ описує криву. Часто корисно перейти до **полярних координат** r, θ і задати криву її **полярним рівнянням** $r = g(\theta)$. Тоді, звісно, необхідно для різних геометричних елементів кривої, які задані через $x, y, y'_x, y''_{x^2}, \dots$, отримати відповідні вирази через $\theta, r, r'_\theta, r''_{\theta^2}, \dots$.

Формули перетворення в цьому випадку, як відомо, мають вигляд

$$x = r\cos\theta,$$

$$y = r\sin\theta.$$

Диференціюючи їх за θ (причому враховуючи, що r є функція від θ), отримаємо

$$x'_\theta = r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta, \quad y'_\theta = r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta;$$

$$x''_{\theta^2} = r''_{\theta^2}\cos\theta - 2r'_\theta\sin\theta - r\cos\theta, \quad y''_{\theta^2} = r''_{\theta^2}\sin\theta + 2r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

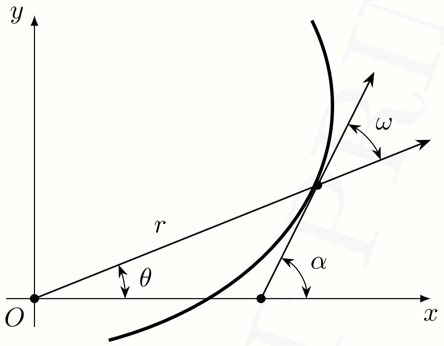


Рис. 218.1

Звідси, за формулами (217.2), знайдемо (підставляючи θ замість t):

$$y'_x = \frac{r'_\theta \sin\theta + r\cos\theta}{r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta}, \quad y''_{x^2} = \frac{r^2 + 2r''_{\theta^2} - rr''_{\theta^2}}{(r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta)^3}.$$

Отже, наприклад, кутовий коефіцієнт дотичної буде

$$\operatorname{tg}\alpha = y'_x = \frac{r'_\theta \sin\theta + r\cos\theta}{r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta};$$

тангенс кута ω, між дотичною і продовженням радіуса-вектора (рис. 218.1),

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\theta} = \frac{xy'_x - y}{x + yy'_x},$$

тепер запишеться простою формулою

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'_\theta}, \tag{218.1}$$

у зв'язку з чим при полярному заданні кривої положення дотичної визначають саме кутом ω.

Розглянемо ще вираз

$$R = \frac{(1 + y'_x{}^2)^{\frac{3}{2}}}{y''_{x^2}},$$

який є важливим геометричним елементом кривої ("радіус кривизни", розд. 251). Якщо підставити сюди знайдені вирази для y'_x, y''_{x^2}, то після спрощень отримаємо

$$R = \frac{(r^2 + r'_\theta{}^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'_\theta{}^2 - r\cdot r''_{\theta^2}}.$$

5) **Перетворення Льожондра.** Поставлену у попередньому розділу задачу про заміну змінних можна узагальнити, припустивши присутність **похідних** вже у формулах перетворення. Ми обмежимося одним прикладом цього роду:

$$t = y'_x, \quad u = x \cdot y'_x - y;$$

це перетворення називається перетворенням Льожондра.

Продиференціюємо другу формулу перетворення за x, розглядаючи зліва u як функцію від x через посередництво t (залежність t від x дається першою формулою):

$$\begin{aligned} u'_x = u'_t \cdot t'_x = u'_t \cdot y''_{x^2} &= \\ &= y'_x + x \cdot y''_{x^2} - y'_x = x \cdot y''_{x^2}, \end{aligned}$$

тобто

$$u'_t \cdot y''_{x^2} = x \cdot y''_{x^2}\,.$$

Звідси (припускаючи, що $y''_{x^2} \neq 0$) і $u'_t = x$. Отже, якщо врахувати ще обидві формули перетворення, маємо

$$x = u'_t, \quad y = t \cdot u'_t - u,$$

чим виявляється **взаємність** перетворення: t, u, u'_t виражаються через x, y, y'_x так само, як ці останні величини виражаються через перші.

Диференціюючи подібним чином за x формулу $u'_t = x$, отримаємо

$$u''_{t^2} \cdot y''_{x^2} = 1, \quad \text{звідки} \quad y''_{x^2} = \frac{1}{u''_{t^2}}.$$

Подальше диференціювання дає

$$u'''_{t^3} \cdot y''^2_{x^2} + u''_{t^2} \cdot y'''_{x^3} = 0, \quad \text{тож} \quad y'''_{x^3} = -\frac{u'''_{t^3}}{(u''_{t^2})^3},$$

і так далі.

Зауважимо, що якщо перетворення Льожондра тлумачити геометрично як перетворення площини, воно не буде **точковим** перетворенням. Для знаходження координат t, u точки P недостатньо знати координати x, y точки M, але потрібен і кутовий коефіцієнт y'_x дотичної в цій точці до кривої $y = f(x)$. Проте, крива перетворюється тут знову на криву, і **дотик зберігається**.

Подібні перетворення, що зберігають дотик, відіграють важливу роль в різних областях геометрії і аналізу. Вони звуться **дотичні перетворення**, чи **перетворення дотику**. Точкові перетворення та перетворення Льожондра є лише окремими прикладами перетворень.

219. Функції кількох змінних. Заміна незалежних змінних

Перейдемо тепер до задачі про перетворення виразу

$$W = F\left(x, y, \dots, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \dots\right),$$

який містить, крім незалежних змінних $x, y, \dots$, ще функцію від них z, а також частинні похідні z за її аргументами, до деякого порядку.

Так само як і у найпростішому випадку, розглянутому вище, і тут може знадобитися перейти до **нових** змінних, які **зі старими** пов'язані за допомогою *формул перетворення.* Якщо позначити нові незалежні змінні через $t, u, \dots$, а функцію від них — через v, то задача полягає в тому, щоб виразити W через $t, u, \dots, v$ і через похідні від v за її аргументами. Очевидно, достатньо навчитися робити це по відношенню до **старих** похідних $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \dots$. Для спрощення запису ми припускатимемо, що незалежних змінних всього дві: старі x, y, а нові t, u.

Почнемо і тут з того випадку, коли замінюються лише незалежні змінні, і формули перетворення безпосередньо пов'язують старі змінні x, y з новими t, u.

Припустимо, що формули перетворення є явні функції для старих змінних (функції від нових змінних):

$$x = \varphi(t, u), \quad y = \psi(t, u). \tag{219.1}$$

Розглядаючи z як складену функцію від t, u через посередництво x, y, за правилом диференціювання композиції функцій отримаємо:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{219.2}$$

Отже, для знаходження старих похідних $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ ми маємо систему лінійних рівнянь; звідси старі похідні лінійно запишуться через нові

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A\frac{\partial z}{\partial t} + B\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = C\frac{\partial z}{\partial t} + D\frac{\partial z}{\partial u}. \tag{219.3}$$

При цьому важливо відзначити, що коефіцієнти A, B, C, D складаються з похідних функцій φ, ψ, що фігурують у формулах (219.1), але **зовсім не залежать від** z.

Це зауваження дає змогу застосувати формули (219.3) до похідних $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$

(замість z). Таким способом, наприклад, для $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ вийде вираз

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = A\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + B\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) =$$
$$= A\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u} + \frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + B\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u} + B\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

Застосовуючи (219.3) до похідних другого порядку (замість z), можна отримати вирази для похідних третього порядку, і так далі.

Якщо формули перетворення є явні функції для нових змінних (функції від старих змінних):

$$t = \alpha(x, y), \quad u = \beta(x, y),$$

то зручніше вдатися до **зворотного методу**, тобто розглядати z як складену функцію від x, y через посередництво t, u, і диференціювати її за старими змінним. Це одразу приведе нас до формул типу (219.3):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{219.4}$$

Цього разу коефіцієнти

$$A = \frac{\partial t}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad C = \frac{\partial t}{\partial y}, \quad D = \frac{\partial u}{\partial y}$$

будуть функціями від x, y, але **також не залежатимуть від z.**

Застосовуючи повторно формули (219.4), можна і тут одержати вирази подальших похідних. Наприклад,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial z}{\partial t} + B\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial u} + A\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + B\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) =$$
$$= \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial u} + A\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}\right) + B\left(A\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u} + B\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right).$$

Тут доречно зробити зауваження, аналогічне до зауваженню вище. Оскільки вирази старих похідних через нові містять x, y, то після підстановки цих виразів в W може виявитися необхідним ще виключати x, y за допомогою формул перетворення. Читач легко помітить і надалі випадки, подібні до цього.

Нарешті, в загальному випадку, при довільних формулах перетворення:

$$\Phi(x, y, t, u) = 0, \quad \Psi(x, y, t, u) = 0, \tag{219.5}$$

можна користуватися як прямим, так і зворотним методом, обчислюючи частинні похідні

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{або} \quad \frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial t}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}$$

за правилами диференціювання неявних функцій.

220. Метод обчислення диференціалів

Вкажемо тепер і інший метод для запису старих похідних через нові, особливо зручний, якщо в W входять не окремі похідні, а усі похідні вказаного порядку. Це **метод обчислення повних диференціалів.** Він також може бути представлений у двох формах, залежно від того, чи вважаються t і u або x і y незалежними змінними.

Нехай спочатку незалежними будуть t і u, всі диференціали беруться саме за цими змінними (**прямий метод**). Диференціюючи повним чином формули перетворення (219.5), можна виразити dx та dy лінійно через dt та du:

$$dx = \alpha\, dt + \beta\, du, \quad dy = \gamma\, dt + \delta\, du; \tag{220.1}$$

потім, диференціюючи ці формули, представимо d^2x і d^2y як однорідні многочлени другого степеня відносно dt, du:

$$d^2x = \varepsilon\, dt^2 + \zeta\, dt\, du + \eta\, du^2, \quad d^2y = \theta\, dt^2 + \tau\, dt\, du + \chi\, du^2, \tag{220.2}$$

і так далі. Коефіцієнти $\alpha, \beta, \dots, \tau, \chi$ — це відомі функції від x, y, t, u.

Представимо тепер dz двояко (користуючись інваріантністю форми диференціала):

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial t}dt + \frac{\partial z}{\partial u}du. \tag{220.3}$$

Якщо замість dx, dy підставити їх вирази (220.1) та прирівняти коефіцієнти при dt та du в обох частинах рівності, то вийдуть лінійні рівняння

$$\alpha\frac{\partial z}{\partial x} + \gamma\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{і} \quad \beta\frac{\partial z}{\partial x} + \delta\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u},$$

з яких визначаться похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(Нагадаємо, що якщо рівність $A_1dt+B_1du = A_2dt+B_2du$ виконується для **довільних** dt і du, то $A_1 = A_2$ і $B_1 = B_2$.)

Аналогічно можна записати двояко d^2z (пам'ятаючи про те, що незалежними змінними є не x і y, а t і u):

$$\begin{aligned} d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y = \\ = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}dt^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}dt\,du + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2. \end{aligned} \tag{220.4}$$

Підставивши замість dx, dy, d^2x, d^2y їх вирази (220.1) і (220.2), прирівняємо коефіцієнти при $dt^2, dt\,du, du^2$ в обох частинах рівності. Це дає нам систему трьох лінійних рівнянь. (Якщо рівність $A_1 dt^2 + B_1 dt \cdot du + C_1 du^2 = A_2 dt^2 + B_2 dt \cdot du + C_2 du^2$ виконується для **довільних** dt і du, то $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$.) Отже, маємо систему трьох лінійних рівнянь для знаходження похідних $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (оскільки $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ вже відомі); і так далі.

Простішим у здійсненні є **зворотний метод**, при якому незалежними змінними вважаються x, y, тому всі диференціали беруться цього разу за цими змінними.

Послідовним диференціюванням з формул перетворення (219.5) ми отримуємо тут

$$dt = a\,dx + b\,dy, \quad du = c\,dx + d\,dy; \tag{220.5}$$

$$d^2t = e\,dx^2 + f\,dx\,dy + g\,dy^2, \quad du = h\,dx^2 + i\,dx\,dy + j\,dy^2; \tag{220.6}$$

і так далі. І тут коефіцієнти $a, b, \dots, i, j$ є відомі функції від x, y, t, u.

Якщо в (220.3) замість dt і du підставити їх вирази (220.5) і прирівняти коефіцієнти при dx і dy в обох частинах рівності, то **безпосередньо** отримаємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a\frac{\partial z}{\partial t} + c\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b\frac{\partial z}{\partial t} + d\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Замість (220.4) у цьому випадку матимемо

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}dt^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}dt\,du + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial z}{\partial t}d^2t + \frac{\partial z}{\partial u}d^2u.$$

Підстановка виразів (220.5), (220.6) і прирівнювання коефіцієнтів при $dx^2, dx\,dy, dy^2$ в обох частинах рівності **безпосередньо** приведуть до знаходження похідних $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; і так далі.

221. Загальний випадок заміни змінних

Звернемося, нарешті, до загального випадку, коли замінюються і незалежні змінні, і функція. Нехай формули перетворення є явні функції для старих змінних (функції від нових змінних):

$$x = \varphi(t, u, v), \quad y = \psi(t, u, v), \quad z = \chi(t, u, v). \tag{221.1}$$

Якщо z є функція від x і y: $z = f(x, y)$, то підставляючи сюди замість x, y, z їх вирази через t, u, v, отримаємо залежність між останніми змінними, так що v буде функцією від t та u.

Вважаючи незалежними змінними t і u (**прямий метод**), а z — функцією від них через посередництво x і y, як і вище, отримаємо рівності (219.2), а з них (219.3). Але

nebayduzhi.math@gmail.com

тут під $\dfrac{\partial x}{\partial t}$, …, $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ розуміються “повні” частинні похідні від x, y, z, t або u, які можна одержати з (221.1) з урахуванням тієї обставини, що v сама залежить від t і u:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t},\ \dots,\ \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial \chi}{\partial u}+\frac{\partial \chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}.$$

Коефіцієнти A, B, C, D містять не тільки t, u, v, але і похідні $\dfrac{\partial v}{\partial t}, \dfrac{\partial v}{\partial u}$; останні входять **раціональним чином**. Послідовне застосування формул (219.3) і тут приведе до виразів для других похідних і так далі.

Якщо формули перетворення є явні функції для нових змінних (функції від старих змінних):

$$t=\alpha(x,y,z),\quad u=\beta(x,y,z),\quad v=\gamma(x,y,z), \tag{221.2}$$

то зазвичай вдаються до **зворотного методу**, тобто вважають незалежними змінними x та y. Маємо

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Замість $\dfrac{\partial t}{\partial x}$, …, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ сюди потрібно підставити їх вирази, які отримуються диференціюванням за x і за y формул (221.2), з урахуванням того, що z є функція від x і y:

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},\ \dots,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \gamma}{\partial y}+\frac{\partial \gamma}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Таким способом виходять лінійні відносно $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ рівняння, з яких ці похідні легко виражаються через $x, y, z, \dfrac{\partial v}{\partial t}, \dfrac{\partial v}{\partial u}$.

Обчислення подальших похідних простіше виконати так: диференціюємо отриманий для $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ $\left(\text{або } \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ вираз знову по x (по y), розглядаючи похідні $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ і $\dfrac{\partial v}{\partial u}$ як функції від x і y через посередництво t і u, і так далі.

У разі формул перетворення загального вигляду

$$A(x,y,z,t,u,v)=0,\quad B(x,y,z,t,u,v)=0,\quad \varGamma(x,y,z,t,u,v)=0 \tag{221.3}$$

можна користуватися будь-яким із цих методів з застосуванням правил диференціювання неявних функцій.

Для вирішення даної загальної задачі заміни змінних застосуємо **метод обчислення повних диференціалів**. Ми обмежимося викладом тієї його форми, яка пов'язана з припущенням, що незалежними є старі змінні x і y (**зворотний метод**), тому по цих змінних і беруться усі диференціали.

Послідовним диференціюванням, виходячи з формул (221.3), можна знайти вирази

$$\begin{aligned} dt &= a_1dx + a_2dy + a_3dz, \\ du &= b_1dx + b_2dy + b_3dz, \\ dv &= c_1dx + c_2dy + c_3dz; \end{aligned} \tag{221.4}$$

$$\begin{aligned} d^2t &= d_1dx^2 + d_2dx\,dy + d_3dy^2 + d_4dx\,dz + d_5dy\,dz + d_6dz^2 + a_3d^2z, \\ d^2u &= e_1dx^2 + \dots + e_6dz^2 + b_3d^2z, \\ d^2v &= f_1dx^2 + \dots + f_6dz^2 + c_3d^2z; \dots \end{aligned} \tag{221.5}$$

Якщо в рівність

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial u}du$$

підставити замість dt, du і dv їх вирази (221.4), то отримаємо

$$c_1dx + c_2dy + c_3dz = \frac{\partial v}{\partial t}(a_1dx + a_2dy + a_3dz) + \frac{\partial v}{\partial u}(b_1dx + b_2dy + b_3dz),$$

звідки

$$dz = A\,dx + B\,dy, \tag{221.6}$$

де A, B **раціональним чином** містять похідні $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ і $\dfrac{\partial v}{\partial u}$. Порівнюючи це з формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

бачимо, що

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B.$$

Візьмемо тепер рівність (t і u **не є незалежними** змінними)

$$d^2v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dt^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}dt\,du + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial v}{\partial t}d^2t + \frac{\partial v}{\partial u}d^2u$$

і підставимо сюди замість dt, du, d^2t, d^2u, d^2v їх вирази (221.4) і (221.5), а потім і dz, замінимо його виразом (221.6). З отриманої рівності визначиться d^2z:

$$d^2z = Cdx^2 + 2Ddx\,dy + Edy^2,$$

де C, D, E **раціональним чином** містять похідні $\dfrac{\partial v}{\partial t}, \dfrac{\partial v}{\partial u}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}, \dfrac{\partial^2 v}{\partial u^2}$. Порівнюючи з формулою

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

приходимо до результату

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = C, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = D, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = E,$$

і так далі.

Задачі перетворення змінних і тут можна надати геометричний зміст. Якщо змінні (x, y, z) і (t, u, v) розглядати як координати точок M і P простору, то формули перетворення, наприклад, у формі (221.2), кожній точці M ставлять у відповідність деяку точку P, тобто характеризують **точкове перетворення простору** (або його частини). Залежності між x, y, z відповідає залежність між t, u, v, так що кожна поверхня $\mathcal{S}$ перетворюється при цьому в деяку поверхню $\mathcal{T}$.

Ми бачили, що значеннями $x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ однозначно визначаються значення $t, u, v, \dfrac{\partial v}{\partial t}, \dfrac{\partial v}{\partial u}$. Згадуючи рівняння дотичної площини (180.1):

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y),$$

звідси легко зробити висновок, що двом поверхням $\mathcal{S}_1$ і $\mathcal{S}_2$, що дотикаються в точці M, відповідають у аналізованому перетворенні дві поверхні $\mathcal{T}_1$ і $\mathcal{T}_2$, які також дотикаються у точці P. *Точкове перетворення простору зберігає дотик* (порівняйте з пр. 222.7, нижче).

222. Приклади

1) **Перехід до полярних координат.** Нехай z є **функція точки** на площині: $z = f(M)$. Зазвичай положення точки визначається її прямокутними координатами (x, y), так що z є функцією від змінних x, y. Часто, однак, виявляється зручнішим характеризувати положення точки полярними координатами r, θ, і тоді виникає необхідність перетворення до нових змінних. Зробимо цей перехід різними методами.

Прямий метод: незалежними змінними вважаються r, θ. Виходячи із формул перетворення

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

за зразком формул (219.3) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial y},$$

звідки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial z}{\partial \theta}, \tag{222.1}$$

тож вирази $\cos\theta$, $-\dfrac{\sin\theta}{r}$, $\sin\theta$, $\dfrac{\cos\theta}{r}$ відіграють тут роль коефіцієнтів A, B, C, D. Потім,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right) =$$
$$= \cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

Аналогічно знаходимо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

і так далі.

Зворотний метод: незалежними змінними вважаються x, y. Щоб скористатися формулами (220.4), потрібно знати похідні $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial\theta}{\partial x}, \dfrac{\partial r}{\partial y}, \dfrac{\partial\theta}{\partial y}$. Їх можна знайти, розв'язавши попередньо рівняння, що пов'язують старі змінні з новими, відносно останніх. Але можна скористатися методами диференціювання неявних функцій, не розв'язуючи рівнянь. Якщо продиференціювати формули перетворення за x і за y, вважаючи r і θ функціями від x і y, то отримаємо

$$1 = \cos\theta\frac{\partial r}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad 0 = \sin\theta\frac{\partial r}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

і

$$0 = \cos\theta\frac{\partial r}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad 1 = \sin\theta\frac{\partial r}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}.$$

Звідси

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

і за формулами (219.4) ми повертаємося до виразу (222.1), і так далі.

Метод обчислення диференціалів. Нехай, як і тільки що, незалежними змінними будуть x, y.

Диференціюємо **повним чином** формули перетворення:

$$dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta, \quad dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta;$$

звідси

$$dr = \cos\theta\,dx + \sin\theta\,dy, \quad d\theta = \frac{-\sin\theta\,dx + \cos\theta\,dy}{r},$$

так що

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial\theta}d\theta = \left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)dx + \left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)dy,$$

що знову приводить до виразів (222.1).

Повторне диференціювання формул для dr і $d\theta$ дає:

$$\begin{aligned} d^2r &= -\sin\theta\, d\theta\, dx + \cos\theta\, d\theta\, dy = \frac{\sin^2\theta\, dx^2 - 2\sin\theta\cos\theta\, dx\, dy + \cos^2\theta\, dy^2}{r}, \\ d^2\theta &= \frac{-r(\cos\theta\, dx + \sin\theta\, dy)\, d\theta - (\cos\theta\, dy - \sin\theta\, dx)\, dr}{r^2} = \\ &= \frac{2\sin\theta\cos\theta\, dx^2 - 2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, dx\, dy - 2\sin\theta\cos\theta\, dy^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Тоді для d^2z матимемо:

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}dr^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta}dr\, d\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}d\theta^2 + \frac{\partial z}{\partial r}d^2r + \frac{\partial z}{\partial\theta}d^2\theta = \\ &= \left(\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right) dx^2 + \\ &+ 2(\dots)\, dx\, dy + (\dots)\, dy^2, \end{aligned}$$

звідки для других похідних $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ... вийдуть ті ж вирази, що і вище.

Розглянемо, наприклад, вирази

$$W_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2, \quad W_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

За допомогою знайдених формул вони перетворяться так:

$$W_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2, \quad W_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

2) **Перехід до сферичних координат.** В просторі роль, аналогічну до полярних координат на площині, відіграють так звані **сферичні координати** ϱ, φ, θ, з якими прямокутні координати x, y, z пов'язані за допомогою формул

$$x = \varrho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \varrho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \varrho\cos\varphi.$$

Нехай потрібно перетворити до змінних ϱ, φ, θ вирази

$$W_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \quad W_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

де u є деяка функція точки у просторі.

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо перетворення зробити в два кроки, вважаючи спочатку $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ (і залишаючи z незмінним), а потім $z = \varrho\cos\varphi,\ r = \varrho\sin\varphi$ (залишаючи θ незмінним), то можна буде скористатися результатами прикладу 1).

Наприклад, для другого виразу маємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

$$W_2 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.$$

Вираз у дужках, на підставі того ж прикладу 1), перепишеться так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho},$$

нарешті,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \sin\varphi\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Підставляючи все це, остаточно знайдемо

$$W_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\varrho^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Аналогічно,

$$W_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

3) Показати, що вирази W_1 і W_2 зберігають свою **форму** за будь-якого перетворення прямокутних координат на прямокутні ж

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z, \quad y' = a_2x + b_2y + c_2z, \quad z' = a_3x + b_3y + c_3z,$$

де коефіцієнти a_k, b_k, c_k задовольняють відомі співвідношення

$$a_ia_j + b_ib_j + c_ic_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad i = j, \\ 0, & \text{якщо} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{222.2}$$

Метод обчислення диференціалів. Вважаючи x, y, z незалежними змінними, маємо

$$\begin{aligned} dx' &= a_1dx + b_1dy + c_1dz, \quad d^2x' = 0, \\ dy' &= a_2dx + b_2dy + c_2dz, \quad d^2x' = 0, \\ dz' &= a_3dx + b_3dy + c_3dz, \quad d^2x' = 0. \end{aligned}$$

Тоді

$$du = \frac{\partial u}{\partial x'}(a_1dx+b_1dy+c_1dz)+\frac{\partial u}{\partial y'}(a_2dx+b_2dy+c_2dz)+\frac{\partial u}{\partial z'}(a_3dx+b_3dy+c_3dz),$$

звідки

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= a_1\frac{\partial u}{\partial x'}+a_2\frac{\partial u}{\partial y'}+a_3\frac{\partial u}{\partial z'},\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= b_1\frac{\partial u}{\partial x'}+b_2\frac{\partial u}{\partial y'}+b_3\frac{\partial u}{\partial z'},\\
\frac{\partial u}{\partial z} &= c_1\frac{\partial u}{\partial x'}+c_2\frac{\partial u}{\partial y'}+c_3\frac{\partial u}{\partial z'};
\end{aligned}$$

підносячи до квадрата, додаючи і використовуючи (222.2), отримаємо

$$W_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z'}\right)^2.$$

Потім,

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}(a_1dx+b_1dy+c_1dz)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x'\,\partial y'}(a_1dx+b_1dy+c_1dz)(a_2dx+b_2dy+c_2dz)+\ldots$$

Вираз W_2 є сума коефіцієнтів при dx^2, dy^2, dz^2; за допомогою (222.2) нескладно отримати, що

$$W_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}.$$

4) Перетворити рівняння

$$x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+yz\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z}+zx\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x}+xy\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=0$$

до нових змінних t, u, v за формулами

$$x = uv,\quad y = vt,\quad z = tu.$$

Прямий метод. Вважаючи незалежними змінними t, u, v, матимемо

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}u,\quad \frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}v+\frac{\partial w}{\partial z}t,\quad \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}t.$$

Звідси

$$\begin{aligned} x\frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{1}{2}t\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}u\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{2}v\frac{\partial w}{\partial v},\\ y\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{2}t\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{1}{2}u\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{2}v\frac{\partial w}{\partial v},\\ z\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{2}t\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}u\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{2}v\frac{\partial w}{\partial v}. \end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned} x^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial w}{\partial x}-w\right) = x\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}t\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{2}u\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{2}v\frac{\partial w}{\partial v}-w\right) =\\ &= \frac{1}{4}t^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{1}{4}u^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{1}{4}v^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\\ &+\frac{1}{2}uv\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{2}vt\frac{\partial^2 w}{\partial v\,\partial t}-\frac{1}{2}tu\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial u}+\frac{3}{4}t\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{1}{4}u\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{4}v\frac{\partial w}{\partial v}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} yz\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} &= z\frac{\partial}{\partial z}\left(y\frac{\partial w}{\partial y}\right) = z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}t\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{1}{2}u\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{2}v\frac{\partial w}{\partial v}\right) =\\ &= \frac{1}{4}t^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{1}{4}u^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{1}{4}v^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\\ &+\frac{1}{2}uv\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{4}t\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{1}{4}u\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{4}v\frac{\partial w}{\partial v}, \end{aligned}$$

і так далі. Додавши всі подібні вирази (і відкинувши числовий множник), отримаємо перетворене рівняння у вигляді

$$t^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+u^2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+v^2\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

Досі замінювалися лише незалежні змінні; наведемо приклади, де заміні піддається і функція.

5) Перетворити рівняння

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2,$$

вважаючи

$$x=t,\quad y=\frac{t}{1+tu},\quad z=\frac{t}{1+tv}.$$

Прямий метод. Незалежні змінні: t, u. Диференціюємо третю з формул перетворення за t і за u, розглядаючи змінні z і v як функції від t, u (першу — через посередництво x, y):

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{1}{(1+tu)^2}=\frac{1-t^2\dfrac{\partial v}{\partial t}}{(1+tv)^2},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}\frac{-t^2}{(1-tu)^2}=-\frac{t^2}{(1+tv)^2}\frac{\partial v}{\partial u}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Звідси

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{(1+tv)^2}\left(1-t^2\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial u}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(1+tu)^2}{(1+tv)^2}\frac{\partial v}{\partial u}.$$

Перетворене рівняння після скорочення матиме вигляд:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=0.$$

Вирішимо ту ж задачу інакше.

Зворотний метод. Виразимо з формул перетворення нові змінні через старі:

$$t=x,\quad u=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\quad v=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$$

і вважатимемо незалежними змінними x, y. Диференціюючи третю формулу за x і за y (v залежить від них за посередництвом t, u), знайдемо:

$$-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{x^2}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{1}{x^2},\quad -\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial u}\frac{1}{y^2}$$

або

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial v}{\partial u}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial v}{\partial u}\quad \text{і так далі.}$$

6) Вираз

$$W=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

перетворити до змінних

$$t=x+y,\quad u=\frac{y}{x},\quad v=\frac{z}{x}.$$

Метод обчислення диференціалів. Незалежні змінні: x, y. Диференціюємо формули перетворення:

$$dt=dx+dy,\quad du=-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy,\quad dv=-\frac{z}{x^2}dx+\frac{1}{x}dz.$$

Якщо v розглядати, як функцію від x, y через посередництво t, u, то диференціал dv напишеться так:

$$dv=\frac{\partial v}{\partial t}dt+\frac{\partial v}{\partial u}du=\frac{\partial v}{\partial t}(dx+dy)+\frac{\partial v}{\partial u}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right).$$

Зіставляючи два вирази для dv, знаходимо

$$dz=\frac{z}{x}dx+x\frac{\partial v}{\partial t}(dx+dy)+\frac{\partial v}{\partial u}\left(-\frac{y}{x}dx+dy\right).$$

Складемо тепер другі диференціали від нових змінних:

$$d^2t = 0, \quad d^2u = \frac{2y}{x^3}dx^2 - \frac{2}{x^2}dx\,xy, \quad d^2v = -\frac{2}{x^2}dx\,dz + \frac{2z}{x^3}dx^2 + \frac{1}{x}d^2z.$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} d^2v &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}dt^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}dt\,du + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial v}{\partial t}d^2t + \frac{\partial v}{\partial u}d^2u = \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(dx+dy)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}(dx+dy)\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right)^2 + \\ &+ \frac{\partial v}{\partial u}\left(\frac{2y}{x^3}dx^2 - \frac{2}{x^2}dx\,xy\right). \end{aligned}$$

Прирівнюючи обидва вирази для d^2v і замінюючи dz отриманим вище його виразом, прийдемо до рівності, з якої визначиться d^2z:

$$\begin{aligned} d^2z &= 2\frac{dx}{x}\left[\frac{z}{x}dx + x\frac{\partial v}{\partial t}(dx+dy) + \frac{\partial v}{\partial u}\left(-\frac{y}{x}dx + dy\right)\right] - \frac{2z}{x^2}dx^2 + \\ &+ x\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(dx+dy)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}(dx+dy)\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right)^2 + \right. \\ &\left. + \frac{\partial v}{\partial u}\left(\frac{2y}{x^3}dx^2 - \frac{2}{x^2}dx\,dy\right)\right]. \end{aligned}$$

Звідси можна визначити похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ як коефіцієнти при dx^2, $2\,dx\,dy$, dy^2. Але потрібний нам результат можна отримати простіше, помітивши, що d^2z переходить в W, якщо взяти $dx = 1$, $dy = -1$. Таким способом знаходимо:

$$W = \frac{(x+y)^2}{x^3}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial u^2} = \frac{(1+u)^3}{t}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}.$$

7) **Перетворення Льожондра.** Як і в пр. 218.5 ми і тут наведемо перетворення Льожондра як приклад більш загального перетворення, коли формули, що зв'язують старі і нові змінні, містять похідні. Нехай

$$t = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad u = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad v = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z.$$

Вважаючи, що z є деяка функція від x і y: $z(x,y)$, припустимо, що

$$J = \frac{D(t,u)}{D(x,y)} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \neq 0. \tag{222.3}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Диференціюючи третю з формул перетворення за x і за y (причому v розглядаємо як функцію від x, y через посередництво t, u), отримаємо

$$\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

звідки

$$x=\frac{\partial v}{\partial t},\quad y=\frac{\partial v}{\partial u}\quad \text{і}\quad z=t\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial u}-v, \tag{222.4}$$

тобто перетворення має **взаємний** характер.

Диференціюючи перші дві з отриманих формул (222.4) спочатку по x, а потім по y, прийдемо до рівнянь

$$1=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\qquad 0=\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

і

$$0=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\qquad 1=\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Оскільки (203.3)

$$I=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}\right)^2=\frac{D(x,y)}{D(t,u)}=\frac{1}{J}\neq 0,$$

то з цих рівнянь маємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial u^2}}{I},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial u}}{I},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}}{I},$$

Якщо x, y, z і t, u, v трактувати як координати деяких точок простору, то перетворення Льожондра можна розглядати як перетворення простору (але не **точкове**). Поверхня, що характеризується залежністю між z і x, y, переходить при цьому в поверхню, що визначається залежністю між v і t, u. Оскільки $t, u, v, \dfrac{\partial v}{\partial t}, \dfrac{\partial v}{\partial u}$ залежать тільки від $x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, то перетворення Льожондра **зберігає дотик**.

8) Легко узагальнити перетворення Льожондра на випадок простору будь-якого числа вимірів. Нехай, скажімо, z є функція від $x_1, \ldots, x_n$. Нехай

$$t_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}\quad (i=1,\ \ldots,\ n)\quad \text{і}\quad v=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial z}{\partial x_i}-z;$$

тут v є **нова** функція від **нових** змінних $t_1,\ \dots,\ t_n$.

Нехай і тут визначник $J \neq 0$:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n\,\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Продиференціюємо формулу, що визначає v, за x_k (вважаючи при цьому, що v є функція від $x_1,\ \dots,\ x_n$ через посередництво $t_1,\ \dots,\ t_n$):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial t_i} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_k} \quad (k = 1,\ \dots,\ n).$$

Зважаючи на те, що $J \neq 0$, маємо

$$\frac{\partial v}{\partial t_i} = x_i \quad (i = 1,\ \dots,\ n).$$

Отже, і

$$z = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial v}{\partial t_i} - v.$$

Тож у загальному випадку перетворення також має **взаємний** характер.

9) Нарешті, розглянемо ще один приклад перетворення, який становить деяку своєрідність. Нехай

$$\varphi(u_1,\ \dots,\ u_n,\ x_1,\ \dots,\ x_n)$$

буде функція від $2n$ змінних, **однорідна 2-го степеня від змінних** $x_1,\ \dots,\ x_n$. Нехай визначник

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\,\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n\,\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

відмінний від нуля. І нехай наше перетворення має наступний вид:

$$t_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}.$$

При цьому функція $\varphi(u_1,\ \dots,\ u_n,\ x_1,\ \dots,\ x_n)$ перетвориться на деяку функцію $\psi(u_1,\ \dots,\ u_n,\ t_1,\ \dots,\ t_n)$, де $t_1,\ \dots,\ t_n$ — нові незалежні змінні замість $x_1,\ \dots,\ x_n$.

Довести, що

$$\text{а)}\quad \frac{\partial\psi}{\partial t_i} = x_i;$$

$$\text{б)}\quad \frac{\partial\psi}{\partial u_i} = -\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} \quad (i = 1,\ \dots,\ n).$$

Диференціюючи $\psi = \varphi$ за x_k, вважаючи ψ функцією від $x_1,\ \dots,\ x_n$ через посередництво $t_1,\ \dots,\ t_n$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial t_i}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k} \quad (k = 1,\ \dots,\ n).$$

З іншого боку, похідна $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ буде **однорідною функцією першого степеня** відносно змінних $x_1,\ \dots,\ x_n$. Тоді за формулою Ойлера (188.1)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\cdot x_i \quad (k = 1,\ \dots,\ n).$$

Зіставляючи отримані два розклади для $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}$, і зважаючи на те, що $H \neq 0$, отримуємо співвідношення а).

Диференціюючи за u_i отримаємо

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_i} = \frac{\partial\psi}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\psi}{\partial t_k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\,\partial u_i}.$$

Але $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_i}$, очевидно, **однорідна функція другого степеня** від $x_1,\ \dots,\ x_n$. Знову застосовуючи формулу Ойлера, бачимо, що остання сума дає нам

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}\right)\cdot x_k = 2\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}.$$

Звідси й випливають співвідношення б).

nebayduzhi.math@gmail.com

Глава 7

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ГЕОМЕТРІЇ

7.1. Аналітичне задання кривих і поверхонь

223. Криві на площині (у прямокутних координатах)

У цьому розділі ми зупинимося на деяких застосуваннях вивчених понять, фактів та методів диференціального числення до геометрії. (Деякі з них ми вже бачили вище у розд. 91, розд. 141, розд. 143, розд. 145, розд. 148, розд. 180.)

Ми вважаємо за корисне попередньо нагадати читачеві різні способи аналітичного задання кривих і поверхонь; цьому присвячений цій розділ. Зазначимо наперед, що функції, про які йтиметься в цьому розділі, як правило, вважаються **неперервними і такими, що мають неперервні похідні** за своїми аргументами; у разі потреби, ми будемо вимагати існування та неперервності і подальших похідних.

Почнемо з **плоских кривих**, причому в основу покладемо деяку прямокутну систему координат Oxy.

Вище ми неодноразово розглядали рівняння вигляду

$$y = f(x) \quad \text{або} \quad x = g(y) \tag{223.1}$$

і вивчали відповідну йому криву (розд. 47, розд. 91, розд. 146 – розд. 149). Такого роду задання кривої, коли одна з поточних координат її точки задається у вигляді (однозначної) **явної** функції від іншої координати, ми називатимемо **явним** заданням кривої. Воно має простоту і наочність; як побачимо, *будь-яке інше задання,* ***в деякому розумінні,*** *може бути зведено до цього.*

nebayduzhi.math@gmail.com

Коли ми вивчали теорію про неявні функції, нам доводилося говорити про **неявне** задання кривої, тобто про задання кривої рівнянням виду

$$F(x, y) = 0, \tag{223.2}$$

нерозв'язаним ні відносно x, ні відносно y (розд. 205 – розд. 210). Таке рівняння зветься **неявним** рівнянням кривої.

З теорем про існування неявної функції (розд. 205, розд. 206) випливає, що якщо в точці (x_0, y_0) кривої виконано умову

$$F'_x(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{або} \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

то принаймні в деякому околі цієї точки крива може бути задана явним рівнянням (223.1) того чи іншого вигляду (причому згадана в ньому функція f або g неперервна разом зі своєю похідною).

Отже, тільки точки (x_0, y_0) кривої, для яких виконуються відразу обидві умови

$$F'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{і} \quad F'_y(x_0, y_0) = 0, \tag{223.3}$$

можуть мати ту **особливість**, що в їх околах крива не може бути задана явним рівнянням (ні того, ні іншого вигляду). Точки кривої, що задовольняють рівняння (223.3), і називають **особливими**.

Нижче (розд. 236) ми займемося питанням про поведінку кривої (223.2) поблизу особливої точки. Але, як правило, особливі точки не будуть розглядатися, і ми вивчатимемо криву лише в околі її **звичайної** (тобто **неособливої**) точки.

Нарешті, у попередньому викладі неодноразово згадувалося про те, що рівняння вигляду

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{223.4}$$

що задають залежність поточних координат точки від деякого **параметра** t, також визначають криву на площині (дивіться, наприклад, розд. 106). Подібні рівняння називають **параметричними**; вони дають **параметричне** задання кривої.

Розглянемо точку (x_0, y_0), що визначається значенням $t = t_0$ параметра, і припустимо, що при $t = t_0$ буде $\varphi'(t_0) \neq 0$. Тоді й поблизу цього значення t похідна, оскільки вона неперервна, буде зберігати той самий знак; а тоді функція $x = \varphi(t)$ виявляється **монотонною** (розд. 132). За цих умов і спираючись на розд. 83 і розд. 94, можна t розглядати як однозначну функцію від x: $t = \theta(x)$, неперервну і що має неперервну похідну. Підставивши цю функцію замість t в вираз для y, отримаємо безпосередню залежність y від x

$$y = \psi\left(\theta(x)\right) = f(x),$$

де знову функція f неперервна разом зі своєю похідною. Отже, ми задамо **явним** рівнянням, принаймні, ділянку кривої, що примикає до взятої точки. Аналогічний висновок можна зробити, навіть якщо $\varphi'(t_0) = 0$, але $\psi'(t_0) \neq 0$, з тією єдиною різницею, що вийде явне рівняння іншого вигляду: $x = g(y)$.

Лише у тому випадку, коли одночасно

$$x'_t = \varphi'(t_0) = 0 \quad \text{і} \quad y'_t = \psi(t_0) = 0, \tag{223.5}$$

крива в околі точки може виявитися такою, що не може бути задана **явним** рівнянням; таку точку називатимемо **особливою**.

У розд. 237 ми зупинимося коротко на вигляді кривої (223.4) поблизу **особливої** точки, але, як правило, і тут ми вивчатимемо лише **звичайні** точки.

Важливо тепер зауважити, що усе сказане вище про звичайну точку (x_0, y_0), тобто таку, для якої не виконуються умови (223.5), передбачає ще, що ця точка **виходить тільки при одному значенні параметра** $t = t_0$ (тобто, як кажуть, є **простою** точкою). Якби, навпаки, точка (x_0, y_0) була кратною і відповідала, наприклад, двом різним значенням параметра $t = t_0$ і $t = t_1$, то в ній, взагалі кажучи, перетиналися б дві ділянки кривої: одна, яка визначається значеннями t, близькими до t_0, а інша — значеннями t, близькими до t_1. В цьому випадку всю криву в околі цієї точки знову-таки неможливо було б задати явним рівнянням. Отже, **кратні** точки також, по суті, слід відносити до **особливих**.

Є, втім, один випадок, коли точку, що виходить двічі все ж таки не вважають кратною: це буде тоді, коли точка відповідає двом **крайнім** значенням параметра і в ній крива **замикається**. На прикладі кола

$$x = a \cdot \cos\theta, \quad y = a \cdot \sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

це буде точка, що визначається значеннями $\theta = 0$ і $\theta = 2\pi$.

Підведемо підсумки сказаного. Ми не намагалися дати геометричну характеристику поняття кривої: для нас крива є *геометричним місцем точок, що задовольняють аналітичне співвідношення вигляду* (223.1), (223.2) *або* (223.4), припускаючи неперервність функцій, що зустрічаються в них, і їх похідних. Щоправда, геометричні образи, обумовлені цими різними способами, **взагалі** можуть значно відрізнятися за своїм виглядом, але **в околі звичайній** (а у випадку параметричного задання, і **простій**) точки, всі вони задаються рівняннями вигляду (223.1).

224. Приклади

Зробимо огляд кривих, що найчастіше зустрічаються (багато з них, втім, вже знайомі читачеві з аналітичної геометрії).

1) **Ланцюгова лінія** (рис. 99.2). Її рівняння

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

За такою лінією встановлюється в рівновазі гнучка і нерозтяжна важка нитка (ланцюг, дріт тощо), підвішена за обидва кінці.

Форма кривої поблизу вершини A (рис. 99.2) нагадує параболу, але при віддаленні від вершини крива крутіше спрямовується в нескінченність. Відрізок $OA = a$ визначає точніше її форму — чим менше, тим крива крутіше. Те розташування кривої, що зображено на кресленні, зовсім необов'язково, але воно дає змогу надати рівнянню кривої найпростіший вигляд.

2) **Еліпс**, віднесений до осей симетрії, має рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Оскільки сума квадратів величин $\frac{x}{a}$ і $\frac{y}{b}$ повинна дорівнювати одиниці, природно прийняти їх, відповідно, за косинус і синус деякого кута t. Це приводить до звичайного параметричного задання еліпса,

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t;$$

при зміні t від 0 до 2π еліпс описується проти годинникової стрілки починаючи від кінця $A(a, 0)$ великої осі.

Можна було б, зрозуміло, використати і будь-які інші вирази, сума квадратів яких дорівнює одиниці, і покласти, наприклад,

$$x = a\frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad y = b\frac{2u}{1+u^2},$$

де u змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. Оскільки при $u \to \pm\infty$ маємо $x \to -a,\ y \to 0$, то можна вважати умовно, що точка $A'(-a, 0)$ виходить при $u = \pm\infty$.

Аналогічно, для випадку **гіперболи**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

згадуючи відоме співвідношення, що пов'язує **гіперболічні** косинус та синус, можна покласти

$$x = a\operatorname{ch} t, y = b\operatorname{sh} t \quad (-\infty < t < +\infty).$$

Інше задання тієї ж кривої:

$$x = a\frac{1+u^2}{1-u^2}, \quad y = b\frac{2u}{1-u^2} \quad (-\infty < u < +\infty;\ u \neq \pm 1).$$

Читачеві рекомендується завжди уявляти як пересувається точка здовж кривої при зміні параметра.

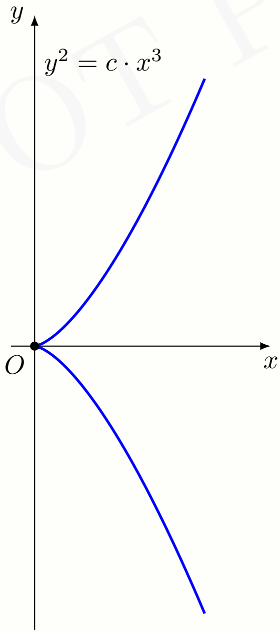


Рис. 224.1

3) **Напівкубічна парабола** (рис. 224.1)

$$y^2 - cx^3 = 0 \quad (c > 0).$$

Тут особливою точкою є початок координат $(0, 0)$. Якщо розв'язати рівняння відносно y, то отримаємо явні рівняння двох симетричних гілок кривої

$$y = \pm\sqrt{cx^3} = \pm\sqrt{c} \cdot x^{\frac{3}{2}}.$$

Оскільки $y' = 0$ при $x = 0$ для обох гілок, то вони обидві дотикаються до осі x, і маємо **вістря** (**точка повернення**, дивіться розд. 236).

4) **Астроїда** (рис. 224.2)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \quad (a > 0).$$

Це рівняння, власне, не підходить під той тип, яким ми домовилися обмежитися: у кожній із точок $(\pm a, 0)$ та $(0, \pm a)$ одна з частинних похідних лівої частини рівняння прямує до ∞. Втім, нескладно, звільнивши рівняння кривої від ірраціональностей, подати його у вигляді

$$\left((x^2 + y^2) - a^2\right)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0.$$

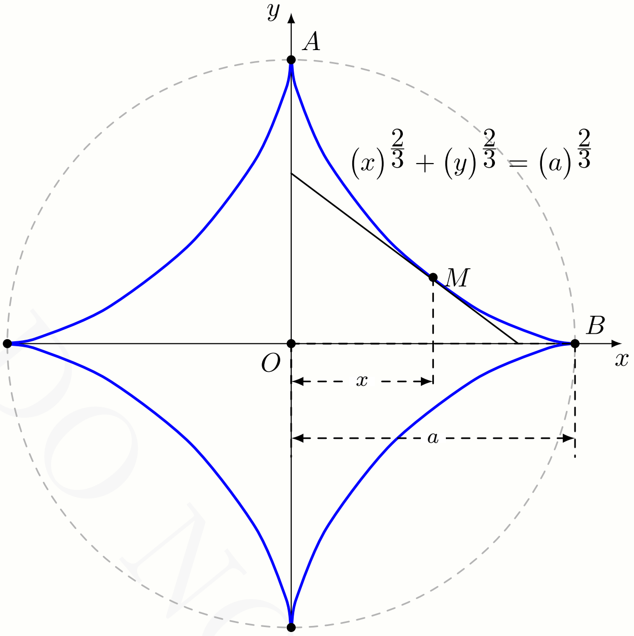


Рис. 224.2

У цьому вигляді вказані точки якраз і будуть **особливими**.

З рівняння кривої видно, що крива лежить у колі $x^2+y^2=a^2$ та симетрична відносно координатних осей; тому обмежимося першим квадрантом. Розв'язуючи рівняння відносно y:

$$y=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

та диференціюючи:

$$y'=-\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}},$$

бачимо, що при $x=0$ дотична вертикальна, а при $x=a$ — горизонтальна. Звідси випливає, що у всіх чотирьох особливих точках будуть **вістря (точки повернення).**

Бажаючи отримати параметричне задання астроїди, використаємо те, що сума квадратів виразів $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ і $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ повинна дорівнювати одиниці (дивіться початкове рівняння кривої). Поклавши їх рівними $\cos t$ і $\sin t$, прийдемо до таких параметричних рівнянь:

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t\quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi).$$

Оскільки похідні

$$x'_t=-3a\cos^2 t\sin t,\quad y'_t=3a\sin^2 t\cos t$$

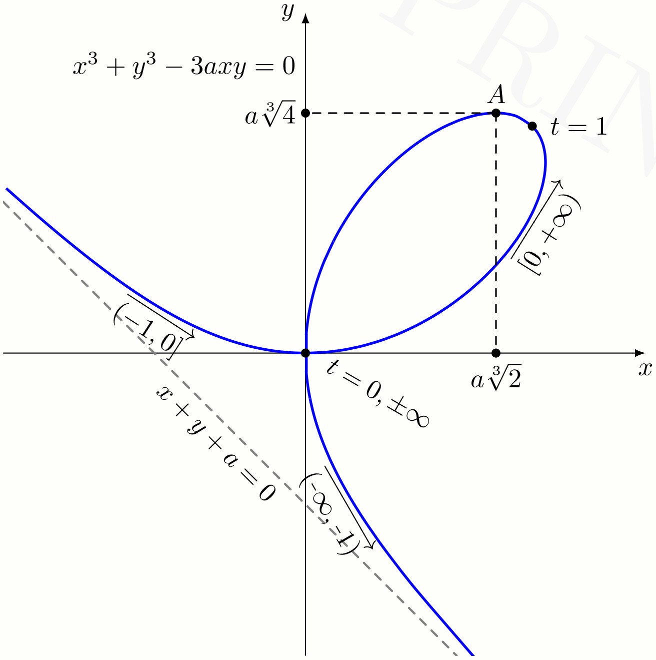


Рис. 224.3

обидві дорівнюють 0 при $t = 0$ (2π), $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, то цим значенням параметра відповідають **особливі** точки — ті самі, що й вище.

5) **Лист Декарта (фр. René Descartes, Рене́ Дека́рт)** (рис. 224.3)

$$x^3 + y^3 - 3a\,xy = 0 \quad (a > 0).$$

(Дивіться пр. 210.2. Точка $A\left(a\sqrt[3]{2},\ a\sqrt[3]{4}\right)$, що відповідає максимуму y як функції від x, позначена на кресленні.)

Особливою точкою є початок координат $(0, 0)$: у ній крива сама себе перетинає. Крива має асимптоту $x + y + a = 0$ як при $x \to +\infty$, так і при $x \to -\infty$.

Щоб у цьому переконатися, розділимо рівняння почленно на x^3:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 = 3a \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} - 1.$$

Звідси насамперед можна зробити висновок, що, скажімо, при $|x| > 3a$, $\left|\frac{y}{x}\right|$ залишається обмеженим, а тоді вже ясно, що при $x \to \pm\infty$ відношення $\frac{y}{x} \to -1$. З іншого боку, рівняння дає нам

$$y + x = \frac{3axy}{x^2 - xy + y^2} = \frac{3a \cdot \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\ ,$$

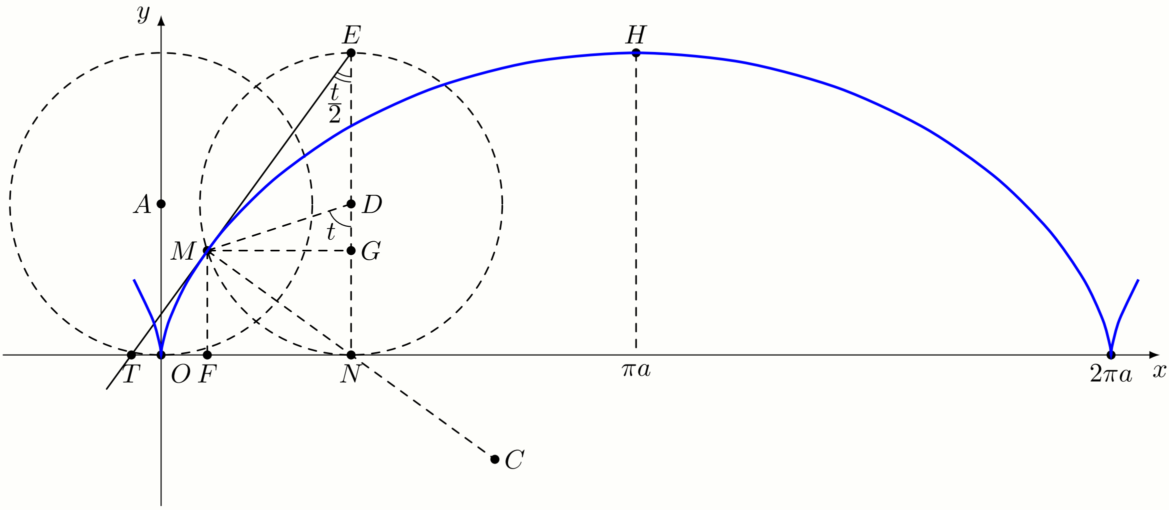


Рис. 225.1

так що при $x \to \pm\infty$ буде $y + x \to -a$. Цим наше твердження і доведено (розд. 148).

Вводячи параметр $t = \frac{y}{x}$ і підставляючи в рівняння кривої $y = tx$, легко отримати параметричне задання:

$$x = \frac{3at}{t^3+1}, \quad y = \frac{3at^2}{t^3+1} \quad (-\infty < t < +\infty,\ t \neq -1).$$

При $t \to \pm\infty$ обидві координати прямують до 0; можна вважати, що початкова точка $(0, 0)$ виходить як при $t = 0$, так і при $t = \pm\infty$. При зміні t від $-\infty$ до -1, точка (x, y), виходячи з початку координат, вздовж правої гілки віддаляється в нескінченність. При зміні t від -1 до 0 наша точка з нескінченності вздовж лівої гілки повертається до початку координат. Нарешті, в міру зростання t від 0 до $+\infty$ точка описує (проти годинникової стрілки) петлю.

225. Криві механічного походження

Продовжуючи перелік прикладів, розглянемо ще деякі криві механічного походження, які можна отримати, якщо **котити** деякі криві по іншим.

6) **Циклоїда**. Уявимо, що по прямій Ox (рис. 225.1) зліва направо котиться **без ковзання** круг радіуса a з центром в A. Крива, що описується при цьому будь-якою точкою кола, і називається **циклоїдою**. Простежимо, наприклад, шлях точки O за час одного обороту круга.

Розглянемо наш круг, що котиться, в новому положенні. Точкою дотику вже є інша точка N; отже, по прямій точка дотику перемістилася на відстань ON. Водночас точка O перемістилася в положення M, пройшовши по колу круга шлях NM.

Оскільки круг котиться **без ковзання**, то ці шляхи рівні:

$$\overset{\frown}{NM} = ON.$$

Якщо вибрати тепер за параметр, що визначає положення точки, кут $t = \angle NDM$, на який встиг повернутися радіус, що мав на початку руху вертикальне положення AO, то координати x і y точки M можна записати так:

$$\begin{aligned} x &= OF = ON - FN = \overset{\frown}{NM} - MG = at - a\sin t = a(t - \sin t),\\ y &= FM = NG = ND - GD = a - a\cos t = a(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Отже параметричні рівняння циклоїди мають вигляд

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

При зміні t від $-\infty$ до $+\infty$ вийде крива, що складається з безлічі таких гілок, яка зображена на рис. 225.1.

Оскільки похідні

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a\sin t$$

одночасно дорівнюють 0 при $t = 2k\pi$ $(k = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$, то цим значенням відповідають особливі точки кривої. Але (106.4)

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

тож, наприклад, при $t \to \pm 0$ (або при $x \to \pm 0$) похідна y'_x буде прямувати до $\pm\infty$; зрозуміло, що в початковій точці (як і інших особливих точках) дотична вертикальна: тут маємо **вістря** (**точка повернення**, розд. 237).

7) **Епіциклоїда і гіпоциклоїда**. Якщо один круг без ковзання котиться **ззовні** по іншому кругу, то крива, що описується довільною точкою кола рухомого круга, називається **епіциклоїдою**. Якщо ж круг котиться **зсередини**, то ми маємо справу з **гіпоциклоїдою**. Зупинимося на виведенні рівнянь першої із цих кривих.

Візьмемо початок координат у центрі O нерухомого кола, а вісь x проведемо через те положення точки A, у якому вона є точкою дотику обох кругів (рис. 225.2). Коли рухливий (зовнішній) круг перейде в нове положення, вказане на кресленні, точка A перейде в M. Геометричне місце точок M нам і належить визначити.

Позначимо через a радіус нерухомого круга, а через ma — радіус того круга, що котиться. Виберемо за параметр тут кут $\angle MCB$ між радіусом CM, що з'єднує центр рухомого круга з точкою M, і радіусом CB, проведеним у точку дотику. На початку руху нехай цей кут дорівнює 0.

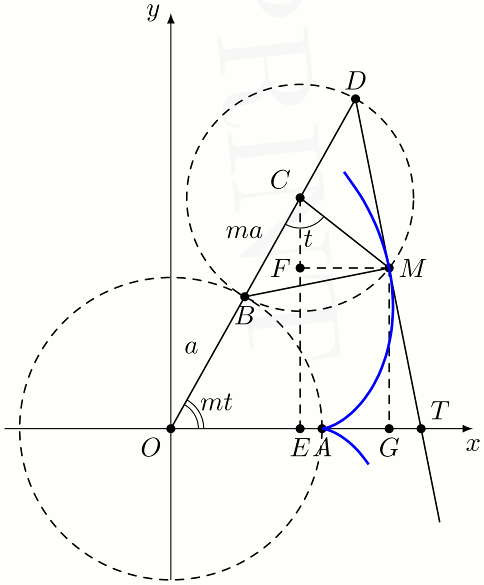


Рис. 225.2

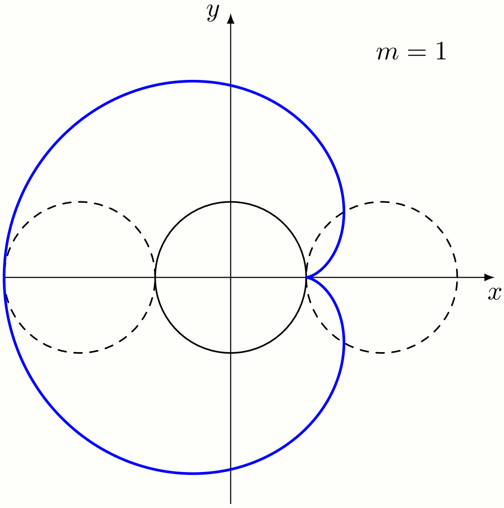


Рис. 225.3

nebayduzhi.math@gmail.com

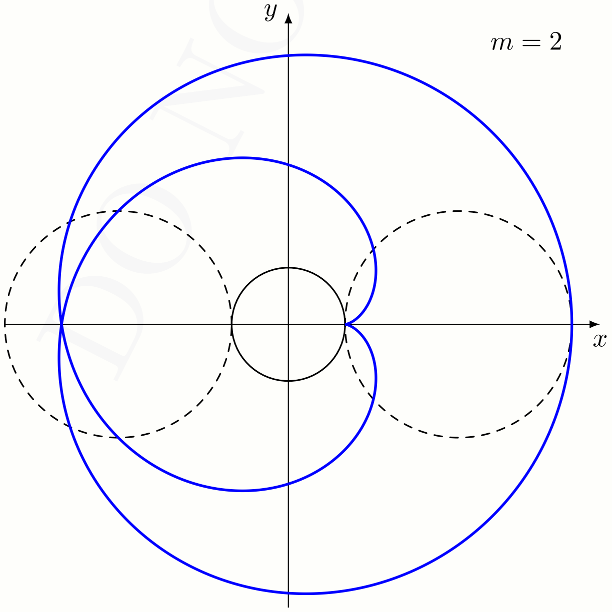


Рис. 225.4

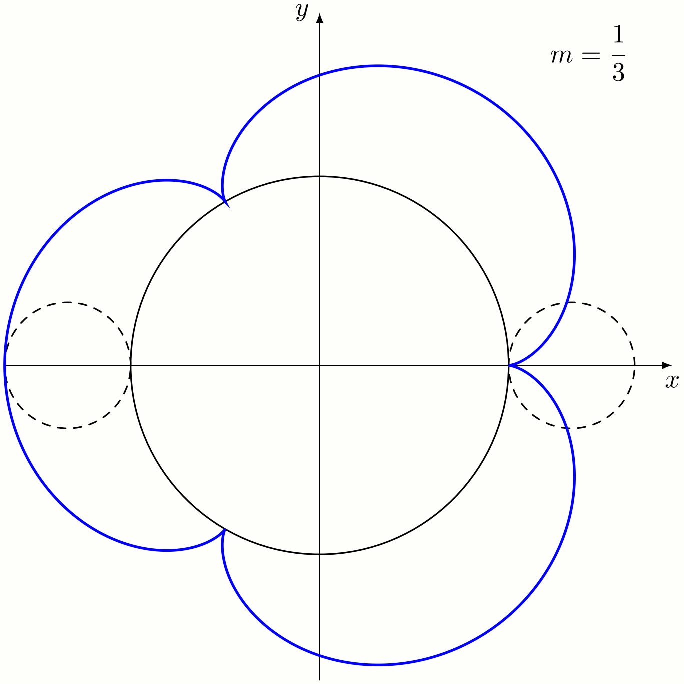


Рис. 225.5

nebayduzhi.math@gmail.com

Насамперед, подивимося, у чому тут проявляється **відсутність ковзання**. Дуга AB, пройдена точкою дотику по нерухомому колу, повинна дорівнювати дузі MB, пройденою точкою дотику по колу, що котиться:

$$a \cdot \angle AOB = ma \cdot \angle MCB, \quad \text{звідки} \quad \angle AOB = mt.$$

Виразимо тепер координати x і y точки M через t. Маємо

$$x = OG = OE + FM = (a + ma)\cos mt + ma \sin \angle FCM;$$

але

$$\angle FCM = \angle BCM - \angle OCE \quad \text{і} \quad \angle OCE = \frac{\pi}{2} - mt,$$

тож

$$\angle FCM = (1+m)t - \frac{\pi}{2} \quad \text{і} \quad \sin \angle FCM = -\cos(1+m)t.$$

Остаточно

$$x = a[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t].$$

Так само знайдемо

$$y = a[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t].$$

Ці рівняння дають параметричне задання **епіциклоїди**.

Коли круг, що котиться, знову доторкнеться до нерухомого круга у тій самій своїй точці, що і на початку руху (тобто при $t = 2\pi$), точка M закінчить одну гілку кривої. Далі вона описуватиме наступну гілку, подібну до першої, і так далі.

Похідні

$$\begin{aligned} x'_t &= -m(m+1)a[\sin mt - \sin(1+m)t], \\ y'_t &= m(m+1)a[\cos mt - \cos(1+m)t] \end{aligned}$$

дорівнюють одночасно 0 при $t = 2k\pi$ (де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), тобто кожен раз, коли точка, що розглядається на рухомому колі, стає точкою дотику. Відповідні точки кривої будуть **особливими (точки повернення),**

На рис. 225.3, рис. 225.4, рис. 225.5 зображені епіциклоїди при $m = 1$ (кардіоїда), $m = 2$ і $m = \frac{1}{3}$.

У випадку **гіпоциклоїди** подібним чином виходять такі параметричні рівняння:

$$\begin{aligned} x &= a[(1-m)\cos mt + m\cos(1-m)t], \\ y &= a[-(1-m)\sin mt + m\sin(1-m)t]. \end{aligned}$$

Тут m також означає відношення радіуса круга, що котиться, до радіуса нерухомого круга. Легко помітити, що ці рівняння виходять з рівнянь епіциклоїди заміною m на $-m$.

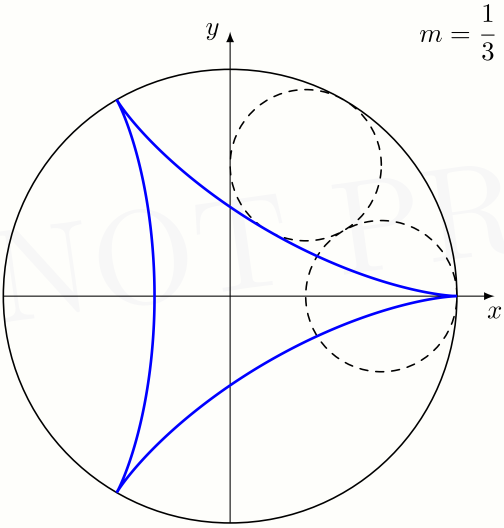


Рис. 225.6

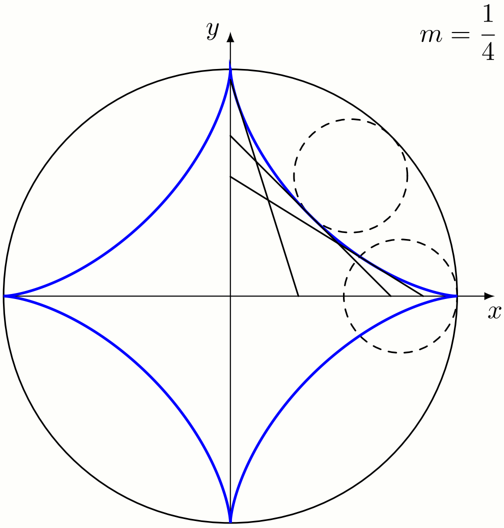


Рис. 225.7

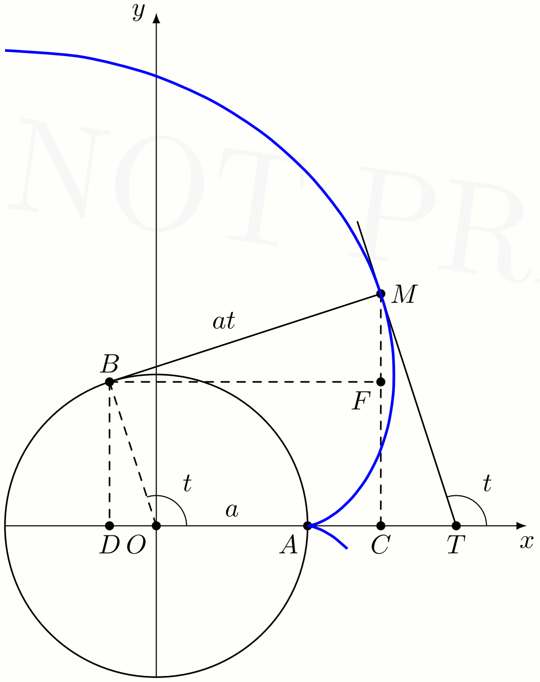


Рис. 225.8

На рис. 225.6 і рис. 225.7 зображені гіпоциклоїди, що відповідають $m = \dfrac{1}{3}$ і $m = \dfrac{1}{4}$ (астроїда). Якщо в рівняннях гіпоциклоїди покласти $m = \dfrac{1}{4}$ і замінити t на $-4t$, то й вийдуть рівняння **астроїди**, наведені в пр. 224.4.

8) **Евольвента круга**. Уявимо, що на круг, описаний з центру O радіусом a, навернута за годинниковою стрілкою нитка; нехай кінець нитки знаходиться в точці A. Станемо нитку розгортати (проти годинникової стрілки), змотуючи з круга і весь час натягуючи її за кінець. Крива, що описується при цьому кінцем нитки, називається **евольвентою круга** (порівняйте з розділами розд. 254 – розд. 256, нижче).

Візьмемо початок координат у центрі O (рис. 225.8) і проведемо вісь x через точку A. Коли буде змотана частина AB нитки, вона займе положення BM, розташовуючись по дотичній до круга, а точка A перейде в M. Отже, $\overset{\frown}{AB} = BM$. За параметр введемо кут $t = \angle AOB$ між радіусами OA та OB. Координати x, y точки M можна записати так:

$$x = DC - DO = BF - DO = BM \sin\angle BMC - OB\cos\angle DOB;$$

але $BM = \overset{\frown}{AB} = at$, а $\angle BMC = \angle DOB = \pi - t$, так що

$$x = at\sin(\pi - t) - a\cos(\pi - t) = a(t\sin t + \cos t).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Далі,

$$y = CM = CF + FM = DB + FM = OB\sin\angle DOB + BM\cos\angle BMC = a(\sin t - t\cos t).$$

Отже, наша крива задана наступними параметричними рівняннями:

$$x = a(t\sin t + \cos t), \quad y = a(\sin t - t\cos t).$$

Єдина **особлива** точка відповідає значенню $t = 0$, при якому дорівнюють 0 обидві похідні

$$x'_t = at\cos t, \quad y'_t = at\sin t.$$

Пропонуємо читачеві переконатися в тому, що та ж крива вийде, якщо котити пряму (**без ковзання**) по кругу і розглянути траєкторію будь-якої точки прямої.

226. Криві на площині (у полярних координатах). Приклади

У багатьох випадках виявляється простіше задавати криві їх **полярними рівняннями**, що встановлюють залежність між поточними полярними координатами r, θ точок кривої. Полярний кут θ ми відлічуємо від полярної осі, вважаючи його додатним проти годинникової стрілки. Полярний радіус-вектор r ми будемо брати як додатним, так і від'ємним; в першому випадку його відкладають у напрямку, що визначається кутом θ, а в другому — у протилежному напрямку.

Як у випадку прямокутних координат, і тут залежність між r та θ може бути задана у явній, неявній або параметричній формі. Ми обмежимося, переважно, найпростішим випадком, коли крива є **явним** рівнянням вигляду

$$r = f(\theta).$$

Якщо перейти до прямокутних координат, взявши, як завжди, полюс за початок, а полярну вісь — за вісь x, то рівняння

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \quad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta$$

дадуть **параметричне** задання нашої кривої, причому роль параметра тут відіграватиме полярний кут θ. (Отримані тут функції від θ, разом з f, неперервні та мають неперервні похідні.)

Формули похідних

$$\begin{aligned} x'_\theta &= r'_\theta\cos\theta - r\sin\theta, \\ y'_\theta &= r'_\theta\sin\theta + r\cos\theta \end{aligned}$$

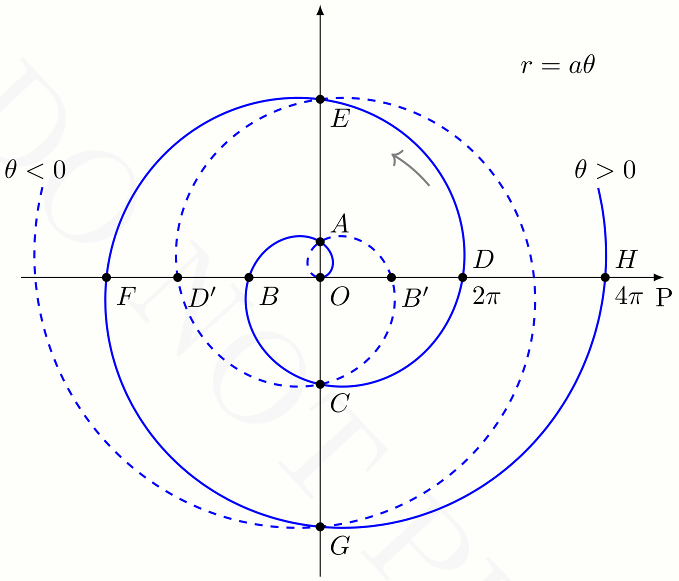


Рис. 226.1

свідчать, що **особлива** точка (у розумінні розд. 223) може зустрітися лише у тому випадку, якщо $r = r'_\theta = 0$.

Звернемося до **прикладів**.

1) **Спіраль Архімедеса** (рис. 226.1):

$$r = a\theta.$$

Криву можна розглядати як траєкторію точки, що рівномірно рухається по променю, що виходить з полюса, тоді як цей промінь рівномірно обертається довкола полюса.

Для побудови ряду точок $A, B, C, D, \dots$ кривої відкладемо по вертикалі $OA = a \cdot \frac{\pi}{2}$, а потім візьмемо $OB = 2OA$, $OC = 3OA$, $OD = 4OA$,..., тому що їм відповідають кути $2\frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$, $4\frac{\pi}{2}$,.... Змінюючи кут θ від 0 до $+\infty$, отримаємо нескінченну множину витків кривої $OABCD$, $DEFGH$, ...; відстань сусідніх витків, рахуючи по променю, дорівнює $2\pi a$.

Можна куту θ надавати і від'ємні значення, від 0 до $-\infty$. Тоді вийде друга частина кривої $OAB'C'D' \dots$, намічена пунктиром; вона симетрична з першою.

Зауважимо, що рівняння $r = a\theta + b$ також задає **спіраль Архімедеса**: якщо повернути полярну вісь на кут $\alpha = -\frac{b}{a}$, то це рівняння зведеться до вигляду $r = a\theta$.

2) **Гіперболічна спіраль** (рис. 226.2):

$$r = \frac{a}{\theta}.$$

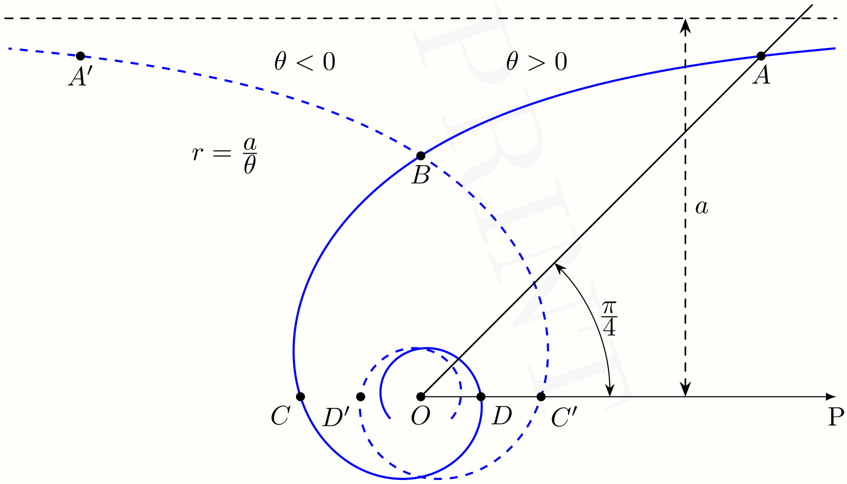


Рис. 226.2

В міру зростання кута θ до нескінченності радіус-вектор прямує до нуля, а точка кривої прямує до збігу з полюсом (ніколи його не досягаючи); За цих умов полюс називається **асимптотичною точкою** кривої. Крива нескінченну безліч разів завертається навколо полюса.

Якщо на промені $\theta = \frac{\pi}{4}$ відкласти відрізок $OA = \frac{4a}{\pi}$ і взяти $OB = \frac{1}{2}OA$ для кута $\frac{\pi}{2}$, $OC = \frac{1}{2}OB$ для кута π, $OD = \frac{1}{2}OC$ для кута 2π, ..., то точки $A, B, C, D, \dots$, очевидно, лежать на кривій.

Кут θ може набувати і від'ємні значення. При зміні θ від 0 до $-\infty$, як і у випадку спіралі Архімедеса, виходить друга частина кривої $A'BC'D'$, симетрична з першою; вона і тут намічена пунктиром.

Для з'ясування форми кривої в нескінченності розглянемо вертикальну відстань точки кривої до полярної осі $y = r\sin\theta = a\frac{\sin\theta}{\theta}$. При $r \to \pm\infty$ або, що те саме, при $\theta \to \pm 0$ маємо $\lim y = a$. Отже, пряма, проведена паралельно полярній осі на відстані a від неї, служить для кривої **асимптотою**.

3) **Логарифмічна спіраль** (рис. 226.3):

$$r = ae^{m\theta}.$$

Якщо кут θ зростає (або зменшується) в арифметичній прогресії, то r зростає (зменшується) в геометричній прогресії. Відкладемо на полярній осі відрізок $OA = a$, а на вертикалі до неї — відрізок $OB = ae^{m\frac{\pi}{2}}$, обидві точки A, B належать до нашої кривої. Якщо побудувати тепер прямокутну ламану $ABCDE\dots$, то з подібності трикутників нескладно зробити висновок, що відрізки OA, OB, OC, OD, OE, ... є елементами геометричної прогресії зі знаменником $e^{m\frac{\pi}{2}}$; оскільки відповідні кути є

nebayduzhi.math@gmail.com

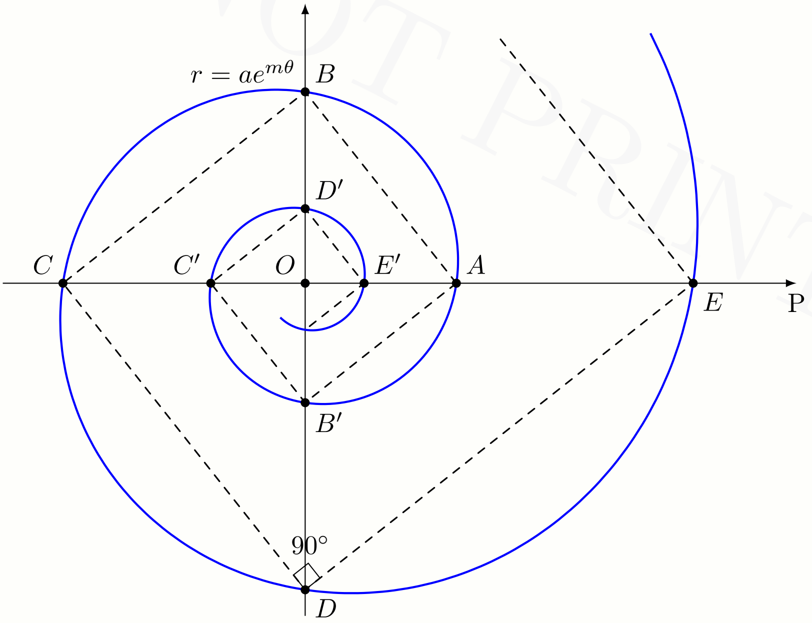


Рис. 226.3

$0,\ \frac{\pi}{2},\ 2\cdot\frac{\pi}{2},\ 3\cdot\frac{\pi}{2},\ \ldots$, то, очевидно, всі точки $C, D, E, \ldots$ також лежать на спіралі.

Коли кут θ росте від 0 до $+\infty$, точка робить безліч обертів навколо полюса, швидко віддаляючись від нього в нескінченність; відстані між витками вже не рівні. Кут θ може набувати і від'ємні значення; коли θ прямує до $-\infty$, то радіус-вектор r прямує до 0. Крива робить безліч обертів навколо полюса, безмежно до нього наближаючись (але ніколи не досягаючи, дивіться частину $AB'C'D'E'\ldots$ на рис. 226.3); полюс є **асимптотичною точкою** кривої.

Зазначимо, що, повертаючи полярну вісь навколо полюса, можна досягти знищення множника a та звести рівняння логарифмічної спіралі до найпростішого вигляду: $r = e^{m\theta}$.

4) **Равлики Паскаля** (Limaçon de Pascal, рис. 226.4, рис. 226.5, рис. 226.6, рис. 226.7):

$$r = a\cos\theta + b.$$

Походження цих кривих можна собі уявити так. Візьмемо коло діаметра a. Якщо вибрати полюс O, що лежить на самому колі, а полярну вісь провести через центр C, то для будь-якої точки M кола, очевидно, буде $r = a\cos\theta$. Це і є полярне рівняння кола. Якщо змінювати тут кут θ від 0 до 2π, то змінна точка **двічі** опише коло (проти годинникової стрілки).

Якщо подовжити тепер усі радіуси-вектори OM' кола на постійний відрізок $M'M = b$ ($b > 0$), то з побудованих таким способом точок M складеться нова крива,

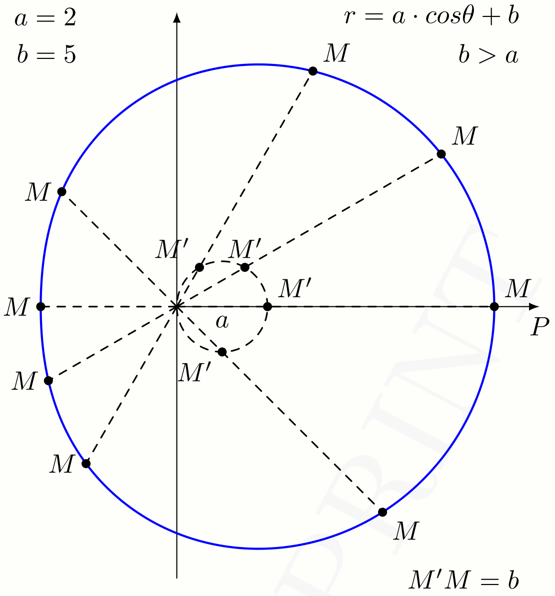


Рис. 226.4

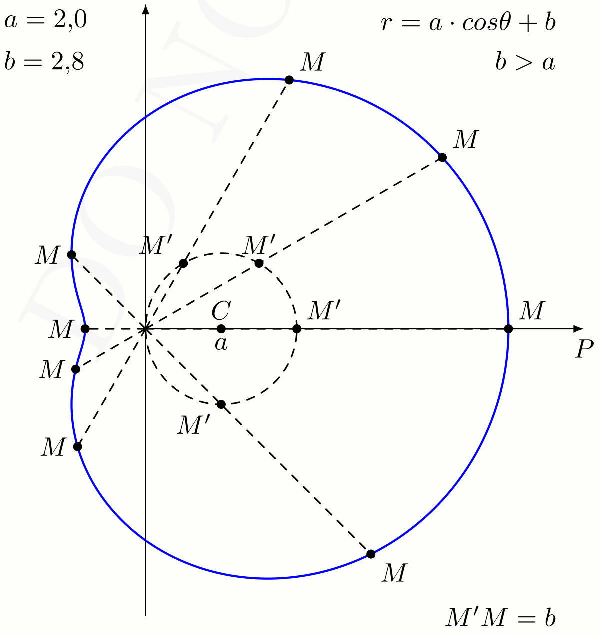


Рис. 226.5

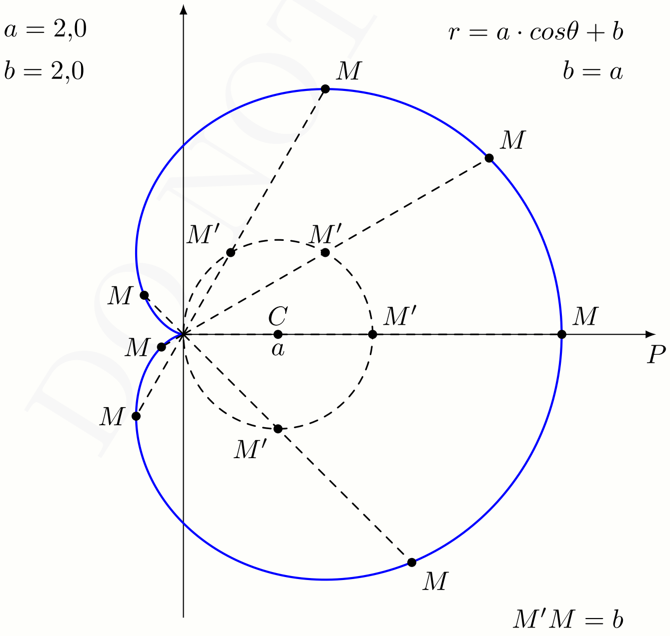


Рис. 226.6

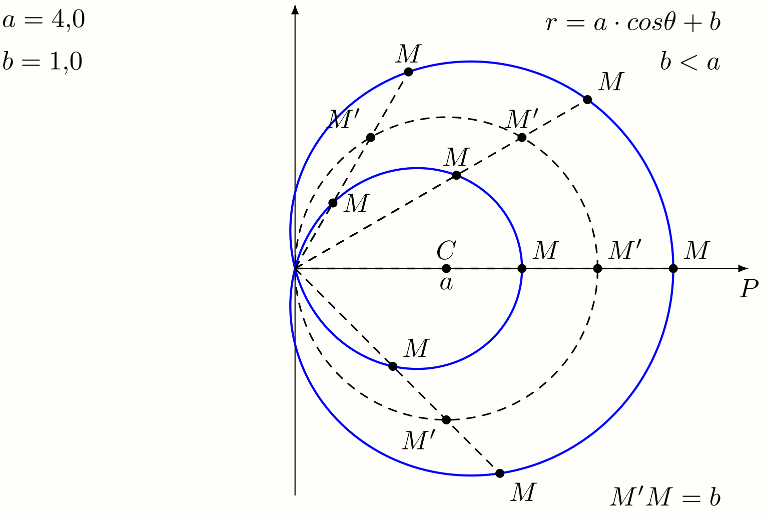


Рис. 226.7

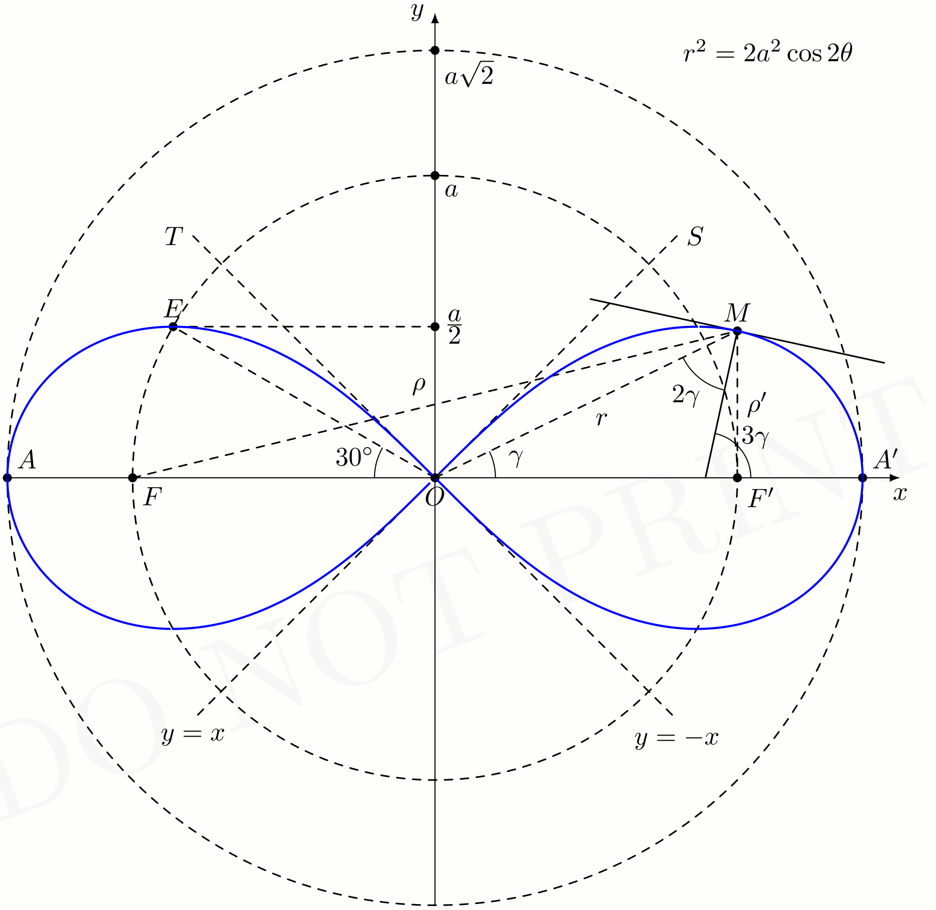


Рис. 226.8

яка і має загальну назву **равлика** Паскаля (фр. Étienne Pascal, Етьє́н Паска́ль). Її полярне рівняння буде $r = a\cos\theta + b$.

Найпростіша ситуація, коли $b > a$, бо тоді радіус-вектор завжди додатний і крива оточує полюс з усіх боків (рис. 226.4, рис. 226.5). При $b < a$ крива проходить через полюс і, сама себе перетинаючи, робить внутрішню петлю, як на рис. 226.7. Для знаходження кутів θ, при яких змінна точка проходить через полюс, візьмемо $r = 0$ у рівнянні кривої. Ми отримуємо рівняння $\cos\theta = -\dfrac{b}{a}$, яке має розв'язок саме тому, що $b < a$.

Особливо цікавий проміжний тип кривої, що відповідає випадку, коли $b = a$. Тут полюс лежить на кривій ($\theta = \pi$), але петлі немає; крива зображена на рис. 226.6. Відразу впадає в око тотожність цієї кривої з **кардіоїдою**, розглянутою вище, як окремий випадок **епіциклоїди** (рис. 225.3). Залишаємо читачеві переконатися у цьому.

5) **Лемніската Я. Бернуллі** (рис. 226.8):
(Я. Бернуллі (швейц. Jakob Bernoulli, Я́коб Берну́ллі))

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$

Цю криву можна визначити як геометричне місце точок M, для яких добуток їх відстаней $\varrho = FM$ і $\varrho' = F'M'$ до двох даних точок F і F', віддалених одна від одної на відстань $2a$, є стала величина a^2.

(При зазначеному співвідношенні між відстанню FF' та сталою величиною добутку $\varrho\varrho'$, очевидно, середина O відрізка FF' належить до кривої ($\varrho = \varrho' = a$). Інша річ, якщо $\varrho\varrho' = b^2$, де $b \neq a$, тоді виходять так звані **овали Кассіні (іт. Giovanni Domenico Cassini, Джова́нні Кассі́ні)**).

Із трикутників OMF та OMF' (рис. 226.8) маємо

$$\varrho^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta, \quad \varrho'^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta,$$

так що, за означенням,

$$\varrho^2\varrho'^2 = (r^2 + a^2)^2 - 4a^2r^2\cos^2\theta = a^4,$$

звідки отримаємо після елементарних перетворень

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

Це і є полярне рівняння лемніскати.

Оскільки ліва, а з нею і права частина цього рівняння не може набувати від'ємних значень, то кут θ може змінюватися лише у таких проміжках, для яких $\cos 2\theta \geqslant 0$. Це будуть проміжки

$$\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{7\pi}{4},\ 2\pi\right).$$

Вся крива розташується у двох вертикальних кутах між прямими S і T, проведеними під кутами $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{3\pi}{4}$ до полярної осі (дивіться рисунок). Вона сама себе перетинає в полюсі, якому відповідають $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Якщо перейти до прямокутних координат, то легко отримати таке (неявне) рівняння лемніскати:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

227. Поверхні і криві у просторі

Ми не будемо тут заглиблюватися у застосування диференціального числення до геометрії у просторі, залишаючи ці питання для спеціального курсу диференціальної геометрії. Ми обмежимося лише тим, що необхідно для подальших частин самого курсу аналізу.

Як і вище (нагадаємо це ще раз), всі функції, що розглядаються, будемо припускати **неперервними і такими, що мають неперервні похідні** за своїми аргументами.

Виходитимемо з прямокутної системи координатних осей $Oxyz$. Нам доводилося вже говорити про те, що поверхня у просторі може бути виражена рівнянням:

$$z = f(x, y) \tag{227.1}$$

(дивіться, наприклад, розд. 160). Таке рівняння, як і аналогічні до нього $x = g(y, z)$ або $y = h(z, x)$, ми називатимемо **явним** рівнянням поверхні.

До цього найпростішого випадку, у певному сенсі, зводяться і інші способи задання поверхні.

Часто трапляється, що поверхня задається рівнянням вигляду

$$F(x, y, z) = 0. \tag{227.2}$$

не розв'язуваним відносно тієї чи іншої координати (**неявне** завдання). Якщо в точці (x_0, y_0, z_0), що задовольняє рівняння, хоч одна з частинних похідних $F'_x(x_0, y_0, z_0)$, $F'_y(x_0, y_0, z_0)$, $F'_z(x_0, y_0, z_0)$ відмінна від 0, то в околі цієї точки поверхня може бути задана явним рівнянням того чи іншого типу. Справді, якщо наприклад $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то за теор. 208.1, принаймні в околі точки рівняння визначає z як однозначну функцію від x і y: $z = f(x, y)$ (і до того ж неперервну разом зі своїми похідними за обома аргументами).

Отже, виняток може бути лише в **особливій** точці поверхні, що задовольняє відразу три умови:

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \quad F'_z = 0.$$

Рівняння

$$F(x, y) = 0, \tag{227.3}$$

що не містить зовсім однієї з координат, також може бути витлумачене як рівняння **поверхні**. Саме, на площині xy воно виражає криву; якщо на ній, як на напрямній, побудувати **циліндричну** поверхню зі стінками, паралельними осі z, то всі точки цієї поверхні, і тільки вони, будуть задовольняти рівняння (227.3) (оскільки z в нього не входить і отже нічим не обмежено).

Аналогічно тлумачаться рівняння вигляду $G(y, z) = 0$ або $H(z, x) = 0$.

Звернемося тепер до **кривих у просторі**. Найпростішим способом завдання кривої в просторі є той, коли **дві** поточні координати, наприклад, y і z, задаються у вигляді функцій від третьої, x:

$$y = f(x), \quad z = g(x). \tag{227.4}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Подібний спосіб є природним аналогом **явного** завдання кривої на площині. І тут рівняння вказаного типу можна було б називати **явними** рівняннями кривої.

Як і у випадку плоскої кривої, до *явного задання в основному зводяться і інші аналітичні задання просторової кривої.*

Кожне з рівнянь (227.4) може бути витлумачено або як рівняння **проєкції** нашої кривої на координатну площину, відповідно, xy або xz, або як рівняння **циліндра** (дивіться (227.3)) зі стінками, паралельними, відповідно, осі z або осі y.

Більш загальний спосіб задання просторової кривої полягає у тому, щоб розглядати її як перетин двох поверхонь взагалі. Якщо ці поверхні виражаються кожна своїм рівнянням

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0, \tag{227.5}$$

то сукупність обох рівнянь дає аналітичне задання кривої перетину. Рівняння (227.5) називають **неявними** рівняннями кривої.

Складемо матрицю із частинних похідних від функцій F і G

$$\begin{pmatrix} F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{pmatrix}. \tag{227.6}$$

Нехай якийсь із визначників цієї матриці, наприклад,

$$\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}.$$

відмінний від 0 в точці. Тоді за теор. 208.2 в околі цієї точки рівняння (227.5) можуть бути замінені рівняннями типу (227.4) (причому функції, що фігурують в цих рівняннях, знову виявляються неперервними разом зі своїми похідними).

Отже, можливість зведення до найпростішого способу задання перестає бути забезпеченою лише в околі такої точки кривою (її називають **особливою**), де всі три визначники матриці (227.6) одночасно дорівнюють нулю.

228. Параметрично задані криві

Перейдемо, нарешті, до параметричного задання поверхонь і кривих у просторі, причому цього разу почнемо з **кривих**. Подібно до того як ми це робили на площині, координати змінної точки **просторової кривої** можна задати функціями від деякої допоміжної змінної (**параметра**) t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{228.1}$$

з тим щоб при зміні параметра t точка, координати якої даються цими рівняннями, описувала розглянуту криву (у випадку явного задання (227.4) роль параметра відігравало саме x).

Якщо для взятої точки кривої хоча б одна з похідних x'_t, y'_t, z'_t відмінна від 0, то як і у випадку плоскої кривої, легко в околі цієї точки перейти від параметричного до **явного** задання. Лише в околі **особливої** точки, де всі ці похідні дорівнюють нулю, неможливо гарантувати таку можливість.

Як і у випадку плоскої кривої, до **особливих** слід віднести і так звані кратні точки, тобто точки, отримані при двох або більшому числі значень параметра.

Звернемося до **параметричного** задання **поверхонь**.

На цей раз знаходження положення точки на поверхні вимагатиме **двох** параметрів (у випадку явного задання (227.1) роль цих параметрів грали координати: x і y). Нехай маємо рівняння

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \tag{228.2}$$

де (u, v) змінюється в замкненій області Δ. Складемо матрицю

$$\begin{pmatrix} \varphi'_u & \psi'_u & \chi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v & \chi'_v \end{pmatrix}. \tag{228.3}$$

і припустимо, що для $u = u_0$ і $v = v_0$, відмінний від 0 хоч один із визначників цієї матриці; наприклад, нехай

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді, переписавши перші два із рівнянь (228.2) у вигляді

$$\varphi(u, v) - x = 0, \quad \psi(u, v) - y = 0,$$

за теор. 208.2 можемо стверджувати, що цією системою двох рівнянь з чотирма змінними u, v, x, y (якщо обмежитися їх значеннями, близькими до неособливих значень) змінні u, v визначаються, як однозначні функції від x, y:

$$u = g(x, y), \quad v = h(x, y)$$

неперервні зі своїми похідними. Нарешті, підставляючи ці вирази u і v в третє з рівнянь (228.2), прийдемо до звичайного задання поверхні явним рівнянням

$$z = \chi(g(x, y),\ h(x, y)) = f(x, y),$$

де і функція f неперервна і має неперервні похідні.

Лише в тому випадку, якщо всі три визначники матриці (228.3) одночасно дорівнюють 0 (відповідна точка поверхні буде **особливою**), це може виявитися нездійсненним.

Читачеві ясно, що для параметрично заданій поверхні так само може бути введено поняття **простої і кратної** точки поверхні: перша виходить лише при одній системі значень (u, v) параметрів, а друга, щонайменше при двох. (Зазначимо, що у випадку **замкненої** поверхні (тобто поверхні, що не має контуру, наприклад, сферичної), її точки свідомо не можуть бути поставлені у взаємно однозначну відповідність точкам плоскої області Δ на площині uv. У цьому випадку наявність кратних точок неминуча при будь-якому параметричному заданні.)

Повертаючись до параметричних рівнянь (228.2) поверхні, фіксуємо в них значення одного з параметрів, наприклад, покладемо $u = u_0$. Тоді вийдуть, очевидно, рівняння деякої кривої

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \psi(u_0, v), \quad z = \chi(u_0, v),$$

що всіма точками лежить на поверхні. Змінюючи значення u_0, отримаємо ціле **сімейство** таких “кривих (u)”. Аналогічно, фіксуючи значення $v = v_0$, отримаємо також криву на нашій поверхні

$$x = \varphi(u, v_0), \quad y = \psi(u, v_0), \quad z = \chi(u, v_0);$$

з таких “кривих (v)” також складається ціле сімейство.

Оскільки значення u і v можна розглядати як **координати** точок на поверхні, то ці лінії називають **координатними лініями** поверхні. Якщо точка поверхні проста, тобто виходить лише з однієї системи значень (u, v) параметрів, то через неї проходить по одній координатній лінії з кожного сімейства.

Оглядаючи різні способи аналітичного задання поверхонь (дивіться (227.1), (227.2) та (228.2)) і просторових кривих ((227.4), (227.5) і (228.1)), ми могли б повторити сказане наприкінці розд. 223. В околі **звичайної (і простої)** точки справа зводиться до наочного випадку **явного** задання.

229. Приклади

1) **Крива Вівіані (іт. Vincenzo Viviani, Вінче́нцо Вівіа́ні).**

Так називається крива перетину поверхонь сфери і прямого кругового циліндра, для якого напрямною служить коло, побудоване на радіусі сфери, як на діаметрі (рис. 229.1). Нехай радіус сфери є R; якщо розмістити осі, як вказано на рисунку, то рівняння сфери та циліндра, відповідно, будуть

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2, \\ x^2 + y^2 \qquad &= Rx. \end{aligned}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

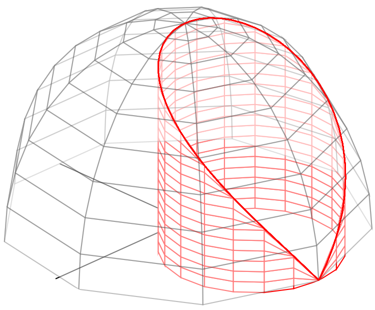


Рис. 229.1

Сукупність їх і визначає нашу криву.

Крива має вигляд вигнутої вісімки; у точці $(R, 0, 0)$ вона сама себе перетинає, тож ця точка — напевно **особлива**. Це підтверджується і обчисленням. Матриця

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x - R & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

має визначники

$$\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -4yz, \quad \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 0 & 2x - R \end{vmatrix} = 4xz - 2Rz, \quad \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x - R & 2y \end{vmatrix} = 2Ry,$$

які всі разом дорівнюють 0 саме в цій точці.

Криву Вівіані можна задати і параметрично, наприклад, так:

$$x = R\sin^2 t, \quad y = R\sin t\cos t, \quad z = R\cos t.$$

Справді, нескладно перевірити, що ці вирази тотожно задовольняють неявне рівняння кривої, і що при зміні параметра t, скажімо від 0 до 2π, повністю описується вся крива. Точка $(R, 0, 0)$ виходить двічі — при $t = \frac{\pi}{2}$ і $t = \frac{3\pi}{2}$, тобто є **кратною**, як і слід було очікувати.

2) Є випадки, коли параметричне задання природно випливає із самого походження кривої. Розглянемо, як приклад, **гвинтову лінію**. Походження її можна собі уявити так. Нехай деяка точка M, що знаходилася спочатку в A (рис. 229.2), обертається рівномірно навколо осі z (скажімо, за годинниковою стрілкою) і одночасно бере участь у рівномірному поступальному русі паралельно цієї осі (припустимо, у додатному напрямку). Траєкторія точки M і називається **гвинтовою лінією**. За параметр, що визначає положення точки M, можна прийняти кут t між віссю x та

nebayduzhi.math@gmail.com

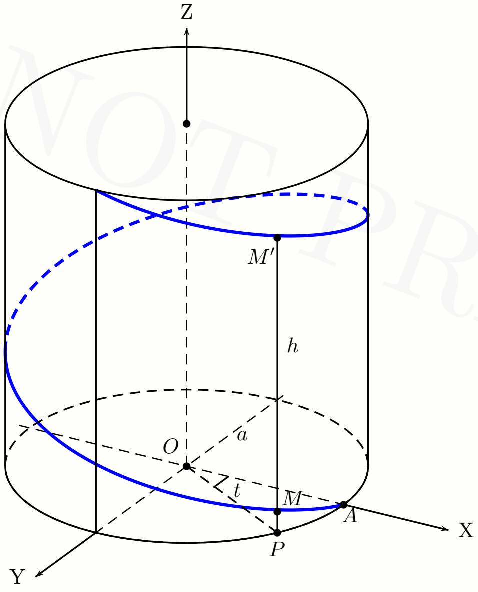


Рис. 229.2

проєкцією OP відрізка OM. Координати x і y точки M будуть ті ж, що й у точці P, тож $x = a\cos t$ і $y = a\sin t$, де a є радіус кола, що описує точка P. Що ж до вертикального переміщення z, то воно зростає пропорційно куту повороту t (бо поступальний рух і обертання обидва відбуваються рівномірно), тобто $z = ct$. Остаточно параметричні рівняння гвинтової лінії будуть

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = ct. \tag{229.1}$$

Отримана гвинтова лінія називається **лівою**; при правій системі координатних осей ті ж самі рівняння задавали б **праву** гвинтову лінію.

Легко виключити з рівнянь (229.1) параметр t і перейти до явного задання, наприклад, знайшовши t з останнього рівняння і підставивши його вираз у перші два, отримаємо

$$x = a\cos\frac{z}{c}, \quad y = a\sin\frac{z}{c}.$$

3) Розглянемо **сферичну** поверхню радіуса R з центром в початку координат (рис. 229.3). Її неявне рівняння буде, як відомо,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Бажаючи отримати її звичайне **параметричне** задання, проведемо “екваторіальний” переріз AKA', а через “полюси” P, P' і точку M — “меридіан” $PMKP'$. Положення точки M на сфері може бути визначено кутами $\varphi = \angle POM$ і $\theta = \angle AOK$. Маємо

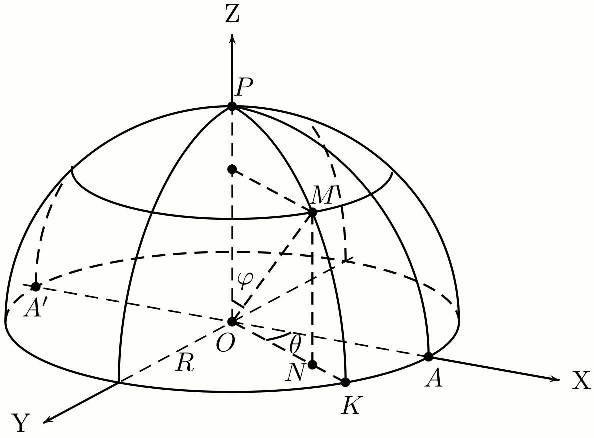


Рис. 229.3

$z = NM = R\cos\varphi$. Потім $ON = R\sin\varphi$, а через ON координати x і y (ті ж для M, що і для N) виразяться так: $x = ON\cos\theta$, $y = ON\sin\theta$. Збираючи всі ці результати, остаточно параметричні рівняння поверхні сфери отримаємо у вигляді:

$$x = R\sin\varphi\cos\theta, \quad y = R\sin\varphi\sin\theta, \quad z = R\cos\varphi,$$

причому кут φ достатньо змінювати від 0 до π, а кут θ — від 0 до 2π.

Однак, відповідність між точками сферичної поверхні та точками прямокутника $[0,\pi;\ 0,2\pi]$ на лощині $\varphi\theta$ не буде взаємно однозначна: значення $\theta = 0$ і $\theta = 2\pi$ приводять до одних і тих же точок поверхні і, крім того, при $\varphi = 0$ $(\varphi = \pi)$ **хоч би яке було значення** θ, виходить лише одна точка — полюс P (P').

Якщо φ замінити кутом $\lambda = \frac{\pi}{2} - \varphi$, що змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а θ змінювати між $-\pi$ і π, то ми прийдемо до звичних **географічних координат**: широті і довготі.

Для матриці частинних похідних

$$\begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta & R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi \\ -R\sin\varphi\sin\theta & R\sin\varphi\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

всі визначники

$$R^2\sin^2\varphi\cos\theta, \quad R^2\sin^2\varphi\sin\theta, \quad R^2\sin\varphi\cos\varphi$$

дорівнюють разом нулю при $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi$. Однак очевидно, що обидва “полюси” представляють особливість тільки для **цього** аналітичного задання сфери.

Легко побачити, що одне сімейство координатних ліній на сфері складеться з **меридіанів** $(\theta = \text{const})$, а інше — з **паралельних кіл** $(\varphi = \text{const})$.

nebayduzhi.math@gmail.com

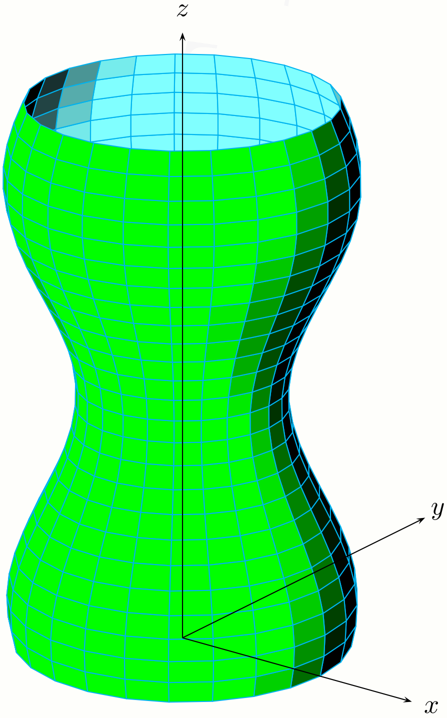


Рис. 229.4

4) Можна узагальнити попередній приклад так. Нехай у площині xz задана крива своїми параметричними рівняннями

$$x = \varphi(u), \quad z = \psi(u), \tag{229.2}$$

причому $\varphi(u) \geqslant 0$. Станемо обертати її, як тверде тіло, навколо осі z (рис. 229.4). Якщо через v позначити кут повороту, то рівняння отримуваної **поверхні обертання** напишуться у вигляді

$$x = \varphi(u)\cos v, \quad y = \varphi(u)\sin v, \quad z = \psi(u) \quad (0 \leqslant v \leqslant 2\pi).$$

Якщо в площині xz взяти півколо

$$x = R\sin u, \quad z = R\cos u$$

і обертати його навколо осі z, то ми отримаємо параметричне задання побудованої таким способом сферичної поверхні у колишньому вигляді (з точністю до позначень).

Залишаємо читачеві переконатися в тому, що особливими точками для поверхні обертання можуть бути лише точки на осі обертання, або точки, отримані при обертанні особливих точок первісної кривої.

Координатними лініями і тут є різні положення первісної (меридіани) та паралельні кола.

5) Якщо до **обертання** кривої (229.2) приєднати ще **поступальний** рух паралельно осі обертання, то (припускаючи, що обидва рухи відбуваються рівномірно) отримаємо загальну **гвинтову поверхню**

$$x = \varphi(u)\cos v, \quad y = \varphi(u)\sin v, \quad z = \psi(u) + cv.$$

Візьмемо, зокрема, додатну частину осі x за первісну криву

$$x = u, \quad z = 0 \quad (u \geqslant 0).$$

Піддавши її гвинтовому руху, прийдемо до **звичайної гвинтової поверхні**

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = cv.$$

Для загальної гвинтової поверхні одне сімейство координатних ліній складається з різних положень первісної ($v = \text{const}$), а інша — з гвинтових ліній ($u = \text{const}$).

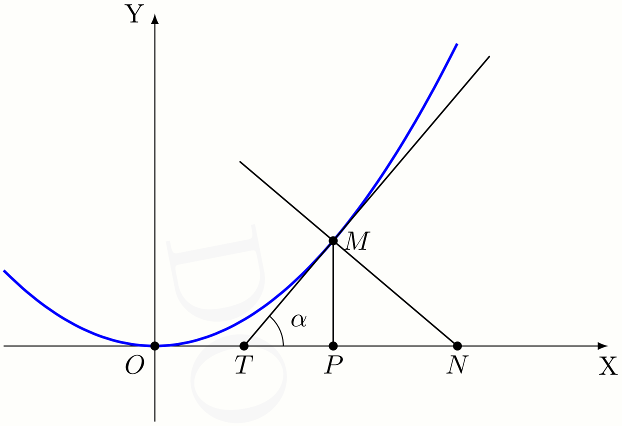


Рис. 230.1

7.2. Дотична і дотична площина

230. Дотична до плоскої кривої у прямокутних координатах

Поняття **дотичної** ми вже бачили не раз (дивіться, наприклад, розд. 91). Крива, задана явним рівнянням

$$y = f(x),$$

де f — неперервна функція з неперервною похідною, в кожній своїй точці (x, y) має дотичну, кутовий коефіцієнт якої $\operatorname{tg}\alpha$ виражається формулою

$$\operatorname{tg}\alpha = y'_x = f'(x).$$

Отже, рівняння дотичної має вигляд

$$Y - y = y'_x(X - x). \tag{230.1}$$

Тут (як і нижче) X, Y означають поточні координати дотичної прямої, а x, y — координати точки дотику.

Легко отримати і рівняння **нормалі**, тобто прямої, що проходить через точку дотику перпендикулярно до дотичної:

$$Y - y = -\frac{1}{y'_x}(X - x) \quad \text{або} \quad X - x + y'_x(Y - y) = 0. \tag{230.2}$$

Додатково разом з дотичною та нормаллю розглядають деякі відрізки — саме відрізки TM і MN та їх проєкції TP і PN на вісь x (рис. 230.1). Останні називаються, відповідно, **піддотичною** і **піднормаллю** і позначаються через *sbt* (*subtangens*) і *sbn* (*subnormal*). Вважаючи в рівняннях (230.1) і (230.2) $Y = 0$, легко обчислити, що

$$sbt = TP = \frac{y}{y'_x}, \quad sbn = PN = yy'_x. \tag{230.3}$$

Тоді з трикутників MPT і MPN визначаться і довжини **відрізків дотичної та нормалі**

$$t = TM = \left|\frac{y}{y'_x}\sqrt{1+y'^2_x}\right|, \quad n = MN = \left|y\sqrt{1+y'^2_x}\right|, \tag{230.4}$$

У випадку неявного завдання кривої

$$F(x, y) = 0$$

в околі її **звичайної** точки $M(x, y)$ можна уявити собі криву задану явним рівнянням. Якщо у точці M, наприклад, $F_y(x, y) \neq 0$, то крива виразиться рівнянням вигляду $y = f(x)$, де функція f неперервна і має неперервну похідну. Звідси зрозуміло, що для кривою існує в точці M дотична, та її рівняння може бути представлене у формі (230.1). Але ми знаємо (209.2), що в цьому випадку

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)};$$

підставляючи, після простих перетворень отримаємо цілком симетричне відносно x і y рівняння дотичної

$$F'_x(x, y)(X - x) + F'_y(x, y)(Y - y) = 0. \tag{230.5}$$

До того ж результату прийдемо і у випадку, якщо $F'_y = 0$ у точці M, але $F_x \neq 0$. Лише в **особливій** точці це рівняння втрачає сенс, і відносно дотичної, без додаткового дослідження (розд. 236), тут нічого сказати не можна.

Рівняння нормалі для даного випадку, очевидно, буде таке:

$$F'_y(x, y)(X - x) - F'_x(x, y)(Y - y) = 0.$$

Нарешті, припустимо, що крива задана параметрично:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Ми бачили, якщо $\varphi'(t) \neq 0$, то дотична до кривої існує і має кутовий коефіцієнт

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'_t}{x'_t} \tag{230.6}$$

(106.5). Рівняння дотичної може бути написано так:

$$Y-y=\frac{y'_t}{x'_t}(X-x) \quad \text{або} \quad \frac{X-x}{x'_t}=\frac{Y-y}{y'_t}.$$

У останній формі рівняння годиться і у випадку, коли $x'_t=0$, але $y'_t\neq 0$. (При цьому, як завжди домовляються в аналітичній геометрії, якщо в пропорції $\frac{X-x}{a}=\frac{Y-y}{b}$ один з наступних членів є 0, то це означає просто, що дорівнює 0 і відповідний попередній член.) Лише у **особливій** точці, де і $x'_t=0$, і $y'_t=0$, рівняння втрачає сенс, і питання дотичної залишається відкритим (розд. 237).

Іноді зручно, помноживши обидва знаменники на множник dt, писати рівняння дотичної у вигляді

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}. \tag{230.7}$$

231. Приклади

1) **Парабола:**

$$y^2=2px.$$

Диференціюючи цю рівність (вважаючи y функцією від x), отримаємо $yy'_x=p$. Отже, (230.3), **піднормаль параболи є стала величина.** Звідси випливає простий спосіб побудови нормалі (а з нею і дотичної) до параболи. За формулою (230.4), для відрізка нормалі до параболи маємо вираз

$$n=\sqrt{y^2+p^2}.$$

2) **Еліпс** (рис. 231.1):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

За формулою (230.5) маємо таке рівняння дотичної

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)=0.$$

Враховуючи саме рівняння еліпса, можна останнє рівняння переписати у більш простому вигляді

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}=1.$$

Вважаючи тут $Y=0$, знайдемо $X=\frac{a^2}{x}$. Отже, точка T перетину дотичної з віссю x не залежить ні від y, ні від b. Дотичні до **різних** еліпсів, що відповідають різним значенням b, в їх точках, що мають абсцису x, всі проходять через одну і ту саму

nebayduzhi.math@gmail.com

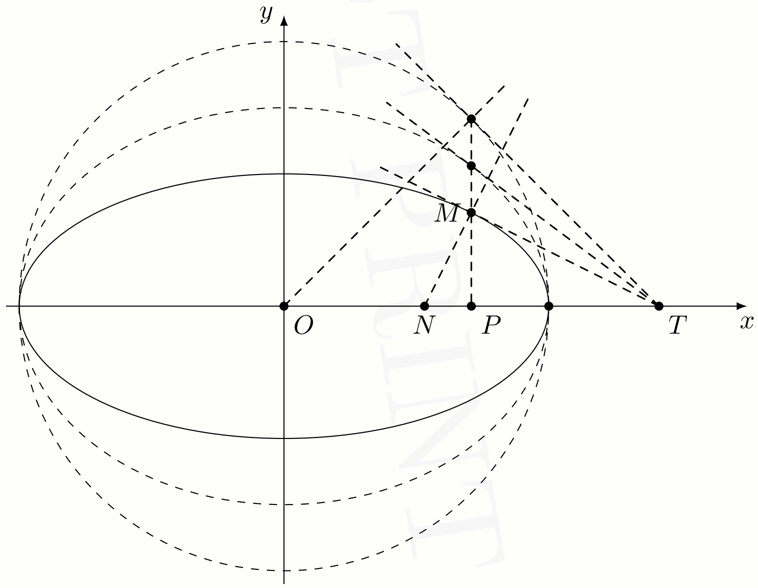


Рис. 231.1

точку T на осі x. Оскільки при $b = a$ виходить коло, для якого дотична будується просто, то точка T відразу визначається, і це приводить до простого способу побудови дотичної до еліпса, ясного з рис. 231.1. (Ця властивість дотичних до еліпса безпосередньо пов'язана з тим фактом, що еліпс може розглядатися як ортогональна проєкція деякого кола радіуса a, що лежить в похилій площині.)

Легко визначити довжину відрізка нормалі для еліпса:

$$n = \sqrt{\frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^2}}.$$

Такий же вираз виходить і у випадку **гіперболи**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3) **Астроїда** (рис. 224.2):

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Рівняння дотичної

$$x^{-\frac{1}{3}}(X - x) + y^{-\frac{1}{3}}(Y - y) = 0$$

за допомогою самого рівняння кривої може бути перетворене до вигляду

$$\frac{X}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y}{y^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{2}{3}} \quad \text{або} \quad \frac{X}{a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y}{a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}} = 1.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Останнє рівняння є “рівнянням у відрізках”. Отже, дотична відсікає на осях відрізки $a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$ і $a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$. Звідси легко отримати одну цікаву властивість астроїди. Позначивши через τ довжину відрізка дотичної **між осями**, маємо

$$\tau^2 = a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} = a^2.$$

і

$$\tau = a = \mathrm{const}\,.$$

Отже, **осі симетрії астроїди на всіх дотичних відсікають рівні відрізки.**

4) **Циклоїда** (рис. 225.1):

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(t - \cos t).$$

Ми мали вже (пр. 225.6) рівність $y'_x = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, тобто

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right),$$

і можна прийняти $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$.

Згадаємо (рис. 225.1), що $t = \angle MDN$, тож $\angle MEN = \frac{t}{2}$. Якщо продовжити пряму EM до перетину в T з віссю x, то $\angle ETN = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} = \alpha$. Отже, пряма ME, що з’єднує точку циклоїди з вищою точкою кола, що котиться (у відповідному положенні), і буде дотичною. Звідси зрозуміло, що пряма MN буде нормаллю.

Згодом нам буде корисним вираз для відрізка n нормалі, який легко одержати з прямокутного трикутника MEN. Саме,

$$n = MN = 2a\sin\frac{t}{2}.$$

5) **Епіциклоїда** (рис. 225.2):

$$x = a[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t],$$
$$y = a[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t].$$

Написавши вирази для похідних x'_t і y'_t у вигляді

$$x'_t = 2am(1+m)\sin\frac{t}{2}\cos\left(m + \frac{1}{2}\right)t,$$
$$x'_t = 2am(1+m)\sin\frac{t}{2}\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t,$$

знайдемо, що

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \operatorname{tg}\left(m + \frac{1}{2}\right) t.$$

Звідси $\alpha = \left(m + \frac{1}{2}\right) t$.

Якщо з'єднати (рис. 225.2) точку D з M, то ця пряма становитиме з віссю x як раз такий кут:

$$\angle xTD = \angle DOT + \angle ODT = mt + \frac{t}{2}.$$

Отже, DT є дотичною в точці M, а MB буде нормаллю.

6) **Евольвента круга** (рис. 225.8):

$$x = a(t \sin t + \cos t), \quad y = a(\sin t - t \cos t)$$

Тут

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'_t}{x'_t} = \operatorname{tg} t, \quad \text{звідки} \quad \alpha = t.$$

Отже, дотична MT паралельна радіусу OB, та BM є нормаль до нашої кривої.

Зауваження. Результати прикладів 4), 5), 6) можна було б отримати без жодних викладок, виходячи з **кінематичних** міркувань. Коли одна крива котиться по іншій, точка дотику служить щоразу миттєвим центром для фігури, що рухається, так що нормаль до траєкторії будь-якої її точки проходить через цю точку дотику.

232. Дотична у полярних координатах

Якщо крива задана полярним рівнянням $r = f(\theta)$, то, переходячи звичайним чином до прямокутних координат, отримуємо параметричне задання кривої у вигляді

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta,$$

причому роль параметра відіграє θ.

У такому випадку, за загальною формулою (230.6),

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{r'_\theta \sin\theta + r\cos\theta}{r'_\theta \cos\theta - r\sin\theta}.$$

Однак, якщо крива досліджується у полярних координатах, зазвичай положення дотичної визначають не кутом θ з полярною віссю, а кутом ω з продовженим радіусом-вектором (рис. 218.1, рис. 232.1). Ми мали вже просту формулу (218.1)

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r}{r'_\theta}, \tag{232.1}$$

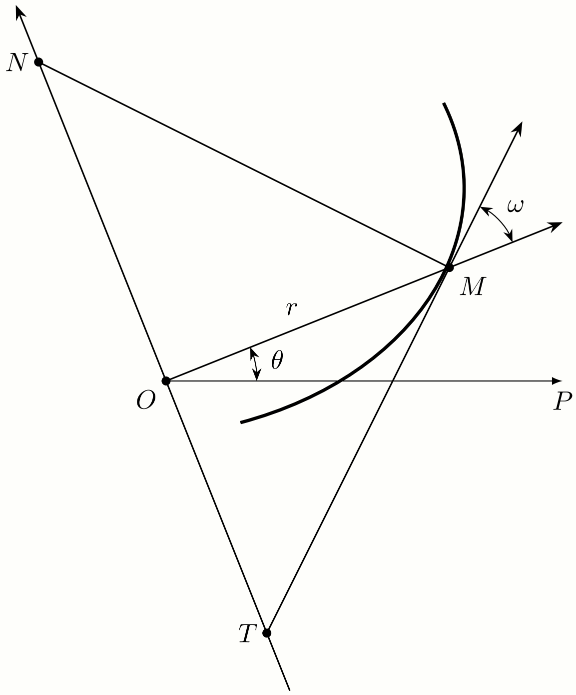


Рис. 232.1

Так само замість відрізків t, n, sbt, sbn, про які йшлося у розд. 230, тут розглядають інші відрізки. Провівши через полюс O вісь, перпендикулярну до радіуса-вектора (ця вісь обертається при переміщенні точки), продовжують дотичну та нормаль до перетину з нею, відповідно, у точках T і N. Тоді, відрізки TM та MN називаються **полярними** відрізками дотичної та нормалі, а їх проєкції TO і ON на згадану вісь називаються **полярними** піддотичною і піднормаллю. Позначати їх будемо, як і раніше, але поміщаючи внизу літеру p. Легко отримати довжини цих відрізків, використовуючи формулу (232.1):

$$sbt_p = TO = r\operatorname{tg}\omega = \frac{r^2}{r'_\theta}, \quad sbn_p = ON = r\operatorname{ctg}\omega = r'_\theta,$$

а звідси вже

$$t_p = TM = \frac{r}{r'_\theta}\sqrt{r^2 + r'^2_\theta}, \quad n_p = MN = \sqrt{r^2 + r'^2_\theta}.$$

233. Приклади

1) **Спіраль Архімедеса** (рис. 226.1):

$$r = a\theta.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

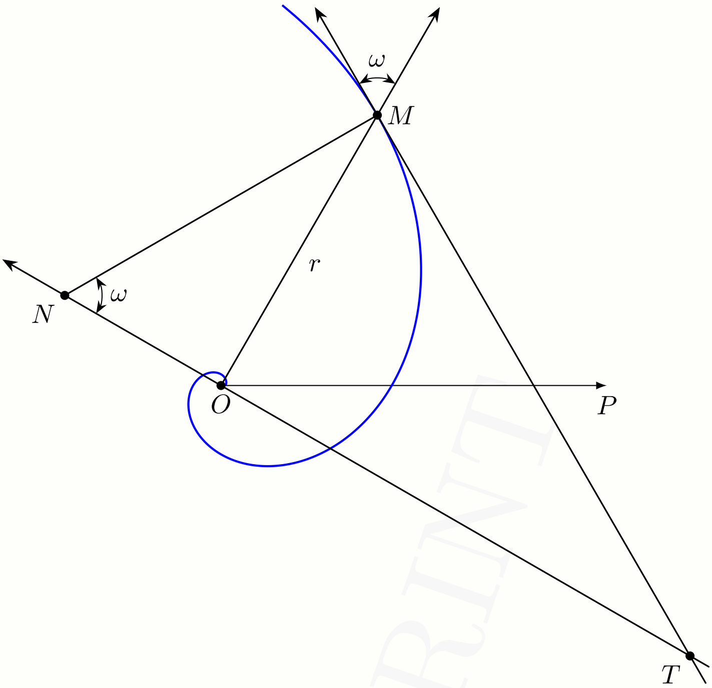


Рис. 233.1

Оскільки $r'_\theta = a$, то $sbn_p = a = \text{const}$. Це дає змогу відразу встановити положення точки N, а з нею і нормалі та дотичної.

Зауважимо, що $\operatorname{tg}\omega = \theta$, так що при $\theta \to \infty$ і $\operatorname{tg}\omega \to \infty$, тобто кут $\omega \to \frac{\pi}{2}$.

2) **Гіперболічна спіраль** (рис. 226.2):

$$r = \frac{a}{\theta}.$$

На цей раз $r'_\theta = -\frac{a}{\theta^2}$, $sbt_p = -a = \text{const}$, що також полегшує побудову дотичної.

3) **Логарифмічна спіраль** (рис. 233.1):

$$r = a\,e^{m\theta}.$$

Маємо $r'_\theta = ma\,e^{m\theta}$, так що $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{1}{m} = \text{const}$, і сам кут $\omega = \text{const}$. Отже, логарифмічна спіраль має ту чудову властивість, що кут між радіусом-вектором та дотичною зберігає сталу величину. Іншими словами, **логарифмічна спіраль перетинає всі свої радіуси-вектори під постійним кутом.** Цією властивістю вона нагадує коло, яке також перетинає радіуси-вектори, що виходять із центру, під постійним (саме під прямим) кутом. (Втім, і коло можна розглядати як окремий випадок логарифмічної спіралі, що відповідає $m = 0$.)

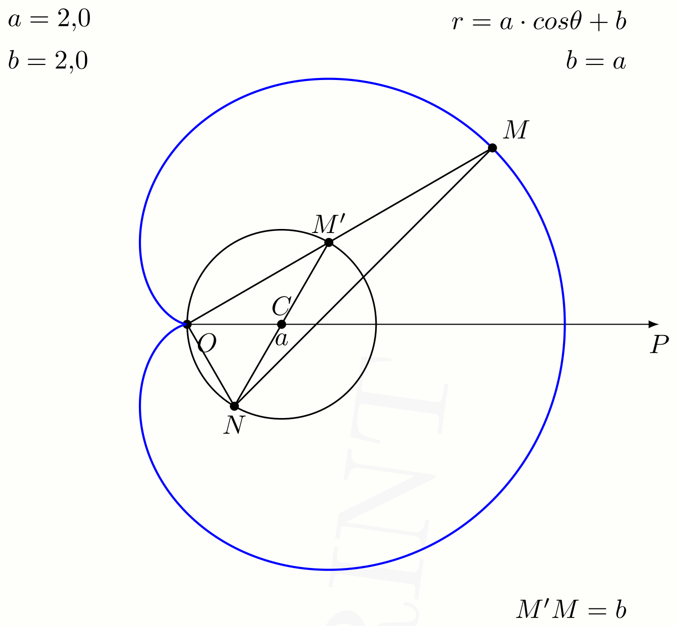


Рис. 233.2

4) **Равлики Паскаля** (рис. 233.2):

$$r = a\cos\theta + b.$$

Зазначимо, що $sbn_p = r'_\theta = -a\sin\theta$ виявляється незалежною від b. Отже, якщо взяти точки, що лежать на одному промені (проведеному з полюса), і належать до різних равликів, що відповідають різним значенням b, то для всіх цих точок полярна піднормаль буде спільна, тобто точка N — одна й та сама. Але при $b = 0$ виходить коло, для якого побудова нормалі очевидна; тоді легко побудувати нормаль і для будь-якого з равликів (рис. 233.2). З трикутника MON обчислюється полярна нормаль:

$$n_p = \sqrt{a^2 + 2ab\cos\theta + b^2}.$$

Особливо простий вираз полярної нормалі для **кардіоїди** ($b = a$, саме цей окремий випадок і зображений на рис. 233.2):

$$n_p = 2a\cos\frac{\theta}{2}.$$

5) **Лемніската Я. Бернуллі** (рис. 226.8):

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

Диференціюємо цю рівність, вважаючи r функцією від θ; отримаємо

$$r \cdot r'_\theta = -2a^2 \sin 2\theta.$$

Розділивши почленно ці дві рівності, зважаючи на (232.1), знайдемо

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{r}{r'_\theta} = -\operatorname{ctg} 2\theta,$$

звідки $\omega = 2\theta + \frac{\pi}{2}$. Позначаючи через α і β кути нахилу дотичної та нормалі, маємо

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = \omega + \theta = 3\theta + \frac{\pi}{2},$$

отже, $\beta = 3\theta$: **кут нахилу нормалі до лемніскати дорівнює потрійному полярному куту** точки дотику. Це дає простий спосіб побудови нормалі.

234. Дотична до кривої у просторі. Дотична площина до поверхні

1. У випадку просторової кривої, означення дотичної залишається буквально те саме, що і для плоскої кривої (розд. 91). Обмежимося припущенням, що крива задана **параметрично**:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

Візьмемо деяке значення t і, тим самим, визначимо точку $M(x, y, z)$ на кривій; нехай це буде **неособлива і проста** точка (розд. 223). Надамо t приріст Δt, тоді новому значенню параметра буде відповідати інша точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Рівняння січної MM_1 матимуть вигляд

$$\frac{X - x}{\Delta x} = \frac{Y - y}{\Delta y} = \frac{Z - z}{\Delta z},$$

де X, Y, Z — поточні координати. Геометричний зміст цих рівнянь не зміниться, якщо всі знаменники розділимо на Δt:

$$\frac{X - x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{Y - y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{Z - z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Якщо ці рівняння при $\Delta t \to 0$ зберігають певне значення, то цим буде доведено існування **граничного положення** січної, тобто **дотичної**. Але при граничному переході ми отримуємо

$$\frac{X - x}{x'_t} = \frac{Y - y}{y'_t} = \frac{Z - z}{z'_t}, \tag{234.1}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

і ці рівняння справді виражають пряму, оскільки не всі знаменники дорівнюють нулю. Отже, у кожній **звичайній** точці кривої дотична існує і задається цими рівняннями. Для **особливої** точки питання щодо дотичної залишається відкритим.

Зауваження. Ми переходили до границі у рівняннях січної при $\Delta t \to 0$; покажемо, що це **рівнозначно** припущенню, що $MM_1 \to 0$. Зважаючи на неперервність функцій φ, ψ, χ, з $\Delta t \to 0$ виходить, що і

$$\overline{MM_1} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \to 0.$$

Для доведення зворотного твердження візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. Оскільки $\overline{MM_1}$ є неперервна функція від Δt, то при $|\Delta t| \geqslant \varepsilon$ ця функція має найменше значення δ, очевидно, додатне (оскільки взята точка за припущенням **проста**, тобто не виходить за жодним значенням параметра, відмінному від t). В такому випадку при $\overline{MM_1} < \delta$ необхідно $|\Delta t| < \varepsilon$, що й потрібно було довести.

Іноді рівняння (234.1) зручно писати як

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz},$$

яке випливає з (234.1) множенням усіх знаменників на dt.

Якщо через α, β, γ позначати кути між дотичною та осями координат, то напрямні косинуси $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ запишуться так:

$$\cos\alpha = \frac{x'_t}{\pm\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y'_t}{\pm\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z'_t}{\pm\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}}.$$

Вибір знака перед радикалом відповідає вибору напрямку дотичної.

Питання про дотичну до кривої, заданої неявними рівняннями $F(x, y, z) = 0$ і $G(x, y, z) = 0$, ми розглянемо нижче.

2. Нехай поверхня задана явним рівнянням $z = f(x, y)$. Ми у розд. 180 дали означення **дотичної площини** та, припускаючи диференційовність функції $f(x, y)$, знайшли рівняння цієї площини (180.2):

$$Z - z = f'_x(x, y)(X - x) + f'_y(x, y)(Y - y).$$

(Ми тут припускаємо існування та неперервність частинних похідних, отже, диференційовність очевидна (розд. 179).)

Зазвичай позначають

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = q$$

і пишуть рівняння дотичної площини так:

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \tag{234.2}$$

Якщо $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ є напрямні косинуси **нормалі** до поверхні (так називають перпендикуляр до дотичної площини в точці дотику), то для них маємо вирази

$$\cos\lambda = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\mu = \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\nu = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}; \tag{234.3}$$

подвійний знак ($\pm$) перед радикалом відповідає двом протилежним напрямкам нормалі.

Проведемо тепер на поверхні через розглянуту точку довільну криву

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

так що тотожно відносно t буде

$$\chi(t) = f(\varphi(t),\ \psi(t)).$$

Диференціюємо цю тотожність за t (розд. 181):

$$\chi'(t) = p\varphi'(t) + q\psi'(t).$$

Візьмемо дотичну до кривої в точці у формі (234.1). Якщо, нарешті, у попередній рівності замінити похідні φ', ψ', χ' пропорційними їм (234.1) різницями $X-x$, $Y-y$, $Z-z$, то прийдемо до (234.2). Отже, дотична (234.1) усіма точками лежить у дотичній площині (234.2). Отже, ми можемо тепер *визначити дотичну площину до поверхні у заданій на ній точці як таку площину, в якій лежать дотичні до усіх кривих, проведених по поверхні через цю точку* (частково про це вже йшлося у розд. 180).

Якщо поверхня задана **неявним** рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то, припускаючи $F'_z \neq 0$ в точці, в її околі можна задати поверхню і **явним** рівнянням $z = f(x, y)$, так що існування дотичної площини забезпечене. Оскільки в цьому випадку

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z},$$

то, підставляючи ці значення p і q у рівняння (234.2), легко перетворити його до вигляду

$$F'_x(x, y, z)(X - x) + F'_y(x, y, z)(Y - y) + F'_z(x, y, z)(Z - z) = 0. \tag{234.4}$$

Очевидно, в такому ж вигляді представиться рівняння дотичної площини і у випадку, якщо $F'_z = 0$, але яка-небудь з двох інших похідних F'_x або F'_y відмінна від 0.

nebayduzhi.math@gmail.com

Лише в **особливій** точці це рівняння втрачає сенс (і питання про дотичну площину залишається відкритим).

3. Тепер легко знайти дотичну до кривої, заданої двома неявними рівняннями:

$$F(x,y,z)=0,\quad G(x,y,z)=0,$$

тобто що є перетином двох відповідних поверхонь. Якщо розглянута на кривій точка звичайна, то в її околі крива може бути виражена і явними рівняннями (розд. 227), отже існування дотичної забезпечене. Ця дотична, очевидно, лежить у перетині дотичних площин до згаданих двох поверхонь і, отже, виражається рівняннями

$$\begin{cases} F'_x(X-x)+F'_y(Y-y)+F'_z(Z-z)=0, \\ G'_x(X-x)+G'_y(Y-y)+G'_z(Z-z)=0. \end{cases} \tag{234.5}$$

(Оскільки у звичайній точці для матриці коефіцієнтів хоч один із визначників відмінний від 0, то цими рівняннями, справді, визначиться пряма.)

4. Повертаючись до поверхні, перейдемо, нарешті, до випадку, коли поверхня виражається параметричними рівняннями:

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v),\quad z=\chi(u,v).$$

Знову обмежуємося **звичайною (і простою)** точкою; оскільки (розд. 228) в її околі поверхня може бути виражена і **явним** рівнянням, то існування дотичної площини забезпечене. Рівняння її може бути написано у вигляді

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0, \tag{234.6}$$

де коефіцієнти A, B, C ще потрібно знайти.

Якщо в рівняннях поверхні закріпити за v значення, що відповідає вибраній точці, вийдуть рівняння координатної лінії ("кривої (v)"), що проходить через цю точку. Дотична до цієї кривої у зазначеній точці виразиться рівняннями (234.1)

$$\frac{X-x}{x'_u}=\frac{Y-y}{y'_u}=\frac{Z-z}{z'_u}.$$

Аналогічно, фіксуючи u, отримаємо координатну лінію іншого сімейства ("криву (u)"), що проходить через дану точку і що має у ній дотичну

$$\frac{X-x}{x'_v}=\frac{Y-y}{y'_v}=\frac{Z-z}{z'_v}.$$

Оскільки обидві ці дотичні повинні лежати в дотичній площині (234.6), то виконуються умови

$$\begin{aligned} Ax'_u + By'_u + Cz'_u &= 0,\\ Ax'_v + By'_v + Cz'_v &= 0. \end{aligned}$$

У такому разі коефіцієнти A, B, C повинні бути пропорційні визначникам матриці

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix}.$$

Зазвичай їх вважають **рівними** цим визначникам:

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}. \tag{234.7}$$

Тепер рівняння дотичної площини найпростіше написати за допомогою визначника:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0; \tag{234.8}$$

у звичайній точці воно, справді, виражає площину.

Напрямні косинуси нормалі будуть

$$\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\mu &= \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\nu &= \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned} \tag{234.9}$$

235. Приклади

1) Розглянемо **гвинтову лінію** (рис. 229.2)

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = ct.$$

В цьому випадку

$$x'_t = -a\sin t, \quad y'_t = a\cos t, \quad z'_t = c,$$

і рівняння дотичної мають вигляд

$$\frac{X-x}{-a\sin t}=\frac{Y-y}{a\cos t}=\frac{Z-z}{c}.$$

Напрямні косинуси дотичної

$$\cos\alpha=-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \cos\beta=\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \cos\gamma=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Зазначимо, що $\cos\gamma=\mathrm{const}$, отже, і $\gamma=\mathrm{const}$. Якщо уявити собі гвинтову лінію навернену на прямий круглий циліндр, то можна сказати, що гвинтова лінія перетинає всі твірні цього циліндра під постійним кутом. (Якщо поверхню циліндра розрізати по твірній і розгорнути, то гвинтова лінія перетвориться на пряму, яка всі вертикалі, природно, перетинає під тим самим кутом. Це міркування робить попередній результат цілком очевидним.)

2) **Еліпсоїд:**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Дотична площина виходить за формулою (234.4), з урахуванням самого рівняння еліпсоїда:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

3) **Конус (другого порядку):**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Дотична площина:

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-\frac{zZ}{c^2}=0.$$

У вершині $(0,0,0)$ конуса, яка є **особливою** точкою, це рівняння втрачає сенс, і дотичної площини немає.

4) **Крива Вівіані** (рис. 229.1):

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=R^2,\\ x^2+y^2\qquad&=Rx. \end{aligned}$$

Дотична виражається рівняннями (234.5)

$$\begin{aligned} xX+yY+zZ&=R^2,\\ (2x-R)X+2yY&=Rx. \end{aligned}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Ці рівняння перестають виражати пряму лише у особливій точці $(R, 0, 0)$.

5) **Гвинтова поверхня:**

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = cv.$$

За формулою (234.8) рівняння дотичної площини буде

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & c \end{vmatrix} = 0.$$

З урахуванням рівнянь поверхні це рівняння може бути спрощено так:

$$\sin v \cdot X - \cos v \cdot Y + \frac{u}{c} \cdot Z = uv.$$

236. Особливі точки плоских кривих

Тут ми зупинимося докладніше на поведінці кривої, заданої неявним рівнянням

$$F(x, y) = 0,$$

поблизу її **особливої** точки (x_0, y_0). Ми хочемо лише познайомити читача з основними типами особливих точок. При цьому функцію F ми припускаємо неперервною і що має неперервні похідні перших двох порядків. Без зменшення загальності, можна вважати $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; це відповідає просто перенесенню початку координат у досліджувану точку. Отже, маємо

$$F(0,0) = 0, \quad F'_x(0,0) = 0, \quad F'_y(0,0) = 0.$$

Введемо позначення

$$a_{11} = F''_{x^2}(0,0), \quad a_{12} = F''_{xy}(0,0), \quad a_{22} = F''_{y^2}(0,0).$$

Припускаючи, що з чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} хоч одне не нуль, ми станемо класифікувати можливості, що представляються, залежно від знака виразу $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. **Дослідження цього розділу тісно примикають до досліджень розд. 197.**

1. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$.

У цьому випадку, як ми знаємо, функція $F(x, y)$ має в початковій точці екстремум. Значить, у досить малому околі цієї точки $F > 0$ або $F < 0$ (але не в початковій точці,

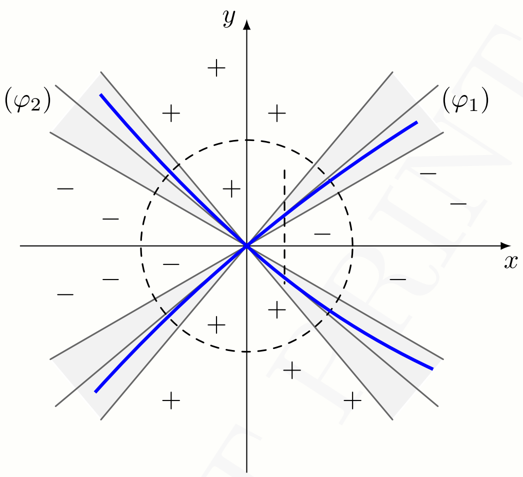


Рис. 236.1

де функція дорівнює 0). Інакше кажучи, **у згаданому околі немає жодної точки нашої кривої**, крім початкової: ця остання виявляється **ізольованою точкою** кривої.

Приклади, що ілюструють цей випадок:

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{або} \quad (x^2 + y^2)(x + y - 1) = 0.$$

Початкова точка належить до обох кривих і для обох є **ізольованою**. Але, тоді як перша крива **уся** складається з однієї точки, друга, крім неї, має ще пряму $x + y = 1$, що не проходить через початок.

2. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$.

Як і в розд. 197, в околі початкової точки можна задати $F(x, y)$ у такому вигляді:

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + \alpha_{22}y^2),$$

де всі $\alpha \to 0$ при $x \to 0$, $y \to 0$, або якщо ввести полярні координати ϱ, φ:

$$F(x, y) = \frac{\varrho^2}{2}(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi + \\ + \alpha_{11}\cos^2\varphi + 2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi + \alpha_{22}\sin^2\varphi).$$

У цьому випадку, якщо припустити ще, що $a_{22} \neq 0$, то тричлен $a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2$ має різні дійсні корені t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ і розкладається на множники $a_{22}(t - t_1)(t - t_2)$. Припустимо, $\varphi_1 = \operatorname{arctg} t_1$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} t_2$, так що $t_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $t_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$. Тепер легко перетворити перший тричлен у дужках до вигляду

$$a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi = a_{22}\cos^2\varphi(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_1)(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi_2). \quad (236.1)$$

Звідси стає зрозуміло, що прямі, проведені через початок під кутами φ_1 і φ_2 до осі x (будемо для стислості називати їх прямими (φ_1) і (φ_2)) ділять площину на дві кутових області, в одній з яких згаданий тричлен зберігає знак плюс, а в іншій — знак мінус (рис. 236.1). (Цим ми дещо поглиблюємо сказане у розд. 197, 2): там нам достатньо було показати наявність двох прямих, на яких тричлен має різні знаки.)

Укладемо тепер прямі (φ_1) і (φ_2) всередину двох як завгодно вузьких кутових областей — двох пар кутів, що містяться, відповідно, між прямими $(\varphi_1-\varepsilon)$ і $(\varphi_1+\varepsilon)$ або $(\varphi_2-\varepsilon)$ і $(\varphi_2+\varepsilon)$ (ці кути на рис. 236.1 сірі). Взявши круг досить малого радіуса r_ε, навколо початку, можна стверджувати, що після виділення згаданих кутів, він розіб'ється на дві кутових області, у кожній з яких вже сама функція $F(x,y)$ зберігає певний знак: в одній плюс, а в іншій мінус (дивіться рисунок). Справді, оскільки при зміні кута поза проміжками $(\varphi_1-\varepsilon,\ \varphi_1+\varepsilon)$ і $(\varphi_2-\varepsilon,\ \varphi_2+\varepsilon)$ тричлен (236.1) не дорівнює 0, то він залишається за абсолютною величиною більшим деякого додатного числа m_ε. З іншого боку, для досить малого ϱ вираз $\alpha_{11}\cos^2\varphi+2\alpha_{12}\cos\varphi\sin\varphi+\alpha_{22}\sin^2\varphi$ за абсолютною величиною буде менше від m_ε. Звідси й випливає наше твердження (порівняйте з міркуванням в розд. 197, 1).

Розглянемо тепер сірий сектор круга, наприклад, той, який обмежений прямими $(\varphi_1-\varepsilon,\ \varphi_1+\varepsilon)$. Оскільки на цих прямих функція має протилежні знаки, то **на кожній вертикалі, що перетинає згаданий сектор, знайдеться точка, в якій** $F(x,y)$ **дорівнює** 0**,** тобто точка нашої кривої. Це випливає з відомої властивості неперервної функції (розд. 80), якщо застосувати її до функції $F(x,y)$ від y (при фіксованому x). (Порівняйте з доведенням теор. 206.1 про існування неявної функції.)

Отже, усередині кожної пари сірих секторів розташована гілка кривої, що проходить через початок, тоді як поза ними, у межах круга, точок кривої немає. Через довільність ε ясно, що на початку ці гілки дотикаються, відповідно, до прямих (φ_1) і (φ_2).

Щоправда, залишилося відкритим ще питання, чи єдина та точка у згаданому секторі, у якій $F(x,y)=0$. Якби їх знайшлося дві, то, за теоремою Ролля (теор. 111.1), між ними на тій самій вертикалі знайшлася б точка, де було б $F'_y(x,y)=0$. Отже, єдиність буде доведена, якщо ми доведемо, що принаймні у достатній близькості від початку така рівність неможлива.

Припустимо протилежне. Тоді матимемо $F'_y(x_n,y_n)=0$ для деякої послідовності точок $\{(x_n,y_n)\}$, де $x_n\to 0$ і $\dfrac{y_n}{x_n}\to \operatorname{tg}\varphi_1=t_1$. Застосуємо до функції $F'_y(x,y)$ формулу скінченних приростів (183.1):

$$0=F'_y(x_n,y_n)-F'_y(0,9)=F''_{xy}(\theta_n x_n,\theta_n y_n)\cdot x_n+F''_{y^2}(\theta_n x_n,\theta_n y_n)\cdot y_n$$

або

$$F''_{xy}(\theta_n x_n,\theta_n y_n)+F''_{y^2}(\theta_n x_n,\theta_n y_n)\cdot\frac{y_n}{x_n}=0.$$

Переходячи тут до границі, отримаємо остаточно $a_{12}+a_{22}t_1=0$ або $t_1=-\dfrac{a_{12}}{a_{22}}$, що

nebayduzhi.math@gmail.com

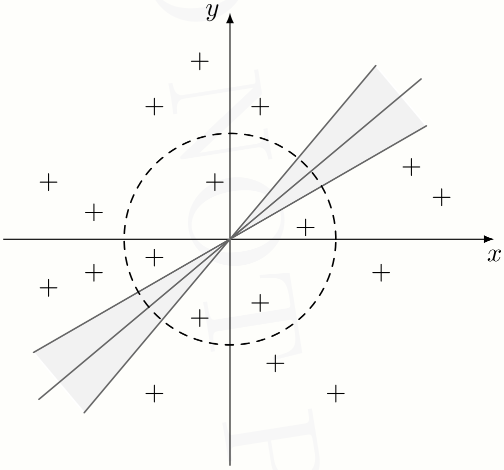


Рис. 236.2

невірно: таке значення t_1, могли б мати лише в тому випадку, якби корені тричлена $a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2$ були рівними.

Зі сказаного також випливає, що в достатній близькості від початку жодна точка згаданих двох гілок, крім самої початкової, вже не буде особливою.

Аналогічно вичерпується і випадок, коли $a_{22} = 0$, але $a_{11} \neq 0$ або $a_{11} = a_{22} = 0$, але $a_{12} \neq 0$; зазначимо лише, що в останньому випадку роль прямих (φ_1) і (φ_2) відіграють осі координат.

Отже, при зробленому припущенні $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ точка $(0, 0)$ виявляється **подвійною точкою** кривої: у ній перетинаються дві гілки кривої, кожна з яких у цій точці має свою дотичну. Кутові коефіцієнти цих дотичних визначаються завжди з рівняння $a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2 = 0$; лише якщо $a_{22} = 0$, слід вважати, що, крім скінченного кореня, воно має коренем і нескінченність.

Прикладами можуть бути вже знайомі нам криві:
$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0$ (**Лемніската Я. Бернуллі**, рис. 226.8),
$x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (**Лист Декарта**, рис. 224.3),
для яких початок і буде подвійною точкою. У першому випадку маємо $a_{11} = -4a^2$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 4a^2$, $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, тож дотичними в початковій точці служать бісектриси координатних кутів. У другому: $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = -3a$, $t_1 = 0$, $t_2 = \infty$, і дотичними служать осі координат.

3. $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.

Припустимо і тут, що $a_{22} \neq 0$. Квадратний тричлен $a_{11} + 2a_{12}t + a_{22}t^2$ в цьому випадку має **подвійний** корінь $t_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{22}}$. Вважаючи, як і вище, $\varphi_1 = \operatorname{arctg} t_1$, проведемо через початок пряму під цим кутом φ_1 до осі x. Помістимо її у кутову область між прямими $(\varphi_1 - \varepsilon)$ і $(\varphi_1 + \varepsilon)$ (на рис. 236.2 вона сіра). За допомогою міркувань, подібних до застосованих вище, можна встановити, що поза сірої області, але в достатній близькості до початку, функція $F(x, y)$ зберігає **певний** знак, однаковий з обох боків: плюс або мінус, залежно від того, чи буде $a_{22} > 0$ або $a_{22} < 0$. Тепер на прямих $(\varphi_1 - \varepsilon)$ і $(\varphi_1 + \varepsilon)$ функція має **однакові** знаки, і застосовувати теорему Коші не можна.

Ми не будемо заглиблюватися в дослідження цього випадку, що вимагає більш складних міркувань з залученням вищих похідних. Обмежимося вказівкою на основні можливості, які можуть тут зустрітися.

а) Поблизу початкової точки, крім неї самої, немає точок кривої: **ізольована точка** (як у випадку 1).

Приклади:

$$x^4 + y^2 = 0 \quad \text{або} \quad (x^4 + y^2)(x + y - 1) = 0.$$

Для обох “кривих” початок є ізольованою точкою.

б) В обох сірих кутах (у достатній близькості до початку) на кожній вертикалі лежать по дві точки нашої кривої, через початок проходять дві гілки кривої, що мають у ній спільну дотичну (φ_1): **подвійна точка** (як і у випадку 2).

Приклад:

$$x^4 - y^2 = 0, \quad \text{тобто} \quad y = \pm x^2$$

дві параболи, що в початковій точці дотикаються до осі x.

в) В одному із сірих кутів зовсім немає точок кривої, а в іншому — дві гілки, які ніби закінчуються в початковій точці, маючи в ній спільну дотичну (φ_1). Тут ми маємо справу з новим типом особливої точки — з *точкою повернення (або точкою загострення)*. Залежно від того, чи лежать обидві гілки по різні сторони від спільної дотичної або по одну сторону, розрізняють точки повернення **першого та другого** роду.

Прикладом кривої, що має на початку точку повернення першого роду може служити **напівкубічна парабола**, рис. 224.1:

$$y^2 - x^3 = 0.$$

Більш рідкий випадок точки повернення другого роду проілюструємо таким прикладом

$$x^5 - (y - x^2)^2 = 0$$

або

$$y = x^2 \pm x^2\sqrt{x} \quad (x \geqslant 0).$$

Обидві гілки в початковій точці дотикаються до осі x, розташовуючись (принаймні поблизу початку координат) над нею (рис. 236.3).

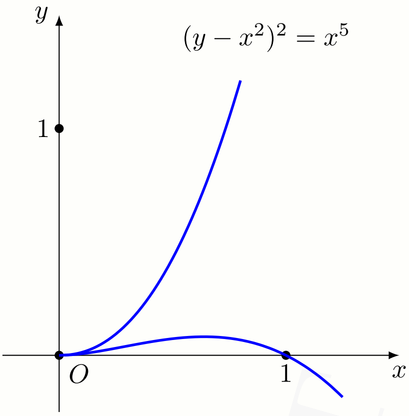


Рис. 236.3

Якщо $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$, то доводиться розглядати похідні вищих порядків. У цьому випадку можливі і складніші типи особливих точок (**потрійні** або взагалі **n-кратні** точки і так далі.).

237. Випадок параметричного задання кривої

Скажемо ще кілька слів про особливі точки плоских кривих, заданих **параметричними** рівняннями

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t).$$

Нехай при $t=t_0$ маємо

$$x_0'=\varphi'(t_0)=0 \quad \text{і} \quad y_0'=\psi'(t_0)=0,$$

але з похідних другого порядку x_0'' і y_0'' нехай хоч одна, наприклад x_0'', відмінна від нуля.

Проведемо січну через точки (x_0,y_0) і (x,y) кривої, що відповідають значенням t_0 і t параметра. Рівняння січної може бути написане так:

$$\frac{X-x_0}{x-x_0}=\frac{Y-y_0}{y-y_0}.$$

Але за формулою Тейлора з додатковим членом у формі Пеано, (124.7), оскільки $x_0'=y_0'=0$, маємо

$$x-x_0=\frac{1}{2}(x_0''+\alpha)(t-t_0)^2,$$
$$y-y_0=\frac{1}{2}(y_0''+\beta)(t-t_0)^2,$$

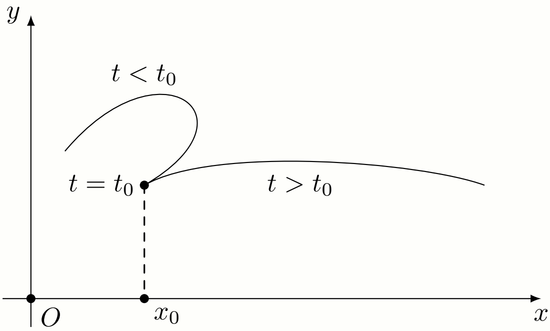


Рис. 237.1

де α і β прямують до 0 при $t \to t_0$. Підставляючи, перепишемо рівняння січної, після скорочення обох знаменників на $\frac{1}{2}(t - t_0)^2$, у такому виді:

$$\frac{X - x_0}{x_0'' + \alpha} = \frac{Y - y_0}{y_0'' + \beta}.$$

Тут можна перейти до границі при $t \to t_0$, (дивіться зауваження в розд. 234, яке застосовне і тут, якщо точку вважати **простою**), і отримати **рівняння дотичної**:

$$\frac{X - x_0}{x_0''} = \frac{Y - y_0}{y_0''} \quad \text{або} \quad Y - y_0 = \frac{y_0''}{x_0''}(X - x_0). \tag{237.1}$$

Ми припустили $x_0'' \neq 0$; нехай, наприклад, $x_0'' > 0$. Тоді функція $x = \varphi(t)$ при $t = t_0$ має (власний) **мінімум** (розд. 137), тобто $x > x_0$, при значеннях t близьких до t_0 (як при $t < t_0$, так і при $t > t_0$). Отже, у точці (x_0, y_0) змикаються дві гілки кривої, що відповідають $t < t_0$ і $t > t_0$; вони мають спільну (похилу або горизонтальну) дотичну і обидві розташовані **праворуч** від вертикалі $x = x_0$. Іншими словами, очевидна **точка повернення** (рис. 237.1). Це основний випадок особливої точки для кривої, заданої параметрично.

Легко піти трохи далі у цьому дослідженні, щоб встановити, якого роду буде ця точка повернення. З цією метою залучимо треті похідні, і прирости $x - x_0$ і $y - y_0$ напишемо у вигляді

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{1}{2}x_0''(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}(x_0''' + \tilde{\alpha})(t - t_0)^3, \\ y - y_0 &= \frac{1}{2}y_0''(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}(y_0''' + \tilde{\beta})(t - t_0)^3, \end{aligned}$$

де $\tilde{\alpha}$ і $\tilde{\beta}$ знову прямують до 0 при $t \to t_0$.

nebayduzhi.math@gmail.com

Обчислимо, користуючись рівнянням (237.1), ординату Y точки **дотичної** з абсцисою x; ми отримаємо

$$Y - y_0 = \frac{y_0''}{x_0''}(x - x_0) = \frac{1}{2}y_0''(t - t_0)^2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{y_0''}{x_0''}(x_0''' + \tilde{\alpha})(t - t_0)^3.$$

Складемо, нарешті, різницю ординат Y і y, що відповідають одній і тій самій абсцисі x:

$$Y - y = \frac{1}{6}\left(\frac{x_0'''y_0'' - x_0''y_0'''}{x_0''} + \tilde{\gamma}\right)(t - t_0)^3,$$

де через $\tilde{\gamma}$ позначена знову деяка нескінченно мала при $t \to t_0$.

Тепер якщо тільки $x_0'''y_0'' - x_0''y_0''' \neq 0$ (що зазвичай і виконується), ясно, що різниця $Y - y$ буде **різних** знаків при $t < t_0$ і $t > t_0$, тобто для тих двох гілок кривої, які зустрічаються в точці (x_0, y_0) (припускаючи, звісно, що ми обмежуємося значеннями t досить близькими до t_0). Гілки розташовуються по різні боки від дотичної, і ми маємо точку повернення **першого роду**.

Приклади подібних особливостей зустрічалися нам не раз: циклоїда, епіциклоїда або гіпоциклоїда, евольвента круга — усі мають такі точки повернення (рис. 225.1 – рис. 225.8).

Може виявитися, у винятковому випадку, що $x_0'''y_0'' - x_0''y_0''' = 0$; тоді розклад $Y - y$ за степенями $t - t_0$, почнеться з четвертої або вищої степені цього двочлена. Якщо степінь ця **парна**, то ця особлива точка буде точкою **повернення другого роду**.

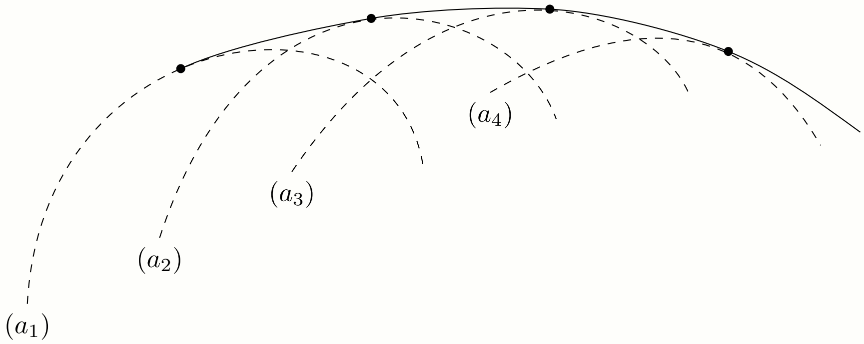


Рис. 238.1

7.3. Дотик між кривими

238. Обвідна сімейства кривих

Якщо дві криві мають спільну точку M_0 і у цій точці спільну дотичну, то кажуть, що **криві дотикаються в точці** M_0 одна до одної. Цей розділ присвячений деяким питанням, пов'язаним з дотиком плоских кривих.

Приступаючи до розгляду **обвідної сімейства** кривих, зупинимося спочатку на самому понятті **сімейства** кривих. Нам вже не раз доводилося зустрічатися з рівняннями кривих, в яких, крім поточних координат x та y змінної точки, входить ще один чи кілька **параметрів**. У випадку одного параметра, скажімо a, рівняння має вигляд

$$F(x, y, a) = 0. \tag{238.1}$$

Ліва частина є функцією трьох змінних, з яких змінну a ми інакше називаємо лише тому, що вона відіграє особливу роль: для отримання конкретної кривої значення параметра a має бути фіксовано. При зміні цього значення, зазвичай в межах деякого проміжку, виходитимуть, взагалі кажучи, різні (за формою чи розташуванням) криві.

Сукупність усіх цих кривих і називають **сімейством кривих** з одним параметром, а рівняння (238.1) — **рівнянням сімейства**.

Іноді трапляється, що для такого сімейства кривих існує крива, яка дотикається до кожної кривої сімейства в одній або кількох точках і до того ж вся складається з цих точок дотику (рис. 238.1). Така крива має назву **обвідної** даного сімейства. Ми покажемо зараз, як встановити, чи існує обвідна, і як знайти її у разі існування.

З цією метою припустимо спочатку, що обвідна існує.

Для простоти **припустимо**, що йдеться про обвідну (точніше — гілку обвідної), яка дотикається до кожної кривої сімейства в **одній** точці. Тоді координати цієї точки дотику однозначно визначаються вказівкою кривої сімейства, тобто значенням параметра a:

$$x = \varphi(a), \quad y = \psi(a). \tag{238.2}$$

Оскільки обвідна вся складається з точок дотику, то ці рівняння і дають параметричне задання обвідної.

Ми припускаємо **існування та неперервність** частинних похідних функції F і похідних функцій φ і ψ.

Точка (238.2) лежить на кривій (238.1), яка визначається тим самим значенням параметра a, тому справедлива така **тотожність** відносно a:

$$F(\varphi(a),\ \psi(a),\ a) = 0. \tag{238.3}$$

Продиференціювавши її повним чином за a, отримаємо (розд. 181, розд. 185; тут, між іншим, ми використовуємо і неперервність частинних похідних функції F)

$$F'_x dx + F'_y dy + F'_a da = 0, \tag{238.4}$$

причому похідні обчислені при зазначених у (238.3) значеннях аргументів, а dx і dy означають диференціали функцій (238.2).

Тепер спробуємо аналітично висловити той факт, що обвідна дотикається до кривої (238.1) в точці (238.2). Дотична до кривої (238.1) (дивіться (230.5))

$$F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) = 0 \tag{238.5}$$

і до кривої (238.2) (дивіться (230.7))

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} \tag{238.6}$$

повинні збігатися. Умову збігу цих прямих можна написати у вигляді

$$F'_x dx + F'_y dy = 0. \tag{238.7}$$

При цьому, як і вище, x і y означають значення (238.2), а dx і dy — диференціали функцій (238.2).

Зауважимо, що рівняння (238.5) і (238.6) справді виражають дотичні до кривих лише за умови, що точка, яка розглядається, не буде для них особливою. Проте, **рівність (238.7) виконується навіть у тому випадку, якщо ця точка буде особливою для тієї чи іншої кривої.**

nebayduzhi.math@gmail.com

Зіставляючи (238.7) з (238.4) і враховуючи, що da — довільне число, знайдемо, що $F'_a = 0$ або у розгорнутому виді:

$$F'_a(\varphi(a),\ \psi(a),\ a) = 0. \tag{238.8}$$

Тотожності (238.3) і (238.8) показують, що функції (238.2), невідомі нам, повинні тотожно відносно a задовольняти систему рівнянь

$$F(x, y, a) = 0, \quad F'_a(x, y, a) = 0. \tag{238.9}$$

Отже, **якщо** обвідна існує, то її параметричні рівняння (238.2) виходять як розв'язок відносно змінних x та y системи (238.9).

У тому випадку, коли ця система при змінному a взагалі не має розв'язків у вигляді функцій від a, **обвідної зовсім немає**. Припустимо тепер, що в результаті розв'язання системи (238.9) отримані рівняння (238.2), що виражають криву без особливих точок. (За наявності окремих особливих точок обмежимося проміжком зміни параметра, що не містить його критичних значень.) Чи буде ця крива обвідною нашого сімейства кривих?

Оскільки функції (238.2) задовольняють рівняння (238.9), то виконуються тотожності (238.3) та (238.8). Диференціюючи першу з них, отримаємо (238.4), а зіставляючи це з (238.8), дійдемо рівності (238.7). Якщо точка (238.2) (за жодного a) не буде особливою на відповідній кривій (238.1), так що рівняння (238.5) справді виражає дотичну до названої кривої, то рівність (238.7) обумовлює збіг цієї дотичної з дотичною (238.6) до кривої (238.2). У цьому випадку **крива** (238.2) **насправді буде обвідною сімейства.**

Зокрема, це можна гарантувати, якщо, наприклад, криві даного сімейства зовсім позбавлені особливих точок.

Навпаки, якщо такі особливі точки є, і при зміні a геометричне місце їх утворює криву (238.2), то відповідні їй функції φ і ψ необхідно задовольняють систему (238.9), хоча в цьому випадку **крива може не бути обвідної.** (Для φ і ψ виконується (238.3), отже, і (238.4). Потім, справедлива (238.7), як вище згадувалося у тексті; зіставляючи з (238.4), приходимо до (238.8).)

Отже, за наявності особливих точок крива (238.2), отримана в результаті розв'язання системи (238.9), потребує ще перевірці: вона може бути обвідною, може бути геометричним місцем особливих точок на кривих сімейства або, нарешті, частиною — обвідною, частиною ж — таким геометричним місцем.

Зазвичай при знаходженні обвідної не зупиняються на системі рівнянь (238.9), але йдуть далі — **виключають** із них a. Іншими словами, отримують співвідношення вигляду

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{238.10}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

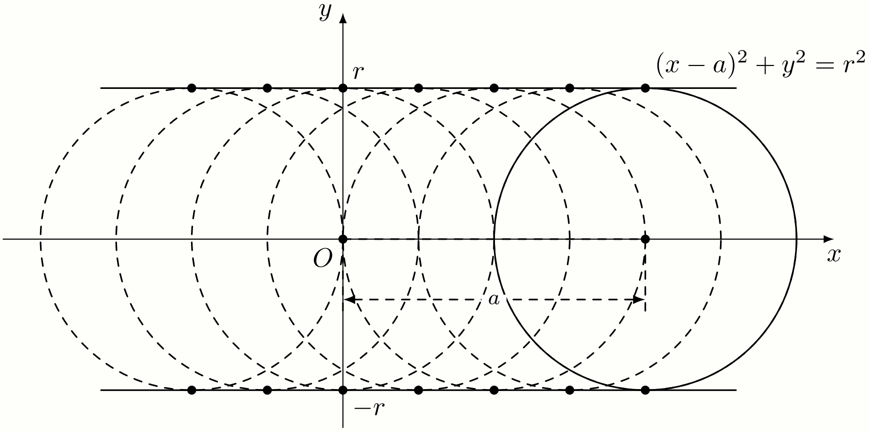


Рис. 239.1

що вже не містить a і являє собою умову, необхідну і достатню для того, щоб для пари значень x, y знайшлося таке значення a, яке спільно з ними задовольняло обидва рівняння (238.9).

Усі точки кривої (238.2), отриманої у ході розв'язання системи (238.9), повинні задовольняти рівняння (238.10). Тому, якщо це останнє рівняння не виражає жодної кривої, то відразу ясно, що обвідної немає. Якщо ж рівняння (238.10) виражає криву (її називають **дискримінантною кривою** сімейства), вона, як і вище, потребує перевірці. У її складі має виявитися обвідна (якщо вона існує), але має бути і геометричне місце особливих точок (якщо такі в наявності). Крім того, тут є ще одна неприємна нагода, яку слід відкидати перевіркою: саме, до складу дискримінантної кривої може просто входити одна або кілька кривих з сімейства. Так буде в тому випадку, коли **нескінченній множині** точок дискримінантної кривої відповідає одне й те саме значення a, що спільно з ними задовольняє рівняння (238.9). (Якщо спиратися тільки на рівняння (238.9), то таке неможливо, тому що рівняння намагаються вирішити для свідомо змінного a.)

Все сказане краще з'ясується на прикладах.

239. Приклади

1) Знайти обвідну для сімейства кіл (рис. 239.1)

$$(x-a)^2+y^2=r^2 \quad (r=\text{const}).$$

Диференціюємо за a: $-2(x-a)=0$. Виключаючи a, отримаємо $y^2-r^2=0$ або $y=\pm r$: **дві прямі**, паралельні осі x, які, очевидно, становлять обвідну.

nebayduzhi.math@gmail.com

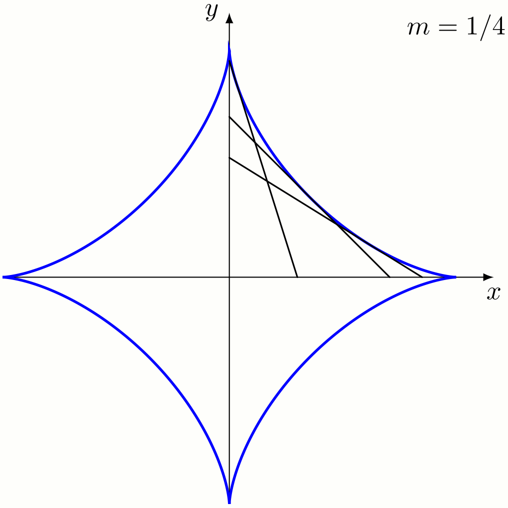


Рис. 239.2

Зауваження. Якщо рівняння сімейства взяти у вигляді

$$x - a \pm \sqrt{r^2 - y^2} = 0,$$

то результат диференціювання за a буде $-1 = 0$; з неможливості цієї рівності, здавалося б, випливає висновок про відсутність обвідної. Такий висновок, проте, був би хибним, оскільки вся викладена теорія передбачає існування і неперервність частинних похідних від лівої частини рівняння сімейства, а тут (саме при $y = \pm r$) скінченної похідної за y немає.

2) Знайти обвідну різних положень прямої, що ковзає двома точками, що знаходяться одна від одної на постійній відстані a, по осях координат (рис. 239.2).

Взявши за параметр кут θ, між перпендикуляром до прямої, що рухається, і віссю x, рівняння прямої можна написати у вигляді

$$\frac{x}{\sin\theta} + \frac{y}{\cos\theta} = a.$$

Диференціюємо за θ

$$-\frac{x}{\sin^2\theta}\cos\theta + \frac{y}{\cos^2\theta}\sin\theta = 0 \quad \text{або} \quad \frac{x}{\sin^3\theta} = \frac{y}{\cos^3\theta}.$$

Інакше це можна написати так $\left(\text{використовуючи } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}\right)$:

$$\frac{\dfrac{x}{\sin\theta}}{\sin^2\theta} = \frac{\dfrac{y}{\cos\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{\dfrac{x}{\sin\theta} + \dfrac{y}{\cos\theta}}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \frac{a}{1} = a.$$

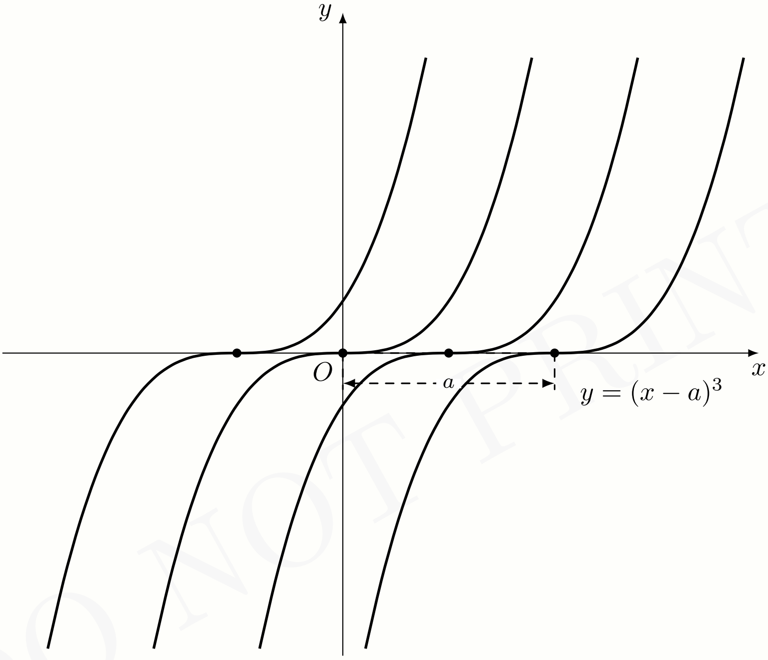


Рис. 239.3

звідки

$$x = a\sin^3\theta, \quad y = a\cos^3\theta.$$

Читач впізнає в цих рівняннях параметричне задання **астроїди** (пр. 224.4, $t = \frac{\pi}{2} - \theta$), яка в даному випадку і є обвідною. З цією властивістю астроїди ми вже мали справу (пр. 231.3).

3) У багатьох випадках обвідна як би обмежує (“огинає”) частину площини, зайняту кривими сімейства. Що це не завжди так, показує приклад:

$$y = (x-a)^3.$$

Тут обвідної служить вісь x, що **перетинає** всі криві сімейства. Аналогічна обставина проявляється і в наступному, складнішому прикладі.

4) Знайти обвідну сімейства **парабол**:

$$y = a^2(x-a)^2.$$

Зіставляючи це рівняння з рівнянням

$$2a(x-a)^2 - 2a^2(x-a) = 2a(x-a)(x-2a) = 0,$$

отримаємо або $x = a$ ($y = 0$), або $x = 2a$ ($y = a^4$), так що дискримінантна крива складається з прямої $y = 0$ та кривої $16y = x^4$. Перша дотикається до усіх парабол у

nebayduzhi.math@gmail.com

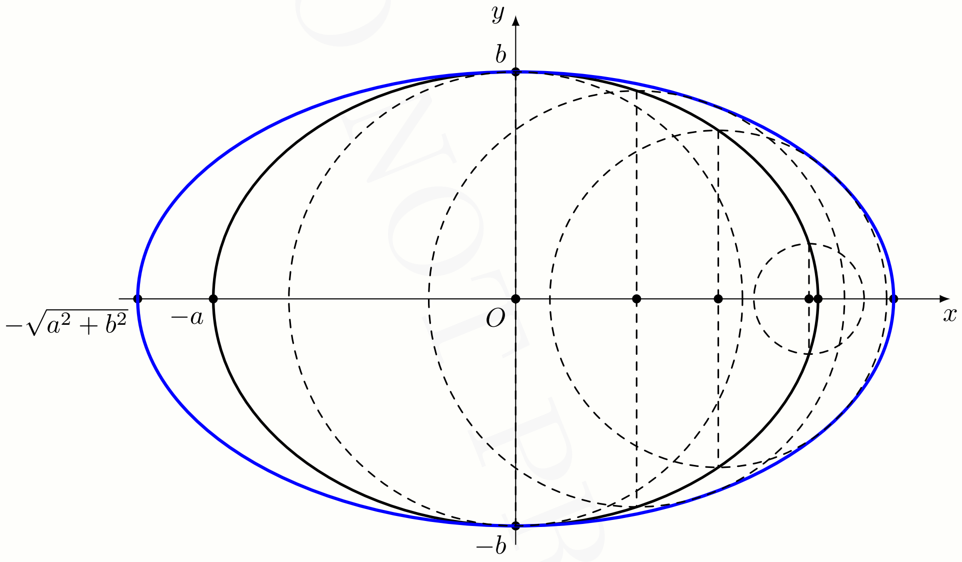


Рис. 239.4

вершинах. Друга має з кожною параболою **три** спільні точки: **дотикається** до неї при $x = 2a$ і **перетинає** при $x = -2a \pm 2a\sqrt{2}$.

5) Розглянемо **еліпс**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Станемо шукати обвідну сімейства кіл, побудованих, як на діаметрах, на хордах еліпса, паралельних осі y (рис. 239.4).

Взявши за параметр абсцису t центру кола, напишемо рівняння цього сімейства у вигляді:

$$F(x,y,t) = (x-t)^2 + y^2 - \frac{b^2}{a^2}(a^2 - t^2) = 0,$$

причому t змінюється на проміжку $[-a, a]$. Маємо

$$F'_t = -2(x-t) + \frac{2b^2}{a^2}t = 0, \quad \text{звідки} \quad t = \frac{a^2}{a^2+b^2}x.$$

Підставивши це значення t у рівняння $F = 0$, ми отримаємо рівняння обвідної у наступному вигляді:

$$\left(x - \frac{a^2x}{a^2+b^2}\right)^2 + y^2 - \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - \frac{a^4x^2}{(a^2+b^2)^2}\right) = 0$$

або, після перетворень:

$$\frac{x^2}{a^2+b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

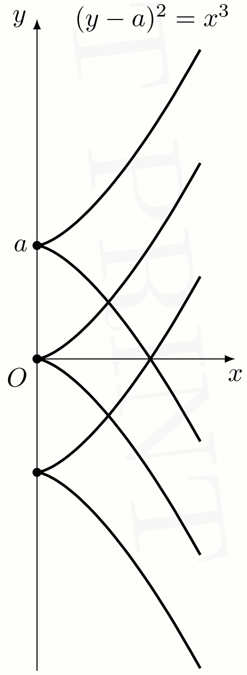


Рис. 239.5

Ми прийшли до еліпса з тими самими осями симетрії, що й початковий.

Цікаво відзначити, що цей еліпс дотикається **не до всіх** кіл сімейства. Цю обставину легко побачити, якщо не виключати t із рівнянь $F = 0$ і $F'_t = 0$, а виразити з них x і y через t:

$$x = \frac{a^2+b^2}{a^2}t, \quad y = \pm\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4-(a^2+b^2)t^2}.$$

Справді, звідси відразу видно, що вираз для y може бути дійсним лише при $|t| \leqslant \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Значить, тільки **для частини** сімейства кіл, що відповідає зазначеним значенням t, існує обвідна.

Цей повчальний приклад показує, що параметричне завдання обвідної може бути вигіднішим, тому що з нього легше побачити, для якої частини даного сімейства обвідна справді існує.

6) Для сімейства **концентричних кіл**

$$x^2 + y^2 = a \quad (a \geqslant 0)$$

обвідної немає: диференціювання за a відразу приводить до неможливої рівності $0 = 1$.

7) Розглянемо два сімейства напівкубічних парабол

а) $(y-a)^2 - x^3 = 0$ (рис. 239.5),

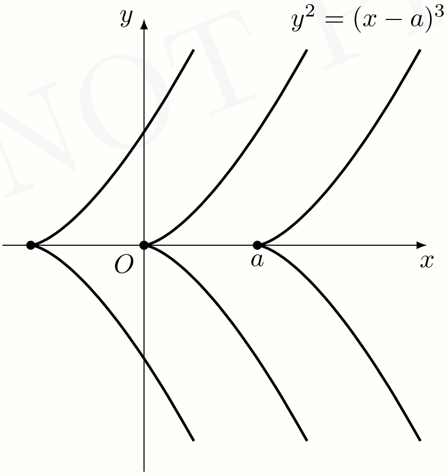


Рис. 239.6

б) $y^2-(x-a)^3=0$ (рис. 239.6).
Дискримінантна крива буде
а) $x=0$,
б) $y=0$;
і в обох випадках є носієм особливих точок. Але у випадку а) вона все ж водночас буде і обвідною; у випадку б) обвідної немає.

8) Більш складний приклад такого ж типу дає інше сімейство напівкубічних парабол (рис. 239.7):

$$(y-a)^2-(x-a)^3=0.$$

Тут дискримінантна крива розпадається на дві прямі: $y=x$ і $y=x-\frac{4}{27}$. Перша є лише геометричним місцем особливих точок, а друга буде обвідною.

9) Нарешті, розглянемо сімейство прямих

$$4(1+t)x=t^2y.$$

Якщо продиференціювати за t: $4x=2ty$ і виключити t з обох рівнянь, то отримаємо, як результат виключення:

$$x(x+y)=0.$$

Це рівняння задає дві прямі: $x=0$ і $y=-x$, які входять до складу даного пучка (при $t=0$ і $t=-2$). Жодна з них не є ні обвідною, ні носієм особливих точок. Обвідної у цьому випадку немає.

Цей приклад ілюструє зазначену нами раніше можливість, що рівняння (238.10) представить не обвідну, а одну або кілька кривих сімейства. Якби ми, не виключаючи t, спробували виразити x і y через t **при змінному** t, то це виявилося б неможливим.

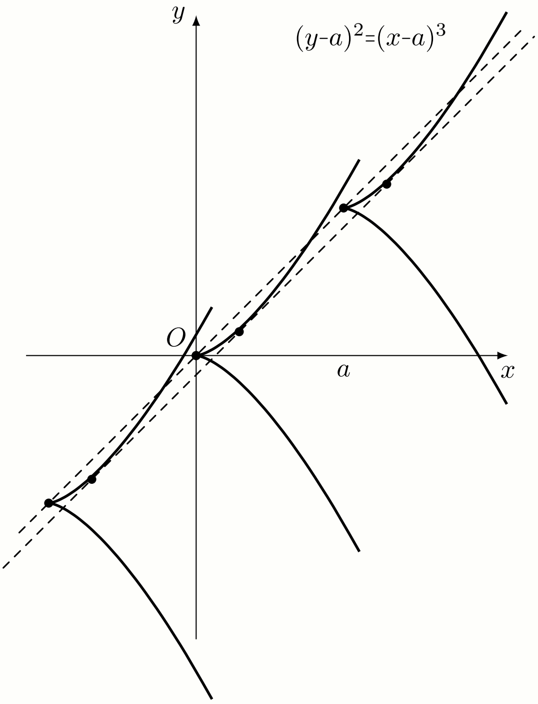


Рис. 239.7

240. Характеристичні точки

З поняттям обвідної тісно пов'язане інше цікаве геометричне поняття — **характеристичних точок.**

Візьмемо одну з кривих сімейства

$$F(x, y, a) = 0,$$

що визначається значенням a параметра. Надамо a деякий приріст Δa; значенню $a + \Delta a$ параметра відповідатиме інша крива сімейства

$$F(x, y, a + \Delta a) = 0,$$

"близька" до першої.

Може статися, що якщо Δa досить мале, то ці дві криві перетинаються в одній або кількох точках. При прямуванні Δa до нуля ці точки перетину будуть якимось чином переміщатися по першій кривій. Якщо при цьому якась із точок перетину прямує до певного граничного положення, то цю граничну точку називають **характеристичною точкою** на даній кривій (рис. 240.1). (Звертаємо увагу читача на те, що характеристична точка пов'язана не тільки з тією кривою, на якій лежить, але

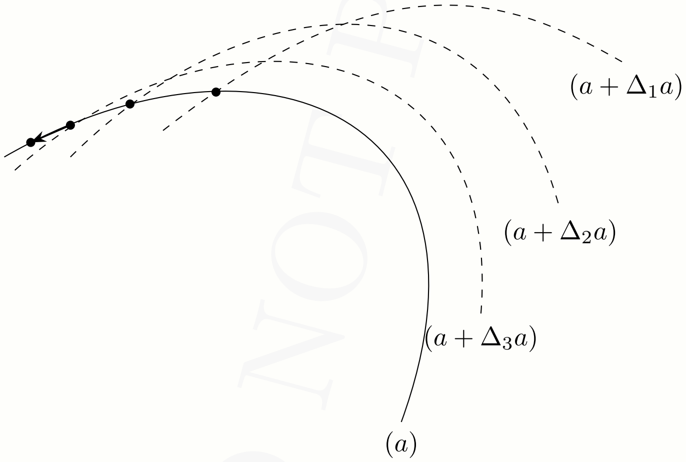


Рис. 240.1

й із усім сімейством. Говорити о характеристичній точці для окремо заданої кривої було б позбавлено сенсу.)

Точка перетину згаданих вище кривих повинна задовольняти систему рівнянь

$$F(x,y,a)=0,\quad F(x,\ y,\ a+\Delta a)=0$$

або рівносильній їй системі

$$F(x,y,a)=0,\quad \frac{F(x,\ y,\ a+\Delta a)-F(x,\ y,\ a)}{\Delta a}=0. \tag{240.1}$$

Спрямувавши тут Δa до нуля, ми прийдемо до вже знайомої нам системи (238.9):

$$F(x,y,a)=0,\quad F'_a(x,y,a)=0,$$

яку, отже, при заданому a, і повинні задовольняти координати характеристичної точки. Точніше кажучи, якщо зберегти за x і y значення координат точки перетину, то замість (240.1) (застосовуючи формулу Лаґранжа) можна написати:

$$F(x,y,a)=0,\quad F'_a(x,y,a+\theta\Delta a)=0\quad (0<\theta<1).$$

Якщо при $\Delta a\to 0$ координати x,y, мають відповідно границі $\overline{x}$, $\overline{y}$, то, переходячи в написаних рівностях до границі, зважаючи на неперервність функцій F і F'_a, легко переконатися в тому, що координати $\overline{x}$, $\overline{y}$ характеристичної точки, справді, задовольняють систему рівнянь (238.9).

Припустимо тепер, що характеристичні точки існують на кожній кривій сімейства. Тоді можна спробувати з'ясувати **геометричне місце характеристичних**

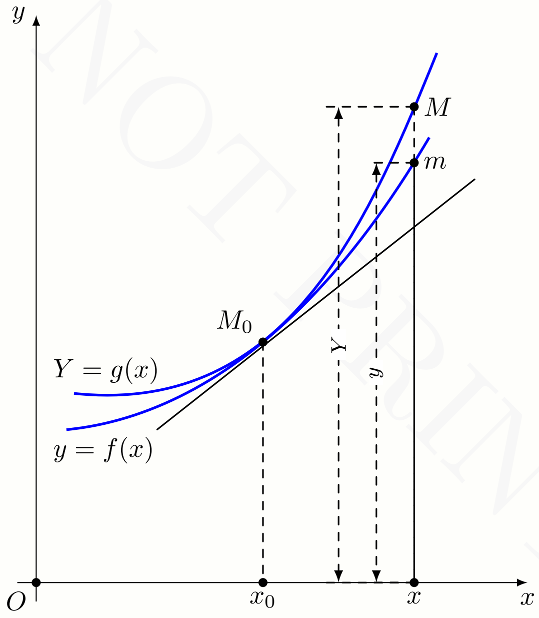


Рис. 241.1

точок. Якщо це місце є кривою вигляду (238.2), то функції $\varphi(a), \psi(a)$, що фігурують у її рівняннях, повинні задовольняти систему (238.9), а значить бути одним із розв'язків цієї системи відносно x, y. Так само усі точки згаданого геометричного місця задовольняють і рівняння (238.10), тобто це місце необхідно входить до складу **дискримінантної кривої.**

Зі сказаного ясно, що геометричне місце характеристичних точок, якщо існує, є (повністю або частинами) або обвідною, або носієм особливих точок.

Легко переконатися у тому, що в пр. 239.1, пр. 239.2, пр. 239.4 та пр. 239.5 попереднього розділу геометричне місце характеристичних точок збігається з обвідною. Це в певному сенсі — загальний випадок. Але ось у пр. 239.7 це геометричне місце служить лише носієм особливих точок, а в пр. 239.3 та пр. 239.7 б) зовсім немає перетину між кривими (хоча обвідна існує).

241. Порядок дотику двох кривих

Розглянемо дві криві, що дотикаються одна до одної в точці M_0.

Якщо криві задані **явними** рівняннями $y = f(x)$ і $Y = g(x)$, і M_0 має абсцису x_0, то збіг ординат та кутових коефіцієнтів дотичних може бути записаний так:

$$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0).$$

Для характеристики близькості даних кривих в околі точки M_0, візьмемо точки

M і m на цих кривих (рис. 241.1) з абсцисою x і з'ясуємо порядок нескінченно малого відрізка

$$Mm = Y - y = g(x) - f(x) = \varphi(x)$$

відносно **основної нескінченно малої** $x - x_0$. *Якщо цей порядок дорівнює $n+1$ (або більше, ніж $n+1$), то кажуть, що криві в точці M_0 мають порядок дотику n (або вище, ніж n).*

Ми бачили, що за наявності дотику завжди

$$\varphi(x_0) = g(x_0) - f(x_0) = 0, \quad \varphi'(x_0) = g'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Нехай у точці x_0, для функцій $f(x)$ і $g(x)$ існують похідні усіх порядків до $(n+1)$-го включно, причому

$$f''(x_0) = g''(x_0), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0),$$

так що

$$\varphi''(x_0) = g''(x_0) - f''(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0) = 0.$$

Про величину похідних $f^{(n+1)}(x_0)$ і $g^{(n+1)}(x_0)$ поки що ніяких припущень не робимо. Застосовуючи до функції $\varphi(x)$ формулу Тейлора з додатковим членом у формі Пеано (124.8):

$$Mm = Y - y = \varphi(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_0) + \alpha}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{241.1}$$

бачимо, що

$$\lim_{x \to x_0} \frac{Mm}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} = \frac{g^{(n+1)}(x_0) - f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}.$$

Отже, якщо $g^{(n+1)}(x_0) \neq f^{(n+1)}(x_0)$, то криві мають дотик n-го порядку, якщо $g^{(n+1)}(x_0) = f^{(n+1)}(x_0)$, то порядок дотику буде вище n. Звідси (припускаючи існування всіх згаданих похідних) випливає наступне твердження.

Для того щоб у точці з абсцисою x_0 криві $y = f(x)$ і $Y = g(x)$ мали дотик n-го порядку, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови

$$f(x_0) = g(x_0), \; f'(x_0) = g'(x_0), \; \ldots, \; f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0), \tag{241.2}$$

$$f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0). \tag{241.3}$$

(Якщо остання нерівність не визначена, то можна лише стверджувати, що порядок дотику **не нижче** n.)

У випадку, коли порядок дотику точно дорівнює n, з (241.1) безпосередньо випливає, що **при n парному криві, дотикаючись у точці M_0, взаємно перетинають одна одну, при n непарному цього немає.**

Зауваження. У світлі виведених умов ми повернемося знову до **означення** порядку дотику. Це означення здається пов'язане з вибором координатної системи. На справді ж *порядок дотику двох кривих від цього вибору не залежить* (лише б тільки вісь y не була паралельна спільній дотичній), так що встановлене поняття є справді **геометричним**.

Якщо повернути координатну систему на довільний кут α, то нові координати $\overline{x}$, $\overline{y}$ виразяться через старі x, y за допомогою відомих формул перетворення:

$$\overline{x} = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad \overline{y} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Нехай у старій системі координат дана крива $y = f(x)$; якщо в попередніх рівняннях під y розуміти саме цю функцію, то вони дадуть **параметричне** задання кривої в новій системі, з x у ролі **параметра**. Очевидно, похідні

$$\frac{d\overline{x}}{dx} = \cos\alpha + \frac{dy}{dx}\sin\alpha, \quad \frac{d\overline{y}}{dx} = -\sin\alpha + \frac{dy}{dx}\cos\alpha$$

одночасно не можуть дорівнювати 0, так що в новому заданні жодна точка не буде **особливою**, а тоді ясно, що перша з цих похідних — не дорівнює 0 в нашій точці (бо інакше дотична до кривої в цій точці була б паралельною осі $\overline{y}$!). Отже, в її околі крива може бути задана і в новій системі явним рівнянням $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$.

Тепер легко побачити, що (порівняйте з розд. 121)

$$\frac{\overline{y}}{\overline{x}} = \frac{-\sin\alpha + \dfrac{dy}{dx}\cos\alpha}{\cos\alpha + \dfrac{dy}{dx}\sin\alpha}, \quad \frac{d^2\overline{y}}{d\overline{x}^2} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(\cos\alpha + \dfrac{dy}{dx}\sin\alpha\right)^2}$$

і взагалі

$$\frac{d^k\overline{y}}{d\overline{x}^k} = R_k\left(\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ky}{dx^k}\right),$$

де R_k є знак раціональної функції. Звідси ясно, що як тільки для **двох** функцій y від x виконуються рівності (241.2), то для двох **відповідних** функцій $\overline{y}$ від $\overline{x}$ виконуються аналогічні рівності. Так само, якщо виконуються (241.2), з нерівності (241.3) випливає така ж нерівність для нових функцій, бо інакше зворотне перетворення привело б до нас, замість нерівності (241.3), теж до рівності.

Цим і завершується доведення висловленого твердження.

242. Випадок неявного задання однієї з кривих

Розглянемо тепер випадок, коли друга крива задана **неявним** рівнянням

$$G(x, y) = 0. \tag{242.1}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Нехай дана точка $M_0(x_0, y_0)$, яка не є для цієї кривої **особливою**, а саме нехай $G'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді в околі цієї точки рівняння (241.2) визначає однозначну функцію $y = g(x)$, і для знаходження порядку дотику можуть бути використані вже відомі умови (241.2) (і (241.3)).

Але оскільки явного виразу функції $g(x)$ в цьому випадку ми не маємо, то було б зручніше виразити ці умови в такій формі, яка б використовувала лише **дану** функцію G.

З цією метою згадаємо, що значення функції $g(x)$ та її похідних $g'(x), \ldots, g^{(n)}(x)$ послідовно і до того ж **однозначно** визначаються рівнянням (242.1) і тими рівняннями, що виходять з нього диференціюванням за x, якщо під y розуміти $g(x)$ (розд. 209):

$$\begin{aligned} G(x,\ \underline{g(x)}) &= 0,\\ G'_x(x,\ g(x)) + G'_y(x,\ g(x))\underline{g'(x)} &= 0,\\ G''_{x^2} + 2G''_{xy}g'(x) + G''_{y^2}\left[g'(x)\right]^2 + G'_y\underline{g''(x)} &= 0,\\ \ldots\\ G^{(n)}_{x^n} + \cdots + G'_y\underline{g^{(n)}(x)} &= 0. \end{aligned}$$

(У кожному рівнянні підкреслена саме та величина, яка з нього **однозначно** визначається, якщо вже визначені попередні величини. Це відноситься і до системи рівнянь, що наводиться нижче.)

Тому, якщо (при $x = x_0$) у цих рівностях скрізь замість $g(x_0), g'(x_0), \ldots, g^{(n)}(x_0)$ підставити, відповідно, $f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$, то вийдуть умови

$$\begin{aligned} G(x_0,\ \underline{f(x_0)}) &= 0,\\ G'_x(x_0,\ f(x_0)) + G'_y(x_0,\ f(x_0))\underline{f'(x_0)} &= 0,\\ G''_{x^2} + 2G''_{xy}f'(x_0) + G''_{y^2}\left[f'(x_0)\right]^2 + G'_y\underline{f''(x_0)} &= 0,\\ \ldots\\ G^{(n)}_{x^n} + \cdots + G'_y\underline{f^{(n)}(x_0)} &= 0. \end{aligned}$$

які цілком рівносильні умовам (241.2).

Для того щоб представити їх у більш доступній формі, введемо позначення

$$\Phi(x) = G(x,\ f(x)). \tag{242.2}$$

Тоді ці умови перепишуться так:

$$\Phi(x_0) = 0, \quad \Phi'(x_0) = 0, \ \ldots, \ \Phi^{(n)}(x_0) = 0. \tag{242.3}$$

Отже, *при дотриманні умов* (242.3) *(у точці з абсцисою* x_0*) крива* (242.1) *матиме з кривою* $y = f(x)$ *дотик порядку не нижче* n*. Нескладно зрозуміти, що цей порядок* ***точно*** n*, якщо крім того*

$$\Phi^{(n+1)}(x_0) \neq 0. \tag{242.4}$$

243. Стична крива

Припустимо тепер, що замість кривої (242.1) нам дано **сімейство кривих** з $n+1$ параметрами

$$G(x, y, \underbrace{a, b, \ \dots, \ l}_{n+1}) = 0. \tag{243.1}$$

Тепер природно поставити питання, чи можна, розпоряджаючись значеннями параметрів, вибрати з цього сімейства таку криву, яка з даною кривою $y = f(x)$ у визначеній її точці $M_0(x_0, \ f(x_0))$, мала б **найвищий** можливий (для цього сімейства) порядок дотику.

Така крива і має назву **стичної** до даної кривої в точці M_0. (Точніше було б сказати: **стичною кривою з такого-то сімейства**, бо для окремо взятої кривої (242.1) цей термін немає значення.)

Для знаходження стичної кривої введемо позначення аналогічне до (242.2):

$$\Phi(x, a, b, \ \dots, \ l) = G(x, f(x), a, b, \ \dots, \ l)$$

і напишемо ряд умов, схожих на (242.3):

$$\begin{cases} \Phi(x, a, b, \ \dots, \ l) = 0, \\ \Phi'_x(x, a, b, \ \dots, \ l) = 0, \\ \dots \\ \Phi^{(n)}_{x^n}(x, a, b, \ \dots, \ l) = 0. \end{cases} \tag{243.2}$$

Ми маємо **систему з** $n+1$ **рівнянь з** $n+1$ **невідомими** $a, \ b, \ \dots, \ l$**.** Зазвичай ця система однозначно визначає систему значень параметрів, і таким способом знаходиться **стична крива**, що має порядок дотику не нижче n.

При цьому зазвичай виявляється, що

$$\Phi^{(n+1)}_{x^{n+1}}(x, a, b, \ \dots, \ l) \neq 0,$$

отже порядок **точно** дорівнює n. Такий стан речей (при $n+1$ параметрах) вважається нормальним.

У тих виняткових точках, де додатково виконується рівність

$$\Phi^{(n+1)}_{x^{n+1}}(x, a, b, \ \dots, \ l) = 0, \tag{243.3}$$

говорять про **покращений дотик.** Ці точки можна знайти, якщо рівності (243.2) та (243.3) разом розглядати як **систему з** $n+2$ **рівнянь з** $n+2$ **невідомими** $x_0, a, b, \ \dots, \ l$**.**

Приклади.

1) **Стична пряма.** Сімейство прямих задане рівнянням

$$y = ax + b$$

із двома параметрами. Тому найбільший порядок дотику, який вдається встановити **в загальному випадку**, буде **першим**.

Тут маємо:

$$\Phi(x, a, b) = y - ax - b, \quad \Phi'_x(x, a, b) = y' - a, \quad \Phi''_{x^2}(x, a, b) = y'',$$

якщо під y розуміти $f(x)$. Позначаючи нулями значення y, y', y'', що відповідають обраному значенню $x = x_0$, для знаходження параметрів a і b отримаємо рівняння

$$y_0 - ax_0 - b = 0, \quad y'_0 - a = 0.$$

Звідси $a = y'_0$ і $b = y_0 - y'_0 x_0$. Підставляючи ці значення до рівняння прямої, прийдемо до рівняння

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0),$$

в якому читач легко впізнає рівняння дотичної.

Отже, **стичною прямою є дотична.**

Порядок дотику, взагалі кажучи, як вказувалося, буде перший. Він підвищується в окремих точках, де виконується додаткова умова $y''_0 = 0$ (наприклад, у точках перегину).

2) **Стичне коло.** Сімейство кіл виражається рівнянням

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2$$

з **трьома** параметрами ξ, η, R. Найвищий порядок дотику **взагалі** буде **другий**.

Оскільки тут, якщо знову під y розуміти $f(x)$,

$$\begin{aligned}
&\Phi(x, \xi, \eta, R) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 - R^2,\\
&\frac{1}{2}\Phi'_x(x, \xi, \eta, R) = x - \xi + (y - \eta)y',\\
&\frac{1}{2}\Phi''_{x^2}(x, \xi, \eta, R) = 1 + y'^2 + (y - \eta)y'',
\end{aligned}$$

то параметри визначаються з рівнянь

$$\begin{aligned}
&(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 = R^2,\\
&x_0 - \xi + (y_0 - \eta)y'_0 = 0,\\
&1 + y_0'^2 + (y_0 - \eta)y''_0 = 0.
\end{aligned}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

З двох останніх (припускаючи, що $y_0'' \neq 0$) знаходимо координати центру:

$$\xi = x_0 - y_0' \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, \quad \eta = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, \tag{243.4}$$

а тоді з першого знайдемо радіус

$$R = \frac{(1 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y_0''|}. \tag{243.5}$$

По цих елементах і знаходиться **стичне коло.**

За сказаним у розд. 241, як правило, дотична не перетинає криву, а стичне коло, навпаки, перетинає її. Виняток може бути лише у точках, де порядок дотику **підвищується** проти нормального.

244. Інший підхід до стичних кривих

Нехай дані крива $y = f(x)$ та сімейство кривих (243.1) з $n+1$ параметрами. Візьмемо на кривій довільні $n+1$ точок з абсцисами $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Для того щоб крива сімейства через ці точки проходила, повинні виконуватися $n+1$ умов:

$$\Phi(x_1, a, b, \ldots, l) = 0, \ \ldots, \ \Phi(x_{n+1}, a, b, \ldots, l) = 0.$$

Зазвичай, звідси значення параметрів визначаються однозначно; позначимо їх через $\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l}$.

Припустимо тепер, що коли взяті $n+1$ точок за довільним законом прямують до деякої визначеної точки кривої з абсцисою x_0, то і значення параметрів $\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l}$ прямують до певних граничних значень $a, b, \ldots, l$. Можна вважати, що крива сімейства, яка проходить через згадані точки, переміщуючись чи деформуючись, прямує до **граничної кривої.**

Для того, щоб її знайти, будемо міркувати так. Функція від x

$$\Phi(x, \tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \tilde{l})$$

дорівнює 0 при $n+1$ значенні x: $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$. Тоді, за теоремою Ролля (теор. 111.1), перша похідна дорівнює 0 при n значеннях $x_1' < x_2' < \ldots < x_n'$, друга — при $n-1$ значеннях: $x_1'' < x_2'' < \ldots < x_{n-1}''$, ... , $(n-1)$-а — при двох значеннях: $x_1^{(n-1)} < x_2^{(n-1)}$, і нарешті, n-а — при деякому значенні $x_1^{(n)}$; при цьому всі згадані значення лежать між x_1 і x_{n+1}.

nebayduzhi.math@gmail.com

Отже, маємо $n+1$ рівність:

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(x_1,\ \tilde{a},\ \tilde{b},\ \ldots,\ \tilde{l}\right)=0,\\
&\Phi'_x\left(x'_1,\ \tilde{a},\ \tilde{b},\ \ldots,\ \tilde{l}\right)=0,\\
&\Phi''_{x^2}\left(x''_1,\ \tilde{a},\ \tilde{b},\ \ldots,\ \tilde{l}\right)=0,\\
&\ldots\\
&\Phi^{(n)}_{x^n}\left(x^{(n)}_1,\ \tilde{a},\ \tilde{b},\ \ldots,\ \tilde{l}\right)=0.
\end{aligned}$$

Якщо тепер одночасно $x_1\to x_0,\ x_2\to x_0,\ \ldots,\ x_{n+1}\to x_0$, то $\tilde{a}\to a,\ \tilde{b}\to b,\ \ldots,\ \tilde{l}\to l$ і, очевидно, також $x'_1\to x_0,\ x''_1\to x_0,\ \ldots,\ x^{(n+1)}_1\to x_0$. Переходячи до границі в написаних вище рівностях, ми повернемося до вже знайомої нам системи (243.2), що визначала стичну криву.

Отже, *якщо існує граничне положення для кривої сімейства, що проходить через $n+1$ точок даної кривої, то ця* ***гранична*** *крива і є* ***стичною****.*

У зв'язку з цим іноді говорять (не надто строго, але образно), що стична крива (із сімейства з $n+1$ параметрами) є “крива, що проходить через $n+1$ нескінченно близьких точок” даної кривої. Зокрема, дотична проходить через дві нескінченно близькі точки кривої, а стичне коло — через **три**.

7.4. Довжина плоскої кривої

245. Леми

Хоча питання про довжину плоскої кривої, по суті, належить до **інтегрального** числення, але ми деякі частини починаємо викладати вже тут, оскільки в наступному розділі нам знадобляться і поняття довжини дуги кривої і її властивості. Саме **обчислення** довжини дуги кривої ми відкладаємо до другого тому.

Розглянемо (незамкнену або замкнену) плоску криву $\overset{\frown}{AB}$, задану параметрично рівняннями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T), \tag{245.1}$$

де функції φ і ψ тут поки що вважаються лише **неперервними**. Нехай **кратних** точок на кривій немає, так що кожна точка виходить лише при одному значенні параметра t (за винятком кінців кривої, що збігаються, якщо крива замкнена). При цих припущеннях криву називатимемо *неперервною простою кривою.*

Маючи на увазі встановити для такої кривої поняття **довжини**, ми почнемо із деяких допоміжних пропозицій. Нехай $t_0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant T$, і значенням параметра t' і t'' відповідають точки M' і M''.

Лема 245.1. *Для будь-якого $\delta > 0$ знайдеться таке $\eta > 0$, що при $t'' - t' < \eta$ довжина хорди $\overline{M'M''} < \delta$.*

Доведення. Справді, зважаючи на (рівномірну) неперервність функцій φ, ψ з (245.1), для обраного δ знайдеться таке $\eta > 0$, що при $|t'' - t'| < \eta$ буде одночасно

$$|\varphi(t'') - \varphi(t')| < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \quad \text{і} \quad |\psi(t'') - \psi(t')| < \frac{\delta}{\sqrt{2}},$$

а отже

$$\overline{M'M''} = \sqrt{[\varphi(t'') - \varphi(t')]^2 + [\psi(t'') - \psi(t')]^2} < \delta.$$

□

Лема 245.2. *У разі **незамкненої** кривої для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що як тільки довжина хорди $\overline{M'M''} < \delta$, відразу ж різниця $t'' - t'$ значень параметра, що відповідають її кінцям, буде $< \varepsilon$.*

Доведення. Припустимо протилежне; тоді для **деякого** $\varepsilon > 0$, при **будь-якому** $\delta > 0$ знайдуться такі дві точки $M'(t')$ і $M''(t'')$, що $\overline{M'M''} < \delta$ і водночас $t''-t' \geqslant \varepsilon$. Взявши послідовність $\{\delta_n\}$, що збігається до 0, і вважаючи по черзі $\delta = \delta_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$, прийдемо до двох послідовностей точок $\{M_n'(t_n')\}$ і $\{M_n''(t_n'')\}$, для яких

$$\overline{M_n'M_n''} < \delta_n, \quad \text{але} \quad t_n'' - t_n' \geqslant \varepsilon \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

За лемою Бользано – Вайрштрасса (лем. 41.1), без зменшення загальності, можна припустити, що при цьому

$$t'_n \to t^* \quad \text{і} \quad t''_n \to t^{**}$$

(цього легко досягти, переходячи, у разі потреби, до часткових послідовностей). Очевидно,

$$t^{**} - t^* \geqslant \varepsilon,$$

отже $t^* \neq t^{**}$. Водночас для відповідних точок M^* та M^{**} маємо $\overline{M^*M^{**}} = 0$, тобто ці точки повинні збігтися, що неможливо, оскільки крива немає кратних точок і незамкнена. Отримана суперечність завершує доведення. ☐

Для **замкненої** кривої твердження леми виявляється хибним: хорда $\overline{M'M''}$ може бути як завгодно малою і за достатньої близькості t' до t_0, а t'' до T.

246. Напрямок на кривій

Вважатимемо, що точка A відповідає значенню параметра $t = t_0$, а точка B — значенню $t = T$, і називатимемо A **початковою**, а B — **кінцевою** точкою кривої. Взагалі, **розташуємо** точки M кривої за зростанням параметра t, тобто з двох відмінних від A і B точок ту вважатимемо наступною, яка відповідає більшому значенню параметра. Так визначається "**напрямок** на кривій". Однак, формально це означення поставлене в залежність від **окремого** параметричного задання (245.1). Покажемо, що насправді поняття **напрямку** на кривій не залежить від конкретного способу задання кривої.

Почнемо з простішого випадку **незамкненої** кривої.

Твердження 246.1. *Якщо незамкнена крива* $\overset{\frown}{AB}$*, разом з заданням* (245.1)*, має і задання (також без кратних точок)*

$$x = \varphi^*(u), \quad y = \psi^*(u) \quad (u_0 \leqslant u \leqslant U), \tag{246.1}$$

де функції φ^* *і* ψ^* *також неперервні, і значенню* $u = u_0$ *відповідає точка* A*, а значенню* $u = U$ *— точка* B*, то обидва задання визначають на кривій один і той же напрямок.*

Доведення. Кожному значенню t відповідає деяка точка кривої, яка однозначно визначає значення u; навпаки, кожному u відповідає одне певне значення t. Отже, u виявляється однозначною функцією від t: $u = \omega(t)$, яка до того ж при зміні t між t_0 і T **набуває кожного свого значення лише один раз**. Зокрема, $\omega(t_0) = u_0$ і $\omega(T) = U$.

За лем. 245.1 двом досить близьким значенням t відповідають як завгодно близькі точки кривої, а тоді за лем. 245.2 їм відповідають і скільки завгодно близькі значення u, тобто функція $u = \omega(t)$ виявляється **неперервною**.

Звідси можна зробити висновок, що ця функція буде **монотонно зростаючою** (у вузькому значенні). Справді, якби при $t_0 < t' < t''$ мали
$u' = \omega(t') > u'' = \omega(t'') > u_0 = \omega(t_0)$, то за відомою властивістю неперервної функції (теор. 82.1) між t_0 і t' знайшлося б значення t''', для якого $\omega(t''') = u''$, отже значення приймалося б функцією $u = \omega(t)$ **двічі** (при $t = t''$ і $t = t'''$), всупереч тому, що було доведено вище.

Тепер, якщо вже встановлено, що $u = \omega(t)$ зростає разом з t, то вже ясно, що розташування точок за зростанням параметра t абсолютно рівносильне їх розташуванню за зростанням параметра u. ☐

Отже, цей напрямок, який можна було б назвати напрямком на кривій від точки A до точки B, виявляється цілком **геометричним** поняттям.

Аналогічно, замінюючи, скажімо, t на $-t'$ і розташовуючи точки за зростанням параметра t', введемо поняття напрямку на кривій від точки B до точки A; його очевидно, можна отримати також, розташовуючи точки за **спаданням** параметра t. Звичайно, і цей напрямок не залежить від окремого вибору задання кривої.

Звернемося, нарешті, до питання про напрямок на **замкненій** кривій. Візьмемо на ній довільні дві (відмінні від A) точки C і D, і нехай їм відповідають значення параметра $t = t_1$ і $t = t_2 > t_1$, так що в тому розташуванні, яке було вище встановлено за допомогою параметра t, **точка D розташована після C.** Можна показати, що будь-який напрямок на кривій, визначений будь-яким параметричним заданням, але таким, що зберігає цей порядок точок C і D, збігається з попереднім. Справді, якщо значенням $t = t_0^*$ і $t = T^*$, де $t_0 < t_0^* < t_1$ і $t_2 < T^* < T$, відповідають точки A^* і B^*, то для (незамкненої) дуги A^*B^* подібний висновок випливає з попереднього; але оскільки t_0^* може бути взяте як завгодно близько до t_0, а T^* — до T, то воно справедливе і для всієї кривої.

Отже, можна говорити про *напрямок (на замкненій кривій) від A через C та D до A*, як такий, що не залежить від вибору параметричного задання кривої. Аналогічно вводиться поняття *напрямку від A через D та C до A.*

247. Довжина кривої. Адитивність довжини дуги

Виходитимемо з задання (245.1) кривої $\overset{\frown}{AB}$ та напрямку на ній, що визначається зростанням параметра t. Візьмемо на кривій ряд точок

$$A = M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_i,\ M_{i+1},\ \ldots,\ M_n = B, \tag{247.1}$$

так, щоб **вони йшли у зазначеному напрямку**, відповідаючи зростаючим значенням параметра

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n. \tag{247.2}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

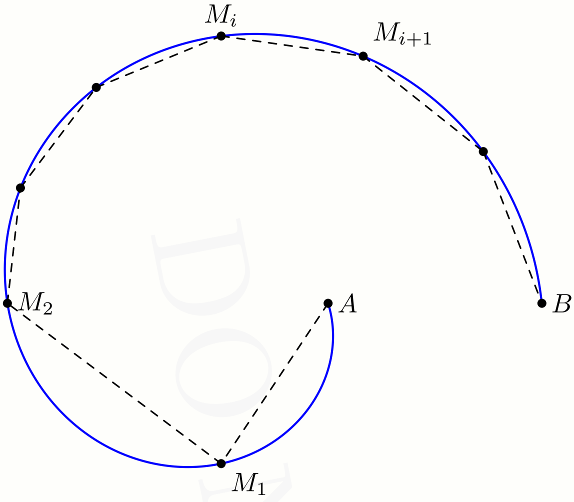


Рис. 247.1

З'єднуючи ці точки послідовно прямолінійними відрізками (рис. 247.1), ми отримаємо ***ламану*** $M_0M_1 \dots M_{n-1}M_n$***, вписану*** *в криву* $\overset{\frown}{AB}$. Нагадаємо, що в попередньому розділі ми з'ясували незалежність поняття напрямку, а з ним і поняття **вписаної ламаної** від окремого вибору параметричного завдання (245.1).

Довжиною *кривої* $\overset{\frown}{AB}$ *називається точна верхня межа* S *для множини периметрів* p *всіляких вписаних у криву ламаних:*

$$S = \sup\{p\}.$$

Якщо це число S ***скінченне****, то кажуть, що крива* ***спрямна****.* (Звертаємо увагу читача на важливість уточнення понять **напрямку** на кривій та **вписаної ламаної.** Якби точки M_i можна було брати будь-де, то межа S **завжди** була б $+\infty$.)

З означення довжини кривої випливає, що *периметр будь-якої вписаної у криву* $\overset{\frown}{AB}$ *ламаної не перевищує довжини* S *кривої*: зокрема, це стосується і довжини хорди AB, що з'єднує початкову і кінцеву точки кривої.

Твердження 247.1. *Візьмемо тепер на кривій* $\overset{\frown}{AB}$ *точку* C ***між*** A *та* B*, так що вона відповідає значенню* $t = \bar{t}$*:* $t_0 < \bar{t} < T$*.*

Якщо крива $\overset{\frown}{AB}$ *спрямна, то порізно і дуги* $\overset{\frown}{AC}$ *та* $\overset{\frown}{CB}$ *спрямні. Навпаки, якщо дуги спрямні, то спрямна і уся крива* $\overset{\frown}{AB}$*. Позначаючи довжини дуг* $\overset{\frown}{AB}$*,* $\overset{\frown}{AC}$ *та* $\overset{\frown}{CB}$*, відповідно, через* S*,* S' *і* S''*, матимемо при цьому*

$$S = S' + S''. \tag{247.3}$$

Доведення. Для доведення, припустимо спочатку, що крива $\overset{\frown}{AB}$ спрямна, і впишемо **довільні** ламані, з периметрами p' і p'', відповідно в дуги $\overset{\frown}{AC}$ і $\overset{\frown}{CB}$. З цих ламаних,

nebayduzhi.math@gmail.com

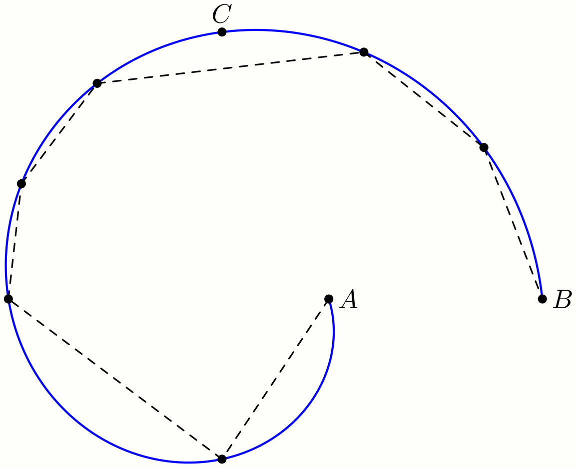


Рис. 247.2

узятих разом складеться ламана, з периметром

$$p' + p'' = p,$$

яка вписана у криву $\overset{\frown}{AB}$. Оскільки $p \leqslant S$, тобто

$$p' + p'' \leqslant S, \tag{247.4}$$

то, очевидно, і порізно

$$p' \leqslant S, \quad p'' \leqslant S.$$

Отже, множини $\{p'\}$ і $\{p''\}$ **обмежені зверху** (S — скінченне!), і дуги $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CB}$ спрямні, бо мають **скінченні** довжини

$$S' = sup\{p'\}, \quad S'' = sup\{p''\}.$$

За властивістю **точних** верхніх меж (теор. 11.1) периметри p' і p'' незалежно один від одного можуть бути взяті як завгодно близькими до своїх меж S' і S''. Тому із (247.4) за допомогою граничного переходу отримуємо:

$$S' + S'' \leqslant S. \tag{247.5}$$

Нехай тепер дано, що дуги $\overset{\frown}{AC}$ і $\overset{\frown}{CB}$ спрямні. Впишемо **довільну** ламану з периметром p в криву $\overset{\frown}{AB}$. Якщо точка C входить до складу вершин ламаної, то остання безпосередньо розпадається на дві ламані, з периметрами p' і p'', вписані, відповідно, у дуги $\overset{\frown}{AC}$ і $\overset{\frown}{CB}$. Якщо ж C не виявилася вершиною взятої ламаної, то ми **додатково** запровадимо цю точку до складу вершин, від чого периметр ламаної може лише

nebayduzhi.math@gmail.com

збільшиться (рис. 247.2); нова ламана, як зазначено, розпадеться на дві. В усякому разі, маємо

$$p \leqslant p' + p'' \leqslant S' + S''.$$

Множина $\{p\}$ **обмежена зверху** (S' і S'' скінченні), і крива $\overset{\frown}{AB}$ спрямна, причому її довжина

$$S = \sup\{p\} \leqslant S' + S''.$$

Нарешті, зі зіставлення цієї нерівності з (247.5), приходимо до необхідної рівності (247.3). □

Отже, *введене вище поняття довжини дуги кривої має* ***адитивну*** *властивість* (порівняйте з розд. 21, 3).

Доведене твердження легко поширюється на випадок будь-якого числа часткових дуг.

248. Достатні умови спрямляння. Диференціал дуги

Досі ми розглядали **загальний** випадок неперервної простої кривої (245.1). Бажаючи дати зручні **достатні умови** спрямляння кривої та вивчити подальші властивості довжини дуги, ми повернемося до звичайних у цьому розділі припущень про **існування неперервних похідних** $\varphi'(t)$ і $\psi'(t)$. (Найзагальніші умови спрямляння, необхідні та достатні, читач знайде у третьому томі, дивіться теорему Жордана, теор. 572.1.)

Твердження 248.1. *Доведемо, що якщо існують* ***неперервні похідні*** $\varphi'(t)$ *і* $\psi'(t)$, *то крива* (245.1) *спрямна.*

Доведення. Розглянемо ламану з вершинами в точках (247.1), що визначаються значеннями параметра (247.2). Координатами точки M_i, будуть

$$x_i = \varphi(t_i) \quad \text{та} \quad y_i = \psi(t_i) \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тоді периметр p ламаної запишеться так:

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

Але за формулою скінченних приростів (розд. 112)

$$\begin{gathered} x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i), \\ y_{i+1} - y_i = \psi(t_{i+1}) - \psi(t_i) = \psi'(\overline{\tau}_i)(t_{i+1} - t_i), \\ (t_i < \tau_i,\ \overline{\tau}_i < t_{i+1}), \end{gathered}$$

тож, остаточно

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\overline{\tau}_i)]^2} \cdot (t_{i+1} - t_i). \tag{248.1}$$

Якщо через L і $\overline{L}$ позначити, відповідно, **найбільші** значення функцій $|\varphi'(t)|$ та $|\psi'(t)|$ на проміжку $[t_0, T]$, то з (248.1) нескладно отримати оцінку:

$$p \leqslant \sqrt{L^2 + \overline{L}^2} \cdot (T - t_0). \tag{248.2}$$

Множина $\{p\}$ виявляється обмеженою зверху, отже, крива має скінченну довжину S, тобто вона спрямна, що й потрібно було довести. ☐

Оскільки $S = \sup\{p\}$, то з (248.2) також отримуємо і оцінку для S **зверху**:

$$S \leqslant \sqrt{L^2 + \overline{L}^2} \cdot (T - t_0), \tag{248.3}$$

яка нам зараз знадобиться. Втім, нам потрібна буде й оцінка **знизу**; якщо ввести **найменші** значення l і $\bar{l}$ функцій $|\varphi'(t)|$ і $|\psi'(t)|$ на проміжку $[t_0, T]$, то з (248.1), аналогічно до (248.2), знайдемо, що

$$p \geqslant \sqrt{l^2 + \bar{l}^2} \cdot (T - t_0),$$

а тоді і

$$S \geqslant \sqrt{l^2 + \bar{l}^2} \cdot (T - t_0). \tag{248.4}$$

Якщо змінити t, а разом з ним і положення точки $M(t)$ на кривій, то довжина **змінної** дуги $\overset{\frown}{AM}$ виявиться **функцією від параметра** t; ми будемо позначати її через

$$S = s(t).$$

Надамо змінній t **додатний** приріст Δt: точка M переміститься вздовж кривої, у напрямку до B, в положення M' (рис. 248.1). Величина S отримає **додатний** приріст Δs, що дорівнює довжині дуги $\overset{\frown}{MM'}$ (за **адитивністю** довжини дуги, доведеної в попередньому розділі). Отже, функція $s(t)$ виявляється зростаючою.

Розглянемо тепер, замість проміжку $[t_0, T]$, проміжок $[t,\ t + \Delta t]$ і застосуємо до дуги $\overset{\frown}{MM'}$, довжини Δs, оцінки (248.3) та (248.4):

$$\sqrt{l^2 + \bar{l}^2} \cdot \Delta t \leqslant \Delta s \leqslant \sqrt{L^2 + \overline{L}^2} \cdot \Delta t,$$

але тут під l і L ($\bar{l}$ і $\overline{L}$) ми маємо право розуміти найменше і найбільше значення функції $|\varphi'(t)|$ ($|\psi'(t)|$) вже на проміжку $[t,\ t + \Delta t]$. Звідси

$$\sqrt{l^2 + \bar{l}^2} \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant \sqrt{L^2 + \overline{L}^2}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

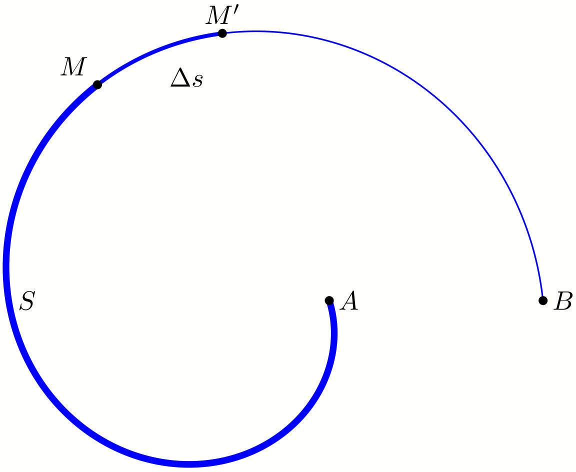


Рис. 248.1

і, оскільки, з неперервності похідних, при $\Delta t \to 0$ обидва числа l і L прямують до $|\varphi'(t)|$, а обидва числа $\bar{l}$ і $\bar{L}$ прямують до $|\psi'(t)|$, то обидва кореня в попередній нерівності прямують до спільної границі

$$\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}.$$

Отже, до тієї ж границі прямує і відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t}$; як легко побачити, це справедливо і для $\Delta t < 0$. Отже, маємо остаточно: *довжина змінної дуги $s = s(t)$ виявляється* ***диференційовною*** *функцією від параметра t;* ***її похідна за параметром*** *виражається формулою:*

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

або, коротше,

$$s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}. \tag{248.5}$$

Якщо піднести цю рівність до квадрата і помножити почленно на dt^2, то отримаємо чудову за простотою формулу

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{248.6}$$

яка до того ж має геометричну наочність. На рис. 248.2 в (криволінійному) прямокутному трикутнику “катетами” служать прирости координат точки M: $MN = \Delta x$, $NM_1 = \Delta y$, а “гіпотенузою” — дуга $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s$, яка є приростом дуги $\overset{\frown}{AM} = s$. Виявляється, що якщо не для самих приростів, то для їх головних частин, диференціалів, справедлива своєрідна “теорема Піфагора”.

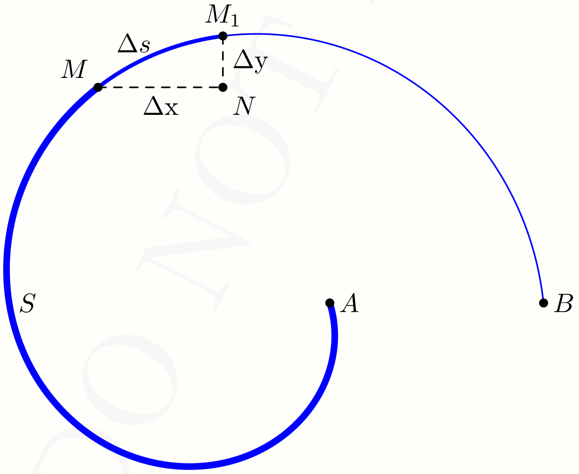


Рис. 248.2

Корисно відзначити окремі випадки важливої формули (248.5), що відповідають різним типам задання кривої. Так, якщо крива задана **явним** рівнянням у прямокутній системі координат $y = f(x)$, то в ролі “параметра” виявляється x, дуга s залежить від x: $s = s(x)$, і формула (248.5) набуває вигляду

$$s'_x = \sqrt{1 + y'^2_x}. \tag{248.7}$$

Якщо ж крива задана полярним рівнянням $r = g(\theta)$, то це, як ми знаємо, рівносильне заданню її **параметричними** рівняннями

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

де параметром буде θ; дуга цього разу буде функцією від θ: $s = s(\theta)$. Оскільки, очевидно,

$$x'_\theta = r'_\theta \cos\theta - r\sin\theta,$$
$$y'_\theta = r'_\theta \sin\theta + r\cos\theta,$$

то

$$x'^2_\theta + y'^2_\theta = r'^2_\theta + r^2,$$

і формула (248.5) перетворюється так:

$$s'_\theta = \sqrt{r'^2_\theta + r^2}. \tag{248.8}$$

Часто буває зручним взяти за **початкову точку** A **для відліку дуг** не один з кінців дуги, а якусь внутрішню точку її. У цьому випадку природно дуги, що відкладаються від неї у напрямку зростання параметра, вважати додатними, а в іншому

nebayduzhi.math@gmail.com

— від'ємними і, відповідно цьому, довжину дуги в першому випадку позначати знаком плюс, а у другому — знаком мінус. Ось цю **величину s дуги зі знаком** ми для стислості називатимемо просто **дугою**. Формули (248.5), (248.6), (248.7), (248.8) справедливі у всіх випадках.

(Зауважимо, що якщо додатний напрямок для відліку дуг вибирати не у бік зростання периметра, як це робиться зазвичай, а бік його спадання, то у формулах (248.5), (248.7), (248.8) довелося б перед радикалом поставити знак мінус.)

249. Дуга у ролі параметра. Додатний напрямок дотичної

Оскільки змінна дуга $s = s(t)$ є неперервною монотонно зростаючою функцією від параметра t, то й останній може розглядатися як однозначна і неперервна функція від s: $t = \omega(s)$, де s змінюється від 0 до довжини S всієї кривої (розд. 83). Підставляючи цей вираз для t в рівняння (245.1), ми отримаємо поточні координати x і y як функції від s:

$$\begin{aligned} x &= \varphi\big(\omega(s)\big) = \Phi(s), \\ y &= \psi\big(\omega(s)\big) = \Psi(s). \end{aligned}$$

Безсумнівно, дуга s, що відіграє роль “криволінійної абсциси” точки M, є самим природним параметром знаходження її положення.

Зауважимо, що початкова точка A для відліку дуг може бути взята і не на одному з кінців дуги кривої; тоді, як це роз'яснено вище, дуга s може набувати як додатні, так і від'ємні значення.

Нехай точка M кривої (245.1) буде **неособливою**, так що (дивіться (248.5))

$$s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} > 0;$$

тоді (розд. 94) для відповідного значення s (і поблизу нього) існує і неперервна похідна

$$t'_s = \omega'(s) = \frac{1}{\sqrt{x'^2_t + y'^2_t}},$$

а отже, існують і неперервні похідні

$$x'_s = \Phi'(s), \quad y'_s = \Psi'(s).$$

З основної формули (248.6), вважаючи, що всі диференціали взяті, наприклад, за s, отримаємо,

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1. \tag{249.1}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Отже, якщо точка M була неособливою для кривої заданої рівняннями (245.1), то вона напевно буде неособливою і при переході до параметра s. Формула (249.1), далі, дає змогу довести наступне корисне твердження.

Твердження 249.1. *Нехай M — **звичайна (неособлива)** точка кривої. Якщо через M_1 позначити змінну точку тієї ж кривої, то при прямуванні M_1 до M відношення довжини **хорди** MM_1 до довжини **дуги** $\overset{\frown}{MM_1}$ буде прямувати до одиниці:*

$$\lim_{M_1\to M}\frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}}=1. \tag{249.2}$$

(Для спрощення ми пишемо MM_1 — замість “довжина відрізка MM_1”, і $\overset{\frown}{MM_1}$ — замість “довжина дуги $\overset{\frown}{MM_1}$”.)

Доведення. Приймемо дугу за параметр, і нехай точка M відповідає значенню s дуги, а точка M_1 — значенню $s+\Delta s$. Їх координати нехай будуть, відповідно, x, y та $x+\Delta x,\ y+\Delta y$. Тоді

$$\overset{\frown}{MM_1}=\Delta s,\quad MM_1=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

так що

$$\frac{MM_1}{\overset{\frown}{MM_1}}=\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{|\Delta s|}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2}.$$

Переходячи праворуч до границі при $\Delta s\to 0$, використовуючи (249.1), отримуємо необхідний результат. ☐

Досі ми визначали положення дотичної до кривої в (звичайній) точці M її **кутовим коефіцієнтом** $\operatorname{tg}\alpha$, не розрізняючи двох протилежних напрямків на дотичній: $\operatorname{tg}\alpha$ для обох один і той самий. У деяких дослідженнях, однак, видається необхідним фіксувати **один** із цих напрямків.

Уявимо, що на кривій обрані початкова точка і визначений напрямок відліку дуг, візьмемо саме дугу за параметр, що визначає положення точки на кривій.

Нехай точці M, про яку йшлося, відповідає дуга s. Якщо надати s **додатний** приріст Δs, то дуга $s+\Delta s$ визначить нову точку M_1, що лежить від M **у бік зростання** дуг. Січну направимо від M до M_1, і кут, складений саме цим напрямком січної з додатним напрямком осі x, позначимо через β. Проєктуючи відрізок MM_1 на осі координат (рис. 249.1), за відомою теоремою теорії проєкцій, отримаємо

$$\Delta x=MM_1\cdot\cos\beta,\quad \Delta y=MM_1\cdot\sin\beta,$$

звідки

$$\cos\beta=\frac{\Delta x}{MM_1},\quad \sin\beta=\frac{\Delta y}{MM_1}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

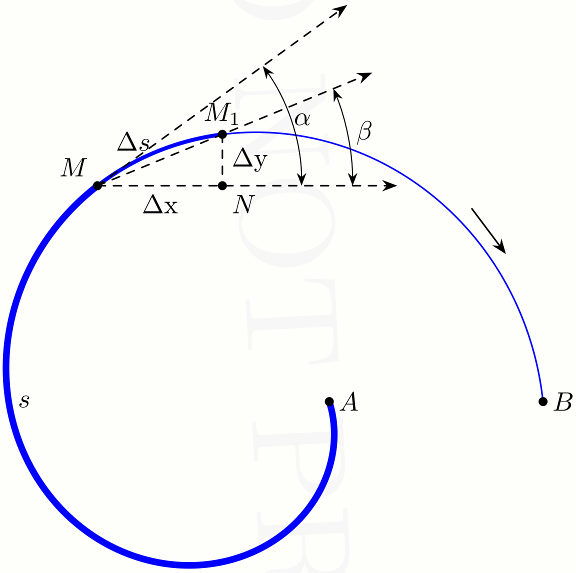


Рис. 249.1

Оскільки $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s$, то ці рівності можна переписати так:

$$\cos\beta = \frac{\Delta x}{\Delta s}\cdot\frac{\overset{\frown}{MM_1}}{MM_1}, \quad \sin\beta = \frac{\Delta y}{\Delta s}\cdot\frac{\overset{\frown}{MM_1}}{MM_1}. \tag{249.3}$$

Будемо називати ***додатним*** *той напрямок дотичної, що йде* ***у бік зростання*** *дуг*; точніше кажучи, напрямок визначається як граничне положення при $\Delta s \to 0$ для променя MM_1, спрямованого так, як це роз'яснено вище. Якщо кут **додатного** напрямку дотичної з додатним напрямком осі x позначити через α, то з (249.3) при переході до границі отримаємо, з урахуванням (249.2),

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}. \tag{249.4}$$

Ці формули визначають кут α вже з точністю до $2k\pi$ (k — ціле), отже, справді фіксують **один** з двох можливих напрямків дотичної, саме — **додатний**.

Зауваження. Все сказане в розд. 245 – розд. 249 з приводу плоских кривих переноситься без істотних змін на випадок просторової кривої:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T). \tag{249.5}$$

Поняття **довжини кривої** визначається у тих самих термінах, що і в розд. 247. За наявності у функцій φ, ψ, χ неперервних похідних — довжина скінченна, і крива **спрямна**. Довжина змінної дуги (від початкової точки кривої до змінної точки, що відповідає параметру t)

$$s = s(t)$$

nebayduzhi.math@gmail.com

диференційовна за t, причому її похідна за t виражається формулою

$$s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t}. \tag{249.6}$$

Звідси випливає формула для диференціала дуги:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{249.7}$$

У разі відсутності особливих точок (розд. 228) можна перейти до такого параметричного задання кривої, в якому роль параметра відіграє сама дуга s. Нарешті, визначається поняття додатного напрямку дотичної, напрямні косинуси якого даються формулами:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}. \tag{249.8}$$

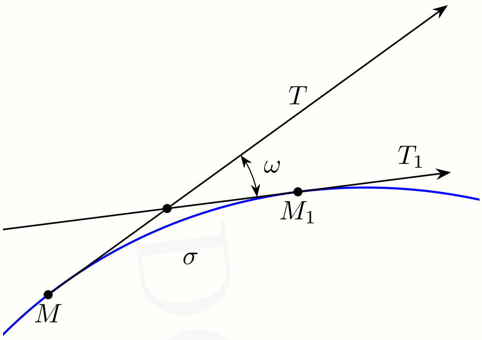


Рис. 250.1

7.5. Кривизна плоскої кривої

250. Поняття кривизни

Нехай знову дана проста крива

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T), \tag{250.1}$$

де цього разу функції φ і ψ вважаються неперервними разом зі своїми похідними **першого та другого** порядку. Розглянемо дугу цієї кривої, без особливих точок.

Якщо в кожній її точці провести дотичну (скажімо, у додатному напрямку), то внаслідок кривизни кривої ця дотична з переміщенням точки дотику обертатиметься; цим **крива** істотно відрізняється від **прямої**, для якої дотична (збігається з нею) зберігає один і той же напрямок для всіх точок.

Важливим елементом, що характеризує перебіг кривої є "степінь кривизни" або "кривизна" її в різних точках; цю кривизну можна виразити числом.

Нехай $\overset{\frown}{MM_1}$ (рис. 250.1) є дуга кривої; розглянемо дотичні MT і M_1T_1 проведені (у додатному напрямку) у кінцевих точках цієї дуги.

Природно кривизну кривої характеризувати кутом повороту дотичної, розрахованим на одиницю довжини дуги, тобто відношенням $\frac{\omega}{\sigma}$, де кут ω вимірюється в радіанах, а довжина σ — в обраних одиницях довжини. *Це відношення називають **середньою кривизною** дуги кривої.*

На різних ділянках кривої її середня кривизна буде, взагалі кажучи, різною. Існує проте (єдина) крива, для якою середня кривизна скрізь однакова: це **коло** (крім, зрозуміло, **прямої**, для якої кривизна завжди нуль).

Справді, для кола маємо (рис. 250.2)

$$\frac{\omega}{\sigma} = \frac{\omega}{R \cdot \omega} = \frac{1}{R},$$

nebayduzhi.math@gmail.com

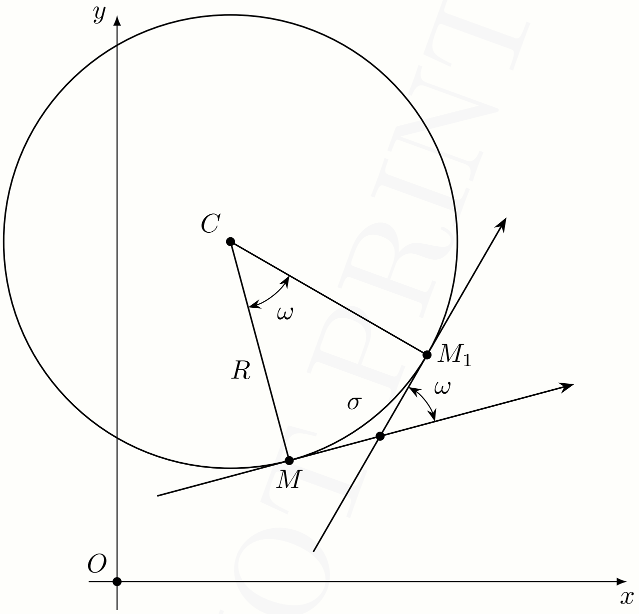


Рис. 250.2

про яку б дугу кола не йшлося.

Від поняття **середньої кривизни** дуги $\overset{\frown}{MM_1}$ перейдемо до поняття **кривизни в точці**.

Кривизною *кривої в точці M називається границя, до якої прямує середня кривизна дуги $\overset{\frown}{MM_1}$, коли точка M_1 вздовж кривої прямує до M.*

Позначивши кривизну кривої у цій точці буквою k, матимемо

$$k = \lim_{\sigma \to 0} \frac{\omega}{\sigma}.$$

Для кола, очевидно, $k = \frac{1}{R}$, тобто *кривизна кола є величина, зворотна радіусу кола.*

Зауваження. Поняття середньої кривизни та кривизни кривої в точці абсолютно аналогічні поняттям середньої швидкості і швидкості рухомої точки в деякий момент часу. Можна сказати, що середня кривизна характеризує середню швидкість зміни напрямку дотичної на деякій дузі, а кривизна в точці — справжню (миттєву) швидкість зміни цього напрямку, в заданій точці.

Звернемося тепер до виведення аналітичного виразу для кривизни, яким її можна було б обчислювати виходячи з параметричного завдання кривої.

Припустимо спочатку, що в ролі параметра фігурує дуга. Як ми знаємо (розд. 249), таке задання завжди існує, якщо обмежитися дугою кривої, де немає особливих точок.

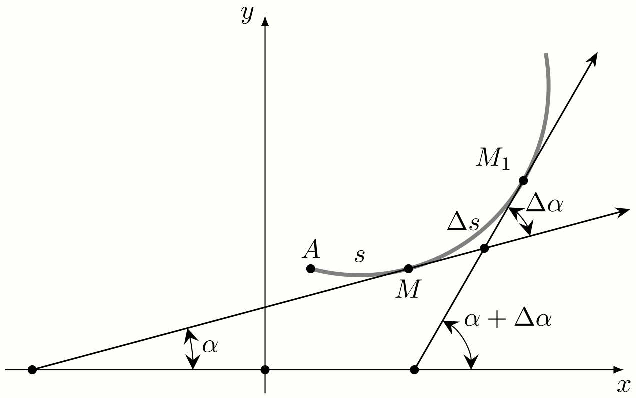


Рис. 250.3

Візьмемо на цій ділянці кривої точку M (не особливу), і нехай їй відповідає значення s дуги. Надавши s довільний приріст Δs, отримаємо іншу точку $M_1(s + \Delta s)$ (рис. 250.3). Приріст $\Delta\alpha$ кута нахилу дотичної при переході від M до M_1 дасть кут ω між цими дотичними: $\omega = \Delta\alpha$.

Оскільки $\sigma = \Delta s$, то середня кривизна дорівнюватиме $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$.

Спрямувавши $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s$ до нуля, для кривизни кривої в точці M отримаємо вираз

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}. \tag{250.2}$$

Важливо зазначити, втім, що ця формула справедлива лише з **точністю до знака**, оскільки кривизна, за нашим означенням, є число невід'ємне, а праворуч може вийти і від'ємний результат.

Річ у тому, що як $\Delta\alpha$, так і Δs можуть бути від'ємними, так що, строго кажучи, слід би писати: $\omega = |\Delta\alpha|$, $\sigma = |\Delta s|$ і, нарешті,

$$k = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

Це зауваження слід мати на увазі і надалі.

Для того, щоб надати формулі (250.2) вигляду, зручному для безпосереднього обчислення (а разом з тим встановити саме існування кривизни), звернемося до довільного параметричного завдання кривої (250.1).

Оскільки точка $M(t)$ не є особливою, і $x_t'^2 + y_t'^2 > 0$, то не зменшуючи загальності, можна вважати, що саме $x_t' = \varphi'(t) \neq 0$.

Перепишемо тепер формулу (250.2) інакше:

$$k = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\alpha'_t}{s'_t}. \tag{250.3}$$

Але $s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}$ (248.5), залишається лише знайти α'_t. Оскільки (106.5)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{і} \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{y'_t}{x'_t},$$

то

$$\alpha'_t = \frac{1}{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} \cdot \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{x'^2_t} = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{x'^2_t + y'^2_t}. \tag{250.4}$$

Підставивши в (250.3) значення s'_t та α'_t прийдемо до остаточної формули:

$$k = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{\left(x'^2_t + y'^2_t\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x' y'' - x'' y'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{250.5}$$

Ця формула цілком придатна для обчислення, бо всі похідні, що фігурують у ній, легко обчислюються за параметричними рівняннями кривої.

Якщо крива задана явним рівнянням $y = f(x)$, то ця формула набуває вигляду

$$k = \frac{y''_{x^2}}{\left(1 + y'^2_x\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{250.6}$$

Зрештою, якщо дано полярне рівняння кривої: $r = g(\theta)$, то, як завжди, можна перейти до параметричного задання у прямокутних координатах, вважаючи θ за параметр. Тоді за допомогою (250.5) отримаємо

$$k = \frac{r^2 + 2r'^2_\theta - r r''_{\theta^2}}{\left(r^2 + r'^2_\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{\left(r^2 + r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{250.7}$$

251. Коло кривизни та радіус кривизни

У багатьох дослідженнях є зручним наближено замінити криву поблизу даної точки колом, що має ту ж кривизну, що і крива у цій точці.

*Ми будемо називати **колом кривизни** кривої в заданій на ній точці M — коло, яке*

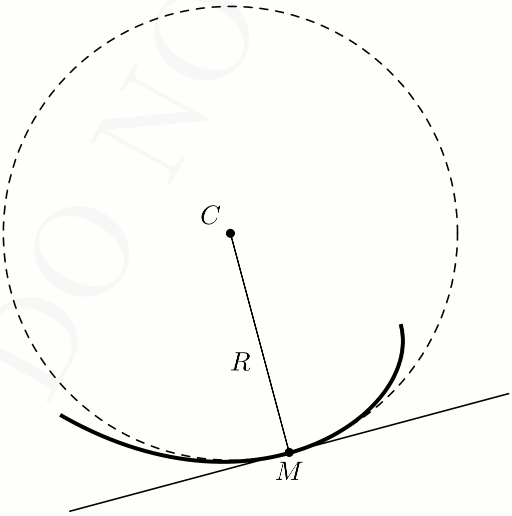


Рис. 251.1

1) є дотичним колом до кривої у точці M;
2) має опуклість поблизу цієї точки у той самий бік, як і крива;
3) має ту ж кривизну, що й крива у точці M (рис. 251.1).

Центр C кола кривизни називається просто **центром кривизни**, а радіус цього кола — **радіусом кривизни** (кривої у даній точці).

З означення кола кривизни випливає, що центр кривизни завжди лежить на нормалі до кривої в заданій точці з боку увігнутості (тобто зі сторони, зворотній тій, куди спрямована опуклість кривої). Якщо кривизну кривої у цій точці позначити через k, то, згадуючи (розд. 250), що для кола мали формулу:

$$k = \frac{1}{R},$$

тепер для **радіуса кривизни**, очевидно, матимемо

$$R = \frac{1}{k}.$$

Користуючись різними виразами, введеними в попередньому розділі для кривизни, ми можемо відразу написати ряд формул для радіуса кривизни:

$$R = \frac{ds}{d\alpha}, \tag{251.1}$$

$$R = \frac{\left(x_t'^2 + y_t'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x_t' y_{t^2}'' - x_{t^2}'' y_t'}, \tag{251.2}$$

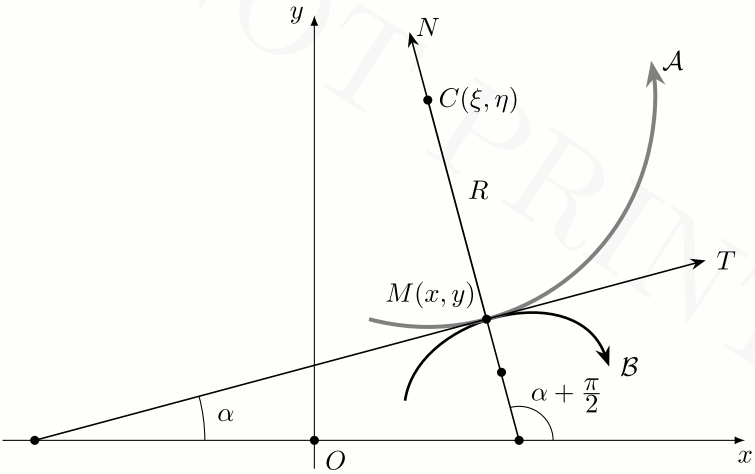


Рис. 251.2

$$R=\frac{\left(1+y_x'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''_{x^2}}, \tag{251.3}$$

$$R=\frac{\left(r^2+r_\theta'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r_\theta'^2-rr''_{\theta^2}}, \tag{251.4}$$

які застосовуються у відповідних випадках.

Зі всіх формул радіус кривизни випливає зі **знаком**, як і було вище для кривизни. Однак тут ми знак не відкидатимемо, а спробуємо встановити його геометричний зміст.

З цією метою введемо поняття додатного напрямку нормалі до кривої. Ми вже роз'яснили в розд. 249, що на дотичній додатним вважається напрямок у бік зростання дуг. На нормалі ж ми за додатний оберемо такий напрямок, щоб він відносно (додатно спрямованої) дотичної був так само орієнтований, як вісь y відносно осі x. Наприклад, при звичайному розташуванні цих осей нормаль повинна становити з дотичною кут $+\frac{\pi}{2}$ проти годинникової стрілки.

Тепер розглядаючи радіус кривизни $R = MC$ як спрямований відрізок, що лежить на нормалі, природно приписувати йому знак плюс, якщо він відкладається по нормалі у додатному напрямку, і знак мінус у противному випадку. Так, на рис. 251.2 для кривої $\mathcal{A}$ радіус кривизни матиме знак плюс, а для кривої $\mathcal{B}$ знак мінус.

Ми стверджуємо, що знак радіуса кривизни, що отримується за будь-якою з виведених вище формул, точно відповідає щойно даному означенню. При цьому, однак, важливо наголосити, що у всіх випадках додатний напрямок відліку дуг вважається відповідним зростанню параметра (t, x або θ).

Переконатися у сказаному простіше для явного задання кривої: тут (рис. 251.2) дотична спрямована **направо**, отже, нормаль **вгору**. Якщо $y''_{x^2} > 0$ (як у точці M, так і за неперервністю поблизу неї), то крива $\mathcal{A}$ тут опукла вниз (розд. 143), і радіус кривизни R додатний; таким він і виходить за формулою (251.3). Навпаки, при $y''_{x^2} < 0$ крива $\mathcal{B}$ опукла вгору, радіус R від'ємний, що і у цьому випадку цілком відповідає формулі (251.3).

Те саме можна показати і для інших формул.

252. Приклади

1) **Ланцюгова лінія** (рис. 99.2):

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

В цьому випадку (порівняйте з пр. 99.28)

$$\sqrt{1+y'^2_x} = \operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{y}{a};$$

з іншого боку,

$$y''_{x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a} = \frac{y}{a^2}.$$

Тому (251.3)

$$R = \frac{\left(\dfrac{y}{a}\right)^3}{\dfrac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}.$$

Оскільки такий самий вираз, як нескладно побачити, має і відрізок нормалі $n = MN$, то приходимо до такого способу побудови центру кривизни C: відрізок нормалі MN (дивіться рис. 99.2) потрібно відкласти по нормалі, але у зворотний (додатний) бік.

2) **Астроїда** (рис. 224.2):

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Похідні y'_x і y''_{x^2} можна знайти, не розв'язуючи рівняння, методом диференціювання неявних функцій:

$$x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}}y' = 0 \quad \text{або} \quad x^{\frac{1}{3}}y' + y^{\frac{1}{3}} = 0,$$

звідки

$$y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}};$$

потім.

$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y' + \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y' + x^{\frac{1}{3}}y'' = 0,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

звідки

$$y'' = -\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3xy^{\frac{2}{3}}}\,y' = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}.$$

Підставивши значення y' і y'' у формулу (251.3), отримаємо

$$R = 3\Big(axy\Big)^{\frac{1}{3}}.$$

3) **Циклоїда** (рис. 225.1):

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Оскільки (пр. 231.4) $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$, то $d\alpha = -\frac{1}{2}dt$; з іншого боку, як легко обчислити,

$$x'_t = a(1 - \cos t), \quad y'_t = a\sin t, \quad x'^2_t + y'^2_t = 4a^2\sin^2\frac{t}{2},$$

тож

$$s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = 2a\sin\frac{t}{2}, \quad \text{тобто} \quad ds = 2a\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

У такому випадку для обчислення можна скористатися основною формулою (251.1):

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{2a\sin\frac{t}{2}dt}{-\frac{1}{2}dt} = -4a\sin\frac{t}{2}.$$

Якщо згадати виведений нами в пр. 231.4 вираз для відрізка нормалі n, то виявиться, що

$$R = -2n.$$

Звідси, побудова центру кривизни C, ясна з креслення.

4) **Евольвента круга** (рис. 225.8):

$$x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t).$$

Тут $\alpha = t$ (пр. 231.6), тому $d\alpha = dt$. З іншого боку,

$$x'_t = at\cos t, \quad y'_t = at\sin t, \quad x'^2_t + y'^2_t = a^2t^2;$$

звідси

$$s'_t = at, \quad ds = at\,dt.$$

Тому також отримуємо просто

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = at = MB.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Отже, точка торкання B (точка збігу нитки з круга) і буде центром кривизни для траєкторії кінця M нитки. **Геометричним місцем центрів кривизни нашої кривої виявляється початковий круг.**

(Тут ми маємо окремий випадок одного факту, який у загальному вигляді буде розглянутий нами нижче, в розд. 255.)

5) **Логарифмічна спіраль** (рис. 233.1):

$$r = ae^{m\theta}.$$

Маємо $r'_\theta = mr$, $r''_{\theta^2} = m^2 r$. Підставляючи це у формулу (251.4), знайдемо:

$$R = \frac{(r^2 + m^2r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2m^2r^2 - m^2r^2} = r\sqrt{1+m^2}.$$

Але $m = \operatorname{ctg}\omega$ (пр. 233.3), так що вираз для R можна написати у вигляді

$$R = \frac{r}{\sin\omega},$$

тоді безпосередньо з креслення ясно, що полярний відрізок нормалі $n_p = NM = R$. Отже, центром кривизни буде точка N; це дає легкий спосіб побудови центру кривизни логарифмічної спіралі.

6) **Кардіоїда** (рис. 233.2):

$$r = a(1 + \cos\theta).$$

Тут $r'_\theta = -a\sin\theta$, $r''_{\theta^2} = -a\cos\theta$. Легко отримати:

$$r^2 + r'^2_\theta = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2};$$

залишається ще обчислити

$$r'^2_\theta - rr''_{\theta^2} = a^2(1+\cos\theta) = 2a^2\cos^2\frac{\theta}{2},$$

а тоді, за формулою (251.4), одразу отримуємо

$$R = \frac{4}{3}a\cos\frac{\theta}{2}.$$

Згадуючи (пр. 233.4) вираз полярного відрізка нормалі для кардіоїди, бачимо, що

$$R = \frac{2}{3}n_p.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

7) **Лемніската Я. Бернуллі** (рис. 226.8):

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

Ми бачили в пр. 233.5, що в цьому випадку $\alpha = 3\theta + \frac{\pi}{2}$, так що $d\alpha = 3\,d\theta$. Але тоді за формулою (251.1) відразу отримуємо

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{1}{3}s'_\theta = \frac{1}{3}\sqrt{r^2 + r'^2_\theta} = \frac{1}{3}n_p = \frac{2a^2}{3r}.$$

Оскільки нормаль до лемніскати ми будувати вміємо, то звідси випливає і спосіб побудови центру кривизни.

8) **Парабола:**

$$y^2 = 2px.$$

Користуючись тут методами диференціювання неявних функцій, знайдемо послідовно

$$yy'_x = p, \quad yy''_{x^2} + y'^2_x = 0, \quad \text{звідки} \quad y^3y''_{x^2} = -p^2.$$

Тепер, за формулою (251.3),

$$R = \frac{(1 + y'^2_x)^{\frac{3}{2}}}{y''_{x^2}} = \frac{[y^2 + (yy'_x)^2]^{\frac{3}{2}}}{y^3y''_{x^2}} = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{-p^2} \quad (y > 0).$$

Згадуючи (пр. 231.1), що відрізок нормалі $n = \sqrt{y^2 + p^2}$, отримуємо

$$R = -\frac{n^3}{p^2}.$$

9) **Еліпс і гіпербола:**

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Диференціюємо цю рівність двічі:

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{yy'_x}{b^2} = 0, \quad \text{звідки} \quad yy'_x = \mp\frac{b^2x}{a^2};$$

далі,

$$yy''_{x^2} = \mp\frac{b^2}{a^2}y'^2_x \quad \text{або} \quad y^3y''_{x^2} = -\frac{b^4}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}\right) = -\frac{b^4}{a^2}.$$

Як і тільки що, звідси

$$R = -\frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} \quad (y > 0).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

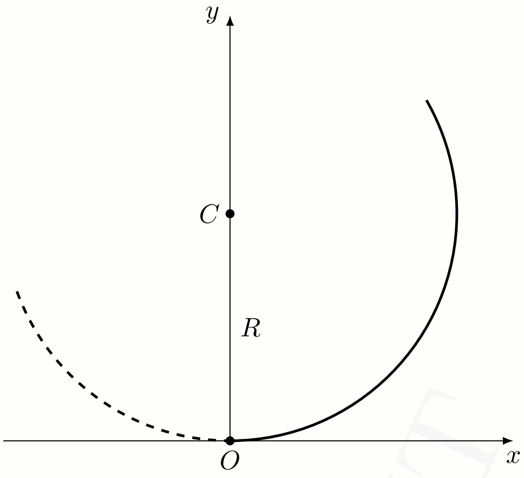


Рис. 252.1

Ми мали вже (пр. 231.2) для цього випадку вираз для відрізка нормалі

$$n = \frac{\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}}{a^2},$$

тож

$$R = -\frac{a^2}{b^4}n^3.$$

Відомо, що як для еліпса, так і для гіперболи напівпараметр p виражається так: $p = \frac{b^2}{a}$. Тому і тут для R виходить той самий остаточний вираз, що і для параболи.

Для всіх трьох конічних перерізів радіус кривизни виявляється пропорційний кубу відрізка нормалі.

10) На закінчення скажемо кілька слів про одне практичне питання, в якому якраз і використовується істотно **зміна** кривизни вздовж кривої: йдеться про так звані **перехідні криві**, що застосовуються при розбивці залізничних закруглень.

Як доводиться в механіці, під час руху матеріальної точки вздовж кривої розвивається відцентрова сила, величина якої визначається формулою

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

де m — маса точки, v — її швидкість, а R — радіус кривизни кривої в точці.

Якби прямолінійна частина залізничної колії безпосередньо примикала до закруглення, розбитого по дузі кола (рис. 252.1), то при переході на це закруглення відцентрова сила виникала б миттєво, створюючи різкий і сильний поштовх, шкідливий

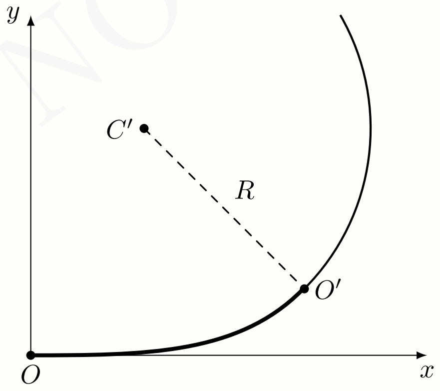


Рис. 252.2

для рухомого складу та для верхньої будови шляху. Для уникнення цього прямолінійну частину шляху сполучають з круговою за допомогою якоїсь **перехідної** кривої (рис. 252.2). Вздовж неї радіус кривизни **поступово** зменшується від нескінченного значення — у точці стику з прямолінійною частиною — до величини радіуса кола — у точці стику з круговою дугою, і відповідно до цього **поступово** наростає відцентрова сила.

Найчастіше використовують кубічну параболу як **перехідну криву**

$$y = \frac{x^3}{6q}.$$

В цьому випадку, очевидно, маємо

$$y' = \frac{x^2}{2q}, \quad y'' = \frac{x}{q},$$

тому для радіуса кривизни випливає вираз

$$R = \frac{q}{x}\left(1 + \frac{x^4}{4q^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

При $x = 0$ маємо $y' = 0$ і $R = \infty$, наша крива на початку координат дотикається до осі x і має нульову кривизну.

Методами диференціального числення (розд. 134, розд. 135) легко отримати, що вираз для R спадає лише до $x = 0{,}946\sqrt{q}$, де він має мінімум $1{,}1390\sqrt{q}$. Тільки ця частина кривої і використовується на практиці.

Іноді у ролі перехідної кривої застосовується і лемніската.

nebayduzhi.math@gmail.com

253. Координати центру кривизни

Виведемо тепер формули для координат центру кривизни. Будемо позначати координати даної точки M кривої через x і y, а координати відповідного їй центру кривизни C — через ξ і η.

Радіус кривизни $R = MC$ (рис. 251.2) лежить на осі — саме на спрямованій нормалі, яка з віссю x становить кут $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Проєктуючи відрізок MC по черзі на вісь x і на вісь y, за основною теоремою теорії проєкцій, матимемо

$$\xi - x = R\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -R\sin\alpha,$$
$$\eta - y = R\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = R\cos\alpha.$$

Звідси для координат центру кривизни отримуємо:

$$\begin{cases} \xi = x - R\sin\alpha, \\ \eta = y + R\cos\alpha. \end{cases} \tag{253.1}$$

Використовуючи отримані нами раніше формули (251.1), (249.4)

$$R = \frac{ds}{d\alpha}, \quad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds},$$

щойно отримані вирази можна переписати у виді

$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{dy}{d\alpha}, \\ \eta = y + \dfrac{dx}{d\alpha}. \end{cases} \tag{253.2}$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями (250.1), то, за допомогою виразу (250.4) для α'_t, легко перетворити формули (253.2) так:

$$\begin{cases} \xi = x - \dfrac{x_t'^2 + y_t'^2}{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t} y'_t, \\ \eta = y + \dfrac{x_t'^2 + y_t'^2}{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t} x'_t. \end{cases} \tag{253.3}$$

Як бачимо, ξ і η тут є функції від того ж параметра t, що і x, y.

У випадку кривої, заданої явним рівнянням $y = f(x)$, формули (253.3) набувають окремого вигляду:

$$\xi = x - \frac{1 + y_x'^2}{y''_{x^2}} y'_x, \quad \eta = y + \frac{1 + y_x'^2}{y''_{x^2}}. \tag{253.4}$$

Формули (253.3) можна застосувати і у тому випадку, якщо крива задана полярним рівнянням $r = g(\theta)$, вибираючи, як завжди, за параметр кут θ.

Якщо порівняти щойно отримані формули (253.4) з формулами для межової точки на нормалі (137.1), знайденими під час розв'язання задачі в пр. 137.3 (рис. 137.2), то переконаємося в тому, що згадана межова точка співпадає з центром кривизни.

Ще більш важливий результат вийде, якщо зіставити формули (253.4) і (251.3) з формулами (243.4) і (243.5): *коло кривизни кривої в цій точці є не що інше, як стичне коло.* Іншими словами (розд. 244), *коло кривизни є граничне положення кола, що проходить через три точки кривої, які прямують до збігу з даною точкою.*

Цей результат, звісно, можна було передбачити: у разі дотику **другого** порядку між даною кривою і колом, ордината y і **дві** її похідні y'_x і y''_{x^2} мають у цій точці одні і ті ж значення для обох кривих, так що для них співпадають в цій точці **напрямки опуклості** і величини кривизни, що залежать тільки від згаданих похідних.

254. Означення еволюти і евольвенти; знаходження еволюти

Якщо точка $M(x, y)$ переміщаються вздовж даної кривої, то відповідний центр кривизни $C(\xi, \eta)$, взагалі кажучи, також описує деяку криву. *Геометричне місце центрів кривизни даної кривої називається її* ***еволютою****. Навпаки, дана крива по відношенню до своєї еволюти називається її* ***евольвентою****.*

Формули (253.3) або (253.4), що виражають координати ξ, η центру кривизни C через параметр t (або x), можна розглядати як вже готові **параметричні рівняння еволюти.** Іноді вигідно виключити з них параметр і виразити еволюту неявним рівнянням

$$F(\xi, \eta) = 0.$$

Приклади.

1) Знайти еволюту **параболи**

$$y^2 = 2px.$$

Користуючись отриманими вище (пр. 252.8) результатами:

$$yy'_x = p, \quad y^3 y''_{x^2} = -p^2$$

і використовуючи формули (253.4), знаходимо координати центру кривизни:

$$\xi = x - yy'_x \frac{y^2 + (yy'_x)^2}{y^3 y''_{x^2}} = x + \frac{y^2 + p^2}{p} = 3x + p = \frac{3y^2}{2p} + p,$$

$$\eta = y + y\frac{y^2 + (yy'_x)^2}{y^3 y''_{x^2}} = y - y\frac{y^2 + p^2}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}.$$

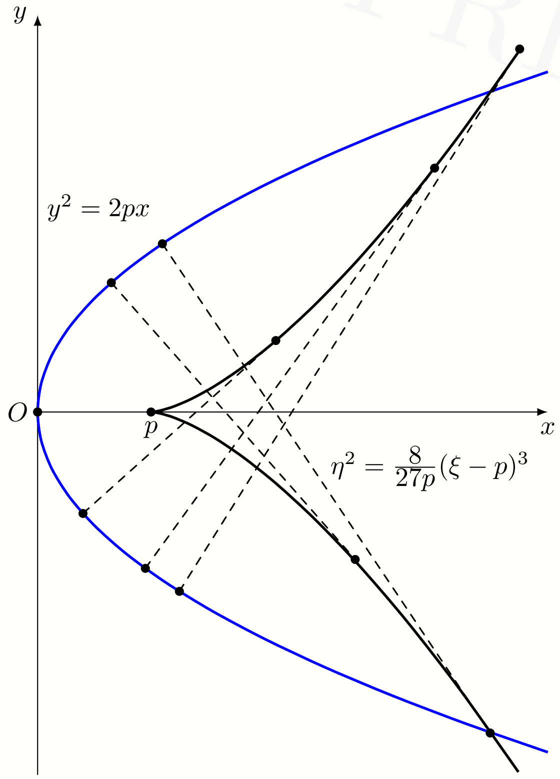


Рис. 254.1

Отже, параметричні рівняння еволюти параболи (де y в ролі параметра) будуть

$$\xi = \frac{3y^2}{2p} + p, \quad \eta = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Виключаючи з цих рівнянь y, отримаємо

$$y^2 = \frac{2p}{3}(\xi - p), \quad y^3 = -p^2\eta,$$

звідки, нарешті,

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}(\xi - p)^3.$$

Ми бачимо, що еволюта параболи є напівкубічна парабола (рис. 254.1).

2) Знайти еволюту **еліпса**

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Маємо

$$x'_t = -a\sin t, \quad x''_{t^2} = -a\cos t, \quad y'_t = b\cos t, \quad y''_{t^2} = -b\sin t.$$

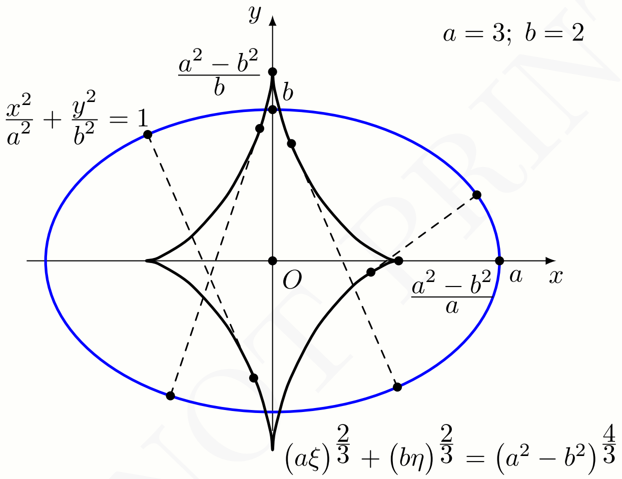


Рис. 254.2

Підставляючи це у формулу (253.3), отримаємо

$$\xi = a\cos t - \frac{b\cos t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t,$$
$$\eta = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t.$$

Таке параметричне задання еволюти еліпса. Виключивши t, отримаємо рівняння цієї кривої у неявному вигляді:

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\eta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}} \quad (c^2 = a^2 - b^2).$$

Крива нагадує собою **астроїду** і випливає із неї витягуванням за вертикальним напрямком рис. 254.2.

Аналогічно, але лише за допомогою гіперболічних функцій (замість тригонометричних), для гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

виходить еволюта

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}} - (b\eta)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}} \quad (c^2 = a^2 + b^2).$$

3) Знайти еволюту **астроїди**

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

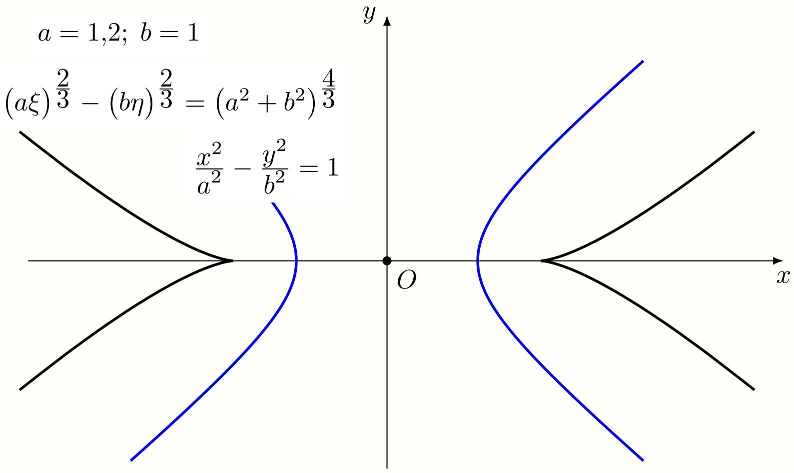


Рис. 254.3

Ми мали вже в пр. 252.2:

$$y'_x = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad y''_{x^2} = \left(\frac{a^2}{3x^4 y}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Підставивши це у формули (253.4), після спрощень отримаємо

$$\xi = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}, \quad \eta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

З цих рівнянь, спільно з рівнянням самої астроїди, далі можна виключити x і y:

$$\xi + \eta = \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^3, \quad \xi - \eta = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3,$$

$$(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi-\eta)^{\frac{2}{3}} = 2\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) = 2a^{\frac{2}{3}}.$$

Якщо повернути осі координат на 45°, то нові координати ξ_1, η_1 виразяться через старі ξ, η за формулами

$$\xi_1 = \frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}, \quad \eta_1 = \frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}},$$

так що в новій координатній системі рівняння шуканої еволюти буде

$${\xi_1}^{\frac{2}{3}} + {\eta_1}^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

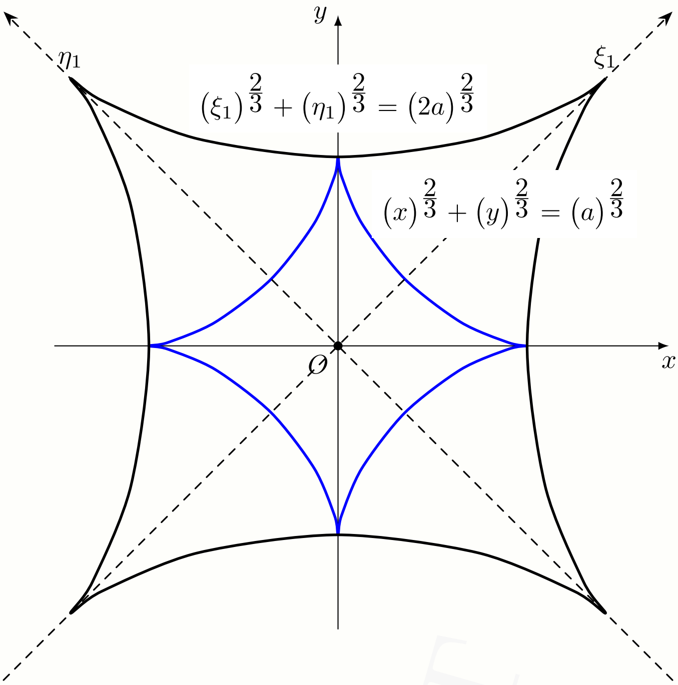


Рис. 254.4

І це знову рівняння **астроїди**. Отже, еволютою астроїди служить астроїда вдвічі більших розмірів, з осями, повернутими на 45° (рис. 254.4).

4) Знайти еволюту **циклоїди**

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Оскільки ми знаємо (пр. 231.4), що для циклоїди:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}, \quad d\alpha = -\frac{1}{2}dt,$$

то зручніше користуватися формулами (253.2). Підставивши в них це значення $d\alpha$, отримаємо

$$\xi = x + 2y'_t, \quad \eta = y - 2x'_t$$

або

$$\xi = a(t + \sin t), \quad \eta = -a(1 - \cos t).$$

Поклавши $t = \tau - \pi$, отримані параметричні рівняння перепишемо у вигляді

$$\xi = -\pi a + a(\tau - \sin \tau), \quad \eta = -2a + a(1 - \cos \tau).$$

Звідси ясно, що еволюта циклоїди є циклоїда, конгруентна з даною, але зміщена на відрізок πa ліворуч (паралельно осі x, в від'ємному напрямку) і на відрізок $2a$ вниз (паралельно осі y, теж у від'ємному напрямку).

Залишаємо читачеві переконатися у тому, що еволюта епіциклоїди або гіпоциклоїди також конгруентна з початковою кривою і випливає із неї простим поворотом.

5) Знайти еволюту **логарифмічної спіралі**

$$r = ae^{m\theta}.$$

Геометрична побудова центру кривизни, зазначена в пр. 252.5 дає змогу легко встановити його полярні координати r_1 і θ_1. Саме (дивіться рис. 233.1)

$$r_1 = n_p = r \operatorname{ctg} \omega = mr, \quad \theta_1 = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

Виключаючи r і θ з цих рівнянь та рівняння самої спіралі, отримаємо рівняння еволюти

$$r_1 = mae^{m\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)} = a_1 e^{m\theta_1}.$$

Повернувши полярну вісь на належний кут, можна ототожнити це рівняння з початковим; отже, еволюта логарифмічної спіралі є також спіраллю, що випливає з даної спіралі поворотом навколо полюса.

До **побудови евольвент** для заданої кривої ми повернемося після того, як вивчимо деякі властивості еволют і евольвент.

255. Властивості еволют і евольвент

Ми мали параметричне задання еволюти у вигляді

$$\xi = x - R\sin\alpha, \quad \eta = y + R\cos\alpha, \tag{255.1}$$

вважаючи x, y, R, α функціями від параметра. Припустимо тепер існування (неперервних) **третіх** похідних від x і y за параметром (нагадаємо, що до R вже входять **другі** похідні); тоді вираз (255.1) можна продиференціювати:

$$d\xi = dx - R\cos\alpha\, d\alpha - dR\sin\alpha,$$
$$d\eta = dy - R\sin\alpha\, d\alpha + dR\cos\alpha.$$

Приймаючи до уваги, що

$$R\cos\alpha\, d\alpha = \frac{ds}{d\alpha}\frac{dx}{ds}\, d\alpha = dx,$$
$$R\sin\alpha\, d\alpha = \frac{ds}{d\alpha}\frac{dy}{ds}\, d\alpha = dy,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

остаточно отримаємо

$$d\xi = -\sin\alpha\, dR, \quad d\eta = \cos\alpha\, dR. \tag{255.2}$$

Обмежимося тепер розглядом такої ділянки кривої, на якій R не дорівнює ні нулю, ні нескінченності і, крім того, dR не дорівнює нулю. Це гарантує нам відсутність особливих точок як на цій кривій, так і на її еволюті. Оскільки $dR \neq 0$, то радіус кривизни R змінюється монотонно: або зростає, або спадає.

Ділячи одну на іншу формули (255.2), знайдемо:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

так що кутові коефіцієнти дотичних до еволюти та до евольвенти зворотні за величиною і за знаком, а самі дотичні — взаємно перпендикулярні. Отже маємо таку властивість.

Властивість 255.1. *Нормаль до евольвенти служить (у центрі кривизни) дотичною до еволюти.*

Візьмемо сімейство нормалей до евольвенти; воно залежить від одного параметра (наприклад, від того, яким визначається положення точки на даній кривій). З доведеного ясно, що *еволюта є* ***обвідною*** *для цього сімейства нормалей.*

Для вправи пропонуємо читачеві переконатись у цьому ж іншим способом: виходячи з рівняння нормалей

$$(X - x)x'_t + (Y - y)y'_t = 0$$

(де параметр t міститься в x, y, x'_t, y'_t), методами розд. 238 знайти обвідну та встановити її збіг з еволютою (253.3). Можна довести також, що *центр кривизни є характеристична точка на нормалі*, тобто граничне положення точки перетину даної нормалі з нескінченно близькою до неї.

Перейдемо тепер до розгляду дуги σ на еволюті. Підносячи рівності (255.2) до квадрата і додаючи, і використовуючи формули (248.6), знайдемо для диференціала дуги

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = dR^2,$$

звідки

$$d\sigma = \pm dR \tag{255.3}$$

або (адже $dR \neq 0$)

$$\frac{d\sigma}{dR} = \pm 1.$$

Оскільки це відношення є **неперервною** функцією від параметра, яка не може **перескакувати** від значення -1 до значення $+1$ (не проходячи проміжних значень),

nebayduzhi.math@gmail.com

то вона **на всій ділянці** дорівнює одному з цих чисел. Іншими словами, в правій частині рівності (255.3) **на всій ділянці** фігурує один і той же знак, плюс або мінус.

Цей знак залежить від вибору **напрямку** для відліку дуг на еволюті. Якщо вибрати його так, щоб дуга σ зростала разом з радіусом кривизни R, то у формулі (255.3) потрібно взяти плюс; якщо ж дуга σ зростає у тому напрямку, якому відповідає спадання R, то буде мінус.

Зробимо перше з цих припущень; тоді

$$dR = d\sigma, \quad \text{звідки} \quad R - \sigma = c = \text{const}, \tag{255.4}$$

і ми отримуємо таку властивість.

Властивість 255.2. *Радіус кривизни відрізняється від дуги еволюти на сталу величину.*

Отже, різниця радіусів кривизни у двох точках евольвенти дорівнює дузі еволюти між відповідними центрами кривизни. Звідси, до речі, випливає цікавий спосіб спрямляння дуги на еволюті.

Доведена властивість еволюти допускає витончене механічне тлумачення. Для того, щоб полегшити його виклад, припустимо, що радіус кривизни R, який (не дорівнює 0) зберігає на усій даній ділянці той самий знак, буде скрізь додатний; цього можна досягти вибором належного напрямку для відліку дуг на евольвенті. Далі, відлічуючи дугу на евольвенті від точки P, якій відповідає найменший радіус кривизни, матимемо і $\sigma > 0$. За цих умов і стала c, що фігурує у рівності (255.4), також додатна.

Уявимо тепер, що на еволюту навернута гнучка нерозтяжна нитка, **від кінця** Q (рис. 255.1) **до початку** P; вона збігає з еволюти у початковій точці P по дотичній і обривається на відстані c від P у відповідній точці A евольвенти. Станемо нитку розгортати, змотуючи з еволюти, але зберігаючи її у натягнутому стані. Нехай QNM буде довільне її положення; оскільки NM більше $PA = c$ якраз на довжину дуги $\overset{\frown}{PN} = \sigma$, то NM і є радіус кривизни R, тобто **точка** M **лежить на евольвенті.**

Отже, евольвента може бути описана розгортанням нитки, попередньо навернутої на еволюту (звідси, власне, ведуть своє походження і терміни **еволюта і евольвента**, що означають розгортка і розгортаюча). Інакше можна сказати, що *евольвента є траєкторією точки A прямої AP, що описується нею, коли пряма котиться по еволюті без ковзання.*

На закінчення виведемо ще формулу для **радіуса кривизни** ϱ **еволюти.** Позначивши через β кут, складений дотичною до еволюти з віссю x, маємо, очевидно:

$$\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}, \quad \text{тому} \quad d\beta = d\alpha. \tag{255.5}$$

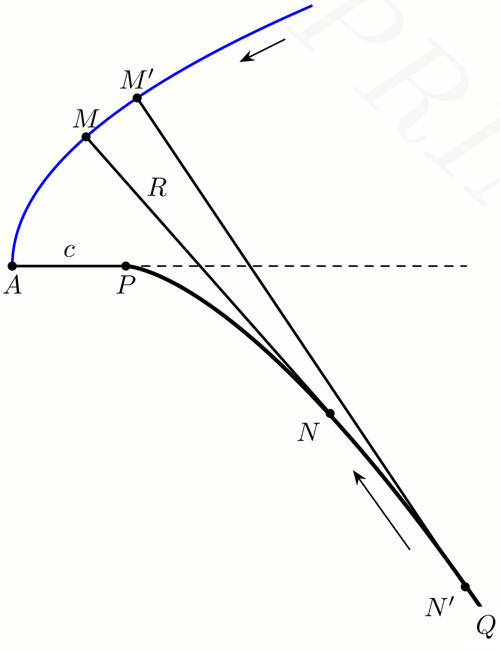


Рис. 255.1

Тому (дивіться (255.3) та (255.4))

$$\varrho = \frac{d\sigma}{d\beta} = \frac{dR}{d\alpha} = \frac{ds}{d\alpha}\frac{dR}{ds} = R\frac{dR}{ds}. \tag{255.6}$$

Потрібно пам'ятати, що у цій формулі вважається, що σ зростає разом із R; інакше варто було б у правій частині поставити мінус.

Якщо ж вважати, що σ зростає разом з s, то формулу можна написати у вигляді

$$\varrho = R\left|\frac{dR}{ds}\right|, \tag{255.7}$$

поєднуючи випадок $\dfrac{dR}{ds} > 0$ (R зростає разом з s) і випадок $\dfrac{dR}{ds} < 0$ (R спадає зі зростанням s).

256. Знаходження евольвент

Ми бачимо, що кожна **евольвента** може бути відновлена за своєю еволютою за допомогою розгортання навернутої на еволюту нитки або, що, по суті, те саме, що котити пряму по еволюті (без ковзання).

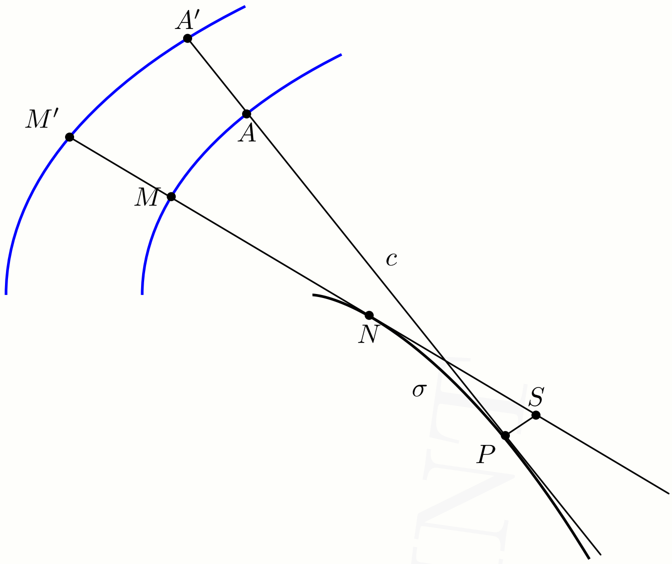


Рис. 256.1

Твердження 256.1. *Доведемо тепер зворотне твердження: якщо пряма котиться (без ковзання) по даній кривій, то траєкторія будь-якої її точки служить для даної кривої евольвентою. (Отже, кожна крива має безліч евольвент.)*

Доведення. Нехай крива PN (рис. 256.1) задана параметрично рівняннями

$$\xi = \varphi(t), \quad \eta = \psi(t),$$

причому φ і ψ мають неперервні похідні до **другого** порядку; припустимо також, що на ділянці кривої немає кратних і взагалі особливих точок. Дугу σ кривої будемо відлічувати від точки P.

На дотичній у точці P, спрямованій у бік зростання дуг, візьмемо довільну точку A, відстань якої від P (з урахуванням знака) позначимо через c, і простежимо її траєкторію поки пряма PA котиться (без ковзання) по даній кривій. У новому положенні прямої, коли точкою дотику стане N, точка P перейде в S, а A — в M; очевидно,

$$SN = \overset{\frown}{PN} = \sigma \quad \text{і} \quad NM = c - \sigma.$$

Якщо координати точок N і M позначити, відповідно, через (ξ, η) і (x, y), а кут між прямою SN і віссю x — через β, то проєктуючи відрізок NM на осі, нескладно отримати:

$$x = \xi + (c - \sigma)\cos\beta, \quad y = \eta + (c - \sigma)\sin\beta. \tag{256.1}$$

Ці рівняння дають параметричне задання шуканої траєкторії.

Диференціюючи їх, знайдемо

$$dx = d\xi - \cos\beta\, d\sigma - (c-\sigma)\sin\beta\, d\beta,$$
$$dy = d\eta - \sin\beta\, d\sigma + (c-\sigma)\cos\beta\, d\beta.$$

Оскільки (дивіться (249.4))

$$\cos\beta = \frac{d\xi}{d\sigma}, \quad \sin\beta = \frac{d\eta}{d\sigma}, \tag{256.2}$$

то ці результати спрощуються:

$$dx = -(c-\sigma)\sin\beta\, d\beta, \quad dy = (c-\sigma)\cos\beta\, d\beta.$$

Не будемо розглядати випадки, коли $d\beta = 0$ або $\sigma = c$ (їм відповідають **особливі** точки на побудованій кривій); тоді, розділивши почленно ці формули, отримаємо

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\beta = -\frac{1}{\frac{d\eta}{d\xi}}\,.$$

Звідси вже ясно, що дотичні до обох кривих взаємно перпендикулярні, так що дана крива справді є обвідною для сімейства нормалей до побудованої кривої, тобто її еволютою. Значить, побудована крива служить для даної евольвентою, що й потрібно було довести. ☐

Прикладом отримання евольвенти вказаним способом може служити вже розглянута вище **евольвента круга** (пр. 225.8); порівняйте з пр. 252.4.

7.6. Додаток. Задача поширення функцій

257. Випадок функції однієї змінної

Розглянемо функцію $f(x)$, визначену на деякому (скінченному або нескінченному) проміжку $\mathcal{X}$ або, більш загально, в області $\mathcal{X}$, що складається з скінченного числа окремих таких проміжків. *Якщо функція $f(x)$ неперервна в $\mathcal{X}$ і має в цій області неперервні похідні до n-го порядку включно ($n \geqslant 1$), то кажуть, що вона в області $\mathcal{X}$* ***належить до класу*** *$\mathcal{C}^n$.*

Зазначимо при цьому, що якщо кінець якогось із проміжків включений до його складу, то по відношенню до цієї точки маються на увазі **однобічні похідні.** (Або, що за цих умов означає те саме, **граничні значення** для похідних при наближенні до названого кінця з боку самого проміжку.)

Нехай же функція $f(x)$ в деякій області $\mathcal{X}$, що не охоплює всієї числової осі, належить до класу $\mathcal{C}^n$ ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$). Припустимо, що в деякій області $\mathcal{X}^*$, що **налягає** на $\mathcal{X}$, існує функція $f^*(x)$, теж класу $\mathcal{C}^n$, яка в спільній частині областей $\mathcal{X}$ і $\mathcal{X}^*$ співпадає з $f(x)$; тоді ця функція f^* здійснює *поширення функції f* на $\mathcal{X}^*$ **зі збереженням класу.**

Чи завжди можливе таке поширення функцій на більш широку область? На це запитання відповідає наступна теорема.

Теорема 257.1. *Будь-яку функцію $f(x)$ класу $\mathcal{C}^n$ ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$) в* ***замкненій*** *(тобто що складається з одного або кількох* ***замкнених*** *проміжків вигляду $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$) області $\mathcal{X}$ можна поширити на всю числову вісь $\mathcal{X}^* = (-\infty, +\infty)$ зі збереженням класу.*

Доведення. Покажемо, що тут поширення здійснюється просто за допомогою **цілих многочленів**. З цією метою зробимо попередньо наступні зауваження.

Як ми бачили в розд. 123, многочлен n-го степеня

$$p(x) = c_0 + \frac{c_1}{1!}(x - \alpha) + \frac{c_2}{2!}(x - \alpha)^2 + \dots + \frac{c_n}{n!}(x - \alpha)^n \tag{257.1}$$

в точці $x = \alpha$, разом зі своїми похідними, набуває відповідно таких значень: $c_0,\ c_1,\ \dots,\ c_n$.

Нехай, далі, потрібно побудувати такий многочлен, який, задовольняючи, як і раніше, умови щодо точки $x = \alpha$, крім того, приймав би, разом зі своїми n похідними, в деякій іншій точці $x = \beta$ наперед задані значення $d_0,\ d_1,\ \dots,\ d_n$. Візьмемо шуканий многочлен у вигляді

$$p(x) + (x - \alpha)^{n+1} q(x), \tag{257.2}$$

де $p(x)$ є многочлен (257.1), а многочлен n-го степеня $q(x)$ ще треба визначити. Як би не вибирати $q(x)$, многочлен (257.2) у точці $x = \alpha$ у будь-якому випадку задовольняє поставленим умовам. Продиференціюємо многочлен (257.2) послідовно n разів і підставимо у цей многочлен та його похідні $x = \beta$; прирівнявши отримані вирази, відповідно, d_0, d_1, …, d_n, ми прийдемо до системи лінійних рівнянь відносно $q(\beta)$, $q'(\beta)$, …, $q^{(n)}(\beta)$, з яких ці значення послідовно і визначаться. За ними ж, користуючись аналогічною формулою (257.1), вже нескладно побудувати $q(x)$ (порівняйте з розд. 130).

Повернемося тепер до доведення висловленого твердження. Нехай, в загальному випадку, область $\mathcal{X}$ складається із замкнених проміжків $\mathcal{X}_k (k = 1, \ldots, m)$, перенумерованих зліва направо. Вважаючи на цих проміжках функцію $f^* = f$, доповнимо її означення так. Якщо лівий кінець a_1, проміжку $\mathcal{X}_1$ є скінченне число, то для $x < a_1$, покладемо f^* рівною многочлену вигляду (257.1), де

$$c_0 = f(a_1), \quad c_1 = f'(a_1), \ldots, c_n = f^{(n)}(a_1).$$

Аналогічно поширюється функція f і праворуч від $\mathcal{X}_m$, якщо тільки правий кінець b_m, цього проміжку є скінченне число. Нарешті, для проміжку (b_k, a_{k+1}) $(k = 1, \ldots, m-1)$, що відокремлює $\mathcal{X}_k$ від $\mathcal{X}_{k+1}$, ототожнимо f^* з таким многочленом, який разом зі своїми n похідними в обох точках $x = b_k$ і $x = a_{k+1}$ набуває тих же значень, як і функція f та її похідні. Нескладно побачити, що така функція f^* і здійснює необхідне поширення на всю область $\mathcal{X}^* = (-\infty, +\infty)$. □

258. Формулювання задачі для двовимірного випадку

Становище речей відразу ускладнюється під час переходу до функцій кількох змінних. Ми обмежимося надалі функцією двох змінних. Результати, які для цього випадку будуть встановлені, переносяться і на загальний випадок будь-якої кількості змінних.

Ми розглядатимемо **області** $\mathcal{M}$ у двовимірному просторі, розуміючи під цим або **відкриту** область, або ж відкриту з приєднанням до неї частини її межі або всієї межі (в останньому випадку область буде **замкненою**).

При поширенні означення функцій класу $\mathcal{C}^n (n \geqslant 1)$ ми стикаємося зі своєрідними труднощами. Справа в тому, що в точці, що лежить на межі $\mathcal{L}$ області, може виявитися просто **непридатним** саме означення частинної похідної того чи іншого типу. Наприклад, якщо область $\mathcal{M}$ є замкнений круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$, то в точках $(0, \pm 1)$ не можна говорити про частинну похідну за x, бо при $y = \pm 1$ значенню $x = 0$ неможливо надати ніякий приріст, щоб одразу ж не вийти за межі області, де задано функцію; аналогічно, у точках $(\pm 1, 0)$ немає сенсу частинна похідна за y.

Говорячи про частинну похідну (деякого порядку і типу) **неперервну** в області $\mathcal{M}$, *ми домовимося в граничній точці M_0 області розуміти під цією похідною (зберігаючи при цьому для неї звичайне позначення) лише* ***граничне значення****, до якого прямує однойменна похідна, обчислена у внутрішній точці M, при прямуванні M до M_0*, незалежно від того, чи воно справді відігравати роль похідної чи ні.

nebayduzhi.math@gmail.com

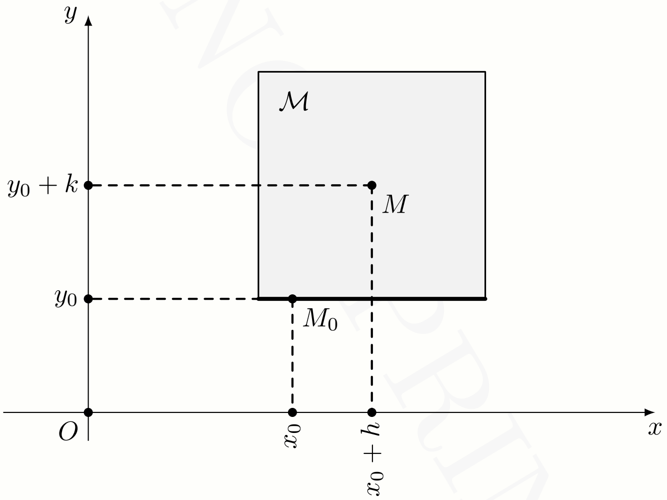


Рис. 258.1

З подальшого викладу згодом з'ясується, що згадане **граничне значення**, у широкому класі випадків, буде разом з тим і справжньою похідною, якщо тільки положення точки M_0 відносно області дає змогу взагалі говорити про таку похідну. Втім, для найпростішого випадку **прямокутної області** ми цей факт встановимо вже зараз.

Отже, нехай функція $f(x, y)$ неперервна разом із усіма своїми похідними, до n-го $(n \geqslant 1)$ порядку включно, в деякому прямокутнику $\mathcal{M}$, і точка $M_0(x_0, y_0)$ лежить на відрізку прямої $y = y_0$, що служить межею цього прямокутника (рис. 258.1) і входить до його складу.

Почнемо з похідної f'_y, для якої питання вичерпується просто. За формулою Лаґранжа (розд. 112) відношення приростів

$$\frac{f(x_0,\ y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = f'_y(x_0,\ y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1),$$

і при $k \to 0$ прямує саме до **граничного значення** $f'_y(x_0,\ y_0)$, яке, отже, виявляється і похідною у власному значенні (порівняйте з розд. 113). Що ж до похідної f'_x, то відповідне їй відношення приростів саме може бути розглянуте як границя

$$\frac{f(x_0 + h,\ y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0 + h,\ y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{h}.$$

Але останній вираз, знову за формулою Лаґранжа, перетворюється до вигляду

$$\frac{f(x_0 + h,\ y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)}{h} = f'_x(x_0 + \theta h,\ y_0 + k) \quad (0 < \theta < 1).$$

При $h \to 0,\ k \to 0$ він прямує до **граничного значення** $f'_x(x_0, y_0)$. За теоремою ж теор. 168.1, оскільки існує **проста** границя при $k \to 0$, ця подвійна границя служить водночас і **повторною** границею:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0+h,\ y_0+k) - f(x_0, y_0+k)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,\ y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

отже і тут число $f'_x(x_0, y_0)$, визначене лише як граничне значення похідної, є справжньою похідною. Сказане послідовно переноситься і на похідні вищих порядків.

Отже, укладена вище умова дає змогу тепер говорити про неперервні похідні у будь-якій області $\mathcal{M}$, як би не були розташовані по відношенню до цієї області її граничні точки (включені до її складу). *Функція $f(x, y)$ належить до класу $\mathcal{C}^n$ $(n \geqslant 1)$ у двовимірній області $\mathcal{M}$, якщо вона в ній* ***неперервна*** *і має* ***неперервні*** *похідні всіх типів і всіх порядків до n-го включно.* Нехай область $\mathcal{M}$ не охоплює всієї площини; якщо в будь-якій області $\mathcal{M}^*$, що **налягає** на $\mathcal{M}$, існує функція f^*, теж класу $\mathcal{C}^n$, яка в спільній частині областей $\mathcal{M}$ і $\mathcal{M}^*$ співпадає з f, то ми будемо говорити, що f^* дає *поширення функції f на $\mathcal{M}^*$, зі* ***збереженням класу.*** Природно і тут поставити питання: чи завжди можливе таке поширення на ширшу область, зокрема, на всю площину? Як ми покажемо, на це питання для **замкненої** області $\mathcal{M}$ можна відповісти ствердно, якщо її контур задовольняє деяким простим умовам. Втім, для полегшення викладу ми завжди припускатимемо область $\mathcal{M}$ **обмеженою**, хоча твердження правильне і для необмеженої області.

Результати, що викладаються (Whitney's extension theorems), в основному належать Вітні (ам. Hassler Whitney, Хáсслер Вíтні) і Хестінсу (ам. Magnus Hestenes, Мáґнус Хéстінс).

259. Леми

Для полегшення доведення основної теореми доведемо попередньо деякі леми.

Лема 259.1. *Нехай функція $\varphi(u, v)$ буде класу $\mathcal{C}^n$ $(n \geqslant 1)$ в області $\mathcal{P}$, яка визначається нерівностями*

$$a < u < b, \quad 0 \leqslant v < \Delta.$$

(Проміжок (a, b) може бути і нескінченним; так само і додатне число Δ може дорівнювати $+\infty$.)

Тоді існує поширення φ^* функції φ, зі збереженням класу, на весь прямокутник

$$\mathcal{P}^* = (a, b;\ -\Delta, \Delta).$$

Доведення. Визначимо $n+1$ чисел $\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_{n+1}$ з наступної системи $n+1$ лінійних рівнянь:

$$(-1)^k\lambda_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \lambda_2 + \dots + \left(-\frac{1}{n+1}\right)^k \lambda_{n+1} = 1 \quad (k = 0,\ 1,\ \dots,\ n). \tag{259.1}$$

Виконати це можна, оскільки визначником системи є так званий визначник Вондермонда (фр. Alexandre-Théophile Vandermonde, Алекса́ндер Вондермо́нд) для нерівних між собою чисел
$-1,\ -\frac{1}{2},\ \dots,\ -\frac{1}{n+1}$, який, як відомо, відмінний від 0.

Визначимо тепер в $\mathcal{P}^*$ функцію $\varphi^*(u,v)$, вважаючи $\varphi^*(u,v)=\varphi(u,v)$ для $v\geqslant 0$ і

$$\varphi^*(u,v)=\lambda_1\varphi(u,-v)+\lambda_2\varphi\left(u,\ -\frac{1}{2}v\right)+\dots+\lambda_{n+1}\varphi\left(u,\ -\frac{1}{n+1}v\right) \tag{259.2}$$

для $v<0$. Якщо u_0 є довільне значення u з (a,b), то раніше за все

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ v\to -0}}\varphi^*(u,v)=(\lambda_1+\dots+\lambda_{n+1})\varphi(u_0,0)=\varphi(u_0,0)$$

(тут ми використовували перше рівняння з (259.1), що відповідає $k=0$). Цим встановлена **неперервність** функції φ^* у тих точках прямокутника $\mathcal{P}^*$, які лежать на прямій $v=0$; неперервність їх у інших точках $\mathcal{P}^*$ очевидна. Звернемося тепер до питання існування і неперервності похідних функції φ^* в $\mathcal{P}^*$; і тут розгляду вимагають лише точки прямої $v=0$. Для всіх похідних

$$\frac{\partial^{i+k}\varphi^*(u,v)}{\partial u^i\,\partial v^k}\quad(1\leqslant i+k\leqslant n) \tag{259.3}$$

ми встановимо граничну рівність

$$\lim_{\substack{u\to u_0\\ v\to -0}}\frac{\partial^{i+k}\varphi^*(u,v)}{\partial u^i\,\partial v^k}=\frac{\partial^{i+k}\varphi(u_0,0)}{\partial u^i\,\partial v^k}. \tag{259.4}$$

З цією метою продиференціюємо рівність (259.2) i разів за u, а потім k разів за v (v<0):

$$\frac{\partial^{i+k}\varphi^*(u,v)}{\partial u^i\,\partial v^k}=(-1)^k\lambda_1\frac{\partial^{i+k}\varphi(u,-v)}{\partial u^i\,\partial v^k}+\left(-\frac{1}{2}\right)^k\lambda_2\frac{\partial^{i+k}\varphi\left(u,\ -\frac{1}{2}v\right)}{\partial u^i\,\partial v^k}+\dots$$
$$\dots+\left(-\frac{1}{n+1}\right)^k\lambda_{n+1}\frac{\partial^{i+k}\varphi\left(u,\ -\frac{1}{n+1}v\right)}{\partial u^i\,\partial v^k}$$

і перейдемо до границі при $u\to u_0$ і $v\to -0$. У результаті, використовуючи рівність (259.1), ми й отримаємо (259.4).

Отже, існування єдиного **граничного значення** для будь-якої похідної (259.3) як з боку $v>0$, так і з боку $v<0$, забезпечене. Більше того, якщо за значення похідної (259.3) у точках прямий $v=0$ прийняти це її граничне значення, то вийде неперервна у всьому $\mathcal{P}^*$ функція. Але точка $(u_0,0)$ є для $\mathcal{P}^*$ **внутрішньою** точкою, і тут нам потрібна була б справжня похідна. Щодо цього, ми маємо можливість послатися на доведене в попередньому розділі: згадане граничне значення буде водночас і справжньою похідною.

Функція φ^* і здійснює шукане поширення функції φ на $\mathcal{P}^*$. ☐

Лема 259.2. *Нехай функція $f(x, y)$ буде класу $\mathcal{C}^n$ в деякій обмеженій відкритій області $\mathcal{M}$ (ми не припускаємо цієї області навіть зв'язною і поки нічого не говоримо про її межі). Якщо кожну точку межі $\mathcal{L}$ цієї області можна оточити околом, у межах якого допустиме поширення функції f зі збереженням класу, то таке поширення можливе і на всю площину $\mathcal{E}$.*

Доведення. Для будь-якої точки M **замкненої** області $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} + \mathcal{L}$ знайдеться (залежно від того, чи належить до M відкритій області $\mathcal{M}$ або її межі $\mathcal{L}$) або окіл, в якому функція f визначена і належить до класу $\mathcal{C}^n$, або ж окіл, на який f може бути поширена з збереженням класу. Цей окіл можна взяти, наприклад, як відкритий круг $\overline{\sigma} = \mathcal{K}(M,\ 3r)$ з центром M і радіусом $3r$. Отже, вся **замкнена** область $\overline{\mathcal{M}}$ покривається не тільки системою $\overline{\Sigma}$, що складається з цих кругів, $\overline{\sigma}$, але і системою Σ, що складається з кругів $\sigma = \mathcal{K}(M, r)$ із втричі меншими радіусами.

Оскільки область $\mathcal{M}$, а з нею і $\overline{\mathcal{M}}$ обмежені, то до цього випадку застосована лема Бореля (лем. 175.1), і $\overline{\mathcal{M}}$ покриється **скінченною** системою

$$\Sigma_m = \{\sigma_1,\ \dots,\ \sigma_m\},$$

вилученою з Σ. Тут

$$\sigma_i = \mathcal{K}(M_i,\ r_i) \quad (i = 1,\ \dots,\ m);$$

одночасно розглядатимемо і круги

$$\sigma_i' = \mathcal{K}(M_i,\ 2r_i), \quad \sigma_i'' = \mathcal{K}(M_i,\ 3r_i).$$

Легко побудувати функцію $h_i(M) = h_i(x, y)$ класу $\mathcal{C}^n$ в $\mathcal{E}$, таку, що

$$h_i(M) = \begin{cases} 0, & \text{в} \quad \sigma_i, \\ 1, & \text{в} \quad \mathcal{E} - \sigma_i' \end{cases}$$
$$(i = 1,\ \dots,\ m)$$

Можна, наприклад, визначити (методами розд. 257) функцію $h(t)$ класу $\mathcal{C}^n$ на всьому проміжку $-\infty < t < +\infty$ так, щоб було

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad t \leqslant 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad t \geqslant 2, \end{cases}$$

а потім покласти

$$h_i(M) = h\left(\frac{\overline{MM_i}}{r_i}\right).$$

За допомогою функцій h_i складемо функції

$$H_1 = H_1(M) = 1 - h_1,$$

$$H_i = H_i(M) = h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_{i-1} \cdot (1 - h_i) \quad (i = 2, \ \ldots, \ m);$$

вони також належать до класу $\mathcal{C}^n$ в $\mathcal{E}$. Очевидно,

$$H_j = 0 \quad \text{в} \quad \sigma_i \quad \text{для всіх} \quad j > i, \tag{259.5}$$

$$H_i = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{E} - \sigma_i', \tag{259.6}$$

бо в σ_i дорівнює нулю множник h_i, а в $\mathcal{E} - \sigma_i'$ — множник $1 - h_i$. Оскільки

$$H_1 + \cdots + H_i = (1 - h_1) + h_1(1 - h_2) + \cdots + h_1 \cdot h_2 \ldots h_{i-1}(1 - h_i) = 1 - h_1 h_2 \ldots h_i,$$

то

$$H_1 + \cdots + H_i = 1 \quad \text{в} \quad \sigma_i, \tag{259.7}$$

тому що там дорівнює нулю множник h_i.

Нехай тепер φ_i в σ_i'' збігається з функцією f або з її поширенням, про яке згадувалося вище, а поза σ_i'' нехай $\varphi_i = f$ у точках $\mathcal{M}$ і $\varphi_i = 0$ в інших точках. Функція $\varphi_i H_i$ дорівнює нулю в $\mathcal{E} - \sigma_i'$ (259.6) і, очевидно, у всій площині $\mathcal{E}$ належить до класу $\mathcal{C}^n$. Покладемо, нарешті, у всіх точках $\mathcal{E}$

$$f^* = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j H_j.$$

Цією рівністю функція f^* визначається у всій площині і до того ж виявляється функцією класу $\mathcal{C}^n$.

Візьмемо будь-яку точку M із $\mathcal{M}$; вона належить до деякого кругу σ_i. Оскільки всі $\varphi_j(M) = f(M)$ і, крім того, в цій точці (зважаючи на (259.7) і (259.5))

$$H_1 + H_2 + \cdots + H_i = 1, \quad \text{а} \quad H_j = 0 \quad \text{для} \quad j > i,$$

то $f^*(M) = f(M)$. Отже, функція f^* і є шукана. □

260. Основна теорема про поширення функції

Тепер ми можемо довести теорему про поширення і для випадку функції двох змінних, але накладаючи обмеження на контур області.

Домовимося називати гладкою (smooth) кривою класу $\mathcal{C}^n$ $(n \geqslant 1)$ просту криву без особливих точок, що виражається рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{260.1}$$

де t змінюється на деякому проміжку $\mathcal{T}$, припускаючи, що функції φ, ψ належать на цьому проміжку до класу $\mathcal{C}^n$.

nebayduzhi.math@gmail.com

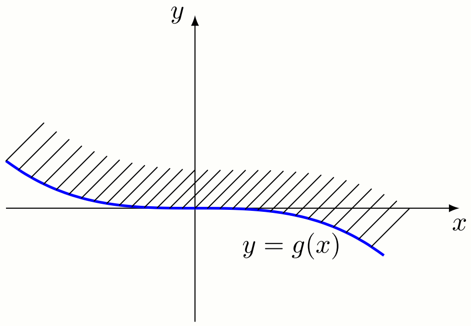


Рис. 260.1

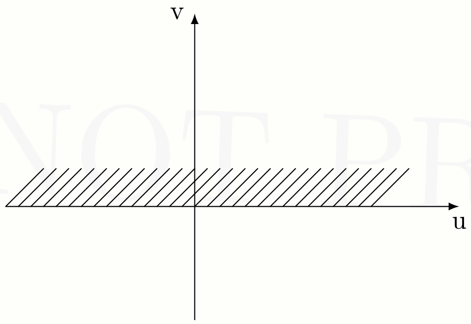


Рис. 260.2

Теорема 260.1. *Якщо функція $f(x, y)$ належить до класу $\mathcal{C}^n$ $(n \geqslant 1)$ в обмеженій замкненій області $\mathcal{M}$, контур якої $\mathcal{L}$ складається з однієї або декількох гладких кривих, що не перетинаються і теж класу $\mathcal{C}^n$, то ця функція f може бути поширена на всю площину $\mathcal{E}$ зі збереженням класу.*

Доведення. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ є довільна точка контуру $\mathcal{L}$; для простоти вважатимемо $x_0 = y_0 = 0$. Ця точка лежить на одній із кривих, що входять до складу $\mathcal{L}$, і є **неособливою** її точкою. У такому разі, без зменшення загальності, можна припустити, що в околі точки M_0 крива задається **явним** рівнянням $y = g(x)$, де g — також класу $\mathcal{C}^n$, і що область $\mathcal{M}$ лежить **вгору** від неї, тобто (поблизу M_0) визначається нерівністю $y \geqslant g(x)$ (рис. 260.1).

Зробимо перетворення змінних, вважаючи

$$x = u, \quad y = g(u) + v.$$

Функція $f(x, y)$ при цьому перейде у функцію

$$\varphi(u, v) = f(u,\ g(u) + v),$$

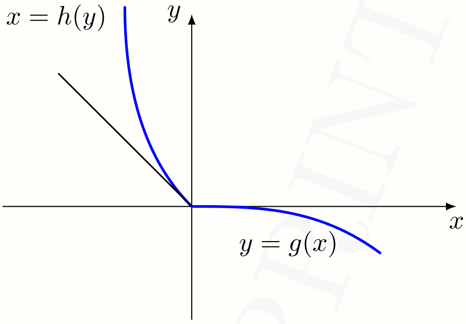


Рис. 261.1

яка виявляється класу $\mathcal{C}^n$ поблизу точки $u = v = 0$, саме, для $v \geqslant 0$ (рис. 260.2). Тоді, за лем. 259.1, функцію φ можна поширити зі збереженням класу і на значення $v < 0$ (весь час обмежуюсь точками, досить близькими до початкової). Якщо це поширення виконується функцією $\varphi^*(u, v)$, то, повертаючись до старих змінних, легко побачити, що функція

$$f^*(x, y) = \varphi^*(x,\ y - g(x))$$

дає поширення функції f на деякий окіл точки M_0.

На підставі лем. 259.2 ми можемо зробити висновок тепер, що функція f, справді, допускає поширення, зі збереженням класу, на всю площину $\mathcal{E}$. ☐

261. Узагальнення

Однак отриманий результат для практичних потреб все ж таки недостатній, оскільки часто доводиться мати справу з областями, контури яких мають “кутові точки”.

Домовимося називати **кусково-гладкою кривою класу $\mathcal{C}^n$** — криву, що складається з декількох гладких дуг класу $\mathcal{C}^n$, що примикають одна до інший під кутами (не рівними ні 0, ні π!).

Теорема 261.1. *Висновок теор. 260.1 зберігається, якщо контур $\mathcal{L}$ області $\mathcal{M}$ складається з однієї чи кількох* ***кусково-гладких кривих класу $\mathcal{C}^n$****, що не перетинаються.*

Доведення. Ми вже бачили, що будь-яку точку контуру $\mathcal{L}$, яка не є кутовою, можна оточити околом, в межах якого допустиме поширення функції f зі збереженням класу. Доведемо тепер те ж відносно кутової точки $M_0(x_0, y_0)$.

І тут можна прийняти $x_0 = y_0 = 0$; можна, не порушуючи загальності, припустити також, що дуги, які змикаються на початку, мають в цій точці дотичні, з яких одна

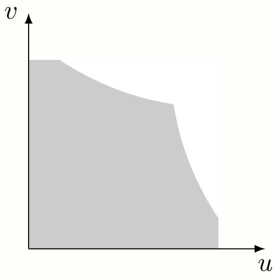


Рис. 261.2

співпадає з додатною частиною осі x, а інша йде до неї під кутом (рис. 261.1). В такому випадку у достатній близькості до початку ці дуги виражаються відповідно рівняннями

$$y = g(x), \quad x = h(y),$$

причому $g'(0) = 0$; функції g і h обидві належать до класу $\mathcal{C}^n$.

Вдамося до заміни змінних

$$x = u + h(v), \quad y = g(u) + v. \tag{261.1}$$

Оскільки якобіан цих функцій

$$J = \begin{vmatrix} 1 & h'(v) \\ g'(u) & 1 \end{vmatrix} = 1 - g'(u)h'(v)$$

у точці $u = v = 0$ дорівнює 1, то система (261.1) в околі нульових значень всіх аргументів допускає однозначне обернення:

$$u = \lambda(x, y), \quad v = \mu(x, y), \tag{261.2}$$

причому функції λ, μ також виявляються класу $\mathcal{C}^n$ (розд. 209).

При $v = 0$ і $u \geqslant 0$ з (261.1) отримуємо $y = g(x)$ і $x \geqslant 0$, отже додатній частині осі u відповідає перша з названих дуг; аналогічно переконуємося в тому, що додатній частині осі v відповідає друга з дуг.

Очевидно, при цьому перетворенні дві кутові області, на які цими дугами ділиться окіл початкової точки на площині xy, відповідають тим двом — "вхідному" і "вихідному" — прямим кутам, на які додатними частинами осей u і v ділиться на площині uv окіл початкової точки (рис. 261.2, рис. 261.3).

Підставляючи у функцію f вирази (261.1), отримаємо перетворену функцію

$$\varphi(u, v) = f(u + h(v),\ g(u) + v),$$

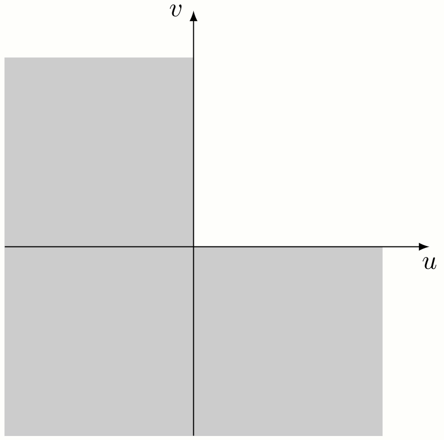


Рис. 261.3

визначену і що належить до класу $\mathscr{C}^n$ у тому чи іншому (дивлячись з нагоди) зі згаданих щойно прямих кутів.

Якщо йдеться про “вихідний” кут (рис. 261.2), то, за лем. 259.1 спочатку функцію φ поширюють на IV координатний кут, а потім отриману функцію (змінюючи ролі u і v) поширюють вже на II і III кути, тобто на повний окіл початку.

Складніше йде справа, якщо йдеться про “вхідний” кут (рис. 261.3). В цьому випадку роблять так. Насамперед, спираючись на лем. 259.1 (але змінюючи знак u), поширюють функцію φ з **лівої** півплощини на **праву** (весь час маючи на увазі лише точки, що наближені до початку) і одержують, таким способом, функцію φ_1 у повному околі початку. Потім розглядають функцію $\psi = \varphi - \varphi_1$ у **нижній** півплощині і, **користуючись вказаним при доведенні лем. 259.1 методом**, поширюють її на **верхню** півплощину, що дає функцію ψ_1 — вже в повному околі початку. Але в III куті $\psi_1 = \psi = \varphi - \varphi_1 = 0$, а тоді, за самим характером згаданого способу, зрозуміло, що $\psi_1 = 0$ і в II куті. Якщо покласти тепер в околі початку $\varphi^* = \psi_1 + \varphi_1$, то в I і III кутах $\psi_1 = 0$ і $\varphi_1 = \varphi$, так що і $\varphi^* = \varphi$, і в IV куті $\psi_1 = \psi = \varphi - \varphi_1$, і знову-таки $\varphi^* = (\varphi - \varphi_1) + \varphi_1 = \varphi$. Отже, побудована функція φ^* дає поширення φ на повний окіл початку.

За допомогою зворотного перетворення (261.2) до старих змінних виходить і поширення

$$f^*(x, y) = \varphi^*(\lambda(x, y),\ \mu(x, y))$$

функції f. Доведення завершується, як і в теор. 260.1, посиланням на лем. 259.2. □

nebayduzhi.math@gmail.com

262. Останні зауваження

Доведена теорема про поширення функцій має різноманітні застосування. Ми обмежимося тут вказівкою на узагальнення за її допомогою низки **локальних**, тобто пов'язаних з околом певної точки, формул і теорем аналізу на випадок, коли згадана точка лежить на **межі** аналізованої області, а **не всередині** неї, як зазвичай вважається.

Нехай, наприклад, у замкненій області $\mathcal{M}$, обмеженій контуром $\mathcal{L}$ (розглянутого вище типу), визначено функцію $z = f(x, y)$, неперервну разом зі своїми похідними f'_x і f'_y. Тоді, **якщо тільки точка** (x_0, y_0) **лежить усередині** $\mathcal{M}$, справедлива відома (178.1) формула для повного приросту функції:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y, \quad (262.1)$$

де α і β прямують до нуля разом з Δx і Δy. Міркування, наведені для доведення цієї формули, взагалі непридатні, коли точка (x_0, y_0) лежить на контурі. Проте **формула справедлива і для цього випадку**, якщо тільки зв'язати Δx і Δy умовою, щоб точка $(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$ не виходила за межі $\mathcal{M}$. У цьому легко переконатися, якщо спочатку написати формулу для функції f^*, що дає поширення f на всю площину, а потім, обмежуючись, як зазначено, точками області $\mathcal{M}$, повернутися до початкової функції f.

У всіх випадках, коли в основі висновків лежала формула (262.1), ми отримуємо тепер суттєве доповнення до попередніх результатів.

Так, при зроблених відносно функції f припущеннях вона виявляється **диференційовною** (розд. 179) не тільки у внутрішніх точках області $\mathcal{M}$, а й у точках її межі. Для поверхні, що задається рівнянням $z = f(x, y)$, ми отримуємо можливість говорити про **дотичну площину** (розд. 180) навіть у її точках контуру.

На розглянутій формулі, як ми знаємо, засноване також правило **диференціювання композиції функцій** (розд. 181). Якщо функції

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \qquad (262.2)$$

мають похідні, і точки $(\varphi(t),\ \psi(t))$ лежать усі **всередині** області $\mathcal{M}$, то для складеної функції $z = f(\varphi(t),\ \psi(t))$ ми мали формулу

$$z'_t = f'_x x'_t + f'_y y'_t.$$

Тепер вона поширюється і на випадок, коли "крива" (262.2) підходить впритул до контуру області $\mathcal{M}$ і так далі.

Не зупиняючись на деталях, зазначимо ще один важливий приклад. Нехай маємо систему функцій

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \qquad (262.3)$$

nebayduzhi.math@gmail.com

неперервних разом зі своїми похідними в деякій замкненій області $\mathcal{P}$ на площині uv з контуром $\mathcal{K}$, і нехай в деякій точці (u_0, v_0) цієї області якобіан

$$J = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$$

відмінний від 0. **Якщо точка** (u_0, v_0) **лежить усередині** $\mathcal{P}$, то за теор. 208.2 система функцій (262.3) допускає **обернення**, так що в околі точки (x_0, y_0), де

$$x_0 = \varphi(u_0, v_0), \quad y_0 = \psi(u_0, v_0),$$

змінні u і v виражаються однозначними функціями від змінних x, y:

$$u = \lambda(x, y), \quad v = \mu(x, y), \tag{262.4}$$

неперервними разом зі своїми похідними у згаданому околі. Отже, обмежуючись значеннями u, v, x, y досить близькими, відповідно, до u_0, v_0, x_0, y_0, можна сказати, що співвідношення (262.3) і (262.4) абсолютно рівносильні. Цим ми користувалися, наприклад, при доведенні твердження, що поверхня

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

де (u, v) змінюється в області $\mathcal{P}$, поблизу її **звичайної** точки M_0 (що відповідає $u = u_0$, $v = v_0$) може бути виражена **явним** рівнянням (розд. 228). Але до точок контуру поверхні наші міркування були непридатні, бо в площині uv точка (u_0, v_0) не могла лежати на контурі $\mathcal{K}$ області $\mathcal{P}$.

Тепер, скориставшись поширеннями φ^* і ψ^* функцій φ і ψ, ми можемо узагальнити результат, що стосується обернення системи функцій, і на випадок, коли точка (u_0, v_0) лежить на контурі $\mathcal{K}$.

Відповідно доповнюється і згаданий геометричний результат.

Наведених прикладів достатньо для того, щоб читач усвідомив собі важливість доведених теорем як для самого математичного аналізу, так для його застосувань. Інші приклади застосування теорем про поширення функцій читач знайде у наступних томах.

Том

2

Глава 8

ПЕРВІСНА ФУНКЦІЯ (НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ)

8.1. Невизначений інтеграл і найпростіші способи його обчислення

263. Поняття первісної функції (і невизначеного інтеграла)

У багатьох питаннях науки і техніки доводиться не за заданою функцією шукати її похідну, а навпаки — відновлювати функцію за відомою її похідною. У розд. 91, припускаючи відомим рівняння руху $s = s(t)$, тобто закон зміни шляху з часом, ми диференціюванням знайшли спочатку швидкість $v = \frac{ds}{dt}$, а потім і прискорення $a = \frac{dv}{dt}$. Однак, часто доводиться вирішувати зворотну задачу: **прискорення a задане як функція від часу t: $a = a(t)$, потрібно визначити швидкість v та пройдений шлях s залежно від t.** Отже, тут потрібно за функцією $a = a(t)$ відновити ту функцію $v = v(t)$, для якої a є похідною, а потім, знаючи функцію v, знайти ту функцію $s = s(t)$, для якої похідною буде v.

Дамо наступне **означення**.

Функція $F(x)$ на даному проміжку називається ***первісною функцією*** *для функції $f(x)$ або інтегралом від $f(x)$, якщо на всьому цьому проміжку $f(x)$ є похідною для функції $F(x)$ або, що те саме, $f(x)\,dx$ є для $F(x)$ диференціалом:*

$$F'(x) = f(x) \quad \text{або} \quad dF(x) = f(x)\,dx.$$

У останньому випадку говорять також, що функція $F(x)$ є первісною (або інтегралом) для диференціального виразу $f(x)\,dx$.

Пошук для функції всіх її первісних називається **інтегруванням**, і є однією з задач *інтегрального числення*; як бачимо, ця задача є зворотною основній задачі диференціального числення.

Теорема 263.1. *Якщо на деякому (скінченному або нескінченному, замкненому чи ні) проміжку $\mathcal{X}$ функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то й функція $F(x)+C$, де C — будь-яка стала, також буде первісною. Навпаки,* ***кожна*** *функція, що є первісною для $f(x)$ на проміжку $\mathcal{X}$, може бути представлена в цій формі.*

Доведення. Той факт, що, разом з $F(x)$, і $F(x)+C$ є первісною для $f(x)$, є цілком очевидним, оскільки $(F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$.

Нехай тепер $\Phi(x)$ буде **будь-якою** первісною для $f(x)$, тобто на проміжку $\mathcal{X}$

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Оскільки функції $F(x)$ і $\Phi(x)$ на даному проміжку мають одну і ту саму похідну, то вони відрізняються на сталу величину (розд. 131, наслідок):

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

що й потрібно було довести. □

З теореми випливає, що достатньо знайти для даної функції $f(x)$ тільки одну первісну функцію $F(x)$, щоб знати **всі** первісні, тому що вони відрізняються одна від одної сталими доданками.

Отже *вираз $F(x)+C$, де C — довільна стала, є* ***загальним виглядом*** *функції, яка має похідну $f(x)$ або диференціал $f(x)\,dx$.* Цей вираз називається **невизначеним інтегралом** $f(x)$ і позначається значком

$$\int f(x)\,dx,$$

який вже неявно містить довільну сталу. Добуток $f(x)\cdot dx$ називається **підінтегральним виразом**, а функція $f(x)$ — **підінтегральною функцією**.

Приклад. Нехай $f(x) = x^2$; тоді, як нескладно побачити, невизначеним інтегралом цієї функції буде

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Це легко перевірити зворотною дією — диференціюванням.

Звертаємо увагу читача на те, що під знаком "інтеграла" $\int$ пишуть **диференціал** шуканої первісної функції, а не **похідну** (у нашому прикладі — x^2dx, а не x^2). Такий спосіб запису, як буде з'ясовано нижче (розд. 294), сформувався історично; до того ж, він надає низку переваг, і його збереження цілком доцільне.

nebayduzhi.math@gmail.com

З означення невизначеного інтеграла безпосередньо випливають наступні властивості:

1. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,$

тобто *знаки d і $\int$, коли перший стоїть перед другим, взаємно скорочуються.*

2. Оскільки $F(x)$ є первісною функцією для $F'(x)$, то маємо

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C,$$

що може бути переписано так:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Звідси бачимо, що *знаки d і $\int$, які стоять перед $F(x)$, скорочуються і тоді, коли d стоїть після $\int$, але в цьому випадку до $F(x)$ потрібно додати довільну сталу.*

Повертаючись до тієї механічної задачі, яку ми поставили на початку, ми можемо тепер написати, що

$$v = \int a(t)\,dt \quad \text{і} \quad s = \int v(t)\,dt.$$

Припустимо для визначеності, що маємо справу з рівноприскореним рухом, наприклад під впливом сили тяжіння; тоді $a = g$ (якщо напрямок по вертикалі вниз вважати додатним) і, як нескладно здогадатися,

$$v = \int g\,dt = gt + C.$$

Ми отримали вираз для швидкості v, в який, окрім часу t, входить ще і довільна стала C. При різних значеннях C ми отримуватимемо і різні значення для швидкості в один і той самий момент часу; отже, наявних у нас даних недостатньо для повного розв'язку задачі. Щоб отримати розв'язок задачі, достатньо знати величину швидкості в якийсь момент часу. Наприклад, нехай нам відомо, що в момент $t = t_0$ швидкість $v = v_0$; підставимо ці значення в отриманий вираз для швидкості

$$v_0 = gt_0 + C,$$

звідки

$$C = v_0 - gt_0,$$

і тепер наш розв'язок набуває вже цілком певного вигляду

$$v = g(t - t_0) + v_0.$$

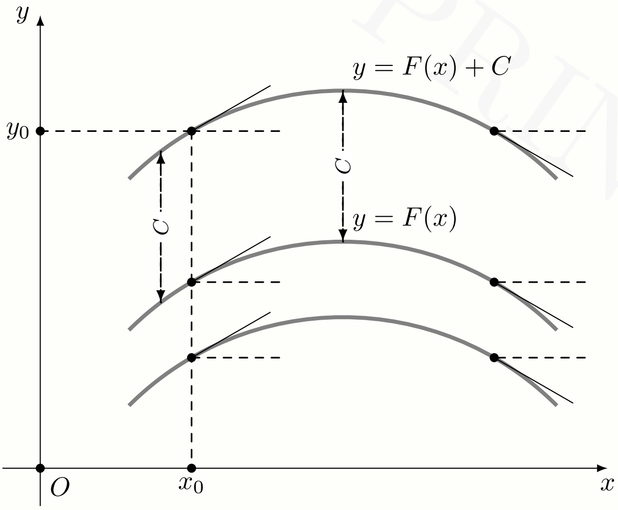


Рис. 263.1

Знайдемо тепер вираз для шляху s. Маємо

$$s = \int [g(t - t_0) + v_0]\, dt = \frac{1}{2}\, g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + C'$$

(диференціюванням легко перевірити, що первісна функція може бути записана у такій формі). Невідому нам нову сталу C' можна визначити, якщо, наприклад, дано, що шлях $s = s_0$ в момент $t = t_0$; знайшовши, що $C' = s_0$, перепишемо рішення в остаточному вигляді

$$s = \frac{1}{2}\, g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0.$$

Значення t_0, s_0, v_0 умовно називають **початковими значеннями** величин t, s, v.

Ми знаємо, що похідна функції $y = F(x)$ дає кутовий коефіцієнт дотичної до відповідного графіка. Тому задачу пошуку первісної $F(x)$ для заданої функції $f(x)$ можна розуміти так: *потрібно знайти криву $y = F(x)$, для якої мав би місце заданий закон зміни кутового коефіцієнта дотичної*:

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x).$$

Якщо $F(x)$ є одна з таких кривих, то всі інші можуть бути отримані з неї простим перенесенням (на довільний відрізок C) паралельно осі y (рис. 263.1). Для того, щоб знайти потрібну криву в цій множині кривих, достатньо, наприклад, задати точку (x_0, y_0), через яку крива повинна пройти; **початкова умова** $y_0 = F(x_0) + C$ дасть $C = y_0 - F(x_0)$.

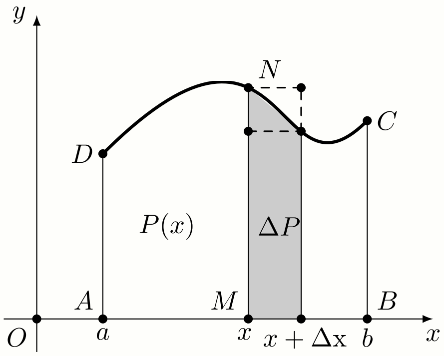


Рис. 264.1

264. Інтеграл і задача про знаходження площі

Набагато важливішим є тлумачення первісної функції як площі криволінійної фігури. Оскільки історично поняття первісної функції було тісно пов'язане з задачею про визначення площі, то ми зупинимося на цій задачі вже тут (користуючись інтуїтивним уявленням про площу плоскої фігури та відкладаючи точну постановку цього питання до глави 10).

Нехай на проміжку $[a, b]$ дана неперервна функція $y = f(x)$, яка набуває лише додатних (невід'ємних) значень. Розглянемо фігуру $ABCD$ (рис. 264.1), обмежену кривою $y = f(x)$, двома ординатами $x = a$ та $x = b$ і відрізком осі x; таку фігуру будемо називати **криволінійною трапецією**. Бажаючи визначити величину площі P цієї фігури, ми вивчимо поведінку площі **змінної** фігури $AMND$, укладеної між початковою ординатою $x = a$ та ординатою, що відповідає довільно обраному на проміжку $[a, b]$ значенню x. При зміні x ця остання площа відповідно змінюватиметься, причому кожному x відповідає певне її значення, так що площа криволінійної трапеції $AMND$ є деякою функцією від x; позначимо її через $P(x)$.

Розглянемо спочатку задачу **знаходження похідної цієї функції**. З цією метою надамо x деякий (скажімо, додатний) приріст Δx; тоді площа $P(x)$ отримає приріст ΔP.

Позначимо через m і M, відповідно, найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на проміжку $[x,\ x+\Delta x]$ (розд. 85) і порівняємо площу ΔP з площами прямокутників, побудованих на основі Δx і які мають висоти m і M. Очевидно,

$$m\Delta x < \Delta P < M\Delta x,$$

звідки

$$m < \frac{\Delta P}{\Delta x} < M.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то, внаслідок неперервності, m і M прямуватимуть до $f(x)$, а тоді і

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x).$$

Отже, ми приходимо до чудової теореми (яку зазвичай називають *теоремою Ньютена і Ляйбніца*): *похідна змінної площі $P(x)$ по скінченній абсцисі x дорівнює скінченній ординаті $y = f(x)$.*

Насправді це твердження, хоч і в іншій формі, опублікував ще Берроу (англ. Isaac Barrow, А́йзек Бе́рроу), вчитель Ньютена.

Іншими словами, *змінна площа $P(x)$ є* ***первісною функцією*** *для даної функції $y = f(x)$.* Серед інших первісних ця первісна виділяється за тією властивістю, що вона дорівнює 0 при $x = a$. Тому, якщо відома **яка-небудь** первісна $F(x)$ для функції $f(x)$, і за теоремою попереднього розділу

$$P(x) = F(x) + C,$$

то сталу C легко визначити, поклавши тут $x = a$

$$0 = F(a) + C, \quad \text{звідки} \quad C = -F(a).$$

Остаточно

$$P(x) = F(x) - F(a).$$

Зокрема, для отримання площі P усієї криволінійної трапеції потрібно взяти $x = b$:

$$P = F(b) - F(a).$$

Як приклад, знайдемо площу $P(x)$ фігури, обмеженою **параболою** $y = ax^2$, ординатою, що відповідає даній абсцисі x, і відрізком осі x (рис. 264.2); оскільки парабола перетинає вісь x на початку координат, то початкове значення x тут 0. Для функції $f(x) = ax^2$ легко знайти первісну: $F(x) = \frac{ax^2}{3}$. Ця функція якраз і дорівнює 0 при $x = 0$, так що

$$P(x) = F(x) = \frac{ax^3}{3} = \frac{xy}{3}$$

(порівняйте з пр. 32.4).

Зважаючи на зв'язок між обчисленням інтегралів і знаходженням площ плоских фігур, тобто їх квадратурою, стало звичайним і саме обчислення інтегралів називати **квадратурою**.

Для поширення всього сказаного вище на випадок функції, що набуває і від'ємних значень, досить умовитися вважати **від'ємними** площі частин фігури, розташованих **під** віссю x.

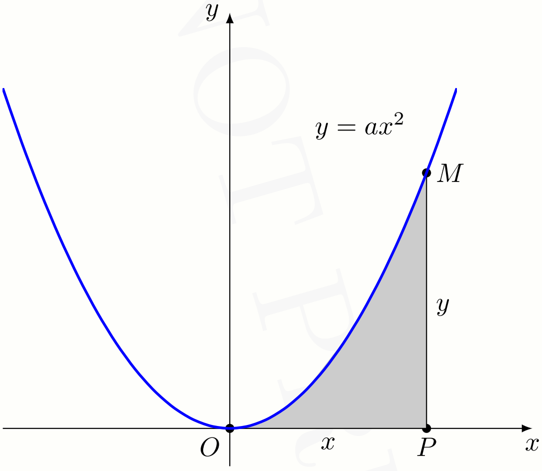


Рис. 264.2

Отже, хоч би яка була неперервна на проміжку $[a, b]$ функція $f(x)$, читач завжди може уявити собі первісну для неї функцію у вигляді змінної площі фігури, обмеженої графіком цієї функції. Проте вважати цю геометричну **ілюстрацію** доведенням існування первісної, зрозуміло, не можна, оскільки саме поняття площі ще не обґрунтовано.

У наступній главі (розд. 305) ми зможемо дати строге і до того ж чисто аналітичне доведення того важливого факту, що *кожна неперервна на даному проміжку функція $f(x)$ має в ньому первісну.* Це твердження ми приймаємо вже зараз.

У цій главі ми говоритимемо про первісні лише для неперервних функцій. Якщо функція задана конкретно та має точки розриву, то розглядатимемо її лише на проміжках її неперервності. Тому, припустивши сформульоване вище твердження ми звільняємося від необхідності щоразу обговорювати існування інтегралів: **інтеграли, які ми розглядаємо, всі існують**.

265. Таблиця основних інтегралів

Кожна формула диференціального числення, яка встановлює, що для деякої функції $F(x)$ похідною буде $f(x)$, безпосередньо приводить до відповідної формули інтегрального числення

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Перебравши формули розд. 95, за якими обчислювались похідні елементарних функцій, а також деякі формули, які були виведені далі (для гіперболічних функцій), ми можемо тепер скласти таку **таблицю інтегралів**:

1. $\int 0 \cdot dx = C;$
2. $\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C;$
3. $\int x^{\mu} dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1);$
4. $\int \dfrac{1}{x} dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
5. $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$
6. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$
7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C;$
8. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C;$
9. $\int \cos x \, dx = \sin x + C;$
10. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
11. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
12. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C;$
13. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C;$
14. $\int \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C;$
15. $\int \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C.$

Щодо формули 4 зробимо пояснення. Вона застосовна на будь-якому проміжку, що не містить нуля. Справді, якщо цей проміжок лежить справа від нуля, так що $x > 0$, то з відомої формули диференціювання $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ безпосередньо випливає

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Якщо ж проміжок лежить зліва від нуля і $x < 0$, то диференціюванням легко переконатися в тому, що $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$, звідки

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

Обидві ці формули об'єднані у формулі 4.

Наведену вище таблицю інтегралів можна розширити за допомогою **правил інтегрування**.

266. Найпростіші правила інтегрування

1. Якщо a — стала ($a \neq 0$), то

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx.$$

Справді, диференціюючи вираз справа, ми отримаємо (розд. 105, 14)

$$d\left(a \cdot \int f(x)\,dx\right) = a \cdot d\left(\int f(x)\,dx\right) = a \cdot f(x)\,dx,$$

так що цей вираз є первісною для диференціала $a \cdot f(x)\,dx$, що й потрібно було довести. Отже, *сталий множник можна виносити з-під знака інтеграла.*

2.

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Диференціюємо вираз праворуч (розд. 105, 15)

$$d\left(\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\right) = d\int f(x)\,dx \pm d\int g(x)\,dx = (f(x) \pm g(x))\,dx;$$

отже, цей вираз є первісною функцією для останнього диференціала, що й потрібно було довести. *Невизначений інтеграл від суми (різниці) диференціалів дорівнює сумі (різниці) інтегралів від кожного диференціала окремо.*

Зауваження. Щодо цих двох формул зауважимо таке. До них входять невизначені інтеграли, що містять кожен довільний сталий доданок. Такі рівності розуміються в тому сенсі, що різниця між правою та лівою частинами є стала. Можна розуміти ці рівності і буквально, але тоді **один** із інтегралів, що в них фігурує, перестає бути **довільною** первісною: стала в ньому встановлюється після вибору сталих для інших інтегралів. Це важливе зауваження слід пам'ятати і надалі.

3. Якщо

$$\int f(t)\,dt = F(t) + C,$$

то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C'.$$

Справді, це співвідношення рівносильне такому:

$$\frac{d}{dt}F(t) = F'(t) = f(t).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Але тоді

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = F'(ax+b)\cdot a = a\cdot f(ax+b),$$

так що

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right] = f(ax+b),$$

тобто $\frac{1}{a}F(ax+b)$ справді виявляється первісною для функції $f(ax+b)$.

Особливо часто трапляються випадки, коли $a=1$ або $b=0$:

$$\begin{aligned}\int f(x+b)\,dx =& F(x+b)+C_1\,,\\ \int f(ax)\,dx =& \frac{1}{a}\cdot F(x)+C_2\,.\end{aligned}$$

(На практиці правило 3 є дуже частковим випадком правила заміни змінної в невизначеному інтегралі, про що буде йти мова нижче, розд. 268.)

267. Приклади

1)

$$\int(6x^2-3x+5)\,dx.$$

Користуючись правилами розд. 266 2 та 1 (і формулами розд. 265 3 та 2), маємо

$$\int(6x^2-3x+5)\,dx = \int 6x^2\,dx - \int 3x\,dx + \int 5\,dx =$$
$$= 6\int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 5\int dx = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$$

2) Легко проінтегрувати многочлен і в загальному вигляді

$$\int(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n)\,dx =$$
$$= a_0\int x^n\,dx + a_1\int x^{n-1}\,dx + \ldots + a_{n-1}\int x\,dx + a_n\int dx =$$
$$= \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \ldots + \frac{a_{n-1}}{2}x^2 + a_nx + C. \qquad \text{(п. 2, 1; ф. 3, 2)}$$

3)

$$\int(2x^2+1)^3dx = \int(8x^6+12x^4+6x^2+1)\,dx =$$
$$= \frac{8}{7}x^7 + \frac{12}{5}x^5 + 2x^3 + x + C. \qquad \text{(приклад 2)}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

4)

$$\int (1+\sqrt{x})^4\,dx = \int (1+4\sqrt{x}+6x+4x\sqrt{x}+x^2)\,dx =$$
$$= \int dx + 4\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 6\int x\,dx + 4\int x^{\frac{3}{2}}dx + \int x^2\,dx =$$
$$= x + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^2 + \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^3 + C. \qquad \text{(п. 2, 1; ф. 3, 2)}$$

5)

$$\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}\,dx = \int \frac{x^3+x^2-3x-3}{3x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int x\,dx + \frac{1}{3}\int dx - \int \frac{dx}{x} - \int x^{-2}dx$$
$$= \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \ln x + \frac{1}{x} + C. \qquad \text{(п. 2, 1; ф. 3, 2, 4)}$$

6)

$$\int \frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx =$$
$$= \int x^{\frac{7}{6}}dx - \int x^{\frac{1}{6}}dx = \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} - \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C. \qquad \text{(п. 2; ф. 3)}$$

Наведемо ряд прикладів застосування правила 3.

7)

а) $$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C, \qquad \text{(п. 3; ф. 4)}$$

б) $$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}dx =$$
$$= \frac{1}{-k+1}(x-a)^{-k+1} + C = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C \quad (k>1). \qquad \text{(п. 3; ф. 3)}$$

8)

а) $$\int \sin mx\,dx = -\frac{1}{m}\cos mx + C \quad (m \neq 0), \qquad \text{(п. 3; ф. 8)}$$

б) $$\int \cos mx\,dx = \frac{1}{m}\sin mx + C \quad (m \neq 0), \qquad \text{(п. 3; ф. 9)}$$

в) $$\int e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C. \qquad \text{(п. 3; ф. 7)}$$

9)

а) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a>0), \qquad \text{(п. 3; ф. 6)}$$

б) $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \qquad \text{(п. 3; ф. 9)}$$

Приклади на всі правила.

10)

$$\int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+1)}{e^x}\,dx = \int \left(e^{2x}-e^x+1-e^{-x}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + e^{-x} + C. \qquad \text{(п. 2, 3; ф. 7, 2)}$$

11)

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx.$$

Розділивши чисельник на знаменник, запишемо підінтегральний вираз як

$$\frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\,\frac{1}{cx+d}.$$

Звідси шуканий інтеграл дорівнює

$$\int \frac{ax+b}{cx+d}\,dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + C. \qquad \text{(п. 2, 1, 3; ф. 2, 4)}$$

12)

$$\int \frac{2x^2-3x+1}{x+1}\,dx = \int \left(2x-5+\frac{6}{x+1}\right)dx = x^2-5x+6\ln|x+1| + C.$$

Інтегрування дробу зі складним знаменником часто полегшується розкладанням його на суму дробів із більш простими знаменниками. Наприклад,

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right);$$

тому (дивіться приклад 7), а)

13)

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Для дробу більш загального виду

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}$$

можна вказати, наприклад, такий спосіб. Очевидно, $(x+a)-(x+b)=a-b$. Тоді маємо тотожність

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\cdot\frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right).$$

14)

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right| + C.$$

Зокрема,

15)

а) $\displaystyle \int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C,$

б) $\displaystyle \int \frac{dx}{4x^2+4x-3} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right| + C.$

16)

$$\int \frac{dx}{Ax^2+2Bx+C} \quad (\text{при } B^2-AC>0).$$

Знаменник розкладається на дійсні множники так: $A(x-\alpha)(x-\beta)$, де

$$\alpha = \frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A}, \quad \beta = \frac{-B-\sqrt{B^2-AC}}{A}.$$

А тоді, згідно з прикладом 14), вважаючи в ньому $a=-\beta$, $b=-\alpha$, отримаємо

$$\int \frac{dx}{Ax^2+Bx+C} = \frac{1}{2\sqrt{B^2-AC}}\ln\left|\frac{Ax+B-\sqrt{B^2-AC}}{Ax+B+\sqrt{B^2-AC}}\right| + C'.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Деякі тригонометричні вирази після тих чи інших елементарних перетворень інтегруються також за допомогою найпростіших способів.

Очевидно, наприклад,

$$\cos^2 mx = \frac{1+\cos 2mx}{2}, \quad \sin^2 mx = \frac{1-\cos 2mx}{2},$$

звідки

17)

а) $\displaystyle\int \cos^2 mx\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4m}\sin 2mx + C,$

б) $\displaystyle\int \sin^2 mx\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4m}\sin 2mx + C.$

Аналогічно маємо

$$\begin{aligned}
\sin mx \cos nx =& \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right],\\
\cos mx \cos nx =& \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right],\\
\sin mx \sin nx =& \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right].
\end{aligned}$$

Вважаючи $m \pm n \neq 0$, отримаємо такі інтеграли.

18)

а) $\displaystyle\int \sin mx \cos nx\,dx = -\frac{1}{2(m+n)}\cos(m+n)x - \frac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)x + C,$

б) $\displaystyle\int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x + \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x + C,$

в) $\displaystyle\int \sin mx \sin nx\,dx = \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x - \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x + C.$

На закінчення розглянемо трохи складніший приклад.

19)

а) $\displaystyle\int \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$

Оскільки

$$\sin 2nx = \sum_{k=1}^{n}\left[\sin 2kx - \sin(2k-2)x\right] = 2\sin x \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x,$$

то підінтегральний вираз зводиться до $2\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x$, і шуканий інтеграл дорівнюватиме

$$\int\frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+C.$$

Аналогічно,

б) $$\int\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = x+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin 2kx}{2k}+C.$$

268. Інтегрування заміною змінної

Опишемо один із найсильніших підходів до інтегрування функцій — **метод заміни змінної** чи **підстановки**. В його основі лежить таке просте твердження.

Якщо відомо, що

$$\int g(t)\,dt = G(t)+C,$$

то тоді

$$\int g\Big(\omega(x)\Big)\omega'(x)\,dx = G\Big(\omega(x)\Big)+C.$$

(Усі функції $g(t)$, $\omega(x)$, $\omega'(x)$, що тут фігурують, вважаються неперервними.)

Це прямо випливає із правила диференціювання композиції функцій (розд. 98)

$$\frac{d}{dx}G\Big(\omega(x)\Big) = G'\Big(\omega(x)\Big)\omega'(x) = g\Big(\omega(x)\Big)\omega'(x),$$

якщо врахувати, що $G'(t)=g(t)$. Те саме можна виразити й по-іншому: співвідношення

$$dG(t) = g(t)\,dt$$

справедливе і при заміні незалежної змінної t на функцію $\omega(x)$ (розд. 106).

Нехай потрібно обчислити інтеграл

$$\int f(x)\,dx.$$

У багатьох випадках вдається за нову змінну вибрати таку функцію від x: $t=\omega(x)$, щоб підінтегральний вираз представився у вигляді

$$f(x)\,dx = g\Big(\omega(x)\Big)\omega'(x)\,dx, \tag{268.1}$$

де $g(t)$ — зручніша для інтегрування функція, ніж $f(x)$. Тоді, згідно зі сказаним вище, достатньо знайти інтеграл

$$\int g(t)\,dt = G(t)+C,$$

щоб із нього, підстановкою $t = \omega(x)$, отримати шуканий інтеграл. Зазвичай пишуть просто

$$\int f(x)\,dx = \int g(t)\,dt, \tag{268.2}$$

маючи вже на увазі, що в функції від t, яка представлена інтегралом праворуч, виконана зазначена заміна.

Знайдемо, наприклад, інтеграл

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx.$$

Оскільки $d\sin x = \cos x\,dx$, то покладаючи $t = \sin x$, перетворимо підінтегральний вираз до вигляду

$$\sin^3 x \cos x\,dx = \sin^3 x\,d\sin x = t^3\,dt.$$

Інтеграл від останнього виразу обчислюється легко:

$$\int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C.$$

Залишається лише повернутися до змінної x, підставляючи $\sin x$ замість t:

$$\int \sin^3 x \cos x\,dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Звертаємо увагу читача на те, що при виборі підстановки $t = \omega(x)$, що спрощує підінтегральний вираз, потрібно пам'ятати, що у його складі має знайтися множник $\omega'(x)\,dx$, що дає диференціал нової змінної, dt (268.1). У попередньому прикладі успіх підстановки $t = \sin x$ обумовлювався наявністю множника $\cos x\,dx = dt$.

У зв'язку із цим повчальним є приклад

$$\int \sin^3 x\,dx;$$

тут підстановка $t = \sin x$ була б непридатна саме через відсутність згаданого множника. Якщо ж спробувати виділити з підінтегрального виразу множник $\sin x\,dx$ або краще $-\sin x\,dx$ (як диференціал нової змінної), то це приведе до підстановки $t = \cos x$. Оскільки вираз, що залишається,

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$$

цією підстановкою спрощується, то підстановка виправдана. Маємо

$$\int \sin^3 x\,dx = \int (t^2 - 1)\,dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

Після набуття навичок у заміні змінних можна зміну t і не писати. Наприклад, в інтегралі

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int \sin^3 x \, d \sin x$$

розглядають $\sin x$ як нову змінну і **відразу** переходять до результату.

Аналогічно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\frac{x}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Тут була зроблена підстановка $t = \frac{x}{a}$.

Читач бачить тепер, що правило розд. 266, 3, по суті, зводиться до **лінійної** підстановки $t = ax + b$:

$$\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b) \, d(ax + b) = \frac{1}{a} \int f(t) \, dt.$$

Іноді підстановка застосовується у формі, відмінній від зазначеної. Саме в підінтегральний вираз $f(x) \, dx$ безпосередньо підставляють замість x функцію $x = \varphi(t)$ від нової змінної t і отримують в результаті вираз

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = g(t) \, dt.$$

Очевидно, якщо в цьому виразі зробити підстановку $t = \omega(x)$, де $\omega(x)$ — функція, обернена до $\varphi(t)$, то повернемося до початкового підінтегрального виразу $f(x) \, dx$. Тому, як і раніше, справедлива рівність (268.2), де праворуч, після обчислення інтеграла, слід покласти $t = \omega(x)$.

Наприклад знайдемо інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \, (1 + \sqrt[3]{x})}.$$

Якщо взяти $x = t^6$ (щоб **зникли** усі радикали), то отримаємо

$$\sqrt{x} = t^3, \quad \sqrt[3]{x} = t^2, \quad dx = 6t^5 dt$$

і

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \, (1 + \sqrt[3]{x})} = 6 \int \frac{t^2 dt}{1 + t^2} = 6 \left(\int dt - \int \frac{dt}{1 + t^2} \right) = 6(t - \operatorname{arctg} t) + C.$$

Тепер залишається перейти до змінної x за формулою $t = \sqrt[6]{x}$, і остаточно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})} = 6\,(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}) + C.$$

Цікавіший приклад

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Різниця квадратів під коренем (з яких перший сталий) підказує нам тригонометричну підстановку $x = a\sin t$. (Доречно вказати, що x ми вважаємо таким, що змінюється між $-a$ і a, а t між $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$. Тому $t = \arcsin\frac{x}{a}$.) Маємо

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, \quad dx = a\cos t\,dt$$

і

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int \cos^2 t\,dt.$$

Але ми вже знаємо інтеграл

$$a^2 \int \cos^2 t\,dt = a^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C$$

(пр. 267.17). Для переходу до x підставляємо $t = \arcsin\frac{x}{a}$; перетворення другого доданку полегшується тим, що

$$\frac{a^2}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}a\sin t \cdot a\cos t = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Остаточно

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Вміння шукати вигідні підстановки набувається вправами. Хоча загальних вказівок з цього приводу дати неможливо, але окремі частинні зауваження, що полегшують розшук, читач знайде в наступному розділі. У канонічних випадках підстановки будуть просто вказані в курсі.

269. Приклади

1)

$$\text{а)}\ \int e^{x^2} x\,dx, \quad \text{б)}\ \int \frac{x\,dx}{1+x^4}, \quad \text{в)}\ \int \frac{x^2\,dx}{\cos^2 x^3},$$

а) **Розв'язок.** Нехай $t = x^2$, отримаємо $dt = 2x\,dx$, так що

$$\int e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

б) **Вказівка.** Така сама заміна. *Відповідь:* $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C$. В обох випадках інтеграли мали такий вигляд

$$\int g(x^2)x\,dx = \frac{1}{2}\int g(x^2)\,d(x^2),$$

де g — зручна для інтегрування функція; для таких інтегралів властива заміна $t = x^2$. Аналогічно, в таких інтегралах

$$\int g(x^3)x^2\,dx = \frac{1}{3}\int g(x^3)\,d(x^3),$$

роблять заміну $t = x^3$ і так далі. Останній вираз демонструє третій інтеграл.

в) *Відповідь:* $\frac{1}{3}\operatorname{tg} x^3 + C$.

2)

$$\int(\alpha x^2+\beta)^\mu x\,dx \quad (\mu \neq -1).$$

Розв'язок. Можна зробити заміну $t = x^2$; але **простіше** взяти одразу $u = \alpha x^2+\beta$, бо множник $x\,dx$ відрізняється тільки числовим коефіцієнтом від $du = 2\alpha x\,dx$. Отже, ми отримали

$$\int(\alpha x^2+\beta)^\mu x\,dx = \frac{1}{2\alpha}\int u^\mu\,du = \frac{1}{2\alpha(\mu+1)}u^{\mu+1}+C = \frac{1}{2\alpha(\mu+1)}(\alpha x^2+\beta)^{\mu+1}+C.$$

3)

$$\text{а)}\quad \int\frac{\ln x}{x}dx, \quad \text{б)}\quad \int\frac{dx}{x\ln x}, \quad \text{в)}\quad \int\frac{dx}{x\ln^2 x}.$$

Вказівка. Всі ці інтеграли мають вигляд

$$\int g(\ln x)\frac{dx}{x} = \int g(\ln x)\,d\ln x$$

і беруться заміною $t = \ln x$.

Відповідь: а) $\frac{1}{2}\ln^2 x + C$; б) $\ln\ln x + C$; в) $-\frac{1}{\ln x}+C$.

4) Такі інтеграли, як

$$\int g(\sin x)\cos x\,dx, \quad \int g(\cos x)\sin x\,dx, \quad \int g(\operatorname{tg} x)\frac{dx}{\cos^2 x}$$

Обчислюються, відповідно, замінами

$$t = \sin x, \quad u = \cos x, \quad v = \operatorname{tg} x.$$

Наприклад,

$$\text{а)}\quad \int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg}\sin x + C;$$

$$\text{б)}\quad \int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C;$$

$$\text{в)}\quad \int \frac{dx}{A^2\sin^2 x + B^2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{A^2\operatorname{tg}^2 x + B^2} = \int \frac{dv}{A^2v^2+B^2} =$$

$$= \frac{1}{AB}\operatorname{arctg}\frac{Av}{b} + C = \frac{1}{AB}\operatorname{arctg}\left(\frac{A}{B}\operatorname{tg} x\right) + C.$$

5)

$$\text{а)}\quad \int \frac{2x\,dx}{x^2+1},\qquad \text{б)}\quad \int \operatorname{ctg} x\,dx,\qquad \text{в)}\quad \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx,\qquad \text{г)}\quad \int \frac{dx}{\sin x\cos x}.$$

Розв'язок.

а) Якщо зробити заміну $t = x^2+1$, то чисельник $2x\,dx$ дорівнює dt; інтеграл зводиться до

$$\int \frac{dt}{t}dt = \ln|t| + C = \ln(x^2+1) + C.$$

Зауважимо, що завжди, коли запропонований інтеграл має вигляд

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)},$$

так що в підінтегральному виразі **чисельник є диференціалом знаменника**, заміна $t = f(x)$ одразу наближає до остаточного результату

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

За цим прикладом можна виконати

$$\text{б)}\quad \int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C \quad \text{(порівняйте з 4) б);}$$

$$\text{в)}\quad \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C;$$

$$\text{г)}\quad \int \frac{dx}{\sin x\cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

6) Із останнього інтеграла легко отримуємо два корисних інтеграли:

$$\text{а)}\quad \int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C;$$

$$\text{б)}\quad \int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

7)

$$\text{а)}\quad \int\frac{\sqrt{\operatorname{arctg}x}}{1+x^2}\,dx=\int\sqrt{\operatorname{arctg}x}\,d\operatorname{arctg}x=\frac{2}{3}(\operatorname{arctg}x)^{\frac{3}{2}}+C;$$

$$\text{б)}\quad \int\frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}=\int\frac{de^x}{(e^x)^2+1}=\operatorname{arctg}e^x+C;$$

$$\text{в)}\quad \int\operatorname{tg}\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}=-\int\operatorname{tg}\frac{1}{x}d\frac{1}{x}=\ln\left|\cos\frac{1}{x}\right|+C$$

(дивіться 4) б)).

Продемонструємо кілька прикладів інтегрування виразів, які містять двочлени вигляду a^2-x^2, x^2+a^2 і x^2-a^2. В цих випадках, зазвичай, буває вигідно замінити x **тригонометричною** або **гіперболічною** функцією від нової змінної t, використовуючи тотожності

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1,\quad 1+\operatorname{tg}^2 t=\sec^2 t=\frac{1}{\cos^2 t},$$

$$\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1,\quad 1-\operatorname{th}^2 t=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}.$$

8)

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

Заміна: $x=a\operatorname{tg}t,\ dx=\dfrac{a\,dt}{\cos^2 t},\ x^2+a^2=\dfrac{a^2}{\cos^2 t}$, така що

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{a^3}\int\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cos t)+C$$

(дивіться пр. 267.17). Причому достатньо припустити, що t змінюється між $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$.

Повертаємось до змінної x, маємо $t=\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ і виражаючи $\sin t$ і $\cos t$ через $\operatorname{tg}t=\frac{x}{a}$. Отримаємо остаточний результат

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

9)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

В даному прикладі зручніше виконати гіперболічну заміну. Зупиняючись, наприклад, на нижньому знаку, візьмемо: $x = a\,\mathrm{ch}\,t$ (при x і $t > 0$), $dx = a\,\mathrm{sh}\,t\,dt$, $\sqrt{x^2 - a^2} = a\,\mathrm{sh}\,t$. Інтеграл спрощується до $\int dt = t + C$. Для повернення до x згадаємо вираз функції оберненої до гіперболічного косинуса (пр. 49.3).

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}\right) + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C',$$

причому у сталу C' ми вводимо і доданок $-\ln a$.

10)

$$\text{а)} \quad \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{б)} \quad \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{в)} \quad \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Тут і тригонометричні, і гіперболічні заміни приводять до остаточного результату. Наприклад, у другому інтегралі візьмемо $x = a\sec t$, $dx = \dfrac{a \sin t\,dt}{\cos^2 t} = \dfrac{a\,\mathrm{tg}\,t\,dt}{\cos t}$, тоді $x^2 - a^2 = a^2\,\mathrm{tg}^2\,t$ і

$$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + C.$$

11)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Заміна: $x = a\sin t$, $dx = a\cos t\,dt$ зводить цей інтеграл до такого (дивіться 6) а):

$$\frac{1}{a}\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{a}\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right| + C.$$

Але

$$\mathrm{tg}\,\frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x},$$

і остаточний результат

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{1 - \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right| + C.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

На закінчення розглянемо ще два приклади інтегрування за допомогою заміни змінної, де заміна не така натуральна, як в попередніх випадках, але сприяє швидкому розв'язуванню.

12)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} \quad (\alpha \gtrless 0).$$

Нехай $\sqrt{x^2+\alpha} = t - x$ і приймемо t за нову змінну. Піднесемо до квадрата і отримаємо

$$x = \frac{t^2-\alpha}{2t},$$

так що

$$\sqrt{x^2+\alpha} = t - \frac{t^2-\alpha}{2t} = \frac{t^2+\alpha}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+\alpha}{2t^2}dt.$$

В остаточному результаті

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C$$

(порівняйте з 9).

13)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} \quad (\alpha < x < \beta).$$

Нехай $x = \alpha\cos^2\varphi + \beta\sin^2\varphi$ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, де φ — нова змінна; тоді

$$x - \alpha = (\beta-\alpha)\sin^2\varphi, \quad \beta - x = (\beta-\alpha)\cos^2\varphi,$$

$$dx = 2(\beta-\alpha)\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = 2\int d\varphi = 2\varphi + C = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}} + C.$$

270. Інтегрування частинами

Нехай $u = f(x)$ та $v = g(x)$ будуть дві функції від x, що мають неперервні похідні $u' = f'(x)$ і $v' = g'(x)$. Тоді, за правилом диференціювання добутку, $d(uv) = u\,dv + v\,du$ або $u\,dv = d(uv) - v\,du$. Для виразу $d(uv)$ первісною, очевидно, буде uv; тому справедлива формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{270.1}$$

Ця формула виражає правило **інтегрування частинами**. Воно зводить інтегрування виразу $u\,dv = uv'\,dx$ до інтегрування виразу $v\,du = vu'\,dx$.

Нехай, наприклад, потрібно знайти інтеграл $\int x\cos x\,dx$. Візьмемо,

$$u = x, \quad dv = \cos x\,dx, \quad \text{так що} \quad du = dx, \quad v = \sin x.$$

(Оскільки для наших цілей достатньо представити $\cos x\,dx$ хоч одним способом у вигляді dv, то немає потреби писати найбільш загальний вираз для v, що містить довільну сталу. Це зауваження слід пам'ятати і надалі.) Далі за формулою (270.1) маємо

$$\int x\cos x\,dx = \int x\,d\sin x = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C. \tag{270.2}$$

Отже, інтегрування частинами дало змогу замінити складну підінтегральну функцію $x\cos x$ на просту $\sin x$. Для отримання v нам довелося проінтегрувати вираз $\cos x\,dx$ — звідси й назва: **інтегрування частинами**.

Застосовуючи формулу (270.1) для обчислення запропонованого інтеграла, доводиться розбивати підінтегральний вираз на два множники: u та $dv = v'\,dx$, з яких перший диференціюється, а другий інтегрується при переході до інтеграла в правій частині. Потрібно намагатися, щоб інтегрування диференціала не викликало труднощів і щоб заміна u на du та dv на v у **сукупності** спричиняла спрощення підінтегрального виразу. Так, у наведеному прикладі було б очевидно невигідно взяти, скажімо, $x\,dx$ за dv, а $\cos x$ за u.

Маючи певні навички немає потреби вводити позначення u, v, і можна відразу застосовувати формулу (порівняйте з (270.2)).

Правило інтегрування частинами має більш обмежену область застосування, ніж заміна змінної. Але є цілі класи інтегралів, наприклад,

$$\int x^k \ln^m x\,dx, \quad \int x^k \sin bx\,dx, \quad \int x^k \cos bx\,dx, \quad \int x^k e^a x\,dx \quad \text{та інші,}$$

які обчислюються саме інтегруванням частинами.

Повторне застосування правила інтегрування частинами приводить до так званої **узагальненої формули інтегрування частинами**.

Припустимо, що функції u та v мають на проміжку, що розглядається, неперервні похідні всіх порядків, до $(n+1)$-го включно: $u', v', u'', v'', \ldots, u^{(n)}, v^{(n)}, u^{(n+1)}, v^{(n+1)}$.

Замінюючи у формулі (270.1) v на $v^{(n)}$ будемо мати

$$\int uv^{(n+1)}\,dx = \int u\,dv^{(n)} = uv^{(n)} - \int v^{(n)}\,du = uv^{(n)} - \int u'v^{(n)}\,dx.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Аналогічно,

$$\begin{aligned}
&\int u'v^{(n)}\,dx = u'v^{(n-1)} - \int u''v^{(n-1)}\,dx,\\
&\int u''v^{(n-1)}\,dx = u''v^{(n-2)} - \int u'''v^{(n-2)}\,dx,\\
&\ldots\\
&\int u^{(n)}v'\,dx = u^{(n)}v - \int u^{(n+1)}v\,dx.
\end{aligned}$$

Помножуючи ці рівності по черзі на $+1$ або на -1 і додаючи їх почленно, після знищення однакових інтегралів у правій та лівій частинах прийдемо до згаданої **узагальненої формули інтегрування частинами**:

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\,dx. \quad (270.3)$$

Особливо вигідно користуватися цією формулою, коли одним із множників підінтегральної функції служить цілий многочлен. Якщо u є многочлен n-го степеня, то $u^{(n+1)}$ тотожно дорівнює нулю, і для інтеграла в лівій частині випливає остаточний вираз.

Перейдемо до прикладів.

271. Приклади

1)

$$\int x^3 \ln x\,dx.$$

Диференціювання $\ln x$ приводить до спрощення, тому вважаємо

$$u = \ln x, \quad dv = x^3\,dx, \quad \text{тож} \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{4}x^4$$

та

$$\int x^3 \ln x\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

2)

$$\text{а)} \int \ln x\,dx, \quad \text{б)} \int \operatorname{arctg} x\,dx, \quad \text{в)} \int \arcsin x\,dx,$$

Приймаючи у всіх випадках $dx = dv$, отримаємо

$$\text{а)}\ \int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C;$$

$$\text{б)}\ \int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int x\,d\operatorname{arctg} x = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C \quad (\text{дивіться пр. 269.5});$$

$$\text{в)}\ \int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x\,d\arcsin x = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C \quad (\text{дивіться пр. 269.2}).$$

3)

$$\int x^2\,\sin x\,dx.$$

Маємо

$$\int x^2 d(-\cos x) = -x^2\cos x - \int(-\cos x)\,d(x^2) = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx.$$

Отже, ми звели шуканий інтеграл до вже відомого (270.2); підставляючи його значення, отримаємо

$$\int x^2\,\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C.$$

Взагалі, правило **інтегрування частинами** тут довелось застосувати двічі.

Також, повторним застосуванням цього правила, обчислюються інтеграли

$$\int P(x)e^{ax}\,dx, \quad \int P(x)\sin bx\,dx, \quad \int P(x)\cos bx\,dx,$$

де $P(x)$ — цілий відносно x многочлен.

4) Якщо скористатися узагальненою формулою інтегрування частинами, то можна отримати одразу узагальнений вираз для інтегралів такого виду.

Вважаючи $v^{(n+1)} = e^{ax}$, отримаємо

$$v^{(n)} = \frac{e^{ax}}{a}, \quad v^{(n-1)} = \frac{e^{ax}}{a^2}, \quad v^{(n-2)} = \frac{e^{ax}}{a^3} \quad \text{і так далі.}$$

Тому, вважаючи що $P(x)$ є многочлен n-го степеня, за формулою (270.3) отримаємо

$$\int P(x)e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{P}{a} - \frac{P'}{a^2} + \frac{P''}{a^3} - \ldots\right) + C.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Аналогічно, якщо узяти $v^{(n+1)} = \sin bx$, то

$$v^{(n)} = -\frac{\cos bx}{b}, \quad v^{n-1} = -\frac{\sin bx}{b^2}, \quad v^{n-2} = \frac{\cos bx}{b^3} \quad \text{і так далі.}$$

Звідси випливає наступна формула

$$\int P(x)\sin bx\,dx = \sin bx\cdot\left(\frac{P'}{b^2} - \frac{P'''}{b^4} + \ldots\right) - \cos bx\cdot\left(\frac{P}{b} - \frac{P''}{b^3} + \ldots\right) + C.$$

Подібним чином отримується і формула

$$\int P(x)\cos bx\,dx = \sin bx\cdot\left(\frac{P}{b} - \frac{P''}{b^3} + \ldots\right) + \cos bx\cdot\left(\frac{P'}{b^2} - \frac{P'''}{b^4} + \ldots\right) + C.$$

5)

$$\int x^3\ln^2 x\,dx.$$

Маємо

$$\int \ln^2 x\,d\frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}x^4\ln^2 x - \frac{1}{4}\int x^4\,d\ln^2 x = \frac{1}{4}x^4\ln^2 x - \frac{1}{2}\int x^3\ln x\,dx,$$

і ми звели справу до інтеграла 1). Остаточно,

$$\int x^3\ln^2 x\,dx = \frac{1}{4}x^4\ln^2 x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4\right) + C = \frac{1}{4}x^4\left(\ln^2 x - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{8}\right) + C.$$

Так, послідовно, обчислюється інтеграл

$$\int x^k\ln^m x\,dx,$$

де k — будь-яке дійсне число ($k \neq -1$), а $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. Якщо до цього інтеграла застосувати формулу інтегрування частинами, взявши $u = \ln^m x$, то отримаємо **рекурентну формулу**

$$\int x^k\ln^m x\,dx = \frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln^m x - \frac{m}{k+1}\int x^k\ln^{m-1} x\,dx,$$

за якою обчислення розглянутого інтеграла зводиться до обчислення інтеграла такого ж типу, але з меншим на одиницю показником при $\ln x$.

Втім, підстановка $t = \ln x$ зводить розглянутий інтеграл до виду $\int t^m e^{(k+1)t}dt$, вже знайомому з 3) та 4).

6) Цікавим прикладом є інтеграли

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx, \quad \int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Якщо до них застосувати інтегрування частинами (взявши в обох випадках, скажімо, $dv = e^{ax}dx,\ v = \frac{1}{a}e^{ax}$), то отримаємо

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$
$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Отже, кожен із цих інтегралів виявився виразом через інший.

(Якщо під інтегралами розуміти деякі **певні** первісні (дивіться зауваження в розд. 266), то бажаючи у другій формулі мати ті ж функції, що і в першій, ми, строго кажучи, повинні були праворуч приєднати ще деяку сталу. Звичайно, вона б приєдналась до C і C' в остаточних виразах.)

Однак якщо в першу формулу підставити вираз другого інтеграла з другої формули, то прийдемо до **рівняння** щодо першого інтеграла, з якого він і визначиться:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$$

Аналогічно знаходимо і другий інтеграл

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C'.$$

7) Розглянемо останній приклад застосування методу інтегрування частинами. Виведемо **рекурентну формулу** для обчислення інтеграла

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Застосуємо до нього формулу (270.1), вважаючи

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \quad dv = dx, \quad \text{тож} \quad du = -\frac{2nx\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, \quad v = x.$$

Ми отримаємо

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx.$$

Останній інтеграл можна перетворити так:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = J_n - a^2 J_{n+1}.$$

Підставляючи цей вираз у попередню рівність, прийдемо до співвідношення

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1},$$

звідки

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{a^2} \cdot J_n. \tag{271.1}$$

Отримана формула зводить обчислення інтеграла J_{n+1} до обчислення інтеграла J_n з меншим на одиницю значком. Знаючи інтеграл

$$J_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

(пр. 267.9; ми беремо одне з його значень), за цією формулою, при $n = 1$ знайдемо

$$J_2 = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

(що ми вище отримали іншим способом, дивіться пр. 269.8). Вважаючи у формулі (271.1) $n = 2$, ми отримаємо далі

$$J_3 = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} J_2 = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

і так далі. Отже, можна обчислити інтеграл J_n для будь-якого натурального показника n.

8.2. Інтегрування раціональних виразів

272. Формулювання задачі інтегрування у скінченному вигляді

Ми познайомилися із елементарними способами обчислення невизначених інтегралів. Ці способи не визначають точно шляху, яким належить іти, щоб обчислити заданий інтеграл, вони вимагають майстерність від обчислювача. У цьому та наступних розділах ми зупинимося докладніше на деяких важливих класах функцій і дамо цілком певний порядок обчислень їх інтегралів.

Тепер з'ясуємо, що саме нас цікавитиме при інтегруванні функцій згаданих класів та за яким принципом буде зроблена ця класифікація.

У розд. 51 було охарактеризовано те різноманіття функцій, до яких насамперед застосовується аналіз; це — так звані елементарні функції та функції, які виражаються через елементарні за допомогою **скінченного числа** арифметичних дій та композицій (без граничного переходу).

В главі 3 ми бачили, що всі такі функції диференціюються і їх похідні належать до того ж різноманіття. Інакше йде справа з їх інтегралами: дуже часто виявляється, що інтеграл від функції, що належить до згаданого класу, саме до цього класу не належить, тобто **не виражається** через елементарні функції за допомогою **скінченного числа** вищеназваних операцій. До числа таких інтегралів відносяться, наприклад,

$$\int e^{-x^2}dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x};$$

інші приклади такого роду будуть наведені нижче (розд. 280, розд. 289, розд. 290 і далі).

Важливо підкреслити, що всі ці інтеграли реально ***існують*** *(дивіться сказане з цього приводу в розд. 264; ми повернемося до цього нижче, в розд. 305), але вони лише є* ***абсолютно нові*** *функції і не зводяться до тих функцій, які ми назвали елементарними.*

(Для того щоб допомогти читачеві освоїтися з цим фактом, нагадаємо, що інтеграли

$$\int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dx}{1+x^2}$$

від **раціональних** функцій самі не є раціональними функціями. Отже, **якби** для нас "елементарними" були лише раціональні функції, то вже названі інтеграли від "елементарних" функцій не виражались би через "елементарні" функції, являючи собою "неелементарні" функції нової природи: $\ln x$ і $\operatorname{arctg} x$!)

Відомо порівняно небагато загальних класів функцій, для яких інтегрування може бути виконано в скінченному вигляді; цими класами ми і займемося. На перше місце серед них належить поставити важливий **клас раціональних функцій**.

273. Прості дроби та їх інтегрування

Оскільки з неправильного раціонального дробу можна виділити цілу частину, інтегрування якої не становить труднощів, то достатньо зайнятися інтегруванням **правильних дробів** (у яких степінь чисельника нижче степеня знаменника).

Ми зупинимося тут на так званих **простих дробах**; це будуть дроби наступних чотирьох типів:

$$\begin{aligned} &1.\quad \frac{A}{x-a}, \\ &2.\quad \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k=2,\ 3,\ \dots), \\ &3.\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \\ &4.\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} \quad (m=2,\ 3,\ \dots), \end{aligned}$$

де A, M, N, a, p, q — дійсні числа; крім того, для дробів типу 3 і 4 вважається, що тричлен x^2+px+q немає дійсних коренів, так що

$$\frac{p^2}{4}-q<0 \quad \text{або} \quad q-\frac{p^2}{4}>0.$$

Дроби типу 1 і 2 ми вже вміємо інтегрувати (пр. 267.7)

$$A\int\frac{dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C,$$

$$A\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\frac{A}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$$

Що ж до дробів виду 3 і 4, то їх інтегрування полегшується наступною підстановкою. Виділимо з виразу x^2+px+q повний квадрат двочлена

$$x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left[q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Останній вираз у дужках, за припущенням, є додатним, його можна покласти рівним a^2, якщо взяти

$$a=+\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

Тепер зробимо заміну

$$x+\frac{p}{2}=t, \quad dx=dt,$$

$$x^2+px+q=t^2+a^2, \quad Mx+N=Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right).$$

У випадку 3 матимемо

$$\begin{aligned}\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx&=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}\,dt=\\&=\frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+a^2}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\\&=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{1}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C,\end{aligned}$$

або, повертаючись до x і підставляючи замість a її значення:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Для випадку 4 та сама заміна дасть

$$\begin{aligned}\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx&=\int\frac{Mt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{(t^2+a^2)^m}\,dt=\\&=\frac{M}{2}\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^m}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.\end{aligned}\tag{273.1}$$

Перший з інтегралів обчислюється заміною $t^2+a^2=u$, $2t\,dt=du$

$$\int\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^m}=\int\frac{du}{u^m}=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{u^{m-1}}+C=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{m-1}}+C.\tag{273.2}$$

Другий з інтегралів праворуч, при будь-якому m може бути обчислений за рекурентною формулою (271.1). Потім залишиться лише покласти в результаті $t=\frac{2x+p}{2}$, щоб повернутися до змінної x.

Цим вичерпується питання про інтегрування простих дробів.

274. Розкладання правильних дробів на прості дроби

Зупинимося тепер на одній теоремі з області алгебри, яка, однак, має фундаментальне значення в теорії інтегрування раціональних дробів:
кожен правильний дріб

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

може бути представлений у вигляді суми скінченного числа простих дробів.

Це розкладання правильного дробу на прості дроби найщільнішим чином пов'язане з розкладанням його знаменника $Q(x)$ на прості множники. Як відомо, кожен цілий многочлен з дійсними коефіцієнтами розкладається (причому єдиним чином) на також дійсні множники типу $x-a$ і x^2+px+q; при цьому припускається, що квадратичні множники не мають дійсних коренів, отже не розкладаються на дійсні лінійні множники. Об'єднуючи однакові множники (якщо такі є) і покладаючи, для простоти, старший коефіцієнт многочлена $Q(x)$ рівним одиниці, можна записати розклад цього многочлена схематично у вигляді

$$Q(x) = (x-a)^k \ldots (x^2+px+q)^m \ldots, \tag{274.1}$$

де k, $\ldots, m$, $\ldots$ є натуральними числами.

Помітимо, що якщо степінь многочлена Q є n, то, очевидно, сума всіх показників k з **подвоєною** сумою всіх показників m в точності дасть n:

$$\sum k + 2 \cdot \sum m = n. \tag{274.2}$$

Для доведення теореми попередньо встановимо наступні два допоміжних твердження.

Твердження 274.1. *Розглянемо який-небудь лінійний множник $x-a$, що входить в розклад знаменника з показником $k \geqslant 1$, так що*

$$Q(x) = (x-a)^k Q_1(x),$$

де многочлен $Q_1(x)$ вже на $x-a$ не ділиться. Тоді даний правильний дріб

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}$$

може бути представлений у вигляді суми правильних дробів

$$\frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1} Q_1(x)},$$

з яких перший є ***простим****, а знаменник другого має множник $x-a$ в степені нижчому, ніж до цього. (Літери P, Q з різними значками позначають тут цілі многочлени, а літери A, M, N — сталі числа.)*

Доведення. Для доведення достатньо підібрати число A і многочлен $P_1(x)$ так, щоб виконувалася **тотожність**:

$$P(x) - AQ_1(x) = (x-a)P_1(x).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Визначимо спочатку A так, щоб ліва частина ділилася на $x-a$, для чого достатньо (за відомою теоремою Бєзу (фр. Étienne Bézout, Етьє́н Бєзу́)) щоб її значення при $x=a$ було нулем; це приводить до наступного виразу для A:

$$A=\frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

Воно має сенс саме тому, що (також за теоремою Бєзу) $Q_1(a)\neq 0$. При вказаному виборі A многочлен P_1 визначиться просто як частка. □

Твердження 274.2. *Нехай тепер x^2+px+q буде який-небудь з квадратичних множників, що входить в розклад знаменника з показником $m\geqslant 1$, так що цього разу можна покласти*

$$Q(x)=(x^2+px+q)^mQ_1(x),$$

де многочлен $Q_1(x)$ на тричлен x^2+px+q не ділиться. Тоді даний правильний дріб

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^mQ_1(x)}$$

може бути представлений у вигляді суми правильних дробів

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_1(x)},$$

з яких перший вже буде ***простим****, а другий має в знаменнику вищезгаданий тричлен знову — в степені нижче.*

Доведення. Для доведення достатньо підібрати числа M,N і многочлен $P_1(x)$ так, щоб виконувалася **тотожність**:

$$P(x)-(Mx+N)Q_1(x)=(x^2+px+q)P_1(x).$$

Визначимо M і N так, щоб цього разу ліва частина ділилася на квадратний тричлен x^2+px+q. Нехай остачею від ділення P і Q_1 на цей тричлен будуть, відповідно, $\alpha x+\beta$ і $\gamma x+\delta$. Тоді питання зведеться до того, щоб на x^2+px+q ділився вираз

$$\alpha x+\beta-(Mx+N)(\gamma x+\delta)=-\gamma Mx^2+(\alpha-\delta M-\gamma N)x+(\beta-\delta N).$$

Виконавши тут ділення, справді, в **остачі** будемо мати

$$[(p\gamma-\delta)M-\gamma N+\alpha]x+[q\gamma M-\delta M+\beta].$$

Ми повинні прирівняти до нуля обидва ці коефіцієнти і, отже, для визначення M і N отримаємо систему з двох лінійних рівнянь; її визначник

$$\begin{vmatrix} p\gamma-\delta & -\gamma \\ q\gamma & -\delta \end{vmatrix}=\delta^2-p\gamma\delta+q\gamma^2$$

відмінний від нуля. Справді, при $\gamma \neq 0$ його можна записати у вигляді

$$\gamma^2 \left[\left(-\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 + p \cdot \left(-\frac{\delta}{\gamma} \right) + q \right];$$

але вираз в квадратних дужках є значенням нашого тричлена $x^2 + px + q$ в точці $x = -\frac{\delta}{\gamma}$ і, відповідно, не може бути нулем, бо цей тричлен не має дійсних коренів. При $\gamma = 0$ визначник зводиться до δ^2, а в цьому випадку δ заздалегідь не нуль, оскільки многочлен $Q_1(x)$ на $x^2 + px + q$ не ділиться.

Встановивши зазначеним шляхом значення M і N, многочлен $P_1(x)$ і тут також визначимо без проблем як частку. ☐

Звернемося тепер до доведення сказаної спочатку теореми.

Доведення. Воно зведеться до повторного застосування тв. 274.1 і тв. 274.2, котрі забезпечують можливість послідовного виділення **простих дробів** з даного правильного дробу до вичерпання.

Якщо множник $x - a$ входить в Q лише в першому степені, то застосуємо тв. 274.1 (при $k = 1$) і поставимо йому у відповідність єдиний **простий дріб** вигляду

$$\frac{A}{x-a}.$$

У випадку, коли показник степеня $x - a$ є $k > 1$, то, відокремивши, на підставі тв. 274.1, **простий дріб**

$$\frac{A_k}{(x-a)^k},$$

ми знову застосуємо тв. 274.1 до дробу, що залишився, та виділимо **простий дріб**

$$\frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}},$$

і так далі, доки множник $x - a$ зовсім не зникне з розкладу знаменника. Отже, в розглянутому випадку множнику $(x - a)^k$, $(k > 1)$ буде відповідати група з k **простих дробів**

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}. \tag{274.3}$$

Такі самі роздуми ми по черзі застосуємо до кожного лінійного множника, з тих що залишились, доки знаменник не вичерпається або в його розкладі не залишаться лише квадратичні множники.

Аналогічно, користуючись твердженням 2, квадратичному множнику x^2+px+q ми поставимо у відповідність лише один **простий дріб** вигляду

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

якщо він входить в першому степені, і групу з m **простих дробів**

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}, \tag{274.4}$$

якщо цей множник входить з показником $m>1$.

Те саме можна зробити і з іншими квадратичними множниками, якщо такі ще є в наявності, цим і завершується доведення теореми. □

275. Знаходження коефіцієнтів. Інтегрування правильних дробів

Отже, знаючи розклад (274.1), ми також знаємо **знаменники** тих простих дробів, на які розкладається дріб $\frac{P}{Q}$. Зосередимось на визначенні **чисельників**, тобто коефіцієнтів A, M, N. Оскільки чисельники групи дробів (274.3) мають k коефіцієнтів, а чисельники групи дробів (274.4) — $2m$ коефіцієнтів, то, зважаючи на (274.2), всього їх буде n.

Для визначення цих коефіцієнтів зазвичай застосовують **метод невизначених коефіцієнтів**. Знаючи **форму** розкладу дробу $\frac{P}{Q}$, його записують з **буквеними коефіцієнтами** в чисельниках справа. Спільним знаменником всіх простих дробів, очевидно, буде Q; додаючи їх, отримаємо правильний дріб. (Сума правильних раціональних дробів завжди є правильним дробом.) Якщо тепер відкинути зліва і справа знаменник Q, то отримаємо рівність двох многочленів $(n-1)$-го степеня, що є тотожною відносно x. Коефіцієнтами при різних степенях многочлена справа будуть лінійні однорідні многочлени відносно n коефіцієнтів, які позначено буквами; прирівнявши їх до відповідних числових коефіцієнтів многочлена P, отримаємо систему n лінійних рівнянь, з яких визначаються буквені коефіцієнти. Оскільки можливість розкладання на прості дроби вже заздалегідь перевірена, то ця система ніколи не може виявитися **суперечливою**.

Більш того, оскільки ця система рівнянь має розв'язок завжди, яким би не був набір вільних членів (коефіцієнтів многочлена P), то її визначник буде відмінним від 0. Інакше кажучи, система завжди є **визначеною**. Це просте зауваження також доводить і **єдиність** розкладу правильного дробу на прості дроби. Продемонструємо сказане на прикладі.

Розглянемо дріб $\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$. Згідно з загальною теоремою, для нього існує

nebayduzhi.math@gmail.com

розклад

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Коефіцієнти A, B, C, D, E визначимо з тотожності

$$2x^2+2x+13=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(x-2)+(Dx+E)(x-2).$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x зліва і справа, отримаємо систему з п'яти рівнянь

$$\begin{array}{r|l} x^4 & A+B=0, \\ x^3 & -2B+C=0, \\ x^2 & 2A+B-2C+D=2, \\ x^1 & -2B+C-2D+E=2, \\ x^0 & A-2C-2E=13, \end{array}$$

звідки

$$A=1,\quad B=-1,\quad C=-2,\quad D=-3,\quad E=-4.$$

Остаточно,

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

Алгебраїчний факт, який ми тільки що отримали, має безпосереднє застосування до **інтегрування раціональних дробів**. Як ми бачили в розд. 273, прості дроби інтегруються в скінченному вигляді. Тепер те ж саме ми можемо сказати про будь-який раціональний дріб. Якщо придивитися до функцій, через які виражаються інтеграли від цілого многочлена та правильних дробів, можна сформулювати більш точний результат.

Інтеграл від будь-якої раціональної функції виражається в скінченному вигляді — за допомогою раціональної функції, логарифма та арктангенса.

Наприклад, застосувавши формули з розд. 273 до розглянутого прикладу, отримаємо

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{1}{x-2}\,dx-\int\frac{x+2}{x^2+1}\,dx-\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{3-4x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4\operatorname{arctg}x+C.$$

276. Виділення раціональної частини інтеграла

Існує спосіб, придуманий Остроградським, за допомогою якого пошук інтеграла від правильного раціонального дробу значно спрощується. Цей спосіб дає змогу чисто **алгебраїчно** виділити раціональну частину інтеграла.

Ми бачили (розд. 273), що раціональні члени в інтегралі з'являються при інтегруванні простих дробів виду 2 та 4. У першому випадку інтеграл можна записати одразу:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C. \qquad (276.1)$$

З'ясуємо тепер, який вид має раціональна частина інтеграла

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx \qquad \left(m>1,\ q-\frac{p^2}{4}>0\right).$$

Застосувавши вже знайому підстановку $x+\frac{p}{2}=t$, застосуємо рівності (273.1) та (273.2) та формулу зведення (271.1) при $n=m-1$. Якщо повернутися до змінної x, то отримаємо

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{M'x+N'}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \alpha\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

де M', N', α є деякими сталими коефіцієнтами. За цією ж формулою, змінюючи m на $m-1$, для останнього інтеграла отримаємо (якщо $m>2$)

$$\int \frac{\alpha\,dx}{(x^2+px+q)^{m-1}} = \frac{M''x+N''}{(x^2+px+q)^{m-2}} + \beta\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-2}}$$

і так далі, доки не зведемо показник тричлена x^2+px+q в інтегралі справа до одиниці. Всі раціональні члени, що виділяються послідовно, є правильними дробами. Об'єднавши їх, отримаємо результат вигляду

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \lambda\int \frac{dx}{x^2+px+q}, \qquad (276.2)$$

де $R(x)$ — цілий многочлен, що має степінь, нижчу за степінь знаменника (розд. 275), а λ — стала.

Нехай маємо правильний дріб $\frac{P}{Q}$, який будемо вважати нескоротним, а знаменник розкладено на прості множники (дивіться (274.1)). Тоді інтеграл від цього дробу буде сумою інтегралів від дробів вигляду (274.3) чи (274.4). Якщо k (або m) більше одиниці, то інтеграли всіх дробів групи (274.3) (або (274.4)), окрім першого, перетворяться за формулою (276.1) (або (276.2)). Об'єднавши всі ці результати, остаточно отримаємо формулу вигляду

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx. \qquad (276.3)$$

Раціональну частину інтеграла $\dfrac{P_1}{Q_1}$ отримано додаванням виділених вище раціональних частин; отже, насамперед вона є **правильним дробом**, а її знаменник Q_1 має розклад

$$Q_1(x) = (x-a)^{k-1} \dots (x^2+px+q)^{m-1} \dots$$

Що стосується дробу $\dfrac{P_2}{Q_2}$, який залишився під знаком інтеграла, то його отримано додаванням дробів виду 1 та 3, тому він теж є **правильним** і

$$Q_2(x) = (x-a) \dots (x^2+px+q) \dots$$

Очевидно (274.1), $Q = Q_1 Q_2$.

Формула (276.3) називається *формулою Остроградського.*

Диференціюючи, можна отримати рівносильну форму

$$\frac{P}{Q} = \left[\frac{P_1}{Q_1}\right]' + \frac{P_2}{Q_2}. \tag{276.4}$$

Ми бачили, що многочлени Q_1 та Q_2 легко знайти, якщо відомо розклад (274.1) многочлена Q. Але їх можна знайти і без цього розкладу. Справді, оскільки похідна Q' містить всі прості множники, на які розкладається Q, з показниками на одиницю менше, то Q_1 є найбільшим спільним дільником Q та Q', тому його можна знайти за допомогою, наприклад, послідовного ділення. Якщо Q_1 відомий, то Q_2 визначається діленням Q на Q_1.

Перейдемо до визначення чисельників в формулі (276.4). Для цього також можна скористатися **методом невизначених коефіцієнтів**.

Позначимо через n, n_1, n_2, відповідно, степені многочленів Q, Q_1 та Q_2, причому $n_1 + n_2 = n$; тоді степені многочленів P, P_1, P_2 будуть не більше $n-1$, n_1-1, n_2-1. Підставимо замість P_1 та P_2 многочлени степенів n_1-1 та n_2-1 з **буквеними коефіцієнтами**; всього їх буде n_1+n_2, тобто n. Виконаємо диференціювання в (276.4):

$$\frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P}{Q}.$$

Покажемо, що перший дріб **завжди** можна звести до знаменника Q, зберігаючи цілим чисельник. А саме,

$$\frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} = \frac{P_1'Q_2 - P_1\frac{Q_1'Q_2}{Q_1}}{Q_1Q_2} = \frac{P_1'Q_2 - P_1H}{Q},$$

де H позначає частку $\dfrac{Q_1'Q_2}{Q_1}$. Але цю частку можна зобразити у вигляді цілого многочлена. Справді, якщо $(x-a)^k$ при $k \geqslant 1$ входить до Q_1, то $(x-a)^{k-1}$ входитиме

nebayduzhi.math@gmail.com

до Q_1', а $x-a$ — до Q_2; такий само висновок можна зробити і про множник вигляду $(x^2+px+q)^m$ при $m \geqslant 1$. Отже, чисельник H **націло** ділиться на знаменник, і тому далі H можна вважати цілим многочленом степеня $n_2 - 1$.

Прибираючи спільний знаменник Q, отримаємо тотожність двох многочленів степеня $n-1$

$$P_1'Q_2 - P_1H + P_2Q_1 = P.$$

Звідси, як і вище, для визначення n введених буквених коефіцієнтів отримаємо систему n лінійних рівнянь.

Оскільки можливість розкладання (276.4) перевірено для будь-якого P, то ця система має бути **сумісною** для будь-яких вільних членах. Звідси випливає, що її визначник відмінний від нуля, а отже — система завжди виявляється **визначеною**, і розклад (276.4) для вказаних Q_1 та Q_2 можливий **єдиним чином**. (Порівняйте з аналогічним зауваженням з приводу розкладання правильного дробу на прості дроби у розд. 275.)

Приклад. Нехай треба виділити раціональну частину інтеграла

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$$

Маємо

$$Q_1 = Q_2 = (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1,$$

$$\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x^3+x^2+x+1)^2} = \left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right]' + \frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1},$$

звідки

$$\begin{aligned}4x^4+4x^3+16x^2+12x+8 &= (2ax+b)(x^3+x^2+x+1)-\\ &- (ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1) + (dx^2+ex+f)(x^3+x^2+x+1).\end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів x з обох сторін, отримаємо систему рівнянь, з яких визначаються невідомі $a,\ b,\ \ldots,\ f$:

$$\begin{array}{r|l}
x^5 & d=0 \text{ (далі на } d \text{ вже не зважаємо)},\\
x^4 & -a+e=4,\\
x^3 & -2b+e+f=4,\\
x^2 & a-b-3c+e+f=16,\\
x^1 & 2a-2c+e+f=12,\\
x^0 & b-c+f=8.
\end{array}$$

Отримуємо $a=-1$, $b=1$, $c=-4$, $d=0$, $e=3$, $f=3$, тому шуканий інтеграл

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1} + 3\int \frac{dx}{x^2+1} = \\ = -\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1} + 3\operatorname{arctg} x + C.$$

В цьому прикладі останній інтеграла було легко обчислити одразу. В інших випадках доводиться знову розкладати на прості дроби, хоча цей процес також можна об'єднати з пошуком коефіцієнтів в (276.4).

277. Приклади

Наведемо подальші приклади інтегрування раціональних функцій.

1)

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}.$$

Розкладання на прості дроби тут досягається за допомогою нехитрих перетворень:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \\ = \frac{(1+x)^2-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Відповідь:

$$-\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

2)

$$\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx.$$

Маємо

$$\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} = \frac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{11}{8}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)} = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x+\frac{3}{2}} + \frac{C}{x-\frac{5}{2}},$$

звідки випливає тотожність

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{11}{8} = A\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right) + B\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right) + C\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Замість того, щоб прирівнювати коефіцієнти при однакових степенях x зліва і справа, можна зробити інакше. Підставимо в цю тотожність по черзі $x = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$; одразу отримаємо $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{8}$, $C = \frac{3}{8}$ (оскільки щоразу справа залишається лише **один** доданок).

Відповідь:

$$\frac{1}{4}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{8}\ln\left|x+\frac{3}{2}\right| + \frac{3}{8}\ln\left|x-\frac{5}{2}\right| + C = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\right| + C'.$$

Очевидно, стала C' відрізняється від сталої C на $-\frac{1}{2}\ln 2$.

3)

$$\int \frac{dx}{x^4+1}.$$

Оскільки

$$x^4+1 = (x^4+2x^2+1) - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),$$

то шукаємо розклад вигляду

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

З тотожності

$$1 = (Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1) + (Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

отримуємо систему рівнянь

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0, \\ x^1 & A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0, \\ x^0 & B+D=1, \end{array}$$

звідки

$$A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = D = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1) + C.$$

Застосувавши формулу додавання для арктангенсів (розд. 50), цей результат можна записати і в такій формі:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C'.$$

Однак, варто зазначити, що цей вираз має сенс лише **окремо** для проміжків $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$, бо в точках $x=\pm1$ він не визначений. Стала C' для цих проміжків, відповідно, дорівнює

$$C-\frac{\pi}{2\sqrt{2}},\quad C,\quad C+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Стрибкоподібна зміна сталої компенсує розриви самої функції при $x=\pm1$.

4)

$$\int\frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}\,dx.$$

Застосуємо виділення раціональної частини інтеграла. Маємо

$$Q_1=(x^2-2x+2)^2,\quad Q_2=(x-1)(x^2-2x+2).$$

Отже,

$$\frac{2x^4-4x^3+24x^2-40x+20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}=\left[\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x^2-2x+2)^2}\right]'+\frac{e}{x-1}+\frac{fx+g}{x^2-2x+2},$$

причому ми одразу розкладаємо на прості дроби той вираз, який ще потрібно інтегрувати (після виділення раціональної частини інтеграла).

Тотожність

$$\begin{aligned}&2x^4-4x^3+24x^2-40x+20=(3ax^2+2bx+c)(x^2-2x+2)(x-1)-\\&-(ax^3+bx^2+cx+d)\cdot2(2x-2)(x-1)+e(x^2-2x+2)^3+\\&+(fx+g)(x-1)(x^2+2x+2)^2\end{aligned}$$

приводить до системи рівнянь:

$$\begin{array}{r|l}x^6 & e+f=0,\\ x^5 & -a-6e-5f+g=0,\\ x^4 & -a-2b+18e+12f-5g=2,\\ x^3 & 8a+2b-3c-32e-16f+12g=-4,\\ x^2 & -6a+4b+5c-4d+36e+12f-16g=24,\\ x^1 & -4b+8d-24e-4f+12g=-40,\\ x^0 & -2c-4d+8e-4g=20,\end{array}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

звідки

$$a = 2, \quad b = -6, \quad c = 8, \quad d = -9, \quad e = 2, \quad f = -2, \quad g = 4.$$

Відповідь:

$$\frac{2x^3 - 6x^2 + 8x - 9}{(x^2 - 2x + 2)^2} + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + 2\,\mathrm{arctg}(x-1) + C.$$

5)

$$\int \frac{x^6 - x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3}\,dx.$$

Виділимо раціональну частину інтеграла. Маємо

$$Q_1 = (x+1)(x^2+x+1)^2, \quad Q_2 = (x+1)(x^2+x+1).$$

Шукатимемо розклад вигляду

$$\left[\frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{(x+1)(x^2+x+1)^2}\right]' + \frac{fx^2 + gx + h}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

З системи рівнянь:

$$\begin{array}{r|l}
x^7 & f = 0, \\
x^6 & -a + g = 1, \\
x^5 & a - 2b + 3g + h = -1, \\
x^4 & 5a - b - 3c + 5g + 3h = 1, \\
x^3 & 4a + 3b - 3c - 4d + 5g + 5h = 2, \\
x^2 & 3b + c - 5d - 5e + 3g + 5h = 3, \\
x^1 & 2c - d - 7e + g + 3h = 3, \\
x^0 & d - 3e + h = 3
\end{array}$$

знаходимо

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = -2, \quad d = 0, \quad e = -1, \quad f = g = h = 0.$$

Отже, в цьому прикладі інтеграл зводиться до раціональної функції

$$-\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x+1)(x^2+x+1)^2} + C.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

8.3. Інтегрування деяких виразів, що містять радикали

278. Інтегрування виразів вигляду $R\left(x,\ \sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$. Приклади

Вище ми навчилися інтегрувати в скінченному вигляді раціональні диференціали. Надалі основним способом інтегрування тих чи інших класів диференціальних виразів буде розшук таких підстановок $t=\omega(x)$, які б звели підінтегральний вираз до раціонального вигляду і дали б можливість обчислити інтеграл в скінченному вигляді як функцію від t. Якщо при цьому сама функція $\omega(x)$, яку слід підставити замість t, виражається через елементарні функції, то інтеграл обчислиться в скінченному вигляді як функція від x.

Назвемо цей спосіб **методом раціоналізації підінтегрального виразу**.

Розглянемо перший приклад його застосування. Візьмемо такий інтеграл

$$\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx, \tag{278.1}$$

де R означає **раціональну** функцію від двох аргументів, m — натуральне число, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ — сталі. (Домовимося раз і назавжди буквою R позначати **раціональну** функцію від своїх аргументів.)

Нехай

$$t=\omega(x)=\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}},\quad t^m=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\quad x=\varphi(t)=\frac{\delta t^m-\beta}{\alpha-\gamma t^m}.$$

Інтеграл зведеться до

$$\int R(\varphi(t),\ t)\,\varphi'(t)\,dt;$$

тут диференціал має вже раціональний вигляд, оскільки R,φ,φ' — раціональні функції. Обчисливши цей інтеграл за правилами попереднього розділу, до старої змінної повернемося підставивши $t=\omega(x)$.

До інтеграла виду (278.1) зводяться і загальніші інтеграли

$$\int R\left(x,\ \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^r,\ \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^s,\ \ldots\right)dx,$$

де всі показники $r,s,\ldots$ раціональні; варто лише звести ці показники до спільного знаменника m, щоб під знаком інтеграла отримати раціональну функцію від x і радикала $\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$.

Приклади.

1)

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx.$$

Тут **дробово-лінійна** функція $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, зокрема, звелася просто до **лінійної** функції. Нехай

$$t=\sqrt{x+1},\quad dx=2t\,dt;$$

тоді

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx=2\int\frac{t+2}{t^3-1}\,dt=\int\left(\frac{2}{t-1}-\frac{2t+2}{t^2+t+1}\right)dt=$$
$$=\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,$$

де залишається лише підставити $t=\sqrt{x+1}$.

2)

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}.$$

Нехай

$$t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}},\quad x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\quad dx=-\frac{6t^2dt}{(t^3-1)^2};$$

тоді

$$\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}=\int\frac{-3\,dt}{t^3-1}=\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C,$$

де $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

279. Інтегрування біноміальних диференціалів. Приклади

Біноміальними називаються диференціали вигляду

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

де a, b — будь-які сталі, а показники m, n, p — раціональні числа. З'ясуємо випадки, коли ці вирази інтегруються у скінченному вигляді.

nebayduzhi.math@gmail.com

Один такий випадок зрозумілий безпосередньо: **якщо** p — **число ціле** (додатне, нуль або від'ємне), то вираз, що розглядається, відноситься до типу, вивченого в попередньому розділі. Саме якщо через λ позначити найменше спільне кратне знаменників дробів m і n, то ми маємо тут вираз вигляду $R\,(\sqrt[\lambda]{x})\,dx$, так що для раціоналізації його достатня підстановка $t=\sqrt[\lambda]{x}$.

Перетворимо тепер цей вираз підстановкою $z=x^n$. Тоді

$$x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{1}{n}(a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1}dz$$

і, поклавши для стислості

$$\frac{m+1}{n}-1=q,$$

матимемо

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{n}\int(a+bz)^p\,z^{\frac{m+1}{n}-1}dz. \tag{279.1}$$

Якщо q — **число ціле**, то ми знову приходимо до виразу вивченого типу. Справді, якщо позначити через ν знаменник дробу p, то перетворений вираз має вигляд $R(z,\ \sqrt[\nu]{a+bz})$. Раціоналізації підінтегрального виразу можна досягти і відразу підстановкою

$$t=\sqrt[\nu]{a+bz}=\sqrt[\nu]{a+bx^n}.$$

Нарешті, перепишемо другий з інтегралів (279.1) так:

$$\int\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}\,dz.$$

Легко побачити, що при $p+q$ **цілому** ми також маємо вивчений вже випадок: перетворений вираз має вигляд $R\left(z,\ \sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}\right)$. Підінтегральний вираз в даному інтегралі раціоналізується і **відразу** підстановкою

$$t=\sqrt[\nu]{\frac{a+bz}{z}}=\sqrt[\nu]{ax^{-n}+b}.$$

Отже, *обидва інтеграли* (279.1) *виражаються в скінченному вигляді, якщо виявляється цілим одне з чисел*

$$p,\quad q,\quad p+q$$

або (що те саме) одне з чисел

$$p,\quad \frac{m+1}{n},\quad \frac{m+1}{n}+p.$$

Ці **випадки інтегровності**, по суті, були відомі ще Ньютену. Однак лише в середині минулого (XIX) століття Чебишов встановив чудовий факт, що інших випадків інтегровності в скінченному вигляді для біноміальних диференціалів немає.

nebayduzhi.math@gmail.com

Розглянемо **приклади**.

1)

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$$

Тут $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=\frac{1}{3}$; оскільки

$$\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2,$$

то маємо другий випадок інтегровності. Помітивши, що $\nu=3$, візьмемо (за загальним правилом)

$$t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}},\quad x=(t^3-1)^4,\quad dx=12t^2(t^3-1)^3dt;$$

тоді

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 12\int (t^6-t^3)\,dt=\frac{3}{7}t^4(4t^3-7)+C \quad \text{і так далі.}$$

2)

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx.$$

Цього разу $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$; третій випадок інтегровності, оскільки $\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$. Тут $\nu=4$; візьмемо

$$t=\sqrt[4]{x^{-4}+1}=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x},\quad x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}},\quad dx=-t^3(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}dt,$$

так що

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2\,dt}{t^4-1}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t+C \quad \text{і так далі.}$$

3)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}(1+x^5)^{-\frac{1}{3}}dx.$$

Тут $m=-1$, $n=5$, $p=-\frac{1}{3}$; другий випадок: $\frac{m+1}{n}=0$; $\nu=3$. Візьмемо

$$t=\sqrt[3]{1-x^5},\quad x=(t^3-1)^{\frac{1}{5}},\quad dx=\frac{3}{5}t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{5}}dt;$$

маємо

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \frac{3}{5}\int \frac{t\,dt}{t^3-1} = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C \quad \text{і так далі.}$$

280. Формули зведення

Оскільки інтеграл від біноміального диференціала завжди можна (дивіться (279.1)) перетворити на інтеграл виду

$$J_{p,\,q} = \int (a+bz)^p z^q\,dz, \tag{280.1}$$

то надалі будемо розглядати лише такі інтеграли.

Отримаємо серію **формул зведення**, за допомогою яких інтеграл (280.1) можна виразити через подібний інтеграл $J_{p',\,q'}$, де p' та q' відрізняються від p та q на довільні цілі числа.

Проінтегрувавши тотожності

$$(a+bz)^{p+1}z^q = a(a+bz)^p z^q + b(a+bz)^p z^{q+1},$$
$$\frac{d}{dz}\left[(a+bz)^{p+1}z^{q+1}\right] = (p+1)b(a+bz)^p z^{q+1} + (q+1)(a+bz)^{p+1}z^q,$$

отримаємо

$$J_{p+1,\,q} = aJ_{p,\,q} + bJ_{p,\,q+1}\,,$$
$$(a+bz)^{p+1}z^{q+1} = (p+1)bJ_{p,\,q+1} + (q+1)J_{p+1,\,q}\,.$$

Звідси маємо перші дві формули

$$J_{p,\,q} = -\frac{(a+bz)^{p+1}z^{q+1}}{a(p+1)} + \frac{p+q+2}{a(p+1)}J_{p+1,\,q} \quad (p \neq -1), \tag{280.2}$$

$$J_{p,q} = \frac{(a+bz)^{p+1}z^{q+1}}{a(q+1)} - b\frac{p+q+2}{a(q+1)}J_{p,\,q+1} \quad (q \neq -1), \tag{280.3}$$

які дають змогу **збільшити** показник p чи q на одиницю (якщо він не рівний -1).

Якщо виразити з цих рівностей $J_{p+1,\,q}$ та $J_{p,\,q+1}$ і замінити p та q на $p-1$ та $q-1$ відповідно, отримаємо формули

$$J_{p,\,q} = \frac{(a+bz)^p z^{q+1}}{p+q+1} + \frac{ap}{p+q+1}J_{p-1,\,q} \quad (p+q \neq -1), \tag{280.4}$$

$$J_{p,\,q} = \frac{(a+bz)^{p+1}z^q}{b(p+q+1)} - \frac{aq}{b(p+q+1)}J_{p,\,q-1} \quad (p+q \neq -1), \tag{280.5}$$

які дають змогу **зменшити** показник p чи q на одиницю (тільки якщо $p+q$ не дорівнює -1).

Якщо ані p, ані q, ані $p+q$ не будуть цілими числами (тобто, коли інтеграл $J_{p,\,q}$ не виражається в скінченному вигляді через елементарні функції), то формули зведення можна застосовувати послідовно без жодних обмежень. За допомогою них **параметри** p та q можна зробити, наприклад, правильними дробами.

Зупинимося на більш цікавому для нас випадку, коли інтеграл все ж береться в скінченному вигляді. При цьому можна припустити, що цілим є показник p чи q, оскільки випадок цілого $p+q$ заміною $z = \frac{1}{u}$ зводиться до випадку цілого q.

Тоді послідовне застосування отриманих формул дає змогу звести цей цілий показник, p чи q, до 0 (якщо він був додатним) або до -1 (якщо він був від'ємним). Зазвичай це завершує інтегрування або, принаймні, значно спрощує.

Приклади.

1) Розглянемо інтеграл

$$H_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (m \text{ — ціле}).$$

Тут $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, тому при непарному m цілим є число $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{m+1}{2}$, а при парному m — число $\dfrac{m+1}{n}+p = \dfrac{m+1}{2}-\dfrac{1}{2} = \dfrac{m}{2}$, тому в усіх випадках інтеграл береться в скінченному вигляді. Підстановкою $z=x^2$ зведемо його до інтеграла

$$\frac{1}{2}\int (1-z)^{-\frac{1}{2}}\,z^{\frac{m-1}{2}}\,dz = \frac{1}{2}J_{-\frac{1}{2},\,\frac{m-1}{2}}\,.$$

Якщо, вважаючи $m>1$, застосувати до цього останнього інтеграла формулу (280.5), то отримаємо

$$J_{-\frac{1}{2},\,\frac{m-1}{2}} = -2\,\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}\,z^{\frac{m-1}{2}}}{m} + \frac{m-1}{m}J_{-\frac{1}{2},\,\frac{m-3}{2}}\,,$$

або, повертаючись до початкового інтеграла,

$$H_m = -\frac{1}{m}x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{m-1}{m}H_{m-2}.$$

Послідовне застосування цієї формули зменшує m на 2 та зводить обчислення H_m або до

$$H_1 = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}+C$$

у випадку непарного m, або ж до

$$H_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

у випадку парного m.

Нехай тепер $m < -1$, тобто $m = -\mu,\ \mu > 1$. Застосуємо формулу (280.3):

$$J_{-\frac{1}{2},\,\frac{m-1}{2}} = 2\,\frac{(1-z)^{\frac{1}{2}}\,z^{\frac{m+1}{2}}}{m+1} + \frac{m+2}{m+1}\,J_{-\frac{1}{2},\,\frac{m+1}{2}}\,,$$

звідки

$$H_{-\mu} = -\,\frac{x^{-(\mu-1)}\sqrt{1-x^2}}{\mu-1} + \frac{\mu-2}{\mu-1}H_{-(\mu-2)}\,.$$

За допомогою цієї формули можна зменшувати значення μ на 2 і послідовно звести обчислення $H_{-\mu}$ або до

$$H_{-1} = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$$

у випадку непарного μ, або ж до

$$H_{-2} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C$$

у випадку парного μ.

Аналогічно можна дослідити і інтеграли

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{x^2-1}}dx, \quad \int \frac{x^m}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

2) Якщо до інтеграла

$$J_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2}\int (a^2+z)^{-(n+1)}\,z^{-\frac{1}{2}}\,dz = J_{-(n+1),\,-\frac{1}{2}}$$

застосувати формулу (280.2):

$$J_{-(n+1),\,-\frac{1}{2}} = \frac{(a^2+z)^{-n}\,z^{\frac{1}{2}}}{na^2} + \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot J_{-n,-\frac{1}{2}}\,,$$

то, повертаючись до J_n, отримаємо вже відому нам (271.1) формулу зведення

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}\cdot J_n\,.$$

Аналогічно можна дослідити і інтеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}.$$

281. Інтегрування виразів вигляду $R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. Підстановки Ойлера

Переходимо до розгляду дуже важливого класу інтегралів

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx, \tag{281.1}$$

Припускаємо, звісно, що квадратний тричлен не має рівних коренів, так що корінь тричлена не може бути замінений раціональним виразом. Ми вивчимо три підстановки, які називаються **підстановками Ойлера**, за допомогою яких завжди можна досягти тут раціоналізації підінтегрального виразу.

1-а підстановка застосовується у випадку, коли $a > 0$. Тоді вважають

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x$$

(можна і $\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}\,x$).

Якщо піднести цю рівність до квадрата, знайдемо (після того як позбавимося членів ax^2 в обох частинах) $bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}\,tx$, так що

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt.$$

Уся дотепність підстановки Ойлера саме в тому, що для визначення x випливає рівняння першого степеня, так що x, а одночасно з ним також і радикал $\sqrt{ax^2+bx+c}$ виражаються **раціональними** функціями від t.

Якщо отримані вирази підставити в (281.1), то питання зведеться до інтегрування раціональної функції від t. В результаті, повертаючись до x, потрібно буде покласти $t = \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}\,x$.

2-га підстановка робиться у випадку, коли $c > 0$. У цьому випадку можна взяти

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$$

(або $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt - \sqrt{c}$).

Якщо піднести цю рівність до квадрата і позбавитись c в обох частинах, а потім скоротити на x, то отримаємо $ax + b = xt^2 + 2\sqrt{c}\,t$ — знову рівняння першого степеня відносно x. Звідси

$$x = \frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+\sqrt{c}\,a}{a-t^2}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{c}\,t^2-bt+\sqrt{c}\,a}{(a-t^2)^2}\,dt.$$

Підставивши це в (281.1), очевидно, здійснимо раціоналізацію підінтегрального виразу. Проінтегрувавши, в результаті візьмемо

$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}.$$

Зауваження 1. Випадки, розглянуті вище ($a > 0$ і $c > 0$), зводяться один до одного підстановкою $x = \frac{1}{z}$. Тому завжди можна уникнути користування другою підстановкою.

Нарешті, **3-я підстановка** придатна в тому випадку, якщо квадратний тричлен ax^2+bx+c має (різні) дійсні корені λ та μ. Тоді цей тричлен, як відомо, розкладається на лінійні множники

$$ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu).$$

Візьмемо

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda).$$

Якщо піднести цю рівність до квадрата і скоротити на $x-\lambda$, отримаємо і тут рівняння першого степеня $a(x - \mu) = t^2(x - \lambda)$, так що

$$x = \frac{-a\mu + \lambda t^2}{t^2 - a}, \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a}, \quad dx = \frac{2a(\mu - \lambda)t}{(t^2 - a)^2}\, dt$$

і так далі.

Зауваження 2. При зроблених припущеннях радикал $\sqrt{a(x - \lambda)(x - \mu)}$ (вважаючи для визначеності, скажімо, $x > \lambda$) можна перетворити на вигляд

$$(x - \lambda)\sqrt{a\frac{x - \mu}{x - \lambda}},$$

так що в даному випадку

$$R\left(x,\ \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) = R_1\left(x,\ \sqrt{a\frac{x - \mu}{x - \lambda}}\right),$$

і ми, по суті, маємо справу з диференціалом вже розглянутого типу (розд. 278). 3-я підстановка Ойлера, яку можна записати, у формі

$$t = \sqrt{a\frac{x - \mu}{x - \lambda}},$$

тотожна з підстановкою, вже вказаною в розд. 278.

Покажемо тепер, що 1-ої і 2-ої підстановок Ойлера достатньо для того, щоб здійснити раціоналізацію підінтегрального виразу (281.1) **у всіх можливих випадках**. Справді, якщо тричлен ax^2+bx+c має дійсні корені, то, як ми бачили, застосовується 3-я підстановка. Якщо ж дійсних коренів немає, тобто $b^2 - 4ac < 0$, то тричлен

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]$$

при всіх значеннях змінної x має знак a. Випадок $a < 0$ нас не цікавить, бо тоді радикал зовсім не мав би дійсних значень. У випадку ж $a > 0$ застосовується 1-а підстановка.

nebayduzhi.math@gmail.com

Ці міркування приводять до загального твердження:
інтеграли типу (281.1) *завжди беруться в скінченному вигляді, причому для їх запису, крім функцій, через які виражаються інтеграли від раціональних диференціалів, потрібні ще лише квадратні корені.*

282. Геометричне трактування підстановок Ойлера

Підстановки Ойлера, які спершу здаються штучними, можна отримати з геометричних міркувань.

Розглянемо **криву другого порядку**

$$y = \pm\sqrt{ax^2+bx+c} \quad \text{або} \quad y^2 = ax^2+bx+c.$$

Якщо взяти на цій кривій довільну точку (x_0, y_0), так що

$$y_0^2 = ax_0^2 + bx_0 + c, \tag{282.1}$$

то січна $y - y_0 = t(x - x_0)$, що проходить через неї, перетне криву ще в лише **одній** точці (x, y), координати якої можна знайти за допомогою простих обчислень. Виключаючи y з рівнянь кривої та січної, отримаємо

$$[y_0 + t(x - x_0)]^2 = ax^2 + bx + c,$$

звідки, враховуючи (282.1),

$$2y_0t(x - x_0) + t^2(x - x_0)^2 = a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0),$$

або, після скорочення на $x - x_0$,

$$2y_0t + t^2(x - x_0) = a(x + x_0) + b.$$

Отже, абсциса x та ордината y другої точки перетину можна виразити **раціональними функціями** від кутового коефіцієнта t. При цьому очевидно, що, змінюючи t, можна зробити так, щоб (x, y) описувала всю криву.

Тепер зрозуміло, що залежність

$$\sqrt{ax^2+bx+c} - y_0 = t(x - x_0)$$

визначає ту підстановку, яка раціоналізує підінтегральний вираз у (281.1).

Нехай $ax^2 + bx + c$ має дійсні корені λ та μ. Це означає, що наша крива перетинає вісь x в точках $(\lambda, 0)$ та $(\mu, 0)$. Взявши, наприклад, першу з них як точку (x_0, y_0), отримаємо 3-ю підстановку Ойлера:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - \lambda).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо $c > 0$, то крива перетинає вісь y в точках $(0, \pm\sqrt{c})$. Взявши одну з них як точку (x_0, y_0), отримаємо 2-у підстановку Ойлера:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \sqrt{c} = tx.$$

Аналогічно можна отримати й 1-у підстановку Ойлера, взявши **нескінченно віддалену** точку кривої як (x_0, y_0). Припускаючи, що $a > 0$ (в цьому випадку крива буде гіперболою), розглянемо асимптоту кривої $y = \pm\sqrt{a}\,x$. Прямі $y = t \pm \sqrt{a}\,x$, паралельні асимптоті, перетинають криву у **нескінченно віддаленій** точці та деякій другій точці (x, y), координати якої будуть раціональними функціями від t. Звідси отримуємо підстановку

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{a}\,x.$$

283. Приклади

Нам вже відомі два **основних** інтеграли (пр. 269.9, пр. 269.12; пр. 268.3):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

що відносяться до вищезгаданого типу. Користуючись ними, можна обчислити й інші інтеграли.

1)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}.$$

Тут будемо розрізняти два випадки: $\alpha > 0$ та $\alpha < 0$.

Якщо $\alpha > 0$, то інтеграл легко перетворюється на перший з основних при $\frac{\beta}{\alpha} = \pm a^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{\beta}{\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{\beta}{\alpha}}\right| + C.$$

Можна ще домножити аргумент логарифма на α, через що з'явиться доданок $\frac{-1}{\sqrt{\alpha}}\ln\alpha$, який змінить сталу C. Остаточно отримаємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\left|\alpha x + \sqrt{\alpha(\alpha x^2 + \beta)}\right| + C' \quad (\alpha > 0). \tag{283.1}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо ж $\alpha < 0$, тобто $\alpha = -|\alpha|$, то радикал можна переписати як $\sqrt{\beta - |\alpha| x^2}$. Для того, щоб він взагалі міг набувати дійсних значень, необхідно вимагати $\beta > 0$. Інтеграл перетворюється на другий з основних при $\dfrac{\beta}{|\alpha|} = a^2$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}}\, x\right) + C \quad (\alpha < 0). \tag{283.2}$$

До інтегралів (283.1) та (283.2) за допомогою простих перетворень зводиться багато інших.

2)

$$\int \sqrt{\alpha x^2 + \beta}\, dx$$

береться за допомогою інтегрування частинами.

$$\int \sqrt{\alpha x^2 + \beta}\, dx = x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int x\, d\left(\sqrt{\alpha x^2 + \beta}\right) = x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int \frac{\alpha x^2}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} dx =$$

$$= x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int \frac{(\alpha x^2 + \beta) - \beta}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} dx = x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} - \int \sqrt{\alpha x^2 + \beta}\, dx + \beta \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}.$$

Справа знову буде шуканий інтеграл. Перенесемо його вліво та поділимо отриману рівність на 2:

$$\int \sqrt{\alpha x^2 + \beta}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{\alpha x^2 + \beta} + \frac{\beta}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}. \tag{283.3}$$

Щоб отримати остаточну відповідь, потрібно скористатися (283.1) чи (283.2) залежно від того, $\alpha > 0$ чи $\alpha < 0$.

3) Інтеграли

$$\text{а)} \int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}, \quad \text{б)} \int \frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}, \quad \text{в)} \int \frac{dx}{(\alpha x^2 + \beta)^{3/2}}$$

можна звести до вже відомих простою підстановкою $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. Нехай $x > 0$ і $t > 0$, тоді:

$$\text{а)} \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\alpha + \beta t^2}},$$

і подальші обчислення виконуються за формулами (283.1) чи (283.2) залежно від знака β. Далі,

$$\text{б)} \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{\alpha x^2 + \beta}} = -\int \frac{t\, dt}{\sqrt{\alpha + \beta t^2}} = -\frac{1}{\beta}\sqrt{\alpha + \beta t^2} + C = -\frac{\sqrt{\alpha x^2 + \beta}}{\beta x} + C$$

і аналогічно

$$\text{в)}\quad \int \frac{dx}{\left(\alpha x^2+\beta\right)^{3/2}} = -\int \frac{t\,dt}{\left(\alpha+\beta t^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{\beta}\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta t^2}} + C = \frac{1}{\beta}\frac{x}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} + C.$$

4) Тотожні перетворення підінтегрального виразу зводять до вже обчислених такі інтеграли:

$$\text{а)} \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}, \quad \text{б)} \int \frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}{x}dx, \quad \text{в)} \int \frac{x^2\,dx}{\left(\alpha x^2+\beta\right)^{3/2}}.$$

Маємо

$$\text{а)}\quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{(\alpha x^2+\beta)-\beta}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx = \frac{1}{\alpha}\int \sqrt{\alpha x^2+\beta}\,dx - \frac{\beta}{\alpha}\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$$

або, за формулою (283.3),

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} = \frac{1}{2\alpha}x\sqrt{\alpha x^2+\beta} - \frac{\beta}{2\alpha}\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} \quad \text{і так далі (дивіться 1).}$$

Далі

$$\text{б)}\quad \int \frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}{x}dx = \int \frac{\alpha x^2+\beta}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}}dx = \alpha\int \frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} + \beta\int \frac{dx}{x\sqrt{\alpha x^2+\beta}},$$

де перший інтеграл береться одразу, а другий було обчислено в 3). Нарешті,

$$\text{в)}\quad \int \frac{x^2\,dx}{\left(\alpha x^2+\beta\right)^{3/2}} = \frac{1}{\alpha}\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}} - \frac{\beta}{\alpha}\int \frac{dx}{\left(\alpha x^2+\beta\right)^{3/2}},$$

де перший інтеграл було обчислено в 1), а другий — в 3).

5) Якщо під радикалом стоїть повний квадратний **тричлен** ax^2+bx+c, часто зручно звести його до **двочлена** лінійною підстановкою. Виділивши повний квадрат

$$ax^2+bx+c = \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2+4ac-b^2\right],$$

зробимо заміну $t = 2ax+b$. Отже, наприклад, з формул (283.1) та (283.2) можна отримати при $a>0$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} &= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|ax+\frac{b}{2}+\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| + C',\end{aligned} \tag{283.4}$$

а при $a < 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C. \qquad (283.5)$$

б) Перейдемо до **підстановок Ойлера**. У пр. 269.12 ми фактично застосували **1-у підстановку** для обчислення інтеграла

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

Хоча другий основний інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

відомий нам з елементарних міркувань, але спробуємо застосуємо до нього підстановки Ойлера.

а) Якщо скористатись спочатку **3-ю підстановкою** $\sqrt{a^2 - x^2} = t(a - x)$, то

$$x = a\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{4at\,dt}{(t^2 + 1)^2}, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2at}{t^2 + 1},$$

і тоді

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2\operatorname{arctg} t + C = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a + x}{a - x}} + C.$$

Оскільки маємо тотожність

$$2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a + x}{a - x}} = \arcsin\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} \quad (-a < x < a),$$

то цей результат є всього лише **іншою формою запису** вже відомого нам.

Читачеві надалі слід мати на увазі, що один і той самий інтеграл можна отримати в різних ***формах*** *залежно від методу обчислення.*

б) Якщо до того ж інтеграла застосувати **2-у підстановку** $\sqrt{a^2 - x^2} = xt - a$, то аналогічно отримаємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -2\int \frac{dt}{t^2 + 1} = -2\operatorname{arctg} t + C = -2\operatorname{arctg}\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C.$$

Тут маємо іншу цікаву властивість (порівняйте з пр. 277.3, цей результат підходить лише **окремо** для проміжку $(-a, 0)$ та проміжку $(0, a)$, оскільки в точці $x = 0$ вираз

$$-2\operatorname{arctg}\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

не визначений. Границі цього виразу при $x \to -0$ та $x \to +0$ **різні**: вони дорівнюють, відповідно, π та $-\pi$. Обираючи для згаданих проміжків **різні** значення сталої C так, щоб друге було на 2π більше за перше, можна скласти функцію, яка буде неперервною на всьому проміжку $(-a, a)$, якщо за її значення в 0 вважати границю (рівну зліва і справа).

І в цьому випадку ми ще раз отримали попередній результат в **іншій формі**, оскільки маємо тотожності

$$-2\operatorname{arctg}\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{a} - \pi & \text{для } 0 < x < a, \\ \arcsin\dfrac{x}{a} + \pi & \text{для } -a < x < 0. \end{cases}$$

7)

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

а) Спочатку застосуємо **1-у підстановку**: $\sqrt{x^2-x+1} = t - x$,

$$x = \frac{t^2-1}{2t-1}, \quad dx = 2\,\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}dt,$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt = \int \left[\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}\right] dt = $$
$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{2t-1} + 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| + C.$$

Якщо підставити сюди $t = x + \sqrt{x^2-x+1}$, то в результаті отримаємо

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = -\frac{3}{2}\,\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1} -$$
$$-\frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right| + 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right| + C.$$

б) Застосуємо тепер **2-у підстановку**: $\sqrt{x^2-x+1} = tx - 1$,

$$x = \frac{2t-1}{t^2-1}, \quad dx = -2\frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}\,dt,$$
$$\sqrt{x^2-x+1} = \frac{t^2-t+1}{t^2-1}, \quad x + \sqrt{x^2-x+1} = \frac{t}{t-1},$$

nebayduzhi.math@gmail.com

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}dt = \int \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{3}{2}\frac{1}{t+1} - \frac{3}{(t+1)^2}\right] dt =$$
$$= \frac{3}{t+1} + 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{3}{2}\ln|t+1| + C'.$$

Підставимо сюди $t = \dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$. Після очевидних спрощень отримаємо

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}+x+1} + 2\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+1\right| -$$
$$- \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}-x+1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-x+1}+x+1\right| + C'.$$

Цей вираз, хоч і відрізняється **формою** від отриманого раніше, але стає рівним йому при $C' = C + \frac{3}{2}$.

8)

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

а) Оскільки корені виразу під квадратним коренем є дійсними, то можна застосувати **3-ю підстановку**

$$\sqrt{a^2-x^2} = t(a-x) \quad (-a<x<a \quad \text{і} \quad t>0).$$

Маємо

$$x = a\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{a^2-x^2} = \frac{2at}{t^2+1}, \quad x^2+a^2 = \frac{2a^2(t^4+1)}{(t^2+1)^2},$$

тому

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{2a^2}\int \frac{2t^2+2}{t^4+1}dt = \frac{1}{2a^2}\int \left[\frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1} + \frac{1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right] dt =$$
$$= \frac{1}{a^2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}\left(t\sqrt{2}+1\right) + \operatorname{arctg}\left(t\sqrt{2}-1\right)\right] + C,$$

і для отримання остаточного результату необхідно підставити

$$t = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

Скориставшись формулою для суми арктангенсів, а також очевидним співвідношенням

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha} = -\operatorname{arctg}\alpha \pm \frac{\pi}{2} \quad (\text{при } \alpha \gtrless 0),$$

результат можна записати в більш простій формі

$$\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-x^2}}+C_1, \quad \left(C_1=C+\frac{\pi}{2a^2\sqrt{2}}\right).$$

б) Якщо до цього ж інтеграла застосувати **2-у підстановку** $\sqrt{a^2-x^2}=tx-a$, то отримаємо

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right)t+\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)t\right]+C'$$

при $t=\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$.

Цей результат підходить лише **окремо** для проміжку $(-a,0)$ та проміжку $(0,a)$. Нескладно здогадатись, що його можна зробити застосовним на всьому проміжку $(-a,a)$ за допомогою зміни значення C' при переході x через точку 0. Якщо цей результат перетворити за формулою суми арктангенсів, то він буде рівний попередньому.

9)

$$\int\frac{dx}{(x^2+\lambda)\sqrt{x^2+\mu}}.$$

1-а підстановка: $\sqrt{x^2+\mu}=t-x$. Маємо

$$\int\frac{dx}{(x^2+\lambda)\sqrt{x^2+\mu}}=2\int\frac{2t\,dt}{t^4+2(2\lambda-\mu)t^2+\mu^2}=2\int\frac{du}{u^2+2(2\lambda-\mu)u+\mu^2}.$$

Отже, задача зводиться до обчислення елементарного інтеграла; в результат необхідно буде підставити

$$u=t^2=\left(x+\sqrt{x^2+\mu}\right)^2.$$

284. Інші способи обчислення

Хоча підстановки Ойлера принципово у всіх випадках розв'язують питання про обчислення інтеграла типу (281.1) в скінченному вигляді, але інколи при їх використанні навіть прості диференціали приводять до складних викладок. Враховуючи важливість інтегралів даного типу ми вкажемо і інші способи для їх обчислення.

Для стислості нехай

$$Y=ax^2+bx+c \quad \text{і} \quad y=\sqrt{Y}$$

Раціональна функція $R(x,y)$ може бути представлена у вигляді частки двох цілих многочленів відносно x і y. Замінюючи y^2 усюди на Y, ми зведемо $R(x,y)$ до вигляду

$$R(x,y)=\frac{P_1(x)+P_2(x)y}{P_3(x)+P_4(x)y},$$

де $P_i(x)$ — цілі многочлени. Помножуючи чисельник і знаменник цього дробу на $P_3(x) - P_4(x)y$ (і знову замінюючи y^2 на Y), прийдемо до нової форми для R

$$R(x, y) = R_1(x) + R_2(x)y.$$

Інтеграл від першого доданку ми вже вміємо виражати в скінченному вигляді: отже, нам потрібно зайнятися лише другим доданком. Помножуючи і ділячи його на y, остаточно отримаємо такий вираз

$$R^*(x)\frac{1}{y} = R^*(x)\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

інтегруванням якого ми і займемося.

Передусім виділимо з раціональної функції $R^*(x)$ цілу частину $P(x)$, а правильну дробову частину уявимо собі розкладеною на прості дроби (розд. 274). В такому випадку інтегрування отриманого виразу зведеться до обчислення інтегралів наступних трьох типів:

$$\begin{aligned} &1. \quad \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx, \\ &2. \quad \int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \\ &3. \quad \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx, \end{aligned}$$

де всі коефіцієнти дійсні, а корені тричлена $x^2 + px + q$ — уявні. Зупинимося на кожному з них окремо.

1. Нехай,

$$V_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{Y}} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Легко встановити рекурентну формулу для цих інтегралів. З цією ціллю, вважаючи $m \geqslant 1$, візьмемо похідну

$$\begin{aligned} (x^{m-1}\sqrt{Y})' &= (m-1)x^{m-2}\sqrt{Y} + \frac{x^{m-1}Y'}{2\sqrt{Y}} = \\ &= \frac{2(m-1)x^{m-2}(ax^2 + bx + c) + x^{m-1}(2ax + b)}{2\sqrt{Y}} = \\ &= ma\frac{x^m}{\sqrt{Y}} + \left(m - \frac{1}{2}\right) b\frac{x^{m-1}}{\sqrt{Y}} + (m-1)c\frac{x^{m-2}}{\sqrt{Y}} \end{aligned}$$

і проінтегруємо отриману тотожність

$$x^{m-1}\sqrt{Y} = maV_m + \left(m - \frac{1}{2}\right) bV_{m-1} + (m-1)cV_{m-2}.$$

Беручи тут $m = 1$, знайдемо

$$V_1 = \frac{1}{a}\sqrt{Y} - \frac{b}{2a}V_0;$$

вважаючи тепер $m = 2$ (і використовуючи вираз для V_1), отримаємо

$$V_2 = \frac{1}{4a^3}(2ax - 3b)\sqrt{Y} + \frac{1}{8a^2}(3b^2 - 4ac)V_0.$$

Роблячи так далі, прийдемо до загальної формули

$$V_m = p_{m-1}(x)\sqrt{Y} + \lambda_m V_0,$$

де $p_{m-1}(x)$ є многочленом $(m-1)$-го степеня, а $\lambda_m = \text{const}$. Отже, *всі інтеграли* V_m *зводяться до* V_0.

Якщо в інтегралі типу 1 многочлен $P(x)$ буде n-го степеня, то цей інтеграл буде лінійною комбінацією інтегралів $V_0,\ V_1,\ \dots,\ V_n$, а значить, за попередньою формулою, запишеться у вигляді

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{Y}}\,dx = Q(x)\sqrt{Y} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{Y}}, \tag{284.1}$$

де $Q(x)$ — деякий многочлен $(n-1)$-го степеня, а $\lambda = \text{const}$.

Визначення многочлену $Q(x)$ і сталої λ зазвичай робиться **методом невизначених коефіцієнтів**. Диференціюючи (284.1) і помножуючи отриману рівність на $\sqrt{Y}$, отримаємо

$$P(x) = Q'(x)(ax^2 + bx + c) + \frac{1}{2}Q(x)(2ax + b) + \lambda.$$

Якщо замість $Q(x)$ підставити сюди многочлен $(n-1)$-го степеня з літерними коефіцієнтами, то в обох частинах ми будемо мати многочлени n-го степеня. Прирівнюючи їх коефіцієнти, прийдемо до системи $n+1$ лінійних рівнянь, з яких і визначаються n коефіцієнтів многочлена $Q(x)$ і стала λ.

(З доведеного зрозуміло, що ця система буде сумісна при будь-яких значеннях вільних членів, а в такому разі її визначник необхідно відмінний від 0, і система виявляється завжди визначеною. Цим встановлюється і **єдиність** задання (284.1). Порівняйте з розд. 274 – розд. 276).

Зауваження. Формула (284.1) здійснює **виділення алгебраїчної частини** з інтеграла

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{Y}}\,dx.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Подібне виділення могло бути виконане і по відношенню до інтеграла загального вигляду

$$\int \frac{R(x)}{\sqrt{Y}}\,dx,$$

де R — знак довільної раціональної функції. На цьому ми не зупиняємося.

2. Інтеграл

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{Y}}$$

зводиться підстановкою $x-\alpha=\frac{1}{t}$ до тільки що розглянутого типу. Справді, маємо

$$dx=-\frac{dt}{t^2},\quad ax^2+bx+c=\frac{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}{t^2},$$

так що (вважаючи для визначеності $x>\alpha$ і $t>0$)

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}=-\int \frac{t^{k-1}dt}{\sqrt{(a\alpha^2+b\alpha+c)t^2+(2a\alpha+b)t+a}}.$$

Якщо $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, тобто α є коренем тричлена Y, то справа спрощується ще більше: ми отримуємо інтеграл типу, розглянутого в розд. 278.

3. а) В останньому інтегралі, розглянемо окремо випадок, коли тричлен ax^2+bx+c відрізняється від тричлена x^2+px+q лише множником a. Тоді шуканий інтеграл має вигляд

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}\,dx.$$

Його легко записати як суму двох інтегралів:

$$\frac{M}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}\,dx+\left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}},$$

з яких перший одразу береться підстановкою $t=ax^2+bx+c$.

Для обчислення інтеграла

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{\frac{2m+1}{2}}}=\int \frac{dx}{(Y)^{\frac{2m+1}{2}}}$$

зручніше всього так звана підстановка Абеля (норв. Niels Abel, Нільс Абель)

$$t=\left(\sqrt{Y}\right)'=\frac{Y'}{2\sqrt{Y}}=\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Підносячи до квадрата і помножуючи на $4Y$, отримаємо рівність

$$4t^2Y = (Y')^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2,$$

яке віднімемо від помноженої на $4a$ рівності

$$Y = ax^2 + bx + c.$$

В результаті отримаємо

$$4(a - t^2)Y = 4ac - b^2,$$

звідки

$$Y^m = \left(\frac{4ac - b^2}{4}\right)^m \frac{1}{(a - t^2)^m}. \tag{284.2}$$

Диференціюючи тепер рівність

$$t\sqrt{Y} = ax + \frac{b}{2},$$

знайдемо

$$\sqrt{Y}\,dt + t^2dx = a\,dx,$$

так що

$$\frac{dx}{\sqrt{Y}} = \frac{dt}{a - t^2}. \tag{284.3}$$

З (284.3) і (284.2)

$$\frac{dx}{(Y)^{\frac{2m+1}{2}}} = \left(\frac{4}{4ac - b^2}\right)^m (a - t^2)^{m-1}\,dt$$

і, нарешті,

$$\int \frac{dx}{(Y)^{\frac{2m+1}{2}}} = \left(\frac{4}{4ac - b^2}\right)^m \int (a - t^2)^{m-1}dt. \tag{284.4}$$

Отже, все питання зводиться до обчислення інтеграла від многочлена.

Зокрема, наприклад, при $m = 1$ маємо

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{3/2}} = \frac{2}{4ac - b^2} \cdot \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

б) В загальному випадку для більшої симетрії покладемо

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + p'x + q'),$$

причому тепер ми можемо припустити, що тричлен в дужках не тотожній до тричлена x^2+px+q. Перетворимо змінну x так, щоб в **обох тричленах одночасно** зникли члени першого степеня.

Нехай спочатку $p \neq p'$. Тоді нашої цілі можна досягти за допомогою дробово-лінійної підстановки

$$x=\frac{\mu t+\nu}{t+1}, \tag{284.5}$$

підібрав коефіцієнти μ і ν. Маємо

$$x^2+px+q=\frac{(\mu^2+p\mu+q)t^2+[2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q]t+(\nu^2+p\nu+q)}{(t+1)^2}$$

і аналогічно — для другого тричлена. Шукані коефіцієнти визначаються з умов

$$2\mu\nu+p(\mu+\nu)+2q=0, \quad 2\mu\nu+p'(\mu+\nu)+2q'=0$$

або

$$\mu+\nu=-2\frac{q-q'}{p-p'}, \quad \mu\nu=\frac{p'q-pq'}{p-p'}.$$

Отже, μ і ν є коренями квадратного рівняння

$$(p-p')z^2+2(q-q')z+(p'q-pq')=0.$$

Для того щоб ці корені були дійсними і різні (необхідно і) (при $\mu=\nu$ підстановка втрачає сенс, бо зводиться до $x=\mu$), достатньо умови

$$(q-q')^2-(p-p')(p'q-pq')>0; \tag{284.6}$$

переконаємося в її виконанні.

Перепишемо умову в рівносильній формі

$$[2(q+q')-pp']^2>(4q-p^2)(4q'-p'^2). \tag{284.7}$$

Дано, що $4q-p^2>0$ (бо тричлен x^2+px+q має уявні корені), тому нерівність (284.7) явно виконується, якщо одночасно $4q'-p'^2<0$. Залишається дослідити випадок, коли і $4q'-p'^2>0$. Тоді $q>0$, $q'>0$ і $4\sqrt{qq'}>pp'$ і ми маємо послідовно

$$\begin{aligned}&[2(q+q')-pp']^2 \geqslant \left[4\sqrt{qq'}-pp'\right]^2 = \\ &=(4q-p^2)(4q'-p'^2)+4\left(p\sqrt{q'}-p'\sqrt{q}\right)^2 \geqslant (4q-p^2)(4q'-p'^2).\end{aligned}$$

(Оскільки $\dfrac{q+q'}{2} \geqslant \sqrt{qq'}$.) Тут двічі знак нерівності поєднується зі знаком рівності, але рівність не може бути в обох випадках одночасно: якщо $q\neq q'$, то рівності, напевне, немає в першому випадку, а при $q = q'$, напевне, у другому. Отже, нерівність (284.7), а з нею і (284.6) доведена.

Виконавши підстановку, ми перетворимо шуканий інтеграл до вигляду

$$\int \frac{P(t)\,dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}},$$

де $P(t)$ є многочленом степеня $2m-1$ (і $\lambda > 0$). Знову застосуємо (при $m > 1$) розкладання правильного дробу

$$\frac{P(t)}{(t^2+\lambda)^m}$$

на прості, ми прийдемо до суми інтегралів вигляду

$$\int \frac{At+B}{(t^2+\lambda)^k\sqrt{\alpha t^2+\beta}}dt, \quad (k = 1,\ 2,\ \dots,\ m).$$

В винятковому випадку, коли $p = p'$, знищення членів першого степеня відбувається ще простіше — підстановкою $x = t - \frac{p}{2}$, і ми **безпосередньо** приходимо до інтеграла тільки що вказаного вигляду.

Отриманий інтеграл розкладається на два:

$$\frac{A}{\alpha}\int \frac{\alpha t\,dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}} + B\int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}}.$$

Перший з них легко береться підстановкою $u = \sqrt{\alpha t^2+\beta}$. До другого можна вжити вже знайому нам підстановку Абеля

$$u = \frac{\alpha t}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}}.$$

З (284.3) маємо

$$\frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2+\beta}} = \frac{du}{\alpha - u^2};$$

окрім того (легко обчислити)

$$t^2+\lambda = \frac{(\beta-\alpha\lambda)u^2+\lambda\alpha^2}{\alpha(\alpha-u^2)}$$

Тому

$$\int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\alpha t^2+\beta}} = \alpha^m\int \frac{(\alpha-u^2)^{m-1}}{[(\beta-\alpha\lambda)u^2+\lambda\alpha^2]^m}\,du,$$

і шуканий інтеграл звівся до інтеграла від раціональної функції.

Зауваження. Окрім того, що ми в цьому розділі вказали ряд нових способів для обчислення інтегралів типу (281.1), сукупність наведених міркувань дає незалежне від попереднього доведення твердження, сформульованого в кінці розд. 281.

285. Приклади

1)

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$$

Припустимо

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \partial \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}},$$

звідки

$$x^3 - x + 1 = (2ax + b)(x^2 + 2x + 2) + (ax^2 + bx + c)(x + 1) + \partial.$$

Система рівнянь

$$3a = 1, \quad 5a + 2b = 0, \quad 4a + 3b + c = -1, \quad 2b + c + \partial = 1$$

приводить до значень $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{5}{6}$, $c = \frac{1}{6}$, $\partial = \frac{5}{2}$. Отже, якщо врахувати пр. 283.5, остаточно отримаємо

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = \frac{1}{6}(2x^2 - 5x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + C.$$

2)

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2 - 2x - 1}}.$$

Підстановка $x - 1 = \frac{1}{t}$ (якщо, скажемо, $x > 1$ і $t > 0$) зводить інтеграл до вигляду

$$-\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - 2t^2}}.$$

Цей інтеграл легко береться елементарними методами (дивіться пр. 283.4).

Відповідь:

$$\frac{1}{4}t\sqrt{1 - 2t^2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arcsin t\sqrt{2} + C = \frac{1}{4(x-1)^2}\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}}{x - 1} + C.$$

3)

$$\int \frac{dx}{\left(2x^2 - x + 2\right)^{7/2}}$$

Підстановка Абеля

$$t = \frac{4x - 1}{2\sqrt{2x^2 - x + 2}}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

перетворює інтеграл так:

$$\frac{64}{3375}\int(2-t^2)^2\,dt;$$

при цьому можна або повторити для часткового випадку загальні викладки розд. 284 3, а), або скористатися готовою формулою (284.4)

Відповідь:

$$\frac{64}{3375}\left(2\cdot\frac{4x-1}{(2x^2-x+2)^{1/2}}-\frac{1}{6}\cdot\frac{(4x-1)^3}{(2x^2-x+2)^{3/2}}+\frac{1}{160}\cdot\frac{(4x-1)^5}{(2x^2-x+2)^{5/2}}\right)+C.$$

4)

$$\int\frac{(x+3)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Дробово-лінійна підстановка

$$x=\frac{\mu t+\nu}{t+1}$$

дає

$$x^2\pm x+1=\frac{(\mu^2\pm\mu+1)t^2+[2\mu\nu\pm(\mu+\nu)+2]t+(\nu^2\pm\nu+1)}{(t+1)^2}$$

Вимоги

$$2\mu\nu\pm(\mu+\nu)+2=0$$

або $\mu+\nu=0,\ \mu\nu=-1$ задовольняються, наприклад, при $\mu=1,\ \nu=-1$. Маємо

$$x=\frac{t-1}{t+1},\quad dx=\frac{2\,dt}{(t+1)^2},\quad x+3=\frac{4t+2}{t+1},\quad x^2-x+1=\frac{t^2+3}{(t+1)^2}$$

і

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{3t^2+1}}{t+1},$$

якщо, для визначеності, вважати $t+1>0$ (тобто $x<1$). Отже,

$$\int\frac{(x+3)\,dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{(8t+4)\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

Отриманий інтеграл розбивається на два:

$$8\int\frac{t\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}+4\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

Перший легко обчислюється підстановкою

$$u=\sqrt{3t^2+1}$$

і дорівнює

$$\sqrt{8}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3t^2+1}{8}}+C'$$

До другого застосуємо підстановку Абеля

$$u=\frac{3t}{\sqrt{3t^2+1}},$$

яка зведе його до вигляду

$$12\int\frac{du}{27-8u^2}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}u}\right|+C''.$$

Залишається лише повернутися до змінної x.

5)

$$\int\frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}+x^3-1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}dx.$$

Вказівка. Представити підінтегральну функцію у вигляді

$$\frac{2x^4+x^3+2x^2+1}{x+1}-\frac{2x^5+2x^4+3x^3-1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=$$
$$=(2x^3-x^2+3x-3)+\frac{4}{x+1}-\frac{2x^4+3x^2-3x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{4}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}};$$

до третього доданку застосувати метод розд. 284, 1, а до останнього застосувати підстановку

$$x+1=\frac{1}{t}.$$

8.4. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні і показникову функції

286. Інтегрування диференціалів $R(\sin x,\ \cos x)\,dx$

Диференціали цього типу завжди можуть бути зведені до раціонального виразу заміною $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $(-\pi < x < \pi)$. Справді,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

так що

$$R(\sin x,\ \cos x)\,dx = R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Отже, *інтеграли типу*

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx \qquad (286.1)$$

завжди беруться у скінченному вигляді; для їх вираження, крім функцій, що зустрічаються при інтегруванні раціональних диференціалів потрібні лише ще тригонометричні функції.

Згадана підстановка, що є **універсальною** для інтеграла типу (286.1), приводить іноді до складних викладок. Нижче вказані випадки, коли мета може бути досягнута за допомогою простіших підстановок. Попередньо зробимо такі елементарні зауваження з алгебри.

Якщо ціла чи дробова раціональна функція $R(u, v)$ не змінює свого значення при зміні знака одного з аргументів, наприклад,

$$R(-u, v) = R(u, v),$$

то вона може бути зведена до вигляду

$$R(u, v) = R_1(u^2, v),$$

що містить лише **парні** степені u.

Якщо ж, навпаки, при зміні знака u функція $R(u, v)$ також змінює знак, тобто якщо

$$R(-u, v) = -R(u, v),$$

то вона зводиться до вигляду

$$R(u, v) = R_2(u^2, v)u;$$

це відразу випливає із попереднього зауваження, якщо його застосувати до функції

$$\frac{R(u,v)}{u}.$$

1. Нехай тепер $R(u,v)$ змінює знак при зміні знака u; тоді

$$R(\sin x,\ \cos x)\,dx = R_0(\sin^2 x,\ \cos x)\sin x\,dx = -R_0(1-\cos^2 x,\ \cos x)\,d\cos x,$$

який зводиться до раціонального виразу заміною $t = \cos x$.

2. Аналогічно, якщо $R(u,v)$ змінює знак при зміні знака v, то

$$R(\sin x,\ \cos x)\,dx = R_0^*(\sin x,\ \cos^2 x)\cos x\,dx = R_0^*(\sin x,\ 1-\sin^2 x)\,d\sin x,$$

так що тут доцільна заміна $t = \sin x$.

3. Припустимо, нарешті, що функція $R(u,v)$ не змінює свого значення при **одночасній** зміні знаків u і v

$$R(-u,\ -v) = R(u,v)$$

У цьому випадку, замінюючи u на $\frac{u}{v}v$, матимемо

$$R(u,v) = R\left(\frac{u}{v}v,\ v\right) = R^*\left(\frac{u}{v},\ v\right).$$

За властивістю функції R, якщо змінити знаки u і v (відношення $\frac{u}{v}$ при цьому не зміниться),

$$R^*\left(\frac{u}{v},\ -v\right) = R^*\left(\frac{u}{v},\ v\right),$$

а тоді, як ми знаємо,

$$R^*\left(\frac{u}{v},\ v\right) = R_1^*\left(\frac{u}{v},\ v^2\right).$$

Тому

$$R(\sin x,\ \cos x) = R_1^*(\operatorname{tg} x,\ \cos^2 x) = R_1^*\left(\operatorname{tg} x,\ \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right),$$

тобто просто

$$R(\sin x,\ \cos x) = \widetilde{R}(\operatorname{tg} x).$$

Тут допомагає досягти мети заміна $t = \operatorname{tg} x,\ \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$, оскільки

$$R(\sin x,\ \cos x)\,dx = \widetilde{R}(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Зауваження. Треба сказати, що який би не був раціональний вираз $R(u,v)$, його завжди можна записати у вигляді суми трьох виразів розглянутих вище часткових випадків. Наприклад, можна узяти

$$R(u,v) = \frac{R(u,v)-R(-u,v)}{2} + \frac{R(-u,v)-R(-u,-v)}{2} + \frac{R(-u,-v)+R(u,v)}{2}.$$

Перший із цих виразів змінює знак при зміні знака u, другий змінює знак при зміні знака v, а третій зберігає значення при одночасній зміні знака u і v. Розбивши вираз $R(\sin x,\ \cos x)$ на відповідні доданки, можна до першого з них застосувати підстановку $t = \cos x$, до другого — підстановку $t = \sin x$, і, нарешті, до третього — підстановку $t = \operatorname{tg} x$. Отже, для обчислення інтегралів типу (286.1) достатньо цих трьох підстановок.

287. Інтегрування виразів $\sin^\nu x \cdot \cos^\mu x$

Нехай ν і μ раціональні числа, а змінна x — змінюється на проміжку $\left(0,\ -\frac{\pi}{2}\right)$. Тоді після заміни $z = \sin^2 x$, $dz = 2\sin x \cos x\, dx$ отримаємо

$$\sin^\nu x\ \cos^\mu x\, dx = \frac{1}{2}\sin^{\mu-1} x \cdot (1-\sin^2 x)^{\frac{\mu-1}{2}} \cdot 2\sin x\cos x\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}(1-z)^{\frac{\mu-1}{2}} z^{\frac{\nu-1}{2}}\, dz,$$

так що справа зводиться до інтегрування **біноміального диференціала** (розд. 279)

$$\int \sin^\nu x\ \cos^\mu x\, dx = \frac{1}{2}\int (1-z)^{\frac{\mu-1}{2}} z^{\frac{\nu-1}{2}}\, dz = \frac{1}{2} J_{\frac{\mu-1}{2},\ \frac{\nu-1}{2}}\,. \tag{287.1}$$

Згадуючи випадки інтегровності біноміальних диференціалів, ми бачимо тепер, що інтеграл, який цікавить нас, береться у скінченному вигляді,

1) якщо $\dfrac{\mu-1}{2}$ (або $\dfrac{\nu-1}{2}$) є ціле число, тобто якщо μ (або ν) є **непарне** ціле число, або

2) якщо $\dfrac{\mu+\nu}{2}$ є ціле число, тобто якщо $\mu+\nu$ є **парне** ціле число.

Теж ж саме випливає, зокрема, у випадку, коли **обидва** показника μ і ν — цілі; втім, тоді вираз $\sin^\nu x \cos^\mu x$ раціональний відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто належить до класу виразів, вже розглянутому у попередньому розділі.

У цьому випадку, якщо показник ν (або μ) буде **непарним**, то раціоналізація відразу досягається підстановкою $t = \cos x$ (або $t = \sin x$). Якщо ж обидва показники ν та μ **парні** (а також якщо вони обидва **непарні**), то можна також застосувати підстановку $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \operatorname{ctg} x$.

Зауважимо, що якщо показники ν та μ обидва є **додатні парні** числа, то краще застосувати інший спосіб, заснований на застосуванні формул

$$\sin x\cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Саме якщо $\nu = 2n$, $\mu = 2m$, то при $\nu \geqslant \mu$ пишуть

$$\sin^{2n} x\cos^{2m} x = (\sin x\cos x)^{2m}\sin^{2(n-m)} x = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2m}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^{n-m},$$

nebayduzhi.math@gmail.com

а при $\nu < \mu$

$$\sin^{2n} x \cos^{2m} x = (\sin x \cos x)^{2n} \sin^{2(m-n)} x = \left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^{2n} \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^{m-n}.$$

У розгорнутому вигляді вийде сума членів виду

$$C \sin^{\nu'} 2x \cos^{\mu'} 2x,$$

де $\nu' + \mu' \leqslant n + m = \dfrac{\nu+\mu}{2}$. Ті члени, у яких хоч один із показників ν', μ' є **непарне** число, легко інтегруються за вказаним вище способом. Інші члени піддаємо подібному ж розкладанню, переходячи до $\sin 4x$ і $\cos 4x$, і так далі. Оскільки при кожному розкладанні сума показників зменшується принаймні вдвічі, то процес швидко завершується.

Повернемося до встановленої вище залежності (287.1). Ми можемо тепер скористатися формулами зведення біноміальних інтегралів (розд. 280), щоб, вважаючи там $a = 1$, $b = -1$, $p = \dfrac{\mu-1}{2}$, $q = \dfrac{\nu-1}{2}$, отримати формули зведення для інтегралів даного типу.

Так отримуємо наступні формули (які звісно можуть бути виведені і самостійно)

$$\int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x\,dx = -\frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu+1} x}{\mu+1} + \frac{\nu+\mu+2}{\mu+1}\int \sin^{\nu} x \cos^{\mu+2} x\,dx \quad (\mu \neq -1), \tag{287.2}$$

$$\int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x\,dx = \frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu+1} x}{\nu+1} + \frac{\nu+\mu+2}{\nu+1}\int \sin^{\nu+2} x \cos^{\mu} x\,dx \quad (\nu \neq -1), \tag{287.3}$$

$$\int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x\,dx = \frac{\sin^{\nu+1} x \cos^{\mu-1} x}{\nu+\mu} + \frac{\mu-1}{\nu+\mu}\int \sin^{\nu} x \cos^{\mu-2} x\,dx \quad (\nu+\mu \neq 0), \tag{287.4}$$

$$\int \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x\,dx = -\frac{\sin^{\nu-1} x \cos^{\mu+1} x}{\nu+\mu} + \frac{\nu-1}{\nu+\mu}\int \sin^{\nu-2} x \cos^{\mu} x\,dx \quad (\nu+\mu \neq 0), \tag{287.5}$$

Ці формули взагалі дають змогу збільшити чи зменшити показник ν або μ на 2 (за вказаними винятками). Якщо обидва показники ν і μ — цілі числа, то послідовним застосуванням формул зведення можна звести справу до одного з дев'яти елементарних інтегралів (що відповідають різним комбінаціям значень ν і μ, рівних -1, 0, 1)

nebayduzhi.math@gmail.com

1) $\int dx = x + C,$

2) $\int \cos x\, dx = \sin x + C,$

3) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C,$

4) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$

5) $\int \sin x \cos x\, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C,$

6) $\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + C,$

7) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$

8) $\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln|\sin x| + C,$

9) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$

288. Приклади

1)

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx.$$

Підінтегральний вираз змінює знак при заміні $\cos x$ на $-\cos x$. Підстановка $t = \sin x$:

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int t^2(1 - t^2)\, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

2)

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\, dx.$$

Підінтегральний вираз змінює знак при заміні $\sin x$ на $-\sin x$. Підстановка $t = \cos x$:

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\, dx = -\int \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{t^4} dt = -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C = -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

3)

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}.$$

Підінтегральний вираз не змінює знак при заміні $\sin x$ на $-\sin x$ і $\cos x$ на $-\cos x$. Підстановка $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C.$$

4)

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$$

В цьому випадку можна використати ту саму підстановку, але простіше скористатися формулами подвоєння кута

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{8} \sin^2 2x (\cos 2x + 1) = \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x + \frac{1}{16}(1 - \cos 4x)$$

і

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + C.$$

5)

$$\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}.$$

Можна використати підстановку $t = \sin x$, але простіше використати другу формулу зведення (287.3):

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{2 \sin x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = -\frac{1}{2 \sin x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

6)

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x}.$$

Можна використати підстановку $t = \sin x$, але простіше двічі використати першу формулу зведення (287.2):

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

та

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C,$$

так що

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

7)

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Можна використати підстановку $t=\cos x$, але простіше скористатися другою і третьою формулами зведення ((287.3), (287.4)):

$$\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx=-\frac{\cos^5 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\int\frac{\cos^4 x}{\sin x}dx,$$

$$\int\frac{\cos^4 x}{\sin x}dx=\frac{1}{3}\cos^3 x+\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx=\frac{1}{3}\cos^3 x+\cos x+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C,$$

так що (після перетворень)

$$\int\frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\cos x-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

8)

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos 2x}=\int\frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)}.$$

Підстановка $t=\cos x$:

$$\int\frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)}=\int\frac{dt}{(1-t^2)(1-2t^2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{2}}{1-t\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t}+C=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

9)

$$\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx.$$

Оскільки при зміні знаків $\sin x$ і $\cos x$ підінтегральний вираз не змінюється, то використовується підстановка $t=\operatorname{tg} x$:

$$\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{t^2dt}{(1+t)(1+t^2)^2}=\int\left(\frac{1}{4}\frac{1}{t+1}-\frac{1}{4}\frac{t-1}{t^2+1}+\frac{1}{2}\frac{t-1}{(t^2+1)^2}\right)dt=$$
$$=\frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{4}\frac{1+t}{1+t^2}+C=$$
$$=\frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|-\frac{1}{4}\cos x(\sin x+\cos x)+C.$$

10)

$$\int\frac{dx}{A\cos^2 x+2B\cos x\sin x+C\sin^2 x}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

при $AC - B^2 > 0$. Припускаючи $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg} x$ зведемо інтеграл до вигляду

$$\int \frac{dt}{A + 2Bt + Ct^2}.$$

Відповідь:

$$\frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \operatorname{arctg} \frac{C \operatorname{tg} x + B}{\sqrt{AC - B^2}} + C'.$$

11)

$$\int \frac{dx}{a + b \operatorname{tg} x} = \int \frac{dt}{(a + bt)(1 + t^2)}$$

при $t = \operatorname{tg} x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Розкладаючи на прості дроби

$$\frac{1}{(a + bt)(1 + t^2)} = \frac{A}{a + bt} + \frac{Bt + C}{1 + t^2},$$

для визначення коефіцієнтів A, B, C отримаємо рівняння

$$A + bB = 0, \quad aB + bC = 0, \quad A + aC = 1,$$

звідки

$$A = \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \quad B = -\frac{b}{a^2 + b^2}, \quad C = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Відповідь:

$$\frac{a}{a^2 + b^2} \operatorname{arctg} t + \frac{b}{a^2 + b^2} \ln \frac{a + bt}{\sqrt{1 + t^2}} + C' = \frac{1}{a^2 + b^2} \left(ax + b \ln |a \cos x + b \sin x|\right) + C'.$$

12) До цього ж інтеграла зводяться наступні два:

$$T_1 = \int \frac{\sin x \, dx}{a \cos x + b \sin x}, \quad T_2 = \int \frac{\cos x \, dx}{a \cos x + b \sin x}.$$

Але їх простіше обчислювати з співвідношень, що їх пов'язують,

$$bT_1 + aT_2 = \int dx = x + C_1,$$

$$-aT_1 + bT_2 = \int \frac{-a \sin x + b \cos x}{a \cos x + b \sin x} dx = \int \frac{d(a \cos x + b \sin x)}{a \cos x + b \sin x} =$$
$$= \ln |a \cos x + b \sin x| + C_2,$$

звідки і отримуємо

$$T_1 = \frac{1}{a^2 + b^2} \left(bx - a \ln |a \cos x + b \sin x|\right) + C,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

$$T_2 = \frac{1}{a^2+b^2}\left(ax + b\ln|a\cos x + b\sin x|\right) + C'.$$

13)

$$\frac{1}{2}\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}dx \quad (0<r<1,\ -\pi<x<\pi).$$

Застосуємо тут універсальну підстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Маємо

$$\frac{1}{2}\int \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}dx = (1-r^2)\int \frac{dt}{(1-r^2)+(1+r)^2t^2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}t\right) + C =$$
$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

До цього інтеграла зводиться і такий:

$$\int \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x + r^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{2}x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

14)

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} \quad (|a| \gtrless |b|,\ -\pi<x<\pi).$$

Нехай спочатку $|a|>|b|$ і (що не зменшує загальності) $a>0$. Підстановка $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ як і в тільки що розглянутому частковому випадку дає

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Можна перетворити цей вираз до вигляду

$$\pm\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{a\cos x + b}{a+b\cos x} + C',$$

причому верхній знак береться, якщо $0\leqslant x<\pi$, а нижній — якщо $-\pi<x\leqslant 0$, і значення сталої C' зростає на $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ при проходженні x через 0.

Нехай тепер $|a|<|b|$ і $b>0$. Та сама підстановка:

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x} = \int\frac{2dt}{(b+a)-(b-a)t^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\,t}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\,t}\right| + C =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

Цей вираз легко зводиться до вигляду

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}\right|+C.$$

Інтеграл

$$\int\frac{dx}{a+b\sin x}$$

зводиться до попереднього підстановкою $x=\frac{\pi}{2}\pm t$.

15) Нарешті, до інтеграла 14) зводиться і інтеграл

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}.$$

Якщо ввести кут α з умовою, що

$$\cos\alpha=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}},\quad \sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

то інтеграл перепишеться у вигляді

$$\int\frac{dx}{a+\sqrt{b^2+c^2}\cos(x-\alpha)};$$

підстановка $t=x-\alpha$. І тут, звісно, цікавий випадок $|a|\gtrless\sqrt{b^2+c^2}$.

289. Огляд інших випадків

У пр. 271.4 ми вже бачили, як інтегруються вирази вигляду

$$P(x)e^{ax}\,dx,\quad P(x)\sin bx\,dx,\quad P(x)\cos bx\,dx,$$

де $P(x)$ — цілий многочлен. Цікаво зазначити, що дробові вирази

$$\frac{e^x}{x^n}dx,\quad \frac{\sin x}{x^n}dx,\quad \frac{\cos x}{x^n}dx\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

вже **не інтегруються в скінченному вигляді.**

За допомогою інтегрування частинами легко встановити для інтегралів від цих трьох виразів рекурентні формули і звести їх, відповідно, до трьох основних:

$$\int\frac{e^x}{x}dx=\int\frac{dy}{\ln y}=\operatorname{li}y \qquad \text{(“інтегральний логарифм”);}$$

$$\int\frac{\sin x}{x}\,dx=\operatorname{si}x \qquad \text{(“інтегральний синус”);}$$

$$\int\frac{\cos x}{x}\,dx=\operatorname{ci}x \qquad \text{(“інтегральний косинус”).}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

(Для першої формули ми застосували підстановку $x = \ln y$. І у всіх трьох випадках слід ще фіксувати довільну сталу; це буде зроблено згодом.)

Ми вже знайомі (пр. 271.6) з інтегралами

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

Починаючи з них, ми можемо в скінченному вигляді знайти інтеграли

$$\int x^n e^{ax} \sin bx\, dx, \quad \int x^n e^{ax} \cos bx\, dx \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

А саме, інтегруючи частинами, отримаємо

$$\int x^n e^{ax} \sin bx\, dx = \\ = x^n \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} - \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx\, dx + \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx\, dx,$$

$$\int x^n e^{ax} \cos bx\, dx = \\ = x^n \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} - \frac{nb}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bx\, dx - \frac{na}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bx\, dx.$$

Ці **рекурентні формули** дають змогу звести інтеграли, що нас цікавлять, до випадку $n = 0$.

Якщо $P(\ldots)$ є цілий многочлен як і раніше, то, як остаточний результат, можна стверджувати, що в скінченному вигляді беруться інтеграли

$$\int P\left(x,\ e^{a'x},\ e^{a''x},\ \ldots,\ \sin b'x, \sin b''x,\ \ldots,\ \cos b'x,\ \cos b''x,\ \ldots\right) dx,$$

де $a',\ a'',\ \ldots,\ b',\ b'',\ \ldots$ — сталі.

Діло зводиться, очевидно, до інтегрування виразу

$$x^n e^{ax} \sin^{k'} b'x \sin^{k''} b''x \ldots \cos^{m'} b'x \ldots$$

Якщо використовувати елементарні тригонометричні формули

$$\sin^2 bx = \frac{1 - \cos 2bx}{2},$$

$$\sin b'x \sin b''x = \frac{1}{2} \left[\cos(b' - b'')x - \cos(b' + b'')x\right]$$

та їм подібні, то легко розбити розглянутий вираз на доданки типу $Ax^n e^{ax} \sin bx$ і $Bx^n e^{ax} \cos bx$, які ми вже вміємо обчислювати.

8.5. Еліптичні інтеграли

290. Загальні зауваження і означення

Розглянемо інтеграл вигляду

$$\int R(x, y)\, dx, \tag{290.1}$$

де y є **алгебраїчною функцією** від x, тобто (розд. 205) задовольняє алгебраїчне рівняння

$$P(x, y) = 0 \tag{290.2}$$

(тут P — цілий відносно x і y многочлен). Подібного роду інтеграли дістали назву *інтегралів Абеля*. До їх числа відносяться інтеграли, розглянуті в 8.3,

$$\int R\left(x,\ \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx, \quad \int R\left(x,\ \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx.$$

Справді, функції

$$y = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \quad y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

задовольняють, відповідно, алгебраїчні рівняння

$$(\gamma x + \delta) y^m - (\alpha x + \beta) = 0, \quad y^2 - (ax^2 + bx + c) = 0.$$

З геометричної точки зору, інтеграл Абеля (290.1) вважають пов'язаним з тією **алгебраїчною кривою**, що задається рівнянням (290.2). Наприклад, інтеграл

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx \tag{290.3}$$

пов'язаний з **кривою другого порядку** $y^2 = ax^2 + bx + c$.

Якщо крива (290.2) *може бути задана параметрично*

$$x = r_1(t), \quad y = r_2(t)$$

так, що функції $r_1(t)$ *і* $r_2(t)$ *виявляються* ***раціональними*** *(в цьому випадку крива називається* ***унікурсальною****), то в інтегралі* (290.1) *стає можливою раціоналізація підінтегрального виразу*: підстановкою $x = r_1(t)$ він зводиться до вигляду

$$\int R\Big(r_1(t),\ r_2(t)\Big) r_1'(t)\, dt.$$

До цього класу відносяться обидва зазначені вище випадки. Зокрема, можливість раціоналізації підінтегрального виразу в інтегралі типу (290.3) пов'язана саме з тим фактом, що **крива другого порядку унікурсальна** (розд. 281, розд. 282).

nebayduzhi.math@gmail.com

(Можна дати і чисто геометричну характеристику унікурсальної кривої, але ми на цьому зупинятись не будемо.)

Очевидно, що змінні x і t пов'язані алгебраїчним рівнянням, так що t є **алгебраїчною функцією** від x. Якщо розширити клас елементарних функцій, включив до нього всі алгебраїчні функції, то можна сказати, що *у випадку унікурсальності кривої* (290.2), *інтеграл* (290.1) ***завжди*** *виражається через елементарні функції в скінченному вигляді.*

Але подібні обставини є в деякому розумінні винятком. В загальному випадку крива (290.2) не унікурсальна, а тоді, як можна довести, *інтеграл* (290.1) ***не завжди****, тобто не для всякій функції R, може бути виражений в скінченному вигляді* (хоча це можливо для окремих деяких R).

З цим ми стикаємося вже при розгляданні важливого класу інтегралів

$$\begin{gathered}\int R\left(x,\ \sqrt{ax^3+bx^2+cx+\partial}\right)dx,\\ \int R\left(x,\ \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+\partial x+e}\right)dx,\end{gathered}\tag{290.4}$$

що містять квадратний корінь з многочленів 3-го або 4-го степеня і природно відносяться до інтегралів (290.3). *Інтеграли вигляду* (290.4) *(як правило) вже не виражаються в скінченному вигляді через елементарні функції* навіть при розширеному розумінні цього терміну. Тому знайомство з ними ми відклали, щоб не розривати основну лінію оповідання поточної глави, що присвячена, головним чином, вивченню класів інтегралів, які беруться в скінченному вигляді.

Припускається, що многочлени під коренем в (290.4) мають дійсні коефіцієнти. Окрім цього, ми завжди будемо вважати, що вони не мають кратних коренів, тому що інакше можна було б винести лінійний множник з-під знака кореня; питання би звелося до інтегрування виразів вже вивчених типів, і інтеграл виразився б в скінченному вигляді. Остання обставина може виконуватися, іноді і коли кратних коренів немає; наприклад, легко перевірити, що

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}+C,$$

$$\int \frac{5x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}}\,dx=x\sqrt{2x^3+1}+C.$$

Інтеграли від виразів типу (290.4) взагалі називають *еліптичними* (в зв'язку з тим, що вперше з ними зіштовхнулись при розв'язуванні задачі про випрямлення еліпса, пр. 331.8). Проте цю назву в точному сенсі відносять зазвичай лише до тих із них, що **не беруться в скінченному вигляді**; інші ж, як ті, що тільки що були наведені, називають *псевдоеліптичними.*

nebayduzhi.math@gmail.com

Вивчення і табулювання (тобто створення таблиць значень) інтегралів від виразів (290.4) при довільних значеннях a, b, c, ..., звісно, складно. Тому природне бажання звести всі ці інтеграли до **небагатьох** таких, до складу котрих входило б по можливості **менше** довільних коефіцієнтів (параметрів).

Це досягається за допомогою елементарних перетворень, які ми розглянемо в наступних розділах.

291. Допоміжні перетворення

1. Помітимо насамперед, що достатньо обмежитися випадком многочлена 4-го степеня під коренем, оскільки до нього легко зводиться і випадок, коли під коренем многочлен 3-го степеня. Справді, многочлен 3-го степеня $ax^3+bx^2+cx+\partial$ з **дійсними** коефіцієнтами обов'язково має дійсний корінь (розд. 81), скажемо, λ — і, як наслідок, допускає дійсний розклад

$$ax^3+bx^2+cx+\partial = a(x-\lambda)(x^2+px+q).$$

Підстановка $x-\lambda=t^2$ (або $x-\lambda=-t^2$) і здійснює необхідне зведення

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^3+\ldots}\right)dx = \int R\left(t^2+\lambda,\ t\sqrt{at^4+\ldots}\right)2t\,dt.$$

Надалі ми будемо розглядати лише диференціали, що містять корінь з многочлена четвертого степеня.

2. За відомою теоремою алгебри, многочлен четвертого степеня з дійсними коефіцієнтами може бути представлений у вигляді добутку двох квадратних тричленів з також дійсними коефіцієнтами:

$$ax^4+bx^3+cx^2+\partial x+e = a(x^2+px+q)(x^2+p'x+q'). \tag{291.1}$$

Спробуємо тепер належною підстановкою знищити в обох тричленах одночасно члени першого степеня. Ми вже мали справу з подібною задачею в розд. 284, 3, б).

Якщо $p=p'$, то наша ціль досягається, як відзначалося, простою підстановкою $x=t-\frac{p}{2}$. Нехай тепер $p\neq p'$; в цьому випадку ми скористаємося, як і вище, дробово-лінійною підстановкою

$$x=\frac{\mu t+\nu}{t+1}.$$

Можливість встановити дійсні і до того ж різні значення для коефіцієнтів μ і ν, як ми бачили, обумовлена нерівністю

$$(q-q')^2-(p-p')(p'q-pq')>0. \tag{291.2}$$

Ми вже довели цю нерівність припускаючи, що один з розглянутих тричленів має **уявні** корені, і це було суттєве в наших міркуваннях. Нехай тепер тричлени (291.1) обидва мають дійсні корені, скажімо, перший — корені α і β, а другий — корені γ і δ. Підставляючи

$$p = -(\alpha + \beta), \quad q = \alpha\beta, \quad p' = -(\gamma + \delta), \quad q' = \gamma\delta,$$

можна переписати (291.2) у вигляді

$$(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) > 0, \tag{291.3}$$

а для виконання цієї нерівності достатньо лише подбати про те, щоб корені тричленів не чергувалися (наприклад, щоб було $\alpha > \beta > \gamma > \delta$), і ми можемо досягти цього. (Зауважимо також, що запис нерівності (291.2) у формі (291.3) може бути використано для доведення її і в тих випадках, коли корені $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ недійсні. Якщо лише перший тричлен має недійсні, тобто комплексні **спряжені** корені α і β, а числа γ і δ дійсні, то множники $\alpha - \gamma$ і $\beta - \gamma$ будуть **спряжені**, так що їх добуток буде, як відомо, додатним дійсним числом; те саме стосується і множників $\alpha - \delta$ і $\beta - \delta$. Якщо ж корені α, β, а також корені γ, δ є **попарно спряжені комплексні** числа, то спряженими будуть множники $\alpha - \gamma$ і $\beta - \delta$, а також $\alpha - \delta$ і $\beta - \gamma$, і їх добутки знову дадуть додатні дійсні числа.)

Отже, належно обравши μ і ν, за допомогою вказаної підстановки ми отримаємо

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^4 + \dots}\right) dx = \int R\left(\frac{\mu t + \nu}{t+1},\ \frac{\sqrt{(M + Nt^2)\,(M' + N't^2)}}{(t+1)^2}\right) \frac{\mu - \nu}{(t+1)^2}\, dt,$$

що можна також (якщо не брати до уваги випадки виродження, коли який-небудь з коефіцієнтів M, N, M', N' виявляється нулем) переписати у вигляді

$$\int \tilde{R}\left(t,\ \sqrt{A(1 + mt^2)(1 + m't^2)}\right) dt,$$

для A, m, m' відмінних від нуля.

3. За допомоги міркувань, абсолютно аналогічних до тих, що були використані на початку розд. 284, можна звести цей інтеграл, з точністю до інтеграла від раціональної функції, до такого:

$$\int \frac{R^*(t)}{\sqrt{A(1 + mt^2)(1 + m't^2)}} dt$$

Розкладемо тепер раціональну функцію $R^*(t)$ на два доданки

$$R^*(t) = \frac{R^*(t) + R^*(-t)}{2} + \frac{R^*(t) - R^*(-t)}{2}.$$

Перший не змінює свого значення при заміні t на $-t$, внаслідок чого зводиться до раціональної функції від t^2: $R_1(t^2)$; другий же при вказаній заміні змінює знак, а тому має вигляд $R_2(t^2)t$ (порівняйте з зауваженням в розд. 286). Розглянутий інтеграл представиться у формі суми інтегралів

$$\int \frac{R_1(t^2)\,dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}} + \int \frac{R_2(t^2)\,t\,dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}\,.$$

Але другий з них підстановкою $u = t^2$ одразу зводиться до елементарного інтеграла

$$\frac{1}{2}\int \frac{R_2(u)\,du}{\sqrt{A(1+mu)(1+m'u)}}$$

і береться в скінченному вигляді. Отже, подальшого дослідження потребує лише інтеграл

$$\int \frac{R_1(t^2)\,dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}} \tag{291.4}$$

292. Зведення до канонічної форми

Покажемо, нарешті, що кожен інтеграл типу (291.4) може бути представлений у формі

$$\int \frac{R(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \tag{292.1}$$

де k це деякий додатний правильний дріб: $0 < k < 1$. Назвемо цю форму **канонічною**.

Покладемо для стислості

$$y = \sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}.$$

Без зменшення загальності, можна вважати тут $A = \pm 1$; окрім цього, для визначеності обмежимося додатними значеннями t. Розглянемо тепер можливі різні комбінації знаків A, m, m' і вкажемо для кожного випадку підстановку, що безпосередньо зводить інтеграл (291.4) до **канонічної** форми.

1) $A = +1,\ m = -h^2,\ m' = -h'^2$ $(h > h' > 0)$. Для того щоб радикал мав дійсні значення, потрібно, щоб $t < \frac{1}{h}$ або $t > \frac{1}{h'}$. Нехай

$$ht = z, \quad \text{де} \quad 0 < z < 1 \quad \text{або} \quad z > \frac{h}{h'}.$$

Тоді

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{h'^2}{h^2}z^2\right)}},$$

nebayduzhi.math@gmail.com

так що за k тут варто прийняти $\dfrac{h'}{h}$.

2) $A = +1,\ m = -h^2,\ m' = h'^2$ $(h, h' > 0)$. Для того щоб радикал мав дійсні значення, обмежимося значеннями $t < \dfrac{1}{h}$. Нехай

$$ht = \sqrt{1-z^2}, \quad \text{де} \quad 0 < z \leqslant 1.$$

Тоді

$$\frac{dt}{y} = -\frac{1}{\sqrt{h^2+h'^2}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)\left(1-\dfrac{h'^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}},$$

і можна взяти $k = \dfrac{h'}{\sqrt{h^2+h'^2}}$.

3) $A = +1,\ m = h^2,\ m' = h'^2$ $(h > h' > 0)$. Зміна t нічим не обмежена. Нехай

$$ht = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \text{де} \quad 0 \leqslant z < 1.$$

В цьому випадку

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\dfrac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}}$$

і $k = \dfrac{\sqrt{h^2-h'^2}}{h}$.

4) $A = -1,\ m = -h^2,\ m' = h'^2$ $(h, h' > 0)$. Зміна t обмежена нерівністю $t > \dfrac{1}{h}$. Нехай

$$ht = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \text{де} \quad 0 < z < 1,$$

так що

$$\frac{dt}{y} = \frac{dz}{\sqrt{h^2+h'^2}\sqrt{(1-z^2)\left(1-\dfrac{h^2}{h^2+h'^2}z^2\right)}}$$

і $k = \dfrac{h}{\sqrt{h^2+h'^2}}$.

5) $A = -1,\ m = -h^2,\ m' = -h'^2$ $(h > h' > 0)$. Змінна t може змінюватися лише між $\dfrac{1}{h}$ і $\dfrac{1}{h'}$. Нехай

$$h't = \sqrt{1-\frac{h^2-h'^2}{h^2}z^2}, \quad \text{де} \quad 0 < z < 1.$$

Маємо

$$\frac{dt}{y} = -\frac{dz}{h\sqrt{(1-z^2)\left(1-\dfrac{h^2-h'^2}{h^2}z^2\right)}}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

і $k = \dfrac{\sqrt{h^2 - h'^2}}{h}$.

Цим вичерпуються всі **можливі** випадки, бо в випадку коли $A = -1$ і обидва числа $m, m' > 0$, радикал взагалі не міг би мати дійсних значень. Про множник $R_1\left(t^2\right)$ ми не казали нічого, бо у всіх випадках він, очевидно, перетворювався в раціональну функцію від z^2.

Зазначимо ще, що, розглядаючи інтеграл (292.1), ми можемо обмежитися значеннями $z < 1$; випадок $z > \frac{1}{k}$ зводиться до цього підстановкою $kz = \frac{1}{\zeta}$, де $\zeta < 1$.

293. Еліптичні інтеграли 1-го, 2-го і 3-го роду

Тепер залишається вивчити **найпростіші** інтеграли виду (292.1), до яких могли б бути зведені **всі** інтеграли цього виду, а, отже, і всі взагалі еліптичні інтеграли.

Виділимо з раціональної функції $R(x)$, що фігурує в підінтегральному виразі (292.1), цілу частину $P(x)$, а правильно-дробову її частину розкладемо на прості дроби. Якщо не об'єднувати спряжені комплексні корені знаменника (як ми це робили в розд. 274), а розглядати їх окремо, подібно до дійсних коренів, то $R(x)$ представиться у вигляді суми степенів x^n $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots)$ і дробів вигляду $\dfrac{1}{(x-a)^m}$ $(m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$, де a може бути і уявним числом, помножених на числові коефіцієнти. Звідси зрозуміло, що інтеграл (292.1), в загальному випадку, є лінійним агрегатом наступних інтегралів:

$$I_n = \int \frac{z^{2n}dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots),$$
$$H_m = \int \frac{dz}{(z^2-a)^m\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Зупинимося на інтегралах I_n. Якщо проінтегрувати тотожність (яку легко перевірити)

$$\begin{aligned}&\left(z^{2n-3}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}\right)' =\\ &= (2n-3)z^{2n-4}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} + z^{2n-3}\frac{2k^2z^3-(k^2+1)z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} =\\ &= \frac{(2n-1)k^2z^{2n}-(2n-2)(k^2+1)z^{2n-2}+(2n-3)z^{2n-4}}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\end{aligned}$$

то вийде рекурентне співвідношення

$$\begin{aligned}&(2n-1)k^2I_n-(2n-2)(k^2+1)I_{n-1}+(2n-3)I_{n-2} =\\ &= z^{2n-3}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},\end{aligned} \tag{293.1}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

яке пов'язує три послідовні інтеграли I. Покладаючи тут $n = 2$, виразимо I_2 через I_1 і I_0; якщо взяти $n = 3$ і замість I_2 підставити його вираз через I_1 і I_0, то і I_3 виразиться через ці інтеграли. Продовжуючи так далі, легко переконатися, що кожний з інтегралів I_n $(n \geqslant 2)$ виражається через I_1 і I_0, і навіть, враховуючи (293.1) можна встановити і вигляд формули, що пов'язує їх:

$$I_n = \alpha_n I_0 + \beta_n I_1 + q_{2n-3}(z)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

де α_n і β_n — сталі, а $q_{2n-3}(z)$ є **непарним** многочленом степеня $2n-3$. Звідси зрозуміло, що якщо $P_n(x)$ є многочлен n-го степеня від x, то

$$\int \frac{P_n(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \alpha I_0 + \beta I_1 + z\,Q_{n-2}(z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}, \tag{293.2}$$

де α і β — сталі, а $Q_{n-2}(x)$ є деяким многочленом $(n-2)$-го степеня від x. Визначення цих сталих і коефіцієнтів многочлена Q може бути зроблене (якщо многочлен P конкретно заданий) **методом невизначених коефіцієнтів** (порівняйте з розд. 284, 1).

Помітимо, що з (293.1) можна було б виразити через I_0 і I_1 інтеграли I_n і при **від'ємних** значеннях $(n = -1,\ -2,\ \dots)$, так що в інтегралах H_m достатньо обмежитися випадком $a \neq 0$.

Переходячи до інтегралів H_m (скажімо, при дійсних a), подібним чином встановимо для них рекурентне співвідношення

$$\begin{aligned}
&(2m-2)\left[-a+(k^2+1)a^2-k^2a^3\right]H_m- \\
&-(2m-3)\left[1-2a(k^2+1)+3k^2a^2\right]H_{m-1}+ \\
&+(2m-4)\left[(k^2+1)-3k^2a\right]H_{m-2}- \\
&-(2m-5)k^2H_{m-3} = \\
&= \frac{z}{(z^2-a)^{m-1}}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},
\end{aligned}$$

яке справедливе і при від'ємних, і при нульовому значеннях m. Звідси всі H_m виразяться через три з них:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \int \frac{dz}{(z^2-a)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \\
H_0 &= \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_0, \\
H_{-1} &= \int \frac{(z^2-a)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = I_1 - aI_0,
\end{aligned}$$

тобто остаточно через $I_0,\ I_1$ та H_1.

Підкреслимо, що все це буде справедливе і при **уявних** значеннях параметра a; проте ми не станемо входити тут в пояснення з цього приводу, відсилаючи читачів до 12.5.

Отже, в результаті всіх наших міркувань ми приходимо до такого загального висновку: *всі еліптичні інтеграли за допомогою елементарних підстановок і з точністю до доданків, які виражаються в скінченному вигляді, зводяться до наступних трьох стандартних інтегралів*:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$\int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$(0<k<1)$$

$\Big($ останній отримується з H_1 заміною $a \neq 0$ новим параметром $h=-\frac{1}{a}\Big)$. (Хоча вище вже дані достатні вказівки для того, щоб питання про зведення довільного еліптичного інтеграла до згаданих трьох могло вважатися **принципово** вирішеним, але **на практиці** на цьому шляху можуть зустрітися проблеми. У спеціальних монографіях, присвячених еліптичним інтегралам та суміжним питанням, можна знайти інші практично зручні способи для цього.) Ці три інтеграли, як показав Ліувілль (фр. Joseph Liouville, Жозе́ф Ліуві́лль), в скінченному вигляді вже не беруться. Їх Льожондр назвав *еліптичними інтегралами*, відповідно, *1-го, 2-го і 3-го роду*. Перші два містять лише один параметр k, останній, окрім нього, ще (уявний) параметр h.

Льожондр вніс в ці інтеграли подальші спрощення, виконав в них підстановку $z=\sin\varphi$ $\left(\varphi \text{ змінюється від } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2}\right)$. При цьому перший з них безпосередньо переходить в інтеграл

Еліптичний інтеграл Першого Роду

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{293.3}$$

Другий перетворюється так:

$$\int \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

тобто зводиться до попереднього інтеграла і нового інтеграла

Еліптичний інтеграл Другого Роду

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\,. \tag{293.4}$$

Нарешті, третій інтеграл при вказаній підстановці переходить в

Еліптичний інтеграл Третього Роду

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,. \tag{293.5}$$

Інтеграли (293.3), (293.4) і (293.5) також називаються *еліптичними інтегралами 1-го, 2-го і 3-го роду — в формі Льожондра.*

З них особливу важливість і часте використання мають перші два. Якщо вважати, що ці інтеграли при $\varphi=0$ дорівнюють нулю, і цим зафіксувати довільні сталі, що в них містяться, то вийдуть дві цілком визначені функції від φ, які Льожондр позначив відповідно як $\mathbf{F}(k,\varphi)$ та $\mathbf{E}(k,\varphi)$. Тут, окрім незалежної змінної φ, указаний також параметр k, що називається **модулем**, який входить в вирази цих функцій.

Льожондром були зіставлені великі таблиці значень цих функцій при різних φ і різних k. В них не тільки аргумент φ, що трактується як **кут**, виражається в градусах, але і модуль k (правильний дріб!) розглядається як синус деякого кута θ, який і вказується в таблиці замість модуля, причому також в градусах.

Окрім того, як Льожондром, так і іншими науковцями були вивчені властивості цих функцій, встановлений ряд формул що до них тощо. Завдяки цьому функції **F** і **E** Льожондра увійшли в сім'ю функцій, що зустрічаються в аналізі і його застосуванні, на рівних правах з елементарними функціями.

Нижча частина інтегрального числення, якою ми поки що вимушені обмежитися, займається "інтегруванням в скінченному вигляді". Проте було б помилково думати, що цим обмежуються задачі інтегрального числення взагалі: еліптичні інтеграли **F** і **E** є прикладами таких функцій, які плідно вивчаються за їх інтегральними виразами і з успіхом застосовуються, хоча і не можуть бути представленими через елементарні функції в скінченному вигляді.

Ми ще повернемося до інтегралів **F** і **E** в наступній главі і взагалі не раз ще побачимо в наступних частинах курсу.

Глава 9

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

9.1. Означення та умови існування визначеного інтеграла

294. Інший підхід до задачі про площу

Повернемося до задачі визначення площі P криволінійної трапеції $ABCD$ (рис. 294.1), якою ми вже займалися в розд. 264. Ми викладемо зараз **інший підхід** до розв'язання цієї задачі. (Узагальнюючи при цьому ідею, вже застосовану в пр. 32.4.)

Розділимо основу AB нашої фігури довільним чином і проведемо ординати, що відповідають точкам поділу; тоді криволінійна трапеція розділиться на ряд стрічок (дивіться рисунок).

Замінимо тепер наближено кожну стрічку деяким прямокутником, основа якого є такою самою як і у стрічки, а висота співпадає з одною з ординат стрічки, скажемо, з крайньою зліва. Отже, криволінійна фігура заміниться деякою фігурою, схожою на сходинки, яка складається з окремих прямокутників.

Позначимо абсциси точок поділу через

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b. \qquad (294.1)$$

Основа i-го прямокутника ($i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$), очевидно, дорівнює різниці $x_{i+1} - x_i$, котру ми будемо позначати через Δx_i. Щодо висоти, то, по сказаному раніше, вона дорівнює $y_i = f(x_i)$. Тому площа i-того прямокутника буде $y_i \Delta x_i = f(x_i)\Delta x_i$.

Просумував площі всіх прямокутників, отримаємо **наближене** значення площі P

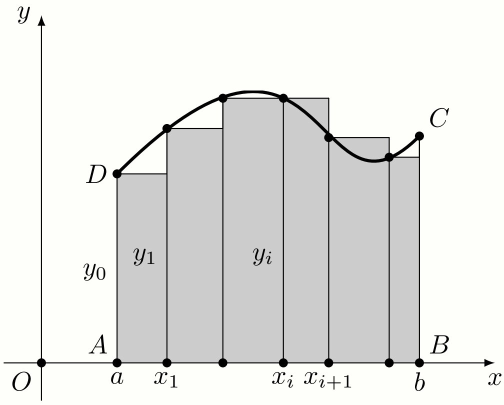


Рис. 294.1

криволінійної трапеції

$$P \doteq \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta x_i \quad \text{або} \quad P \doteq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$

Похибка цієї рівності за безмежного зменшення всіх Δx_i прямує до нуля. Точне значення площі P отримаємо як **границю**:

$$P = \lim \sum y_i \Delta x_i = \lim \sum f(x_i)\Delta x_i, \tag{294.2}$$

за умови, що всі довжини Δx_i одночасно прямують до нуля.

Цей спосіб можна використати і для обчислення площі $P(x)$ фігури $AMND$ (рис. 264.1), лише розбивати на частини прийшлося би відрізок AM. Помітимо також, що випадок, коли $y = f(x)$ набуває і від'ємних значень, вичерпується висловленою в розд. 264 умовою вважати площі фігур під віссю x від'ємними.

Для позначення **суми** вигляду $\sum y\Delta x$ (точніше, **граничного значення** цієї суми) Ляйбніц і ввів символ $\int y\,dx$, де $y\,dx$ нагадує типовий доданок суми, а $\int$ є стилізованою літерою S — початкова літера латинського слова “Summa”. (Термін “інтеграл” (від латинського integer — цілий) був запропонований учнем і сподвижником Ляйбніца Й. Бернуллі; Ляйбніц спочатку і говорив “сума”.) Оскільки площа, що задає це граничне значення, в той самий час є первісною для y, то той самий символ і зберігся для позначення первісної функції. Згодом, з введенням функціонального позначення, почали писати

$$\int f(x)\,dx,$$

якщо ідеться про змінну площу, і

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

— у випадку площі фіксованої фігури $ABCD$, що відповідає зміні x від a до b.

Ми скористалися інтуїтивним уявленням про площу, щоб природно підійти до розгляду границь деяких сум вигляду (294.2) (які історично і були введені в контексті задачі про обчислення площі). Однак саме поняття площі потребує обґрунтування, і, якщо ідеться про криволінійну трапецію, воно досягається саме за допомоги вищезгаданих границь. Звичайно, цьому має передувати вивчення границь (294.2) самих по собі, відволікаючись від геометричних міркувань, чому і присвячені наступні розділи.

Границі виду (294.2) відіграють виключно важливу роль в математичному аналізі і різноманітних його застосуваннях. До того ж ідеї, що тут розвиваються, в дещо змінених різних формах будуть неодноразово повторюватися впродовж всього курсу.

295. Означення

Нехай функція $f(x)$ задана на де-якому проміжку $[a, b]$. Розіб'ємо цей проміжок довільним чином на частини, вставивши між a і b точки поділу (294.1). **Найбільшу** з різниць $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$ будемо надалі позначати через λ.

Візьмемо у кожному з часткових проміжків $[x_i,\ x_{i+1}]$ довільну точку $x = \xi_i$ (раніше ми завжди брали $\xi_i = x_i$)

$$x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1} \quad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

і складемо суму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Кажуть, що *сума σ при $\lambda \to 0$ має (скінченну) границю I, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що при $\lambda < \delta$ (тобто основний проміжок розбитий на частини з довжинами $\Delta x_i < \delta$) нерівність*

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

виконується при будь-якому виборі чисел ξ_i.

Записують це так:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma. \tag{295.1}$$

Цьому означенню "мовою ε-δ" як завжди, протиставляється означення "мовою послідовностей". Уявимо собі, що проміжок $[a, b]$ послідовно розбивається на частини спочатку одним способом, потім — другим, третім тощо. Таку послідовність розбиття проміжку на частини ми називатимемо **основною**, якщо відповідна послідовність значень $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$ збігається до нуля.

nebayduzhi.math@gmail.com

Рівність (295.1) можна розуміти тепер і в тому сенсі, що *послідовність значень суми σ, яка відповідає будь-якій **основній** послідовності розбиття проміжку, завжди прямує до границі I, як би не вибирати при цьому ξ_i.*

Доведення рівносильності обох означень може бути проведено аналогічно до того, як це було зроблено у розд. 53. Друге означення дає змогу перенести основні поняття та пропозиції теорії границь і на цей новий вид границі.

*Скінченна границя I суми σ при $\lambda \to 0$ називається **визначеним інтегралом функції** $f(x)$ на проміжку від a до b і позначається символом*

$$I = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{295.2}$$

Якщо ця границя існує, то функція $f(x)$ називається **інтегровною** на проміжку $[a, b]$.

Числа a і b називаються, відповідно, **нижньою і верхньою межами** інтеграла. При сталих межах визначений інтеграл є сталим числом.

Ріман (нім. Bernhard Riemann, Бе́рнхард Рі́ман) перший висловив наведене означення в загальній формі та дослідив область його застосування. Суму σ іноді називають **сумою Рімана** (насправді ще Коші чітко користувався границями подібних сум, але лише у випадку неперервної функції); ми ж переважно будемо називати її **інтегральною сумою**, щоб наголосити на її зв'язку з інтегралом.

Спробуємо з'ясувати умови, при яких інтегральна сума має скінченну границю, тобто існує визначений інтеграл (295.2).

Насамперед зауважимо, що наведене означення насправді може бути застосоване лише до **обмеженої** функції. Справді, якби функція $f(x)$ була б на проміжку $[a, b]$ необмежена, то при будь-якому розбитті проміжку на частини вона зберегла б подібну властивість хоч в одній із частин. Тоді за рахунок вибору в цій частині точки ξ можна було б зробити $f(\xi)$, а з нею і суму σ, скільки завгодно великою; за цих умов скінченною границі для σ, очевидно, існувати не могло б. Отже, *функція, що інтегрується, необхідно обмежена.*

Тому в подальшому дослідженні ми наперед припускатимемо розглянуту функцію $f(x)$ **обмеженою**

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

296. Суми Дарбу

Як допоміжний засіб дослідження, поряд з інтегральними сумами, введемо на розгляд, за прикладом Дарбу, ще інші, подібні до них, але простіші суми.

Позначимо через m_i і M_i, відповідно, точні нижню і верхню межі функції $f(x)$ на

i-му проміжку $[x_i,\ x_{i+1}]$ і складемо суми

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

Ці суми і звуться, відповідно, **нижньою і верхньою інтегральними сумами**, чи **сумами Дарбу**.

В окремому випадку, коли $f(x)$ **неперервна**, вони є просто найменшою та найбільшою з інтегральних сум, що відповідають взятому розбиттю, тому що в цьому випадку функція $f(x)$ на кожному проміжку **досягає** своїх точних меж, і точки ξ_i, можна вибрати так, щоб було

$$f(\xi_i) = m_i \quad \text{або} \quad f(\xi_i) = M_i.$$

Переходячи до загального випадку, з самого означення нижньої і верхньої меж маємо

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i.$$

Помножимо члени обох цих нерівностей на Δx_i (Δx_i додатно) для всіх i і складемо їх, отримаємо

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

При фіксованому розбитті суми s і S будуть сталими числами, в той час як сума σ ще залишається змінною через довільності чисел ξ_i. Але легко побачити, що за рахунок вибору ξ_i можна значення $f(\xi_i)$ зробити як завгодно близькими як до m_i, так і до M_i, а значить — суму σ зробити як завгодно близькою до s або до S. А тоді попередні нерівності приводять до наступного вже загального **зауваження**: *при цьому розбитті проміжку суми Дарбу s і S служать* ***точними****, відповідно, нижньою і верхньою межами для інтегральних сум.*

Суми Дарбу мають наступні прості властивості.

Властивість 296.1 (1-а властивість сум Дарбу)**.** *Якщо до наявних точок поділу додати нові точки, то нижня сума Дарбу може від цього хіба що зрости, а верхня сума — хіба що зменшитися.*

Доведення. Для доведення цієї властивості достатньо обмежитися приєднанням до вже існуючих точок поділу ще однієї точки поділу x'.

Нехай ця точка потрапить між точками x_k і x_{k+1}, так що

$$x_k < x' < x_{k+1}.$$

Якщо позначити **нову** верхню суму літерою S', то від попередньої S вона буде відрізнятися тільки тим, що в сумі S проміжку $[x_k,\ x_{k+1}]$ відповідав доданок

$$M_k \cdot (x_{k+1} - x_k),$$

а в новій сумі S' цьому проміжку відповідає сума двох доданків

$$\overline{M}_k(x'-x_k)+\overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x'),$$

де $\overline{M}_k$ і $\overline{\overline{M}}_k$ є точні верхні межі функції $f(x)$ на проміжках $[x_k,\ x']$ і $[x',\ x_{k+1}]$. Оскільки ці проміжки є частинами проміжку $[x_k,\ x_{k+1}]$, то

$$\overline{M}_k \leqslant M_k, \quad \overline{\overline{M}}_k \leqslant M_k.$$

Отже,

$$\overline{M}_k(x'-x_k) \leqslant M_k(x'-x_k),$$
$$\overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x') \leqslant M_k(x_{k+1}-x').$$

Додаючи ці нерівності почленно, отримаємо

$$\overline{M}_k(x'-x_k)+\overline{\overline{M}}_k(x_{k+1}-x') \leqslant M_k(x'-x_k)+M_k(x_{k+1}-x')=M_k(x_{k+1}-x_k).$$

Звідси і випливає, що $S' \leqslant S$. Для нижньої суми доведення аналогічне до цього. □

Зауваження. Оскільки різниці $M_k-\overline{M}_k$ і $M_k-\overline{\overline{M}}_k$, очевидно, не перевищують коливання Ω функції $f(x)$ на всьому проміжку $[a,b]$, то різниця $S-S'$ не може перевищити добуток $\Omega\Delta x_k$. Це залишається справедливим і в тому випадку, якщо в k-му проміжку взято **кілька** нових точок поділу.

Властивість 296.2 (2-а властивість сум Дарбу)**.** *Кожна нижня сума Дарбу не більше кожної верхньої суми, яка може відповідати й іншому розбиттю проміжку.*

Доведення. Розіб'ємо проміжок $[a,b]$ довільним чином на частини і складемо для цього розбиття суми Дарбу s_1 і S_1.

Розглянемо тепер деяке інше, ніяк не пов'язане з першим, розбиття проміжку $[a,b]$. Йому також відповідатимуть його суми Дарбу s_2 і S_2.

Потрібно довести, що $s_1 \leqslant S_2$. З цією метою об'єднаємо ті та інші точки поділу; тоді отримаємо деяке третє, допоміжне, розбиття, якому відповідатимуть суми s_3 і S_3.

Третє розбиття ми отримали з першого додавання нових точок поділу; тому, на підставі доведеної 1-ї властивості сум Дарбу (вл. 296.1), маємо

$$s_1 \leqslant s_3.$$

Зіставивши тепер друге і третє розбиття, так само отримаємо, що

$$S_3 \leqslant S_2.$$

Але $s_3 \leqslant S_3$, так що з щойно отриманих нерівностей випливає

$$s_1 \leqslant S_2,$$

що й потрібно було довести. □

З доведеного випливає, що вся множина $\{s\}$ нижніх сум обмежена зверху, наприклад, будь-якою верхньою сумою S. У такому разі (розд. 11) ця множина має скінченну **точну** верхню межу

$$I_* = \sup\{s\}$$

і, крім того,

$$I_* \leqslant S,$$

хоч би яка була верхня сума S. Отже, оскільки множина $\{S\}$ верхніх сум виявляється обмеженою знизу числом I_*, то вона має скінченну точну нижню межу

$$I^* = \inf\{S\},$$

причому, очевидно,

$$I_* \leqslant I^*.$$

Зіставляючи усе сказане, маємо

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S \tag{296.1}$$

для будь-яких нижньої та верхньої сум Дарбу.

Числа I_* і I^* називають, відповідно, *нижнім і верхнім інтегралами Дарбу* (порівняйте з розд. 301 (далі)).

297. Умова існування інтеграла

За допомогою сум Дарбу тепер легко сформулювати умову існування інтеграла.

Теорема 297.1. *Для існування визначеного інтеграла необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{\lambda\to 0}(S - s) = 0. \tag{297.1}$$

Доведення. Сказаного в розд. 295 достатньо щоб зрозуміти зміст цієї границі. Наприклад, “мовою ε-δ”, умова (297.1) означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при $\lambda < \delta$ (тобто проміжок розбитий на частини з довжинами $\Delta x_i < \delta$), виконується нерівність

$$S - s < \varepsilon.$$

Необхідність. Нехай існує інтеграл (295.2). Тоді для будь-якого заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що якщо всі $\Delta x_i < \delta$, то

$$|\sigma - I| < \varepsilon \quad \text{або} \quad I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon,$$

як би ми не вибирали ξ_i у межах відповідних проміжків. Але суми s і S, при заданому розбитті проміжку, є, як ми встановили, для інтегральних сум, відповідно, **точними** нижньою та верхньою межами; тому для них матимемо

$$I-\varepsilon \leqslant s \leqslant S \leqslant I+\varepsilon,$$

так що

$$\lim_{\lambda\to 0} s = I, \quad \lim_{\lambda\to 0} S = I, \tag{297.2}$$

звідки й випливає (297.1).

Достатність. Нехай умова (297.1) виконана; тоді з (296.1) відразу ясно, що $I_* = I^*$ і, якщо позначити їх спільне значення як I, то

$$s \leqslant I \leqslant S. \tag{297.3}$$

Розглянемо деяке розбиття. Тоді нехай s і S є суми Дарбу для цього розбиття, а σ — деяка інтегральна сума для цього ж розбиття. Як ми знаємо,

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

Згідно з умовою (297.1), якщо припустити, що всі Δx_i є досить мали, то суми s і S відрізняються менше, ніж на довільно взяте $\varepsilon > 0$. Але у такому разі це справедливо і щодо чисел σ і I між ними:

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

так що I є границею для σ, тобто визначеним інтегралом. ☐

Якщо позначити коливання $M_i - m_i$ функції на i-му частковому проміжку як ω_i, то будемо мати

$$S - s = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i \Delta x_i,$$

і умова існування визначеного інтеграла може бути переписана так:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = 0. \tag{297.4}$$

У цій формі вона зазвичай і застосовується.

298. Класи інтегровних функцій

Застосуємо знайдену нами ознаку до **класифікації інтегровних функцій**.

Теорема 298.1. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a,b]$, то вона інтегровна.*

Доведення. Застосуємо наслідок насл. 87.1.1 з теореми Кантора (теор. 87.1) до нашої неперервної функції $f(x)$. Для будь-якого заданого $\varepsilon > 0$ завжди знайдеться таке $\delta > 0$, що як тільки проміжок $[a, b]$ розбитий на частини з довжинами $\Delta x_i < \delta$, то **всі** $\omega_i < \varepsilon$. Звідси

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b-a).$$

Оскільки $b - a$ є стале число, а ε довільно мало, то умова (297.4) виконується, а з неї і випливає існування інтеграла. □

Можна дещо узагальнити доведене твердження.

Теорема 298.2. *Якщо обмежена функція $f(x)$ в $[a, b]$ має лише скінченну кількість точок розриву, то вона інтегровна.*

Доведення. Нехай точки розриву будуть $x^{(1)}$, …, $x^{(k)}$. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Оточимо точки розриву околами

$$(x^{(1)} - \varepsilon^{(1)},\ x^{(1)} + \varepsilon^{(1)}),\ \ldots,\ (x^{(k)} - \varepsilon^{(k)},\ x^{(k)} + \varepsilon^{(k)})$$

так, щоб довжина кожного околу була менше ε. На інших (замкнених) проміжках функція $f(x)$ буде неперервною, і ми можемо застосувати до кожного з них окремо наслідок з теореми Кантора. Для будь-якого заданого ε отримаємо числа δ; виберемо найменше з них (його ми також позначатимемо літерою δ). Тоді воно може бути використано для кожного із зазначених вище проміжків. Ніщо нам не заважає взяти при цьому $\delta < \varepsilon$. Розіб'ємо тепер наш проміжок $[a, b]$ на частини так, щоб їх довжини Δx_i, всі були менше δ. Отримані часткові проміжки будуть двох типів:

1) Проміжки, що лежать повністю поза виділеними околами навколо точок розриву. Там коливання функції $\omega_i < \varepsilon$.

2) Проміжки, які або цілком лежать усередині виділених околів, або частково перетинають ці околи.

Оскільки функція $f(x)$ за припущенням є обмеженою, то її коливання Ω на всьому проміжку $[a, b]$ буде скінченне; коливання ж на будь-якому частковому проміжку не перебільшує Ω.

Суму

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i$$

розіб'ємо на дві:

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \quad \text{і} \quad \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''},$$

поширені, відповідно, на проміжки першого та другого типу.

nebayduzhi.math@gmail.com

Для першої суми, як і в попередній теоремі, матимемо

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'} < \varepsilon(b-a.)$$

Щодо другої суми, то зауважимо, що довжини проміжків другого роду, що повністю потрапили всередину виділених околів, у сумі $< k\varepsilon$; проміжків, що лише частково перетинають їх, може бути не більше $2k$, і сума їх довжин $< 2k\delta$. Отже

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega(k\varepsilon + 2k\delta) < \Omega \cdot 3k\varepsilon.$$

Отже, остаточно, при $\Delta x_i < \delta$ маємо

$$\sum_{i} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon[(b-a) + 3k\Omega].$$

Це і доводить наше твердження, тому що у квадратних дужках міститься стале число, а ε довільно мало. ☐

Нарешті, вкажемо ще один простий клас інтегровних функцій, що не покривається попереднім.

Теорема 298.3. *Монотонна обмежена функція $f(x)$ завжди інтегровна.*

Доведення. Нехай $f(x)$ — монотонно **зростаюча** функція. Тоді її коливання на проміжку $[x_i,\ x_{i+1}]$ буде

$$\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i).$$

Нехай $\varepsilon > 0$ будь-яке число; візьмемо

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}\,.$$

Як тільки $\Delta x_i < \delta$, то відразу будемо мати

$$\sum \omega_i \Delta x_i < \delta \sum [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = \delta[f(b) - f(a)] = \varepsilon.$$

звідки і випливає інтегровність функції. ☐

299. Властивості інтегровних функцій

З умови існування інтеграла розд. 297 можна вивести і низку загальних властивостей функцій, що інтегруються.

Теорема 299.1. *Якщо функція $f(x)$ інтегровна на проміжку $[a,b]$, то й функції $|f(x)|$ та $kf(x)$ (де $k=\text{const}$) інтегровні на цьому проміжку.*

Доведення. Доведення проведемо для функції $|f(x)|$. Оскільки для будь-яких двох точок x', x'' проміжку $[x_i,\ x_{i+1}]$ маємо (17.5)

$$|f(x'')|-|f(x')|\leqslant|f(x'')-f(x')|,$$

то і коливання ω_i^* функції $|f(x)|$ на цьому проміжку не перевищує ω_i (розд. 85). Звідси

$$\sum\omega_i^*\Delta x_i\leqslant\sum\omega_i\Delta x_i;$$

оскільки остання сума прямує до нуля (при $\lambda\to0$), то і перша теж прямує до нуля, що тягне за собою інтегровність функції $|f(x)|$. ☐

Теорема 299.2. *Якщо дві функції $f(x)$ та $g(x)$ інтегровні на проміжку $[a,b]$, то їх сума, різниця і добуток також інтегровні.*

Доведення. Доведення обмежимо випадком добутку $f(x)g(x)$.

Нехай $|f(x)|\leqslant K$, $|g(x)|\leqslant L$. Взявши на проміжку $[x_i,\ x_{i+1}]$ будь-які дві точки x', x'', розглянемо різницю

$$f(x'')g(x'')-f(x')g(x')=[f(x'')-f(x')]g(x'')+[g(x'')-g(x')]f(x').$$

Очевидно,

$$|f(x'')g(x'')-f(x')g(x')|\leqslant L\omega_i+K\overline{\omega}_i,$$

якщо позначити відповідні коливання функцій $f(x)$ і $g(x)$ на проміжку $[x_i,\ x_{i+1}]$ як ω_i та $\overline{\omega}_i$. Але тоді (розд. 85) і для коливання Ω_i функції $f(x)g(x)$ на цьому проміжку матимемо

$$\Omega_i\leqslant L\omega_i+K\overline{\omega}_i,$$

звідки

$$\sum\Omega_i\Delta x_i\leqslant L\sum\omega_i\Delta x_i+K\sum\overline{\omega}_i\Delta x_i.$$

Оскільки дві останні суми прямують до нуля (при $\lambda\to0$), то перша також прямує до нуля, що й доводить інтегровність функції $f(x)g(x)$. ☐

Теорема 299.3. *Якщо функція $f(x)$ інтегровна на проміжку $[a,b]$, то вона інтегровна і у будь-якій частині $[\alpha,\beta]$ цього проміжку. Навпаки, якщо проміжок $[a,b]$ розкладений на частини, і в кожній частині окремо функція $f(x)$ інтегровна, то вона інтегровна і на всьому проміжку $[a,b]$.*

Доведення. Припустимо, що функція $f(x)$ інтегровна на проміжку $[a, b]$, і побудуємо для цього проміжку суму $\sum \omega_i \Delta x_i$ (вважаючи, що α і β входять до складу точок поділу). Аналогічна сума для проміжку $[\alpha, \beta]$ вийде звідси, якщо опустити ряд (додатних) доданків; вона напевно прямує до нуля, якщо прямує до нуля перша сума.

Нехай тепер проміжок $[a, b]$ розкладений, скажімо, на дві частини $[a, c]$ та $[c, b]$ (де $a < c < b$), і в кожній з них функція $f(x)$ інтегровна. Візьмемо знову суму $\sum \omega_i \Delta x_i$ для проміжку $[a, b]$; якщо точка c виявилася в числі точок поділу, то вказана сума складається з двох подібних сум для проміжків $[a, c]$ та $[c, b]$ і разом з ними прямує до нуля. Цей висновок залишається справедливим і для випадку, коли c не є точкою поділу: приєднавши цю точку, ми змінимо лише **один** член суми, який сам, очевидно, прямує до нуля. ☐

Теорема 299.4. *Якщо змінити значення інтегровної функції в скінченному числі (k) точок, то інтегровність її не порушиться.*

Доведення. Доведення очевидне, бо згадані зміни торкнуться не більше ніж k членів суми $\sum \omega_i \Delta x_i$.

Легко зрозуміти, що і значення самого інтеграла при цьому не зазнає змін. Це випливає з того, що для обох функцій (даної та зміненої) точки ξ_i в інтегральній сумі завжди можна вибирати так, щоб вони не збігалися з тими точками, для яких їх значення відрізняються. ☐

Зауваження. Завдяки цій властивості ми отримуємо можливість говорити про інтеграл

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

навіть тоді, коли функція $f(x)$ не визначена в скінченному числі точок проміжку $[a, b]$. При цьому можна приписати в цих точках нашій функції абсолютно довільні значення і розглядати інтеграл від функції, визначеної таким способом на всьому проміжку. Як ми бачили, ні існування цього інтеграла, ні величина його не залежать від значень, приписаних функції в точках, де вона не була визначена.

300. Приклади та доповнення

Наведемо приклади застосування ознаки існування інтеграла (розд. 297) до конкретних функцій.

1) Повернемося до функції Рімана, розглянутої в пр. 70.8:
$f(x) = \frac{1}{q}$, якщо x є нескоротний правильний дріб $\frac{p}{q}$, і 0 в інших точках проміжку $[0, 1]$.

Нехай проміжок $[0,1]$ розбитий на частини з довжинами $\Delta x_i \leqslant \lambda$. Візьмемо довільне натуральне число N. Усі часткові проміжки розподілимо на два класи:

а) До першого віднесемо проміжки, що містять числа $\frac{p}{q}$ зі знаменниками $q \leqslant N$; оскільки таких чисел існує лише скінченне число $k = k_N$, то і проміжків першого роду буде не більше $2k$, а сума їх довжин не перевищить $2k\lambda$.

б) До другого віднесемо проміжки, які не містять зазначених чисел; для них коливання ω_i, очевидно, менш $\frac{1}{N}$.

Якщо відповідно до цього розкласти суму $\sum \omega_i \Delta x_i$ на дві та оцінити кожну порізно, то отримаємо в результаті

$$\sum \omega_i \Delta x_i < 2k_N\lambda + \frac{1}{N}.$$

Взявши спочатку $N > \frac{2}{N}$, а потім $\lambda < \frac{\varepsilon}{4k_N} = \delta$, матимемо $\sum \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$, що доводить інтегровність функції.

Приклад цей цікавий тим, що функція має **безліч** точок розриву і все ж таки інтегровна. (Втім, приклади такого роду можна побудувати і на основі теор. 298.3.)

2) Тепер розглянемо знову функцію Діріхлє (розд. 46; пр. 70.7):

$$\mathrm{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ раціональне;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ ірраціональне.} \end{cases}$$

Оскільки у будь-якій частині проміжку $[0,1]$ коливання цієї функції $\omega_i = 1$, то і $\sum \omega_i \Delta x_i = 1$, так що функція не інтегровна.

3) Критерій існування визначеного інтеграла, отриманий в розд. 297, може бути представлений у наступній формі.

Теорема 300.1. *Для існування визначеного інтеграла необхідно і достатньо, щоб за заданими числами $\varepsilon > 0$ і $\sigma > 0$ можна було знайти таке $\delta > 0$, що як тільки всі $\Delta x_i < \delta$, сума*

$$\sum_{i'} \Delta x_{i'}$$

довжин тих проміжків, яким відповідають коливання

$$\omega_{i'} \geqslant \varepsilon,$$

сама менш σ.

Доведення. Необхідність зрозуміла з нерівності

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i \geqslant \sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} \geqslant \varepsilon \sum_{i'} \Delta x_{i'},$$

якщо вибираючи δ, зробити першу суму меншою ніж $\varepsilon\sigma$.

nebayduzhi.math@gmail.com

Достатність випливає з таких нерівностей:

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i = \sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega \sum_{i'} \Delta x_{i'} + \varepsilon \sum_{i''} \Delta x_{i''} < \Omega\sigma + \varepsilon(b-a).$$

(Тут Ω, як завжди, означає коливання функції на всьому проміжку $[a,b]$; значком i'' позначені часткові проміжки, в яких коливання $\omega_{i''} < \varepsilon$.) □

4) Застосуємо критерій існування інтеграла у цій новій формі до доведення наступного твердження.

Теорема 300.2. *Якщо функція* ***інтегровна*** *на проміжку* $[a,b]$, *причому значення її не виходять за межі проміжку* $[c,d]$, *в якому* ***неперервна*** *функція* $\varphi(y)$, *то композиція функцій* $\varphi(f(x))$ *є також інтегровною функцією в* $[a,b]$.

Доведення. Візьмемо довільні числа $\varepsilon > 0$ і $\sigma > 0$. Оскільки $\varphi(y)$ неперервна функція, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\eta > 0$, що на будь-якому проміжку значень y з довжиною $< \eta$ коливання функції φ буде $< \varepsilon$.

Оскільки функція f інтегровна, то для будь-яких чисел η і σ тепер знайдеться таке δ, що як тільки проміжок розбитий на частини з довжинами $\Delta x_i < \delta$, сума $\sum_{i'} \Delta x_{i'}$ довжин тих з них, для яких коливання функції f: $\omega_{i'}[f] \geqslant \eta$, сама менше σ (дивіться 3). Для інших проміжків маємо $\omega_{i''}[f] < \eta$, а отже вибираючи числа η, робимо $\omega_{i''}[\varphi(f)] < \varepsilon$. Отже, для композиції функцій $\varphi(f(x))$ коливання можуть виявитися $\geqslant \varepsilon$ лише на деяких з проміжків першої групи, сума довжин яких $< \sigma$. Застосуємо критерій теор. 300.1 і переконуємося, що композиція функцій є також інтегровною функцією. □

5) Якщо і щодо функції φ припустити лише інтегровність, то композиція функцій може виявитися неінтегровною. Ось приклад.

Нехай f буде функцією Рімана, вона інтегровна на проміжку $[0,1]$ (дивіться 1), причому значення її також не виходять за межі цього проміжку. Далі, нехай

$$\varphi(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y \leqslant 1, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

Функція $\varphi(y)$ також інтегровна на $[0,1]$.

Композиція ж функцій $\varphi(f(x))$, як легко побачити, співпадає з функцією Діріхлє (дивіться 2): вона не інтегровна на $[0,1]$.

301. Нижній та верхній інтеграли як границі

На закінчення ми повернемося до нижнього та верхнього інтегралів, які в розд. 296 були визначені як **точні межі сум Дарбу** s і S. Ми покажемо тепер, що водночас вони є **границями** названих сум.

Теорема 301.1 (Теорема Дарбу). *Для будь-якої обмеженої функції $f(x)$ завжди*

$$I_* = \lim_{\lambda\to 0} s, \quad I^* = \lim_{\lambda\to 0} S.$$

Доведення. Доведення проведемо, наприклад, для верхніх сум.

Насамперед, по заздалегідь заданому ε візьмемо таке розбиття проміжку $[a, b]$, щоб для відповідної верхньої суми S' було

$$S' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{301.1}$$

Це можливо, оскільки I^* є **точною** нижньою межею для множини верхніх сум. Нехай це розбиття містить m' (внутрішніх) точок поділу.

Візьмемо тепер

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2m'\Omega},$$

де Ω означає коливання функції $f(x)$ на всьому проміжку $[a, b]$, і розглянемо **довільне** розбиття проміжку, для якого всі $\Delta x_i < \delta$; нехай йому відповідає сума S.

Щоб оцінити різницю між S і I^*, введемо ще третє розбиття нашого проміжку, поєднавши точки поділу перших двох. Розглянемо його верхню суму S''. За 1-ю властивістю сум Дарбу (вл. 296.1) $S'' \leqslant S'$, так що з (301.1) випливає

$$S'' < I^* + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{301.2}$$

З іншого боку, за зауваженням розд. 296 різниця $S - S''$ не більше добутку Ω на суму довжин Δx_i тих проміжків другого розбиття, всередину яких потрапили точки поділу першого розбиття. Але число таких проміжків не більше m', а довжина кожного з них менше за δ, так що

$$S - S'' < m'\Omega\delta = \frac{\varepsilon}{2},$$

звідки, використовуючи (301.2),

$$S < I^* + \varepsilon.$$

Оскільки, з іншого боку, $S \geqslant I^*$, то, як тільки $\Delta x_i < \delta$,

$$0 \leqslant S - I^* < \varepsilon,$$

так що справді, $S \to I^*$. ☐

З доведеної теореми безпосередньо випливає, що **завжди**

$$\lim_{\lambda\to 0}(S - s) = I^* - I_*.$$

Це співвідношення дає змогу висловити критерій існування інтеграла в наступній формі (порівняйте з розд. 297).

nebayduzhi.math@gmail.com

Для існування визначеного інтеграла необхідно і достатньо, щоб нижній і верхній інтеграли Дарбу були між собою рівні

$$I_* = I^*.$$

При виконанні рівності, очевидно, їх спільне значення і дає величину визначеного інтеграла.

Нова форма умови має деяку перевагу перед попередньою. Для того щоб переконатися в рівності інтегралів Дарбу, достатньо переконатися, що нерівність

$$S - s < \varepsilon$$

виконується при довільному ε **хоча б для однієї** пари сум S та s. Справді, використовуючи (296.1), матимемо

$$0 \leqslant I^* - I_* < \varepsilon,$$

звідки, зважаючи на довільність ε, і випливає необхідна рівність.

Легко здогадатися, як відповідно до цього може бути полегшена і умова існування визначеного інтеграла, яка була наведена у попередньому розділі (теор. 300.1).

9.2. Властивості визначених інтегралів

302. Інтеграл по орієнтованому проміжку

Досі, говорячи про "визначений інтеграл на проміжку від a до b", ми завжди мали на увазі, що $a < b$. Усунемо тепер це обмеження.

З цією метою ми передусім введемо поняття **орієнтованого** проміжку. ***Орієнтованим*** *проміжком* $[a, b]$ *(де може бути і* $a < b$*, і* $a > b$*) ми будемо називати множину значень* x*, що задовольняють нерівності, відповідно,*

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{або} \quad a \geqslant x \geqslant b$$

і ***розташованих*** *або* ***упорядкованих*** *від* a *до* b*, тобто у порядку зростання, якщо* $a < b$*, або спадання, якщо* $a > b$. Отже, ми розрізняємо проміжки $[a, b]$ і $[b, a]$: збігаючись за своїм складом (як числові множини), вони відрізняються за **напрямком**.

Те означення інтеграла, яке було наведено у розд. 295, стосується **орієнтованого** проміжку $[a, b]$, але лише для випадку, коли $a < b$.

Звернемося до означення інтеграла на орієнтованому проміжку $[a, b]$, припускаючи, що $a > b$. Можна повторити для цього випадку звичайний процес ділення проміжку вставленням точок поділу, що йдуть у **напрямку** від a до b:

$$a = x_0 > x_1 > ... > x_i > x_{i+1} > ... > x_n = b.$$

Вибравши в кожному частковому проміжку $[x_i,\ x_{i+1}]$ по точці ξ_i, так що $x_i \geqslant \xi_i \geqslant x_{i+1}$, складемо **інтегральну суму**

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

де цього разу всі $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i < 0$. Нарешті, границя цієї суми при $\lambda = max|\Delta x_i| \to 0$ і приведе нас до поняття інтеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma.$$

Якщо для проміжків $[a, b]$ та $[b, a]$ (де $a \geqslant b$) взяти ті ж точки поділу і ті ж точки ξ, то відповідні їм інтегральні суми будуть відрізнятися лише **знаками**. Звідси, переходячи до границь, отримуємо наступне твердження.

Властивість 302.1. *Якщо* $f(x)$ *інтегровна на проміжку* $[b, a]$*, то вона інтегровна і на проміжку* $[a, b]$*, причому*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Втім, можна було б саме цю рівність прийняти за **означення** інтеграла $\int\limits_a^b$ при $a > b$, припускаючи, що інтеграл $\int\limits_b^a$ існує.

Зауважимо ще, що **умовилися** вважати

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

303. Властивості, що виражаються рівностями

Вкажемо властивості визначених інтегралів, що виражаються **рівностями**.

(Тут і далі, якщо йдеться про інтеграл $\int\limits_a^b$, ми вважаємо (за відсутності застереження) обидва випадки: $a < b$ і $b < a$.)

Властивість 303.1. *Нехай $f(x)$ інтегровна на найбільшому з проміжків $[a, b]$, $[a, c]$ і $[c, b]$. Тоді вона інтегровна на двох інших, і*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$

хоч би яке було взаємне розташування точок a, b, c.

(Натомість можна було б припустити, що функція $f(x)$ інтегровна на кожному з двох менших проміжків: тоді вона була б інтегровна і в більшому.)

Доведення. Нехай спочатку, $a < c < b$ і функція інтегровна на проміжку $[a, b]$.

Те, що функція інтегровна на проміжках $[a, c]$ і $[c, b]$, випливає з теор. 299.3.

Розглянемо розбиття проміжку $[a, b]$ на частини, причому точку c вважатимемо однією з точок поділу. Склавши інтегральну суму, матимемо (зміст позначень ясний)

$$\sum_a^b \Delta x = \sum_a^c \Delta x + \sum_c^b \Delta x.$$

Переходячи до границі при $\lambda \to 0$, ми й отримаємо необхідну рівність.

Інші випадки розташування точок a, b, c зводяться до цього. Нехай, наприклад, $b < a < c$ і функція $f(x)$ інтегровна на проміжку $[c, b]$, або (що те саме через вл. 302.1) на проміжку $[b, c]$. В цьому випадку, за доведеним, матимемо

$$\int\limits_b^c f(x)\,dx = \int\limits_b^a f(x)\,dx + \int\limits_a^c f(x)\,dx,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

звідки, переносячи перший і другий інтеграли з однієї частини рівності в іншу і переставивши межі (на підставі вл. 302.1), знову прийдемо до колишнього співвідношення. $\square$

Властивість 303.2. *Якщо $f(x)$ інтегровна на проміжку $[a, b]$, то і $kf(x)$ ($k = \text{const}$) також інтегровна на цьому проміжку, причому*

$$\int\limits_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Властивість 303.3. *Якщо $f(x)$ і $g(x)$ — обидві інтегровні на проміжку $[a, b]$, то і $f(x) \pm g(x)$ також інтегровна на цьому проміжку, причому*

$$\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доведення. В обох випадках доведення будується аналогічно, виходячи з інтегральних сум та переходу до границі. Проведемо його, наприклад, для останнього твердження.

Розіб'ємо проміжок $[a, b]$ довільно на частини і складемо інтегральні суми для всіх трьох інтегралів. При цьому точки ξ_i в кожному частковому проміжку вибираємо довільно, але для всіх сум однакові; тоді матимемо

$$\sum [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Нехай тепер $\lambda \to 0$; оскільки для обох сум праворуч границі існують, то існує границя і для суми зліва, чим доводиться інтегровність функції $f(x) \pm g(x)$. Переходячи в попередній рівності до границь, приходимо до необхідного співвідношення. $\square$

Зауваження. Звертаємо увагу на те, що при доведенні двох останніх тверджень не було потреби спиратися на теор. 299.1 і теор. 299.1: інтегровність функцій $kf(x)$ та $f(x) \pm g(x)$ була доведена безпосередньо переходом до границі.

304. Властивості, що виражаються нерівностями

Досі ми розглядали властивості інтегралів, що виражаються рівностями; перейдемо тепер до таких, що виражаються **нерівностями**.

Властивість 304.1. *Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a, b]$,* ***невід'ємна*** *і $a < b$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Доведення очевидно.

Складніше довести більш точний результат.

Властивість 304.2. *Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, набуває додатних значень і $a<b$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Доведення. Доведення проведемо від протилежного. Припустимо, що

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Тоді при $\lambda \to 0$ верхня сума Дарбу S також прямує до нуля (297.2). Взявши довільне $\varepsilon_1 > 0$, можемо зробити цю суму менш ніж $\varepsilon_1(b-a)$. При цьому хоча б одна із верхніх меж M_i виявиться менше за ε_1, іншими словами, знайдеться в $[a,b]$ така частина $[a_1,b_1]$, в межах якої всі значення $f(x)<\varepsilon_1$.

Далі, використовуючи теор. 33.1, маємо

$$\int\limits_a^b = \int\limits_a^{a_1} + \int\limits_{a_1}^{b_1} + \int\limits_{b_1}^{b} \quad \text{і, оскільки} \quad \int\limits_a^{a_1} \geqslant 0 \quad \text{і} \quad \int\limits_{b_1}^{b} \geqslant 0, \quad \text{то} \quad 0 \leqslant \int\limits_{a_1}^{b_1} \leqslant \int\limits_a^b = 0 \quad \text{і} \quad \int\limits_{a_1}^{b_1} = 0.$$

Оскільки

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} = 0,$$

то, аналогічно, з $[a_1,b_1]$ виділимо частину $[a_2,b_2]$, в межах якої $f(x)<\varepsilon_2$, де ε_2 — будь-яке додатне число менше за ε_1, і так далі.

Взявши послідовність додатних чисел $\varepsilon_k \to 0$, можна визначити таку послідовність вкладених один в одного проміжків $[a_k,b_k]$ (їх довжини прямують до 0), що

$$0 < f(x) < \varepsilon_k, \quad \text{якщо} \quad a_k \leqslant x \leqslant b_k \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Тоді, за лем. 38.1, існує точка c, загальна для всіх цих вкладених проміжків; для неї має бути

$$0 < f(c) < \varepsilon_k \quad \text{при} \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,$$

що неможливо, бо $\varepsilon_k \to 0$. Теорема доведена. □

Простим наслідком звідси (і з вл. 303.3) є

Властивість 304.3. *Якщо дві функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на проміжку $[a,b]$ і завжди $f(x) \leqslant g(x)$ (або $f(x) < g(x)$), то і*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx \quad \textit{або} \quad \left(\int\limits_a^b f(x)\,dx < \int\limits_a^b g(x)\,dx\right)$$

(припускаємо, що $a < b$).

Доведення. Потрібно лише застосувати попередню властивість до різниці $f(x)-g(x)$. $\square$

Так само легко виходить наступна властивість.

Властивість 304.4. *Нехай функція $f(x)$ інтегровна на проміжку $[a,b]$ і $a < b$, тоді маємо нерівність*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доведення. Існування останнього інтеграла випливає з теор. 299.1. Потім застосовуємо вл. 304.3 до функцій

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|.$$

Втім, нерівність легко отримати і безпосередньо, виходячи з інтегральних сум

$$\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum |f(\xi_i)|\Delta x_i$$

та переходячи до границь (за умовою $a < b$, а тому усі $\Delta x_i > 0$). $\square$

Властивість 304.5. *Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, де $a < b$, і якщо на всьому цьому проміжку справедлива нерівність*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Доведення. Можна застосувати вл. 304.3 до функцій m, $f(x)$ і M, але простіше безпосередньо скористатися очевидними нерівностями

$$m\sum \Delta x_i \leqslant \sum f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant M\sum \Delta x_i$$

та перейти до границі (за умовою $a < b$, а тому усі $\Delta x_i > 0$). $\square$

Доведеним співвідношенням можна надати зручнішу форму **рівності**, звільняючись водночас від обмеження $a < b$.

Властивість 304.6 (Теорема про середнє значення)**.** *Нехай* $f(x)$ *інтегровна на* $[a, b]$ $(a \lesseqgtr b)$ *і нехай на всьому цьому проміжку* $m \leqslant f(x) \leqslant M$*; тоді*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a),$$

де $m \leqslant \mu \leqslant M$*.*

Доведення. Якщо $a < b$, то застосовуємо вл. 304.5 матимемо

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

звідки

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Візьмемо

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

і отримуємо необхідну рівність.

Для випадку, коли $a > b$, повторюємо ті ж міркування для $\int\limits_b^a$, а потім, переставивши межі, приходимо до колишньої формули. □

Щойно доведена рівність виглядає особливо просто, коли **функція** $f(x)$ **неперервна**. Справді, якщо вважати, що m і M є найменше та найбільше значення функції (вони існують за теоремою Ваярштрасса теор. 85.1), то функція $f(x)$ набуває проміжного значення μ у деякій точці з проміжку $[a, b]$ (за теоремою Бользано – Коші теор. 82.1). Отже,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c),$$

де c лежить в $[a, b]$.

Геометричний зміст останньої формули зрозумілий. Нехай $f(x) \geqslant 0$. Розглянемо криволінійну фігуру $ABCD$ (рис. 304.1) під кривою $y = f(x)$. Тоді площа криволінійної фігури (яка виражається визначеним інтегралом) дорівнює площі прямокутника з тією самою основою і висотою, яка дорівнює деякій середній ординаті LM.

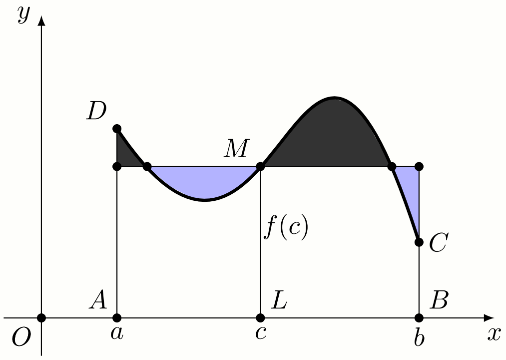


Рис. 304.1

Властивість 304.7 (Узагальнена теорема про середнє значення)**.** *Нехай:*

1) $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на проміжку $[a,b]$;

2) $m \leqslant f(x) \leqslant M$;

3) $g(x)$ на всьому проміжку не змінює знака: $g(x) \geqslant 0$ (або $g(x) \leqslant 0$).

Тоді

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx,$$

де $m \leqslant \mu \leqslant M$.

(Саме існування інтеграла від добутку $f(x)g(x)$ випливає з теор. 299.2. Втім, можна було б замість інтегровності функції $f(x)$ безпосередньо припустити інтегровність самого добутку $f(x)g(x)$.)

Доведення. Нехай спочатку $g(x) \geqslant 0$ та $a < b$; тоді маємо

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Використаємо властивості інтеграла вл. 304.3 та вл. 303.2, отримуємо

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Застосуємо вл. 304.1 до $g(x)$, маємо

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0.$$

Якщо цій інтеграл дорівнює нулю, то з попередніх нерівностей ясно, що одночасно також і

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = 0;$$

і твердження теореми стає очевидним. Якщо ж інтеграл більше нуля, то поділимо на нього всі частини отриманої вище подвійної нерівності. Візьмемо

$$\mu = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx}$$

і прийдемо до необхідного результату.

Від випадку $a < b$ легко перейти до випадку $a > b$, так само, як і від припущення $g(x) \geqslant 0$ — до припущення $g(x) \leqslant 0$: перестановка меж або зміна знака $g(x)$ не змінюють рівності. □

Якщо $f(x)$ **неперервна**, то ця формула може бути записана так:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

де c міститься в $[a, b]$.

305. Визначений інтеграл як функція верхньої межі

Якщо функція $f(x)$ інтегровна проміжку $[a, b]$ $(a \gtrless b)$, то (теор. 299.3) вона інтегровна і на проміжку $[a, x]$, де x є будь-яке значення з $[a, b]$. Замінивши межу b визначеного інтеграла змінною x, отримаємо вираз

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt, \tag{305.1}$$

який, очевидно, є функцією від x. (Змінну інтегрування ми позначили тут через t, щоб не змішувати її з верхньою межею x; але зрозуміло, що така зміна в **позначеннях** не змінює значення інтеграла.) Ця функція має наступні властивості.

Властивість 305.1. *Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a, b]$, то $\Phi(x)$ буде неперервною функцією від x на цьому проміжку.*

nebayduzhi.math@gmail.com

Доведення. Надавши x довільний приріст $\Delta x = h$ (так щоб $x+h$ не виходило за межі нашого проміжку), отримаємо **нове** значення функції (305.1)

$$\Phi(x+h) = \int\limits_a^{x+h} f(t)\,dt = \int\limits_a^x + \int\limits_x^{x+h}$$

(вл. 303.1), так що

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int\limits_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Застосуємо до цього інтеграла теорему про середнє значення вл. 304.6

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \mu \cdot h; \tag{305.2}$$

тут μ лежить між точними межами m' та M' функції $f(x)$ на проміжку $[x,\ x+h]$, а отже, між її межами m і M на основному проміжку $[a,b]$. (Нагадаємо, що інтегровна функція **обмежена** (розд. 295)).

Якщо спрямувати тепер h до нуля, то, очевидно,

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) \to 0 \quad \text{або} \quad \Phi(x+h) \to \Phi(x),$$

що і доводить неперервність функції $\Phi(x)$. ☐

Властивість 305.2. *Якщо функція $f(t)$* ***неперервна*** *в точці $t = x$, то в цій точці функція $\Phi(x)$ має похідну, і вона дорівнює $f(x)$*

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Доведення. Справді, з (305.2) маємо

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \mu, \quad \text{де} \quad m' \leqslant \mu \leqslant M'.$$

Але, зважаючи на неперервність функції (305.1) при $t = x$, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при $|h| < \delta$

$$f(x) - \varepsilon < f(x) < f(x) + \varepsilon$$

для всіх значень t на проміжку $[x,\ x+h]$. У такому разі виконуються нерівності

$$f(x) - \varepsilon \leqslant m' \leqslant \mu \leqslant M' \leqslant f(x) + \varepsilon,$$

так що

$$|\mu - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Тепер видно, що

$$\Phi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \mu = f(x),$$

що й потрібно було довести. ☐

Ми дійшли висновку, який має величезне принципове та прикладне значення. Якщо функцію $f(x)$ **неперервна** на всьому проміжку $[a,b]$, то вона інтегровна (теор. 298.1), і попереднє твердження виявляється придатним до **будь-якої** точки x цього проміжку: *похідна від інтеграла* (305.1) *за змінною верхньою межею x скрізь дорівнює значенню $f(x)$ підінтегральної функції на цьому проміжку.*

Іншими словами, для ***неперервної*** *на проміжку $[a,b]$ функції $f(x)$ завжди існує первісна, прикладом її є визначений інтеграл* (305.1) *зі змінною верхньою межею.*

Отже, ми, нарешті, встановили ту пропозицію, про яку згадували ще у розд. 264.

Зокрема, ми тепер можемо записати функції **F** та **E** Льожондра (розд. 293) у вигляді **визначених інтегралів**

$$\mathbf{F}(k,\varphi)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\qquad \mathbf{E}(k,\varphi)=\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta.$$

За доведеним щойно, це будуть первісні функції, відповідно, для функцій

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\qquad \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$$

і до того дорівнюють 0 при $\varphi=0$.

Зауваження. Твердження, доведені в цьому розділі, легко поширюються на випадок інтеграла зі змінною **нижньою** межею, оскільки (вл. 302.1)

$$\int\limits_x^b f(t)\,dt=-\int\limits_b^x f(t)\,dt.$$

Похідна від цього інтеграла за x, очевидно, дорівнює $-f(x)$ (якщо $f(t)$ неперервна в точці $t=x$).

306. Друга теорема про середнє значення

На закінчення доведемо ще одну теорему, що стосується інтеграла від добутку двох функцій

$$I=\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Її представляють в різних формах. Почнемо з доведення наступного твердження.

Властивість 306.1. *Якщо на проміжку $[a,b]$ $(a<b)$ функція $f(x)$ монотонно спадає (хоча б у широкому сенсі) і невід'ємна, а $g(x)$ інтегровна, то*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx=f(a)\int\limits_a^{\xi} g(x)\,dx,\tag{306.1}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

де ξ є деяке значення з проміжку $[a, b]$.

Доведення. Передусім зауважимо, що функція $f(x)$ інтегровна (теор. 298.3), а тоді і добуток $f(x)g(x)$ — інтегровна функція (теор. 299.2).

Розбивши проміжок $[a, b]$ довільним чином на частини за допомогою точок поділу x_i $(i = 0,\ 1,\ \dots,\ n)$, представимо інтеграл I у вигляді

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i) + f(x_i)]g(x)\,dx =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\,dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)]g(x)\,dx = \sigma + \varrho.$$

Якщо верхню межу для функції $|g(x)|$ позначити L, а коливання функції $f(x)$ на i-му проміжку $[x_i,\ x_{i+1}]$ довжини Δx_i позначити ω_i (як зазвичай), то, очевидно ((17.1), вл. 304.4, вл. 304.7),

$$|\varrho| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)]g(x)\,dx \right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)]g(x)\,dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)||g(x)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant L \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

Оскільки функція $f(x)$ інтегровна, то $\varrho \to 0$ при $\lambda \to 0$, так що

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma.$$

Введемо тепер функцію

$$G(x) = \int\limits_a^x g(t)\,dt;$$

очевидно,

$$G(a) = \int\limits_a^a = 0,$$

$$G(x_{i+1}) = \int\limits_a^{x_{i+1}} g(t)\,dt = \int\limits_a^{x_i} + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} = G(x_i) + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(t)\,dt.$$

Тепер перепишемо суму σ так:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)[G(x_{i+1}) - G(x_i)]$$

Нарешті, розкриваючи дужки та інакше групуючи доданки, отримаємо

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)[f(x_{i-1}) - f(x_i)] + G(b)f(x_{n-1}) - G(a)f(a),$$

де $G(a) = 0$.

Неперервна функція $G(x)$ (вл. 305.1), при зміні x на проміжку $[a, b]$, набуває як найменшого значення m, так і найбільшого значення M (теор. 85.1). Оскільки всі множники

$$f(x_{i-1}) - f(x_i) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1) \quad \text{і} \quad f(x_{n-1})$$

за умовою, невід'ємні, то:

$$mf(a) \leqslant \sigma \leqslant Mf(a).$$

Оскільки інтеграл I є границя суми σ, то

$$mf(a) \leqslant I \leqslant Mf(a)$$

або інакше

$$I = \mu f(a),$$

де $m \leqslant \mu \leqslant M$. Але, оскільки функція $G(x)$ неперервна на проміжку $[a, b]$, то знайдеться таке значення ξ, що $\mu = G(\xi)$ (теор. 82.1). Тоді

$$I = f(a)G(\xi),$$

що рівносильне формулі (306.1). □

Аналогічно, *якщо функція $f(x)$, залишаючись невід'ємною, монотонно зростає, то маємо таку формулу*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx,$$

де $a \leqslant \xi \leqslant b$. Ці формули зазвичай називають *формулами Бонне (фр. Pierre-Ossian Bonnet, Оссиáн Бонне́)*.

Властивість 306.2 (2-а теорема про середнє значення)**.** *Якщо зберегти лише припущення про монотонність функції $f(x)$, не вимагаючи її невід'ємності, то можна стверджувати:*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b)\int\limits_{\xi}^{b} g(x)\,dx \quad (a \leqslant \xi \leqslant b) \tag{306.2}$$

Доведення. Справді, нехай, наприклад, функція $f(x)$ монотонно спадає; тоді, очевидно, різниця $f(x) - f(b) \geqslant 0$, і варто тільки до цієї функції застосувати формулу (306.1), щоб після легких перетворень отримати (306.2). □

Доведена теорема і має назву *другої теореми про середнє значення* (порівняйте з вл. 304.7).

Наступне просте зауваження дає змогу надати їй більш загальну форму. Якщо змінити значення функції $f(x)$ у точках a і b, взявши замість них будь-які числа A та B за умови, що

$$A \geqslant f(f+0) \quad \text{і} \quad B \leqslant f(b-0) \quad (\text{якщо } f \text{ спадає}),$$

$$A \leqslant f(f+0) \quad \text{і} \quad B \geqslant f(b-0) \quad (\text{якщо } f \text{ зростає}),$$

то не тільки значення інтеграла I не зміниться, а й збережеться монотонність функції $f(x)$, так що за зразком (306.2) можна стверджувати

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = A\int\limits_a^{\xi} g(x)\,dx + B\int\limits_{\xi}^{b} g(x)\,dx \quad (a \leqslant \xi \leqslant b) \tag{306.3}$$

Зокрема,

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a+0)\int\limits_a^{\xi} g(x)\,dx + f(b-0)\int\limits_{\xi}^{b} g(x)\,dx \quad (a \leqslant \xi \leqslant b) \tag{306.4}$$

Тут, як і вище, ξ означає деяке число з проміжку $[a, b]$, але воно, взагалі кажучи, **залежить від вибору чисел A та B.**

9.3. Обчислення і перетворення визначених інтегралів

307. Обчислення за допомогою інтегральних сум

Наведемо ряд прикладів обчислення визначеного інтеграла, безпосередньо як межі інтегральних сум — відповідно до його означення. Знаючи наперед, що інтеграл для неперервної функції існує, для **обчислення** його ми можемо вибирати розбиття проміжку та точки ξ, керуючись виключно міркуваннями зручності.

1)

$$\int\limits_a^b x^k dx,$$

де a, b — довільні дійсні числа, а k — натуральне число.

Спочатку обчислимо інтеграл

$$\int\limits_0^a x^k dx \quad (a \neq 0).$$

Проміжок $[0, a]$ розіб'ємо на n **рівних** частин, а на кожному частковому проміжку функцію x^k обчислимо для його правого кінця, якщо $a > 0$, і для лівого — при $a < 0$. Тоді інтегральна сума

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n} a\right)^k \cdot \frac{a}{n} = a^{k+1} \cdot \frac{1^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$$

і, якщо врахувати пр. 33.14,

$$\int\limits_0^a x^k dx = \lim_{n \to \infty} \sigma_n = \frac{a^{k+1}}{k+1}.$$

Звідси вже нескладно отримати загальну формулу

$$\int\limits_a^b x^k dx = \int\limits_0^b - \int\limits_0^a = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

2)

$$\int\limits_a^b x^\mu dx,$$

де $b > a > 0$, μ — довільне дійсне число.

На цей раз ми розіб'ємо проміжок $[a, b]$ на **нерівні** частини, а саме між a і b вставимо $n-1$ середніх геометричних значень. Іншими словами, поклавши

$$q = q_n = \sqrt[n]{\frac{b}{a}},$$

розглянемо ряд чисел

$$a,\ aq,\ \dots,\ aq^i,\ \dots,\ aq^n = b.$$

Зауважимо, що при $n \to \infty$ $q = q_n \to 1$, різниці $aq^{i+1} - aq^i$ усі менше величини $b(q-1) \to 0$.

Обчислюючи функцію для **лівих** кінців, маємо

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left(aq^i\right)^\mu \left(aq^{i+1} - aq^i\right) = a^{\mu+1}(q-1) \sum_{i=0}^{n-1} \left(q^{\mu+1}\right)^i.$$

Нехай тепер $\mu \neq -1$, тоді

$$\sigma_n = a^{n+1}(q-1) \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\mu+1} - 1}{q^{\mu+1} - 1} = \left(b^{\mu+1} - a^{\mu+1}\right) \frac{q-1}{q^{\mu+1}-1}.$$

Тепер, за допомогою (77.3), перейдемо до границі і отримаємо

$$\int_a^b x^\mu dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \left(b^{\mu+1} - a^{\mu+1}\right) \lim_{n\to\infty} \frac{q-1}{q^{\mu+1}-1} = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

У випадку, коли $\mu = -1$, використаємо (77.2) і матимемо

$$\sigma_n = n(q_n - 1) = n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right);$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) = \ln b - \ln a.$$

3)

$$\int_a^b \sin x\, dx.$$

Розділимо проміжок $[a, b]$ на n рівних частин довжини $h = \dfrac{b-a}{n}$. Функцію $\sin x$ обчислимо для **правих** кінців, якщо $a < b$, і для **лівих**, якщо $a > b$. Запишемо інтегральну суму

$$\sigma_n = h \sum_{i=1}^{n} \sin(a + ih).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Знайдемо стислий вираз для суми праворуч. Помноживши та розділивши її на $2\sin\frac{h}{2}$, а потім представляючи всі складові у вигляді різниці косинусів, легко отримаємо

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sin(a+ih) &= \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n}2\sin(a+ih)\sin\frac{h}{2} = \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left[\cos\left(a+\frac{2i-1}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{2i+1}{2}h\right)\right] = \\ &= \frac{\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)}{2\sin\frac{h}{2}}.\end{aligned} \tag{307.1}$$

Отже,

$$\sigma_n = \frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right].$$

Оскільки $h\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\int\limits_a^b \sin x\,dx = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(b+\frac{1}{2}h\right)\right] = \cos a-\cos b.$$

Аналогічно, використовуючи елементарні формули і замінюючи a на $a+\frac{\pi}{2}$ в (307.1), маємо

$$\sum_{i=1}^{n}\cos(a+ih) = \frac{\sin\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)-\sin\left(a+\frac{1}{2}h\right)}{2\sin\frac{h}{2}}, \tag{307.2}$$

і далі:

$$\int\limits_a^b \cos x\,dx = \sin b-\sin a.$$

4) Щоб дати менш тривіальний приклад, розглянемо інтеграл

$$\int\limits_0^\pi \ln(1-2r\cos x+r^2)\,dx;$$

він зв'язується з ім'ям Пуассона (фр. Siméon Denis Poisson, Сімео́н Пуассо́н). Оскільки

$$(1-|r|)^2 \leqslant 1-2r\cos x+r^2,$$

то, припускаючи $|r|\neq 1$, бачимо, що підінтегральна функція неперервна і інтеграл існує.

Розділивши проміжок $[0, \pi]$ на n рівних частин, маємо

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - 2r\cos k\frac{\pi}{n} + r^2\right) = \frac{\pi}{n} \ln\left[(1+r)^2 \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2r\cos k\frac{\pi}{n} + r^2\right)\right],$$

де $\prod$ є знак **добутку**.

Враховуючи n різних комплексних значень для кореня степеня n з одиниці, $\sqrt[n]{1}$ (розд. 453), (453.1):

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0,\ \ldots,\ n-1),$$

де i є уявна одиниця, $\sqrt{-1}$, з алгебри маємо такий розклад $z^n - 1$ на лінійні множники:

$$\begin{aligned} z^n - 1 &= (z - z_0)\cdot \ldots \cdot (z - z_{n-1}) = \\ &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(z - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

Для $z^{2n} - 1$ маємо такий розклад на лінійні множники:

$$z^{2n} - 1 = \prod_{k=-n}^{n-1}\left(z - \cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n}\right).$$

Якщо виділити множники $z \pm 1$ (що відповідають $k = -n$ і $k = 0$) і зібрати разом спряжені множники, ми і отримаємо, що

$$\begin{aligned} z^{2n} - 1 &= (z^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z - \cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\left(z - \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right) = \\ &= (z^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - 2z\cos\frac{k\pi}{n} + z^2\right). \end{aligned} \tag{307.3}$$

Використаємо цю тотожність для σ_n:

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{r+1}{r-1}(r^{2n} - 1)\right].$$

Якщо $|r| < 1$, тоді $r^{2n} \to 0$ і

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx = \lim \sigma_n = 0.$$

Якщо $|r| > 1$, тоді перепишемо σ_n так:

$$\sigma_n = \frac{\pi}{n} \ln \left[\frac{r+1}{r-1} \frac{r^{2n}-1}{r^{2n}} \right] + 2\pi \ln |r|,$$

і отримаємо

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\, dx = 2\pi \ln |r|.$$

Читач бачить, що прямий спосіб обчислення визначеного інтеграла як границі сум вимагає навіть у простих випадках значних зусиль; ним користуються рідко. Найбільш практичним є спосіб, який ми викладемо в наступному розділі.

308. Основна формула інтегрального числення

Ми бачили у розд. 305, що для неперервної на проміжку $[a, b]$ функції $f(x)$ інтеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

виявляється **первісною** функцією. Якщо $F(x)$ є **будь-яка** первісна для $f(x)$ функція (наприклад, знайдена методами викладеними в 8.1-8.4), то (розд. 263)

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Сталу C легко визначити, поклавши тут $x = a$, бо $\Phi(a) = 0$; матимемо

$$0 = \Phi(a) = F(a) + C, \quad \text{звідки} \quad C = -F(a).$$

Остаточно

$$\Phi(x) = F(x) - F(a).$$

Зокрема, при $x = b$ отримаємо

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \tag{308.1}$$

Це — **основна формула інтегрального числення.**

Цю формулу також називають *формулою Ньютена – Ляйбніца.* Читач бачить, що міркування тут цілком аналогічні до тих, якими ми користувалися в розд. 264 при обчисленні функції $P(x)$ та площі P. Сама формула (308.1) легко могла бути отримана зіставленням результатів розд. 264 та розд. 294.

Отже, *значення* ***визначеного*** *інтеграла виражається різницею двох значень, при* $x = b$ *і* $x = a$ *будь-якої* ***первісної*** *функції.*

Якщо застосувати до інтеграла теорему про середнє вл. 304.6 і згадати, що $f(x) = F'(x)$, то отримаємо

$$F(b) - F(a) = f(c) \cdot (b-a) = F'(c) \cdot (b-a) \quad (a \leqslant c \leqslant b);$$

легко побачити у цьому виразі формулу Лаґранжа (112.1) для функції $F(x)$. Отже, за допомогою основної формули (308.1) отримуємо зв'язок між теоремами про середнє у диференціальному та інтегральному численні.

Формула (308.1) дає ефективний і простий спосіб для обчислення визначеного інтеграла від неперервної функції $f(x)$. Адже для ряду простих класів таких функцій ми вміємо виражати первісну в скінченному вигляді через елементарні функції. У цих випадках визначений інтеграл обчислюється безпосередньо за основною формулою. Зауважимо лише, що різницю праворуч зазвичай зображають символом $F(x)\Big|_a^b$ (“**подвійна підстановка від** a **до** b”) і формулу пишуть у вигляді

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{308.2}$$

Так, наприклад, одразу знаходимо:

1) $$\int\limits_a^b x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\Bigg|_a^b = \frac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1} \quad (\mu \neq -1),$$

2) $$\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a \quad (a > 0,\ b > 0),$$

3) $$\int\limits_a^b \sin x\,dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b,$$

$$\int\limits_a^b \cos x\,dx = \sin x\Big|_a^b = \sin b - \sin a$$

— результати, не без труднощів отримані нами в попередньому розділі (порівняйте).

Пр. 307.4 вже не може бути обчислений так просто, бо відповідний невизначений інтеграл у скінченному вигляді не виражається.

nebayduzhi.math@gmail.com

309. Приклади

Наведемо подальші приклади використання формули (308.1).

4)

а) $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (n \neq m);$$

б) $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2mx}{2m}\right]\Bigg|_{-\pi}^{+\pi} = \pi$$ (дивіться пр. 267.17, пр. 267.18);

в) $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0;$$

г) $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m. \end{cases}$$

5) Знайти значення інтегралів (m, n — натуральні числа)

а) $$\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x}\,dx;$$

б) $$\int\limits_{0}^{\pi/2} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx.$$

Вказівка.

а) З формули (307.2), вважаючи в ній $a = 0$, $h = 2x$ і $n = m - 1$, можна вивести, що

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} \cos 2ix = \frac{\sin(2m-1)x}{2\sin x}\,.$$

Звідси, оскільки окремі доданки легко інтегруються за формулою (308.1), відразу випливає

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin(2m-1)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

б) З формули (307.1), вважаючи $a = -x$, $h = 2x$, знайдемо

$$\sum_{m=1}^{n} \sin(2m-1)x = \frac{1-\cos 2nx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\,.$$

Звідси, якщо використати попередній результат,

$$\int\limits_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = n\frac{\pi}{2}\,.$$

6) Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}}\,,$$

де $0<\alpha<1,\ 0<\beta<1$.

Якщо у формулі (283.4)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|ax+\frac{b}{2}+\sqrt{a}\,\sqrt{ax^2+bx+c}\right| + C$$

ототожнити

$$ax^2+bx+c = (1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2),$$

то, диференціюючи, знайдемо

$$ax+\frac{b}{2} = -\alpha(1-2\beta x+\beta^2)-\beta(1-2\alpha x+\alpha^2);$$

$$a = 2\alpha\beta+2\alpha\beta = 4\alpha\beta.$$

Звідси легко вивести, що при $x=1$ вираз, що стоїть під знаком логарифма отримає значення

$$\begin{aligned}
&-\alpha(1-2\beta x+\beta^2)-\beta(1-2\alpha x+\alpha^2)+\sqrt{4\alpha\beta}\sqrt{(1-2\alpha x+\alpha^2)(1-2\beta x+\beta^2)} = \\
&= -\alpha(1-\beta)^2-\beta(1-\alpha)^2+2\sqrt{\alpha\beta}\,(1-\alpha)(1-\beta) = \\
&= -\left[\sqrt{\alpha}\,(1-\beta)-\sqrt{\beta}\,(1-\alpha)\right]^2 = \\
&= -\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2\left(1+\sqrt{\alpha\beta}\right)^2,
\end{aligned}$$

а при $x=-1$ значення

$$-\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2\left(1-\sqrt{\alpha\beta}\right)^2.$$

Отже, остаточно для шуканого інтеграла випливає простий вираз

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}\,,$$

який залежить тільки від добутку $\alpha\beta$. (Наші викладки бездоганні лише при $\alpha \neq \beta$, але легко бачити, що результат справедливий і при $\alpha = \beta$).

Зауважимо, що при виведенні основної формули нам насправді не було потреби вимагати, щоб функція $F(x)$ була для $f(x)$ первісною на **замкненому** проміжку $[a, b]$. Спираючись на наслідок насл. 131.1.1, досить було б припустити це для **відкритого** проміжку (a, b), *аби тільки і на кінцях його функція* $F(x)$ *зберігала неперервність.*

7) Тому, наприклад, ми маємо право писати розд. 268

$$\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{\pi a^2}{2},$$

хоча при $x = \pm a$ питання про похідну знайденої первісної ще вимагало б дослідження.

8) Певні труднощі трапляються і при обчисленні інтеграла

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx \quad (0 < r < 1),$$

оскільки знайдена в пр. 288.13 первісна

$$F(x) = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right)$$

не визначена при $x = \pm\pi$. Однак існують, очевидно, границі

$$\lim_{x\to-\pi+0} F(x) = -\pi \qquad \lim_{x\to\pi-0} F(x) = \pi,$$

і якщо, як завжди, покласти $F(-\pi)$ і $F(\pi)$ рівними саме цим границям, то функція $F(x)$ буде не тільки визначена, але й неперервна на кінцях проміжку. Тому все ж таки маємо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx = F(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = F(\pi) - F(-\pi) = 2\pi.$$

9) Аналогічно обчислюється і інтеграл

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{A\cos^2 x + 2B\cos x\sin x + C\sin^2 x} \quad (AC - B^2 > 0).$$

Ми вже мали (пр. 288.10) вираз первісної

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{AC - B^2}} \operatorname{arctg} \frac{C \operatorname{tg} x + B}{\sqrt{AC - B^2}} ,$$

визначений при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Звідси

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{A \cos^2 x + 2B \cos x \sin x + C \sin^2 x} = F(x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}+0}^{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}} ,$$

причому значки $-\frac{\pi}{2}+0$, $\frac{\pi}{2}-0$ символізують необхідність брати відповідні **граничні** значення функції $F(x)$.

10) Якщо під час обчислення інтеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}\, dx$$

виходити з формально обчисленої первісної

$$F(x) = -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{3x(x^2-1)}{x^4 - 4x^2 + 1}$$

і підставити сюди $x = 0$ і $x = 1$, то для інтеграла вийде парадоксальне значення 0 (інтеграл від **додатної** функції не може мати нульове значення!).

Помилка в тому, що цей вираз має **стрибок** при $x = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = x_0$. Якщо окремо обчислювати інтеграли від 0 до x_0 і від x_0 до 1, то вийде правильний результат

$$\int\limits_0^1 = \Big|_0^{x_0-0} + \Big|_{x_0+0}^{1} = \frac{\pi}{3} .$$

11) Легко обчислити, за допомогою первісних, інтеграли

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2,$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} .$$

Якщо згадати про прямування до них відповідних інтегральних сум, то можна отримати, наприклад, такі граничні співвідношення:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{2n^2} \right) \cdot n = \frac{\pi}{4} .$$

310. Інший спосіб отримання основної формули

Спробуємо отримати тепер основну формулу (307.1) за більш загальних припущень. Нехай функція $f(x)$ **інтегровна** на проміжку $[a, b]$, а **неперервна** в $[a, b]$ функція $F(x)$ має похідну, що дорівнює $f(x)$

$$F'(x) = f(x) \tag{310.1}$$

всюди в (a, b) або навіть всюди, за винятком **скінченного** числа точок.

Розіб'ємо проміжок $[a, b]$ довільним чином на частини точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$

подбавши лише про те, щоб **серед них були всі ті точки, де не виконується** (310.1), якщо такі точки існують. Очевидно, матимемо

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)].$$

Застосуємо до кожної з різниць, що стоять під знаком суми, формулу скінченних приростів (умови її застосування виконані). Тоді отримаємо

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

де ξ_i є деяке певне (хоча нам не відоме) значення x між x_i та x_{i+1}. Оскільки для цього значення $F'(\xi_i) = f(\xi_i)$, то ми можемо написати

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Праворуч вийшла інтегральна сума σ для функції $f(x)$. Ми припустили, що для суми σ при $\lambda \to 0$ існує певна границя, яка не залежить від вибору чисел ξ_i. Отже, зокрема, наша сума, що зберігає (при вказаному виборі цих чисел) стале значення, також прямує до інтеграла, звідки і випливає, що

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

У попередньому розділі ми за допомогою основної формули обчислювали визначений інтеграл. Але вона може бути використана і в іншому напрямку. Замінивши в основній формулі b на x, а $f(x)$ на $F'(x)$, можна написати її у вигляді

$$F(x) = F(a) + \int\limits_a^x F'(t)\, dt.$$

Отже, за допомогою граничного процесу (бо визначений інтеграл є **границя**), за заданою похідною $F'(x)$ “відбудовується” первісна функція $F(x)$.

Втім, це виконується за припущенням, що похідна не лише обмежена, а й інтегровна відповідно до означення Рімана, що не завжди виконується.

311. Формули зведення

Ми бачили, що основна формула при сприятливих умовах відразу дає значення визначеного інтеграла. З іншого боку, з її допомогою різні **формули зведення** в теорії невизначених інтегралів перетворюються на аналогічні формули вже у визначених інтегралах, які зводять обчислення одного визначеного інтеграла до обчислення іншого (взагалі простішого).

Ми маємо на увазі насамперед формулу інтегрування частинами (270.1)

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

та її узагальнення (270.3), а також інші формули зведення ((271.1), (280.2) – (280.5), (287.2) – (287.5)), частково на ній заснованих. Їх загальна форма така:

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) - \int g(x)\,dx. \tag{311.1}$$

Якщо область застосування подібної формули є проміжок $[a, b]$, то їй у визначених інтегралах відповідає формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \varphi(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)\,dx. \tag{311.2}$$

При цьому функції f, g будемо вважати **неперервними**.

Для доведення позначимо останній інтеграл у формулі (311.1) через $\Phi(x)$. Тоді

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = [\varphi(x) - \Phi(x)]\Big|_a^b = \varphi(x)\Big|_a^b - \Phi(x)\Big|_a^b.$$

Оскільки водночас

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b,$$

то ми і приходимо до нашої формули.

Зокрема, **формула інтегрування частинами** набуває вигляду

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du, \tag{311.3}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

а **узагальнена формула інтегрування частинами** перейде в таку:

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = \left[uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \dots + (-1)^n u^{(n)}v\right]\Big|_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,dx; \qquad (311.4)$$

при цьому, як і раніше, функції u, v, і всі їх похідні, що зустрічаються, припускаються **неперервними**.

Формула (311.2), що встановлює співвідношення між **числами**, принципово простіше формули (311.1), у якій беруть участь **функції**; вона особливо вигідна, якщо подвійна підстановка (розд. 308) дорівнює нулю.

312. Приклади

1) Обчислити інтеграли

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx, \quad J'_m = \int_0^{\pi/2} \cos^m x\,dx \quad (m \text{ — натуральне}).$$

Інтегруючи частинами, знайдемо

$$J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x\,d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x\cos^2 x\,dx.$$

Подвійна підстановка дорівнює нулю. Замінюючи $\cos^2 x$ на $1-\sin^2 x$, отримаємо

$$J_m = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m,$$

звідки **рекурентна формула**:

$$J_m = \frac{m-1}{m}J_{m-2}\,,$$

за якою інтеграл J_m послідовно зводиться до J_0 або J_1. Саме при $m = 2n$ маємо

$$J_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3\cdot 1}{2n\cdot(2n-2)\dots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Якщо ж $m = 2n+1$, то

$$J_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2n\cdot(2n-2)\dots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3\cdot 1}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Такі ж результати виходять і для J'_m.

Для більш стислого запису знайдених виразів скористаємося символом $n!!$ (розд. 116). Тоді можна буде написати

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^m x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m = 2n, \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!}, & m = 2n+1. \end{cases} \tag{312.1}$$

2) Довести формули

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \cos^m x\cos(m+2)x\,dx = 0;$

б) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \cos^m x\sin(m+2)x\,dx = \frac{1}{m+1};$

в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\cos(m+2)x\,dx = \frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m+1};$

г) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\sin(m+2)x\,dx = \frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{m+1};$

(де m — **будь-яке** додатне число).

Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{m+2} x\cos(m+2)x\,dx$$

і **двічі** зробимо в ньому інтегрування частинами:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{m+2} x\cos(m+2)x\,dx =$$

$$= \frac{1}{m+2}\left[\cos^{m+2} x\sin(m+2)x - \cos^{m+1} x\sin x\cos(m+2)x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{m+2}\int\limits_0^{\pi/2}\left[-(m+1)\cos^m x\sin^2 x + \cos^{m+2} x\right]\cos(m+2)x\,dx.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Подвійна підстановка дорівнює 0. Замінюючи під знаком інтеграла $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$, прийдемо до рівності

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x\,dx =$$

$$= -\frac{m+1}{m+2}\int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos(m+2)x\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos^{m+2} x \cos(m+2)x\,dx,$$

Аналогічно отримуються і інші рівності.

3) Обчислити (при натуральному n) інтеграли

$$K_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx\,dx, \quad L_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx\,dx.$$

Інтегруючи частинами, матимемо

$$K_n = \frac{1}{n} - \int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} x \sin x \cos nx\,dx.$$

Якщо до обох частин додати по K_n, то перетворюючи вираз під знаком інтеграла праворуч, легко отримати

$$2K_n = \frac{1}{n} + K_{n-1} \quad \text{або} \quad K_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + K_{n-1}\right).$$

За цією **рекурентною формулою** легко вже знайти

$$K_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n}\right).$$

Аналогічно,

$$L_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

4) Обчислити інтеграл

$$H_{k,\,m} = \int_0^1 x^k \ln^m x\,dx,$$

де $k > 0$, а m — натуральне число.

Інтегрування частинами (порівняйте з пр. 271.5)

$$\int_0^1 x^k \ln^m x\,dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln^m x\,\Big|_{+0}^{1} - \frac{m}{k+1}\int_0^1 x^k \ln^{m-1} x\,dx$$

приводить до рекурентної формули

$$H_{k,\,m} = -\frac{m}{k+1} H_{k,\,m-1},$$

звідки і випливає

$$H_{k,\,m} = (-1)^m \frac{m!}{(k+1)^{m+1}}.$$

Особливість цього прикладу в тому, що в точці $x = 0$ значення як підінтегральних функцій, так і функцій під знаком підстановки визначаються як **граничні** при $x \to +0$.

5) За формулою (280.4) маємо (вважаючи p і q натуральними числами)

$$\int (1-x)^p x^q dx = \frac{(1-x)^p x^{q+1}}{p+q+1} + \frac{p}{p+q+1} \int (1-x)^{p-1} x^q dx,$$

що при переході до визначених інтегралів на проміжку від 0 до 1 дає

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p}{p+q+1} \int_0^1 (1-x)^{p-1} x^q dx.$$

Послідовно застосовуючи цю формулу, отримаємо

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p(p-1)\ldots 1}{(p+q+1)(p+q)\ldots(q+2)} \int_0^1 x^q dx.$$

та остаточно

$$\int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}\,.$$

6) Якщо у формулі (287.5) при натуральних μ і ν перейти до визначених інтегралів, то, за допомогою результату прикладу 1), можна отримати більш загальну формулу

$$\int_0^{\pi/2} \sin^\nu x \cos^\mu x\, dx = \begin{cases} \dfrac{(\nu-1)!!(\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & \mu \quad \text{і} \quad \nu - \textbf{парні}, \\[2ex] \dfrac{(\nu-1)!!(\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!}, & \text{інші випадки}. \end{cases} \qquad (312.2)$$

313. Формула заміни змінної у визначеному інтегралі

Та ж основна формула (308.1) дає можливість нам отримати правило заміни змінної під знаком визначеного інтеграла.

nebayduzhi.math@gmail.com

Теорема 313.1. *Нехай потрібно обчислити інтеграл*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

де $f(x)$ — неперервна на проміжку $[a,b]$ функція. Нехай $x=\varphi(t)$, де функція $\varphi(t)$ задовольняє умови:

1) $\varphi(t)$ визначена та неперервна на деякому проміжку $[\alpha,\beta]$ і не виходить за межі проміжку $[a,b]$, коли t змінюється в межах $[\alpha,\beta]$;
(Може статися, що функція $f(x)$ визначена і неперервна на ширшому, ніж $[a,b]$, проміжку $[A,B]$, тоді достатньо вимагати, щоб значення $\varphi(t)$ не виходили за межі проміжку $[A,B]$.)

2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

3) існує в $[\alpha,\beta]$ неперервна похідна $\varphi'(t)$.

Тоді виконується формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{313.1}$$

Доведення. Зважаючи на припущену неперервність підінтегральних функцій існують не тільки ці визначені інтеграли, а й відповідні їм невизначені, й у обох випадках можна скористатися основною формулою. Але якщо $F(x)$ буде однією з первісних для першого диференціала $f(x)\,dx$, то функція $\Phi(t)=F(\varphi(t))$, як ми знаємо, буде первісною для другого диференціала $f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ (порівняйте з розд. 268). Тому маємо одночасно

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

і

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=F(b)-F(a),$$

звідки і випливає рівність (313.1). ☐

Зауваження. Зазначимо одну важливу особливість формули (313.1). Тоді як при обчисленні невизначеного інтеграла за допомогою заміни змінної, отримавши потрібну функцію вираженою через змінну t, ми повинні були повертатися до старої змінної x, то **тут у цьому немає потреби**. Якщо обчислено другий з визначених інтегралів (313.1) і отримано **число**, то тим самим обчислено і перший інтеграл.

314. Приклади

1) Знайдемо інтеграл

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

за допомогою підстановки $x = a\sin t$; роль α і β тут відіграють значення 0 і $\frac{\pi}{2}$. Маємо

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2\pi}{4}$$

(порівняйте з розд. 268).

2) Взагалі при n натуральному за допомогою тієї ж підстановки отримаємо

$$\int\limits_0^a (a^2-x^2)^n dx = a^{2n+1}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n+1} t\,dt = a^{2n+1}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

(дивіться (312.1)), і, аналогічно,

$$\int\limits_0^a \left(a^2-x^2\right)^{\frac{2n-1}{2}} dx = a^{2n}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}.$$

3)

$$\int\limits_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,dx.$$

Підстановка $x = a\sec t$; межам a і $2a$ змінної x відповідають межі 0 та $\frac{\pi}{3}$ змінної t. Знаходимо

$$\frac{1}{a^2}\int\limits_0^{\pi/3}\sin^2 t\cos t\,dt = \frac{1}{a^2}\,\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2}\,.$$

4) Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Підстановка $x = \pi - t$ (де t змінюється від π до 0) приводить до рівності

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}\,d(\pi-t) = \int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt - \int\limits_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt.$$

Перенесемо останній інтеграл (в якому замість t знову можна написати x) наліво і отримуємо

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,dt = -\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}\,.$$

Порівняйте з 11) (далі), де цей приклад буде узагальнено.

5) Обчислити інтеграл

$$J = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx.$$

Підстановка $x = \operatorname{tg}\varphi$ (де φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{4}$) зводить його до

$$\int\limits_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi.$$

Але

$$1+\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)}{\cos\varphi}\,,$$

так що

$$J = \frac{\pi}{8}\ln 2 + \int\limits_0^{\pi/4} \ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)d\varphi - \int\limits_0^{\pi/4} \ln\cos\varphi\,d\varphi.$$

Оскільки обидва інтеграли рівні (наприклад, другий зводиться до першого підстановкою $\varphi = \frac{\pi}{4} - \psi$, причому ψ змінюється від $\frac{\pi}{4}$ до 0), то остаточно

$$J = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

Зауважимо, що те ж значення має і інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}\,dx,$$

у чому легко переконатися інтегруванням частинами.

6) Перевірити, що

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{t}{\sin t}\,dt.$$

Вказівка. Підстановка $x = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$.

7) Перетворити один на інший інтеграли

$$\int\limits_0^{\pi} \left(x + \sqrt{x^2-1}\,\cos\varphi\right)^n d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left(x - \sqrt{x^2-1}\,\cos\theta\right)^{n+1}},$$

вважаючи $x > 1$ та n — натуральним числом.

Це досягається перетворенням змінної за формулою

$$\left(x + \sqrt{x^2-1}\,\cos\boldsymbol{\varphi}\right)\left(x - \sqrt{x^2-1}\,\cos\boldsymbol{\theta}\right) = 1.$$

Звідси

$$\cos\varphi = \frac{-\sqrt{x^2-1} + x\cos\theta}{x - \sqrt{x^2-1}\,\cos\theta},$$

причому вираз праворуч за абсолютною величиною не перевищує одиниці, і кожному θ на проміжку $[0, \pi]$ однозначно відповідає деяке φ на тому ж проміжку. При $\theta = 0$ або π також і $\varphi = 0$ або π. Маємо

$$\sin\varphi\, d\varphi = \frac{\sin\theta\, d\theta}{\left(x - \sqrt{x^2-1}\,\cos\theta\right)^2}$$

і оскільки

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{\sin\theta}{x - \sqrt{x^2-1}\,\cos\theta},$$

то

$$d\varphi = \frac{d\theta}{x - \sqrt{x^2-1}\,\cos\theta},$$

так що остаточно

$$\left(x + \sqrt{x^2-1}\,\cos\varphi\right)^n d\varphi = \frac{d\theta}{\left(x - \sqrt{x^2-1}\,\cos\theta\right)^{n+1}},$$

звідки й випливає необхідна рівність.

Зауважимо, що обидва інтеграли (з точністю до множника π) виражають n-й многочлен Льожондра $P_n(x)$, пр. 118.6.

8) Для будь-якої неперервної на проміжку $[0, a]$ $(a > 0)$ функції $f(x)$ завжди

$$\int\limits_0^a f(x)\,dx = \int\limits_0^a f(a-t)\,dt \tag{314.1}$$

(підстановка $x = a - t$, $a \geqslant t \geqslant 0$).

nebayduzhi.math@gmail.com

Зокрема, оскільки $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то при будь-якої неперервної функції $F(u)$ буде

$$\int\limits_0^{\pi/2} F(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} F(\cos x)\,dx. \tag{314.2}$$

9) Нехай $f(x)$ неперервна на симетричному проміжку $[-a, a]$ $(a > 0)$. Тоді у разі **парної** функції (пр. 99.25)

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx, \tag{314.3}$$

а у разі **непарної**

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \tag{314.4}$$

В обох випадках можна записати

$$\int\limits_{-a}^{a} = \int\limits_{-a}^{0} + \int\limits_0^a$$

і до першого з них застосувати підстановку $x = -t$.

10) Нехай маємо неперервну **періодичну** функцію $f(x)$ з періодом ω, так що для будь-якого x: $f(x+\omega) = f(x)$. Тоді на **будь-яких** проміжках довжиною ω, що дорівнює періоду, інтеграл від цієї функції має одне й те саме значення

$$\int\limits_a^{a+\omega} f(x)\,dx = \int\limits_0^{\omega} f(x)\,dx. \tag{314.5}$$

Для доведення розкладаємо інтеграл на частини:

$$\int\limits_a^{a+\omega} = \int\limits_a^0 + \int\limits_0^{\omega} + \int\limits_{\omega}^{a+\omega}$$

і, застосовуючи до третього інтеграла праворуч підстановку $x = t+\omega$, переконуємося, що він лише знаком відрізняється від першого.

11) Довести, що

$$\int\limits_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)\,dx,$$

де $f(u)$ — будь-яка неперервна на проміжку $[0, 1]$ функція.

nebayduzhi.math@gmail.com

Вказівка. Скористатися підстановкою $x = \pi - t$.

12) Довести, що

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(a\cos\theta + b\sin\theta)\,d\theta = 2\int\limits_0^{\pi} \varphi\left(\sqrt{a^2+b^2}\,\cos\lambda\right)d\lambda,$$

де $\varphi(u)$ — будь-яка функція, неперервна для $|u| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$.

Визначаючи кут α співвідношенням

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

маємо

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(\theta-\alpha).$$

Використаємо 10):

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(a\cos\theta + b\sin\theta)\,d\theta = \int\limits_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \varphi\left(\sqrt{a^2+b^2}\,\cos(\theta-\alpha)\right)d\theta,$$

або, якщо покласти $\theta - \alpha = \lambda$ і використовувати 9), то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\sqrt{a^2+b^2}\,\cos\lambda\right)d\lambda = 2\int\limits_0^{\pi} \varphi\left(\sqrt{a^2+b^2}\,\cos\lambda\right)d\lambda.$$

13) Довести, що

$$\int\limits_0^{\pi/2} g(\sin 2u)\cos u\,du = \int\limits_0^{\pi/2} g(\cos^2 v)\cos v\,dv,$$

де $g(z)$ — будь-яка неперервна функція від z на проміжку $[0,1]$.

Представивши перший інтеграл як суму інтегралів:

$$\int\limits_0^{\pi/2} = \int\limits_0^{\pi/4} + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2},$$

підстановкою $u = \frac{\pi}{2} - u'$ зводимо і другий з них теж до проміжку $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ і отримуємо

$$\int\limits_0^{\pi/4} g(\sin 2u)(\cos u + \sin u)\,du.$$

Тут ми робимо заміну змінної, виходячи із співвідношення $\sin 2u = \cos^2 v$; зростанню u від 0 до $\frac{\pi}{4}$, очевидно, відповідає спадання v від $\frac{\pi}{2}$ до 0. Диференціюємо:

$$\cos 2u\, du = -\sin v \cos v\, dv;$$

враховуючи, що

$$\cos 2u = \sqrt{1 - \sin^2 2u} = \sqrt{1 - \cos^4 v} = \sin v \sqrt{1 + \cos^2 v}$$

і

$$1 + \cos^2 v = 1 + \sin 2u = 1 + 2 \sin u \cos u = (\sin u + \cos u)^2,$$

знаходимо остаточно

$$(\sin u + \cos u)\, du = -\cos v\, dv.$$

Тепер вже нескладно отримати потрібний результат.

14) На закінчення повернемось до інтеграла Пуассона

$$I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2)\, dx$$

(порівняйте з пр. 307.4). Ми вже знаємо, що при $|r| \neq 1$ підінтегральна функція неперервна та інтеграл існує. Ми заново обчислимо його за допомогою деякого штучного способу, в якому заміна змінної відіграватиме суттєву роль.

Зауважимо попередньо, що з очевидних нерівностей

$$(1 - |r|)^2 \leqslant 1 - 2r \cos x + r^2 \leqslant (1 + |r|)^2,$$

логарифмуючи і потім інтегруючи від 0 до π, одержуємо (при $|r| < 1$)

$$2\pi \ln(1 - |r|) \leqslant I(r) \leqslant 2\pi \ln(1 + |r|).$$

Звідси ясно, що при $r \to 0$ і $I(r) \to 0$.

Розглянемо тепер інтеграл

$$I(-r) = \int_0^\pi \ln(1 + 2r \cos x + r^2)\, dx.$$

Якщо у цьому інтегралі покласти $x = \pi - t$, причому t змінюється від π до 0, то виявиться, що

$$I(-r) = \int_\pi^0 \ln(1 + 2r \cos(\pi - t) + r^2)\, d(\pi - t) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos t + r^2)\, dt = I(r).$$

В такому випадку

$$2I(r) = I(r) + I(-r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r\cos x + r^2)(1 + 2r\cos x + r^2)\,dx$$

або

$$2I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r^2\cos 2x + r^4)\,dx.$$

Робимо заміну $x = \frac{t}{2}$ (де t змінюється від 0 до 2π), отримаємо

$$2I(r) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r^2\cos t + r^4)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}.$$

Останній із отриманих інтегралів зводиться до першого підстановкою $t = 2\pi - u$ (де u змінюється від π до 0), так що у нас виходить

$$2I(r) = I(r^2), \quad \text{звідки} \quad I(r) = \frac{1}{2}I(r^2).$$

Замінюючи тут r на r^2 і так далі, легко отримати загальну формулу

$$I(r) = \frac{1}{2^n}I\left(r^{2^n}\right) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Нехай тепер $|r| < 1$, тоді $r^{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$; оскільки при цьому (згідно з зауваженням наведеним вище) $I\left(r^{2^n}\right) \to 0$, то повинні мати **тотожно**

$$I(r) = 0 \quad \text{при} \quad |r| < 1.$$

Легко тепер обчислити цей інтеграл і при $|r| > 1$. Справді

$$1 - 2r\cos x + r^2 = r^2\left(1 - 2\cdot\frac{1}{r}\cdot\cos x + \frac{1}{r^2}\right)$$

і

$$\ln(1 - 2r\cos x + r^2) = 2\ln|r| + \ln\left(1 - 2\cdot\frac{1}{r}\cdot\cos x + \frac{1}{r^2}\right),$$

так що, інтегруючи від 0 до π, матимемо

$$I(r) = 2\pi\ln|r| + I\left(\frac{1}{r}\right).$$

Але, за отриманим вище, $I\left(\frac{1}{r}\right) = 0$; отже, при $|r| > 1$ маємо

$$I(r) = 2\pi\ln|r|.$$

Ті ж результати ми отримали і у розд. 307.

315. Формула Ґаусса. Перетворення Лендена

Як ще один приклад на заміну змінної розглянемо чудову формулу, отриману Ґауссом для перетворення інтеграла

$$G = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} \quad (a > b > 0).$$

Покладемо тут

$$\sin\varphi = \frac{2a\sin\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta};$$

легко бачити, що при зміні θ від 0 до $\frac{\pi}{2}$ і φ зростає у тих самих межах. Диференціюємо

$$\cos\varphi\, d\varphi = 2a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^2\theta}{\left[(a+b)+(a-b)\sin^2\theta\right]^2}\cos\theta\, d\theta.$$

Але

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2\theta}}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta}\cos\theta,$$

так що

$$d\varphi = 2a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^2\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2\theta}}.$$

З іншого боку,

$$\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} = a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^2\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta}$$

і остаточно

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2\theta + ab\sin^2\theta}}.$$

Якщо покласти

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab},$$

то

$$G = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_1^2\cos^2\theta + b_1^2\sin^2\theta}}.$$

Це і є *формула Ґаусса.*

Застосовуючи це перетворення повторно, отримаємо, що

$$G = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2\varphi + b_n^2 \sin^2\varphi}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots),$$

де варіанти a_n, b_n визначаються рекурентними співвідношеннями

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{1}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}\,.$$

Ми вже знаємо (пр. 35.4), що ці варіанти прямують до деякої спільної границі $\mu = \mu(a, b)$, яку ми назвали **“середнім арифметико-геометричним”** чисел a та b.

Легко одержати такі нерівності:

$$\frac{\pi}{2a_n} < G < \frac{\pi}{2b_n}\,;$$

переходячи до границі знаходимо тепер, що

$$G = \frac{\pi}{2\mu(a,b)}, \quad \text{звідки} \quad \mu(a,b) = \frac{\pi}{2G}.$$

Отже, кожне з чисел G та μ просто виражається одне через інше. Нехай, наприклад, потрібно обчислити інтеграл

$$G = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2\theta}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{2\cos^2\theta + \sin^2\theta}}\,.$$

Тут $a = \sqrt{2}$ і $b = 1$; варіанти a_n і b_n, визначені вище, прямують до μ швидко: вже a_4 і b_4 наближено рівні 1,198 140, і можна μ покласти рівним цьому числу:

$$\begin{aligned} &\mu\left(1,\ \sqrt{2}\right) \doteq 1{,}198\,140\,, \\ &\frac{1}{\mu\left(1,\ \sqrt{2}\right)} \doteq 0{,}834\,626\,8 \quad (\textbf{стала Ґаусса}). \end{aligned} \tag{315.1}$$

Тоді отримуємо наближено

$$G = \frac{\pi}{2\mu} \doteq 1{,}311\,028\,777\,1\,. \tag{315.2}$$

Назад, інтеграл G зводиться до **повного** еліптичного інтеграла першого роду

$$G = \frac{1}{a} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi}} = \frac{1}{a}\mathbf{K}\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)$$

і легко може бути обчислений за таблицями; а вже звідси випливає μ.

Повними еліптичними інтегралами називають інтеграли $\mathbf{F}(k,\varphi)$ та $\mathbf{E}(k,\varphi)$ Льожандра (розд. 293, розд. 305) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$: у цьому випадку в їх позначенні зазвичай опускають другий аргумент і пишуть $\mathbf{K}(k)$ та $\mathbf{E}(k)$. Для повних інтегралів існують спеціальні таблиці.

Розглянемо тепер повний еліптичний інтеграл першого роду

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

при будь-якому значенні **модуля** k він випливає з G при

$$a = 1 \quad \text{і} \quad b = \sqrt{1-k^2} = k'.$$

Бажаючи застосувати до нього формулу Ґаусса, обчислюємо насамперед

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{1-k^2}}{2} = \frac{1+k'}{2}, \quad b_1 = \sqrt{k'},$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{a_1^2-b_1^2}}{a_1} = \frac{1-k'}{1+k'}, \quad \frac{1}{a_1} = 1+k_1,$$

так що

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = (1+k_1)\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi}}$$

або

$$\mathbf{K}(k) = (1+k_1)\mathbf{K}(k_1).$$

Ця формула становить окремий випадок так званого *перетворення Лендена (англ. John Landen, Джо́н Ле́нден)*, вона рівносильна формулі Ґаусса і була отримана до Ґаусса. Послідовно застосовуючи її, отримаємо

$$\mathbf{K}(k) = (1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n)\mathbf{K}(k_n),$$

де варіанта k_n визначається індуктивно

$$k_n = \frac{1-\sqrt{1-k_{n-1}^2}}{1+\sqrt{1-k_{n-1}^2}},$$

так що $0 < k_n < 1$ і $k_n < k_{n-1}$, чим забезпечується **швидке** прямування k_n до 0 при $n \to \infty$. Водночас

$$0 < \mathbf{K}(k_n) - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}} - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi < \frac{\pi}{2}\,\frac{1-\sqrt{1-k_n^2}}{\sqrt{1-k_n^2}},$$

звідки $\mathbf{K}(k_n) \to \frac{\pi}{2}$ при $n \to \infty$ і, нарешті,

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \lim_{n\to\infty} (1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n). \tag{315.3}$$

На цьому ґрунтується метод наближеного обчислення інтеграла $\mathbf{K}(k)$, який просто вважають рівним

$$\mathbf{K}(k) \doteq \frac{\pi}{2}(1+k_1)(1+k_2)\dots(1+k_n),$$

коли n досить велике.

316. Інший спосіб отримання формули заміни змінної

Тепер ми отримаємо формулу (313.1) іншим способом за змінених припущень.

Насамперед (і це найважливіше) ми не станемо припускати функцію $f(x)$ неперервною, а **тільки інтегровною**. Натомість від функції $\varphi(t)$ ми додатково вимагатимемо, щоб вона **монотонно** змінювалась на проміжку $[\alpha, \beta]$, і $a = \varphi(\alpha)$ та $b = \varphi(\beta)$.

Розглянемо випадок, коли $a < b$ і $\alpha < \beta$, так що функція монотонно **зростає**.

Розіб'ємо проміжок $[\alpha, \beta]$ довільно на частини за допомогою точок

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = \beta;$$

якщо покласти $x_i = \varphi(t_i)$ $(i = 0,\ 1,\ \dots,\ n)$, то одночасно будемо мати

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Якщо найбільша із довжин $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ (позначимо її через λ) прямує до нуля, то зважаючи на (рівномірну) неперервність функції $x = \varphi(t)$, те саме буде справедливо і щодо найбільшої з довжин $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)$ (дивіться теор. 87.1).

Візьмемо тепер довільне число τ_i у кожному проміжку $[t_i,\ t_{i+1}]$ і складемо інтегральну суму для другого з інтегралів в (313.1)

$$\sigma = \sum_i f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i.$$

Нехай $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, тоді $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$. Якщо до функції $\varphi(t)$ на проміжку $[t_i,\ t_{i+1}]$ застосувати формулу скінченних приростів, то отримаємо

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\overline{\tau}_i)\Delta t_i\,,$$

де також $t_i \leqslant \overline{\tau}_i \leqslant t_{i+1}$, але $\overline{\tau}_i$ (нам не відоме) взагалі кажучи відмінно від навмання взятого значення τ_i. Разом з тим інтегральній сумі для першого з інтегралів (313.1)

$$\overline{\sigma} = \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

nebayduzhi.math@gmail.com

тепер можна надати вигляд

$$\overline{\sigma}=\sum_i f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\overline{\tau}_i)\Delta t_i\,.$$

Ця сума при $\lambda\to 0$, очевидно, прямує до інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Для того щоб показати, що до тієї ж границі прямує і сума σ, достатньо показати, що різниця $\sigma-\overline{\sigma}$ прямує до нуля.

Взявши довільне число $\varepsilon>0$, зважаючи на (рівномірну) неперервність функції $\varphi'(t)$, можна знайти таке $\delta>0$, щоб при $\lambda<\delta$ виконувались нерівності

$$|\varphi'(\tau_i)-\varphi'(\overline{\tau}_i)|<\varepsilon$$

(дивіться наслідок насл. 87.1.1). Тоді

$$|\sigma-\overline{\sigma}|\leqslant\sum_i|f(\varphi(\tau_i))|\,|\varphi'(\tau_i)-\varphi'(\overline{\tau}_i)|\,\Delta t_i<L(\beta-\alpha)\varepsilon,$$

якщо через L позначити верхню межу для $|f(x)|$ та суму $\sum\Delta t_i$ замінити через $\beta-\alpha$.

Тепер ясно, що при $\lambda\to 0$ сума σ прямує до границі $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, а це означає, що існує інтеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ і формула (313.1) справедлива. Доведення завершено.

Зауваження. Особливо підкреслимо, що на підставі доведеного прості та часто корисні формули (314.1) – (314.5), поширюються тепер на випадок будь-якої **інтегровної** функції $f(x)$.

nebayduzhi.math@gmail.com

9.4. Деякі застосування визначених інтегралів

317. Формула Волліса

Знамениту формулу Волліса (англ. John Wallis, Джóн Вóлліс) для числа π легко отримати маючи формули (312.1).

Нехай $0 < x < \frac{\pi}{2}$, тоді маємо нерівності

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x.$$

Проінтегруємо ці нерівності на проміжку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx < \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx < \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\,dx.$$

Застосуємо (312.1), знаходимо

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

або

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}.$$

Оскільки різниця між двома крайніми виразами

$$\frac{1}{2n(2n+1)} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 < \frac{1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2},$$

очевидно, прямує до 0 при $n \to \infty$, то вони прямують до спільній границі, яка дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Отже,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} \tag{317.1}$$

або

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot 2n}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}. \tag{317.2}$$

Це і є *формула Волліса*. Вона має історичний інтерес, як перший запис числа π у вигляді границі раціональної варіанти, яку легко обчислити. У теоретичних дослідженнях нею користуються і зараз (дивіться, наприклад, розд. 406).

Для наближеного обчислення числа π тепер існують значно швидші методи (розд. 410).

318. Формула Тейлора з додатковим членом

Розглянемо узагальнену формулу інтегрування частинами (311.4) і зробимо заміну $v(x) = (b-x)^n$. Тоді

$$v' = -n(b-x)^{n-1}, \quad v'' = n(n-1)(b-x)^{n-2}, \quad \dots,$$

$$\begin{aligned} v^{(k)} &= (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}(b-x)^{n-k}, \quad \dots, \\ v^{(n)} &= (-1)^n n(n-1)\dots 1 = (-1)^n n!, \\ v^{(n+1)} &= 0; \end{aligned}$$

при $x = b$ всі функції $v, v', \dots, v^{(n-1)}$ дорівнюють нулю. Користуючись для $u, u', u'', \dots$ функціональним позначенням $f(x), f'(x), f''(x), \dots$, перепишемо (311.4) у вигляді

$$0 = (-1)^n \left[n!f(b) - n!f(a) - \frac{n!}{1!} f'(a)(b-a) - \frac{n!}{2!} f''(a)(b-a)^2 - \dots - f^{(n)}(a)(b-a)^n \right] + \\ +(-1)^{n+1} \int\limits_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx.$$

Звідси випливає формула Тейлора з додатковим членом у вигляді визначеного інтеграла

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \\ + \frac{1}{n!} \int\limits_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx.$$

Переходячи до позначень розділів розд. 124 – розд. 126, замінимо тут b на x, а a на x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \\ + \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Новий вираз для додаткового члена, на відміну від вивчених у розд. 124 і розд. 126 не містить жодних невідомих чисел.

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо завгодно, із цього виразу можна було б вивести і вже знайомі нам форми додаткового члена. Наприклад, скориставшись тим, що множник $(x-t)^n$ підінтегральної функції не змінює знака, можна застосувати до останнього інтеграла узагальнену теорему про середнє (вл. 304.7)

$$\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(c)\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

де c міститься в проміжку $[x_0, x]$. Отже, ми знову отримали додатковий член у формі Лаґранжа.

319. Трансцендентність числа e

Та ж формула (311.4) може послужити основою для доведення однієї чудової теореми Ерміта, що стосується числа e.

Усі дійсні (а також і комплексні) числа розподіляються на два класи — **алгебраїчні** та **трансцендентні**. Число називається **алгебраїчним**, якщо воно є коренем алгебраїчного рівняння з раціональними коефіцієнтами (очевидно, не зменшуючи загальності, ці коефіцієнти можна вважати цілими); в іншому випадку число називають **трансцендентним**.

Прикладом алгебраїчного числа може бути будь-яке раціональне число або ірраціональне число, що виражається через раціональні в радикалах:
число $-\frac{11}{17}$ є коренем рівняння $17x + 11 = 0$,
а число $\sqrt{1+\sqrt[3]{2}}$ — коренем рівняння $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 3 = 0$ і так далі.

Ерміт довів, що $e = 2{,}718\,28\ldots$ є **трансцендентним** числом. Ми наведемо доведення цієї теореми.

(Після цього Ліндеман (нім. Ferdinand von Lindemann, Фе́рдинанд фон Лі́ндеман) довів **трансцендентність числа** π, чим вперше довів неможливість розв'язку знаменитої **задачі про квадратуру круга**.)

Теорема 319.1 (Теорема Ерміт про трансцендентність числа e)**.**
Число e є трансцендентним числом.

Доведення. Припустимо, що e є коренем деякого рівняння

$$c_0 + c_1\cdot e + c_2\cdot e^2 + \cdots + c_m\cdot e^m = 0, \tag{319.1}$$

де всі коефіцієнти $c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_m$ — цілі числа.

Нехай у формулі (311.4) $u = f(x)$ буде **довільний** многочлен n-го степеня, а $v = (-1)^{n+1}e^{-x}$; тоді, якщо взяти $a = 0$, ця формула набуде вигляду

$$\int\limits_0^b f(x)e^{-x}dx = -e^{-x}\left[f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x)\right]\Big|_0^b,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

оскільки $f^{(n+1)} = 0$. Нехай для стислості

$$f(x) + f'(x) + \dots + f^{(n)}(x) = F(x),$$

маємо звідси

$$e^b F(0) = F(b) + e^b \int\limits_0^b f(x) e^{-x} dx.$$

Візьмемо тут послідовно $b = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ m$; помножуючи отримані рівності відповідно на $c_0,\ c_1,\ \dots,\ c_m$ і додаючи, використаємо (319.1) і прийдемо до остаточної рівності

$$0 = c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_m F(m) + \sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int\limits_0^i f(x) e^{-x} dx, \tag{319.2}$$

яка, нагадаємо це, справедлива для будь-якого многочлена $f(x)$. Тепер ми покажемо, що цей многочлен можна вибрати так, щоб рівність (319.2) стала неможливою; цим теорема і буде доведена.

Для цього візьмемо

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (x-1)^p (x-2)^p \dots (x-m)^p,$$

де p — просте число, більше за m і $|c_0|$. $F(x)$ набуде вигляду

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \dots + f^{(p)}(x) + \dots + f^{(mp+p-1)}(x)$$

Похідні многочлена $f(x)$ порядку p і вище мають цілі коефіцієнти і до того ж діляться на p; це випливає безпосередньо з того, що добуток p послідовних натуральних чисел ділиться на $p!$. Тому для будь-якого цілого значення x всі ці похідні мають цілі значення, кратні p. Оскільки при $x = 1,\ 2,\ \dots,\ m$ многочлен $f(x)$ та його перші $p-1$ похідні дорівнюють 0, то $F(1),\ F(2),\ \dots,\ F(m)$ будуть цілими числами, кратними p.

Розглянемо $F(0)$. При $x = 0$ многочлен $f(x)$ і тільки його перші $p-2$ похідні дорівнюють 0, так що

$$F(0) = f^{(p-1)}(0) + f^{(p)}(0) + \dots$$

Усі доданки, починаючи з другого, як ми бачили, є цілі числа, кратні p; але $f^{(p-1)}(0) = (-1)^p (m!)^p$, отже $F(0)$ на p не ділиться. Оскільки p ми вибирали так, щоб і c_0 не ділилося на p, то приходимо до висновку, що перша сума, що стоїть у рівності (319.2) праворуч, є ціле число, що не ділиться на p і, отже, **не дорівнює нулю**.

Звернемося до другої суми у рівності (319.2) праворуч. На проміжку $[0, m]$, очевидно,

$$|f(x)| < \frac{1}{(p-1)!} m^{p-1} m^p m^p \dots = \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}\,.$$

Тому

$$\left|\int\limits_0^i f(x)e^{-x}dx\right| < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}\int\limits_0^i e^{-x}dx < \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!}$$

і, якщо суму $|c_0| + |c_1| + \dots + |c_m|$ позначити через C,

$$\left|\sum_{i=0}^{m} c_i e^i \int\limits_0^i f(x)e^{-x}dx\right| < Ce^m\frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} = Ce^m m^m\frac{\left(m^{m+1}\right)^{p-1}}{(p-1)!}\,.$$

Але ми знаємо (пр. 35.1), що останній множник при $p \to \infty$ прямує до 0, так що якщо взяти досить велике p, то друга сума в (319.2) буде за абсолютною величиною менше за першу. У такому разі їх сума не може дорівнювати 0, і ми прийшли до суперечності. $\square$

320. Многочлени Льожандра

Розглянемо наступну задачу. Знайти такий многочлен n-го степеня $X_n(x)$, щоб для **будь-якого** многочлена $Q(x)$ степеня нижче n виконувалася рівність

$$\int\limits_a^b X_n(x)Q(x)\,dx = 0, \tag{320.1}$$

де a і b — довільні, але **фіксовані** числа.

Кожен многочлен n-го степеня можна розглядати як n-у похідну від деякого многочлена $R(x)$ степеня $2n$, який випливає з $X_n(x)$ n-кратним послідовним інтегруванням. Якщо при кожному інтегруванні довільну сталу вибирати так, щоб при $x = a$ інтеграл дорівнював 0, то для многочлена $R(x)$ виявляться виконаними ще умови

$$R(a) = R'(a) = \ldots = R^{(n-1)}(a) = 0. \tag{320.2}$$

Отже, задача наша зводиться до знаходження такого многочлена $R(x)$ степеня $2n$, щоб було

$$\int\limits_a^b R^{(n)}(x)Q(x)\,dx = 0 \tag{320.3}$$

для будь-якого многочлена $Q(x)$ степеня нижче n і, крім того, виконувались рівності (320.2). Але за формулою (311.4), якщо замінити в ній n на $n-1$, матимемо

$$\int\limits_a^b R^{(n)}(x)Q(x)\,dx =$$

$$= \left[Q(x)R^{(n-1)}(x) - Q'(x)R^{(n-2)}(x) + \dots \pm Q^{(n-1)}(x)R(x)\right]\Big|_a^b \mp \int\limits_a^b Q^{(n)}(x)R(x)\,dx.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо взяти до уваги (320.2), а також те, що $Q^{(n)}(x) \equiv 0$, то умова (320.3) зведеться до

$$Q(b)R^{(n-1)}(b) - Q'(b)R^{(n-2)}(b) + \dots \pm Q^{(n-1)}(b)R(b) = 0. \tag{320.4}$$

Зважаючи на повну довільність многочлена $(n-1)$-го степеня $Q(x)$, значення $Q(b)$, $Q'(b)$, $\dots$, $Q^{(n-1)}(b)$ цього многочлена та його послідовних похідних при $x = b$ можна розглядати як **довільні** числа, а тоді умова (230.4) рівносильна наступним:

$$R(b) = 0,\ R'(b) = 0,\ \dots,\ R^{(n-1)}(b) = 0. \tag{320.5}$$

З (320.2) і (320.5) бачимо, що многочлен $R(x)$ повинен мати числа a і b коренями n кратності і, отже, $R(x)$ лише сталим множником може відрізнятися від добутку $(x-a)^n(x-b)^n$. Отже, остаточно

$$X_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^n(x-b)^n\right].$$

Якщо, зокрема, взяти $a = -1$ та $b = +1$, то прийдемо до вже знайомих нам *многочленів Льожондра* (118.1):

$$X_n(x) = c_n \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Ми домовилися (118.2) позначати многочлени Льожондра через $P_n(x)$, якщо сталі c_n вибрані так:

$$c_n = \frac{1}{2^n \cdot n!} = \frac{1}{(2n)!!};$$

для цих многочленів маємо $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$. Зазвичай вважають ще $P_0(x) = 1$. Усі члени многочлена P_n мають показники однакової з n парності.

Старший коефіцієнт, очевидно, буде

$$\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{(2n)!!} = \frac{(2n-1)!!}{n!}.$$

За означенням многочленів Льожондра маємо завжди

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)Q(x)\,dx = 0, \tag{320.6}$$

який би не був многочлен $Q(x)$ степеня нижче за n. Зокрема, якщо n і m — два нерівні невід'ємні числа, то

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0, \tag{320.7}$$

Знайдемо значення інтеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx;$$

він лише множником

$$c_n^2 = \frac{1}{(2n!!)^2}$$

відрізняється від інтеграла

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \cdot \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx.$$

Якщо застосувати до останнього формулу (311.4), замінивши n на $n-1$ і зробивши заміну

$$u = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,, \quad v = (x^2-1)^n,$$

то він зведеться до інтеграла

$$(-1)^n \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}} \cdot (x^2-1)^n dx = 2\cdot(2n)!\int\limits_{0}^{1}(1-x^2)^n dx$$

(всі доданки поза інтегралом зникають, тому що функція v і її похідні до $(n-1)$-ї включно при $x=\pm1$ дорівнюють 0). Вважаючи тут $x=\sin t$ (порівняйте з пр. 314.2), отримаємо

$$2\cdot(2n)!\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1}(2n!!)^2,$$

так що остаточно

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,. \tag{320.8}$$

На закінчення, використовуючи властивості многочлена Льожондра, виведемо рекурентне співвідношення, що зв'язує три послідовних многочлена.

Зауважимо попередньо, що степінь x^n може бути представлена у вигляді лінійної однорідної функції від $P_0,\ P_1,\ \ldots,\ P_n$ зі сталими коефіцієнтами; тоді те саме справедливо і для будь-якого многочлена степеня n. Тому

$$xP_n = a_0P_{n+1} + a_1P_n + a_2P_{n-1} + a_3P_{n-2} + \ldots,$$

де $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$ — сталі коефіцієнти. Легко отримати, що $a_3 = a_4 = \ldots = 0$. Наприклад, щоб визначити a_3, помножимо обидві частини цієї рівності на X_{n-2} і проінтегруємо від -1 до $+1$

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n \cdot xP_{n-2}\, dx =$$

$$= a_0 \int\limits_{-1}^{1} P_{n+1}P_{n-2}\, dx + a_1 \int\limits_{-1}^{1} P_nP_{n-2}\, dx + a_2 \int\limits_{-1}^{1} P_{n-1}P_{n-2}\, dx + a_3 \int\limits_{-1}^{1} P_{n-2}^2\, dx + \ldots$$

Використаємо (320.6), (320.7) і (320.8), матимемо, що всі ці інтеграли, крім одного, будуть нулями, і ми отримаємо

$$a_3 \int\limits_{-1}^{1} P_{n-2}^2\, dx, \quad \text{звідки} \quad a_3 = 0.$$

Коефіцієнт a_1 також дорівнює 0, бо ліва частина рівності не містить зовсім члена з x^n. Для визначення a_0 прирівняємо коефіцієнти при x^{n+1} в обох частинах рівності

$$\frac{(2n-1)!!}{n!} = a_0 \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!}, \quad \text{звідки} \quad a_0 = \frac{n+1}{2n+1}\,.$$

Нарешті, щоб знайти a_2, прирівняємо обидві частини рівності при $x = 1$:

$$1 = a_0 + a_2, \quad \text{тож} \quad a_2 = 1 - a_0 = \frac{n}{2n+1}\,.$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів, остаточно отримуємо

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0. \tag{320.9}$$

Це і є шукане **рекурентне** співвідношення, яке дає змогу знаходити **многочлени Льожондра** послідовно:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x,$$

$$P_2 = \frac{3x^2-1}{2}, \quad P_3 = \frac{5x^3-3x}{2}, \quad P_4 = \frac{35x^4-30x^2+3}{8}, \quad \ldots$$

321. Інтегральні нерівності

У розд. 133 і розд. 144 було виведено низку нерівностей для **сум**, покажемо тепер, як такі ж нерівності можуть бути отримані для інтегралів. Функції $p(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ будемо тут вважати **інтегровними**. З цього припущення буде випливати інтегровність всіх інших функцій (теор. 299.1, теор. 299.2, теор. 300.2).

1) Розглянемо нерівність (133.4), яку можна переписати так:

$$\left(e\right)^{\frac{\sum p_i \ln a_i}{\sum p_i}} \leqslant \frac{\sum p_i a_i}{\sum p_i}. \tag{321.1}$$

Розглянемо на проміжку $[a, b]$ додатні функції $p(x)$ і $\varphi(x)$. Розділивши проміжок точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

на частини з довжинами $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, покладемо тепер у написаній нерівності $p_i = p(x_i)$, $a_i = \varphi(x_i)$; ми отримаємо

$$\left(e\right)^{\frac{\sum p(x_i)\cdot \ln\varphi(x_i)\cdot \Delta x_i}{\sum p(x_i)\cdot \Delta x_i}} \leqslant \frac{\sum p(x_i)\varphi(x_i)\Delta x_i}{\sum p(x_i)\Delta x_i}.$$

Усі суми тут мають вигляд **інтегральних сум** і при $\Delta x_i \to 0$ прямують до відповідних інтегралів. Отже, перейдемо до границі і отримаємо “інтегральний аналог” нерівності (321.1):

$$\left(e\right)^{\frac{\int\limits_a^b p(x)\ln\varphi(x)\,dx}{\int\limits_a^b p(x)\,dx}} \leqslant \frac{\int\limits_a^b p(x)\varphi(x)\,dx}{\int\limits_a^b p(x)\,dx}.$$

Зокрема, при $p(x) \equiv 1$, матимемо

$$\left(e\right)^{\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \ln\varphi(x)\,dx} \leqslant \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Вираз праворуч називається “середнім арифметичним” значень функції $\varphi(x)$ на проміжку $[a, b]$, а вираз зліва — їх “середнім геометричним”.

2) Виведемо тепер інтегральні аналоги нерівностей Коші – Хьольдара (133.6) і Мінковського (133.9);

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right]^{\frac{1}{k}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right]^{\frac{1}{k'}} \tag{321.2}$$

$$(a_i,\ b_i > 0; \quad k,\ k' > 1,\ \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1);$$

nebayduzhi.math@gmail.com

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^k\right]^{\frac{1}{k}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right]^{\frac{1}{k}} + \left[\sum_{i=1}^{n}b_i^k\right]^{\frac{1}{k}} \tag{321.3}$$

$$(a_i,\ b_i>0;\quad k>1).$$

Нехай маємо додатні функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, визначені на проміжку $[a,b]$. Як і вище, розіб'ємо цей проміжок точками x_i і зробимо таку заміну в (321.2):

$$a_i=\varphi(x_i)\cdot(\Delta x_i)^{\frac{1}{k}},\quad b_i=\psi(x_i)\cdot(\Delta x_i)^{\frac{1}{k'}},$$

а в (321.3) таку:

$$a_i=\varphi(x_i)\cdot(\Delta x_i)^{\frac{1}{k}},\quad b_i=\psi(x_i)\cdot(\Delta x_i)^{\frac{1}{k}}.$$

Зауважимо, що $\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1$. Матимемо:

$$\sum\varphi(x_i)\psi(x_i)\Delta x_i \leqslant \left(\sum(\varphi(x_i))^k\cdot\Delta x_i\right)^{\frac{1}{k}}\cdot\left(\sum(\psi(x_i))^{k'}\cdot\Delta x_i\right)^{\frac{1}{k'}}$$

і

$$\left(\sum(\varphi(x_i)+\psi(x_i))^k\cdot\Delta x_i\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \left(\sum(\varphi(x_i))^k\cdot\Delta x_i\right)^{\frac{1}{k}}+\left(\sum(\psi(x_i))^k\cdot\Delta x_i\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Переходячи до границі при $\Delta x_i\to 0$, остаточно отримуємо

$$\int_a^b\varphi\cdot\psi\,dx \leqslant \left[\int_a^b\varphi^k\,dx\right]^{\frac{1}{k}}\cdot\left[\int_a^b\psi^{k'}\,dx\right]^{\frac{1}{k'}} \tag{321.4}$$

і

$$\left[\int_a^b(\varphi+\psi)^k\,dx\right]^{\frac{1}{k}} \leqslant \left[\int_a^b\varphi^k\,dx\right]^{\frac{1}{k}}+\left[\int_a^b\psi^k\,dx\right]^{\frac{1}{k}}. \tag{321.5}$$

Зазначимо окремі випадки цих нерівностей при $k=k'=2$;

$$\int_a^b\varphi\cdot\psi\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b\varphi^2\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b\psi^2\,dx} \tag{321.6}$$

і

$$\sqrt{\int_a^b(\varphi+\psi)^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int_a^b\varphi^2\,dx}+\sqrt{\int_a^b\psi^2\,dx}\,. \tag{321.7}$$

Буняковський (укр. Віктор Буняковський, Ві́ктор Я́кович Буняко́вський) довів першу нерівність. Друга легко зводиться до першої піднесенням до квадрата.

3) Перейдемо, нарешті, до нерівності Єнсена (144.3):

$$f\left(\frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i}\right) \leqslant \frac{\sum p_i f(x_i)}{\sum p_i}. \tag{321.8}$$

тут функція $f(x)$ вважається **опуклою** на деякому проміжку $\mathcal{X}$, до якого належать точки x_i; p_i — додатні числа. Нехай на деякому проміжку $[a,b]$ задані функції $\varphi(x)$, значення якої містяться в $\mathcal{X}$, і **додатна** функція $p(x)$. Тепер x_i означатимуть точки поділу проміжку $[a,b]$; колишні x_i в (321.7) замінимо на $\varphi(x_i)$, а p_i покладемо рівними $p(x_i)\cdot\Delta x_i$. Переходячи, як і вище, від інтегральних сум до інтегралів, отримаємо *інтегральну нерівність Єнсена*:

$$f\left(\frac{\int\limits_a^b p(x)\varphi(x)\,dx}{\int\limits_a^b p(x)\,dx}\right) \leqslant \frac{\int\limits_a^b p(x)\cdot f(\varphi(x))\,dx}{\int\limits_a^b p(x)\,dx}. \tag{321.9}$$

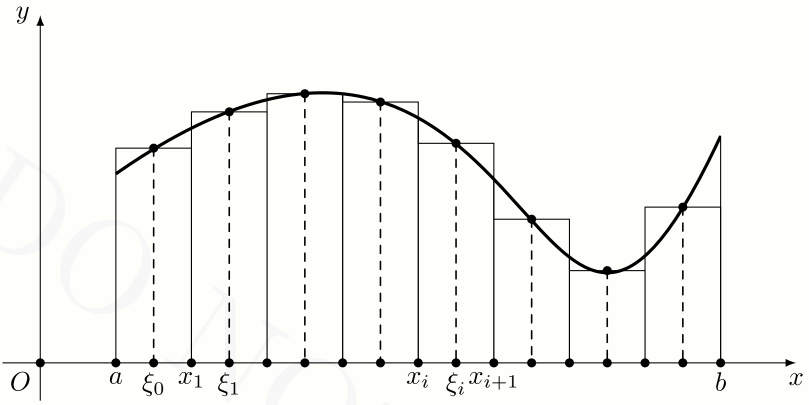


Рис. 322.1

9.5. Наближене обчислення інтегралів

322. Формулювання задачі. Формули прямокутників та трапецій

Нехай потрібно обчислити визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, де $f(x)$ є деяка визначена на проміжку $[a,b]$ неперервна функція. У 9.3 ми мали багато прикладів обчислення таких інтегралів, або за допомогою первісної, якщо вона виражається в скінченному вигляді, або ж, минаючи первісну, за допомогою різних способів, переважно штучних. Слід зазначити, однак, що всім цим вичерпується лише досить вузький клас інтегралів; за його межами зазвичай вдаються до **методів наближеного обчислення**.

Далі ми познайомимося з найпростішими з цих методів, у яких наближені формули для інтегралів складаються використовуючи декілька значень підінтегральної функції, обчислених для низки (зазвичай рівновіддалених) значень незалежної змінної.

Перші формули, що відносяться сюди, найпростіше виходять з геометричних міркувань. Розглядаючи визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ як площу деякої фігури, обмеженою кривою $y = f(x)$ (розд. 204), ми і спробуємо визначити цю площу.

Насамперед, вдруге використовуючи ту ідею, яка привела до поняття визначеного інтеграла, можна розбити всю фігуру (рис. 322.1) на смужки, скажімо, однакової ширини $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ (ми зберігаємо позначення розд. 294); а потім кожну смужку приблизно замінити прямокутником, за висоту якого прийняти яку-небудь з її

nebayduzhi.math@gmail.com

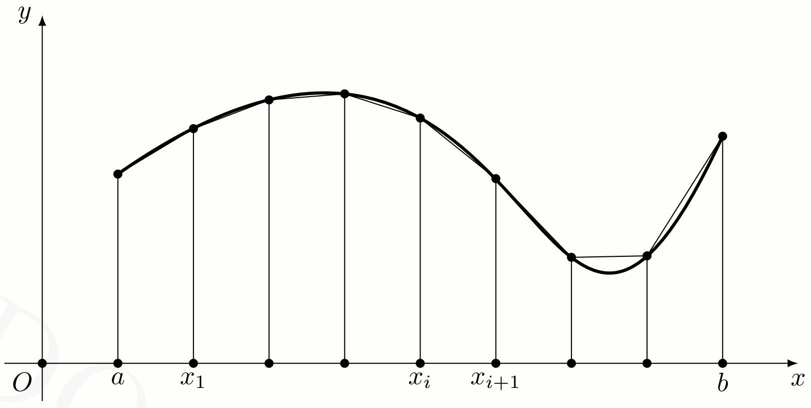


Рис. 322.2

ординат. Це приводить до формули

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-1}{n}[f(\xi_0)+f(\xi_1)+\dots+f(\xi_{n-1})],$$

де $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$ $(i=0,\ \dots,\ n-1)$. Тут шукана площа криволінійної фігури замінюється площею деякої ступінчастої фігури, складеної з **прямокутників** (або якщо завгодно то **визначений інтеграл** замінюється **інтегральною сумою**). Ця наближена формула і називається *формулою прямокутників.*

На практиці зазвичай беруть $\xi_i = \dfrac{x_i+x_{i+1}}{2} = x_{i+1/2}$; якщо відповідну середню ординату $f(\xi_i)=f(x_{i+1/2})$ позначити через $y_{i+1/2}$, то формула перепишеться у вигляді

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{n}(y_{1/2}+y_{3/2}+\dots+y_{n-1/2}). \tag{322.1}$$

Надалі, говорячи про **формулу прямокутників**, ми матимемо на увазі саме цю формулу.

Геометричні міркування природно приводять до іншої наближеної формули, яку часто застосують. Замінимо дану криву вписаної до неї ламаною, з вершинами в точках (x_i, y_i), де $y_i = f(x_i)$ $(i=0,\ \dots,\ n-1)$. Тоді наша криволінійна фігура заміниться іншою, що складається з низки трапецій (рис. 322.2). Якщо, як і раніше, вважати, що проміжок $[a,b]$ розбитий на рівні частини, то площі цих трапецій будуть

$$\frac{b-a}{n}\,\frac{y_0+y_1}{2},\quad \frac{b-a}{n}\,\frac{y_1+y_2}{2},\quad \dots,\quad \frac{b-a}{n}\,\frac{y_{n-1}+y_n}{2}.$$

Додаючи їх, прийдемо до нової наближеної формули

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}\right). \tag{322.2}$$

Це так звана **формула трапецій**.

Можна показати, що в міру зростання n до нескінченності похибки формули прямокутників і формули трапецій безмежно спадають. Отже, коли n досить велике, обидві ці формули обчислюють шукане значення інтеграла із довільною точністю.

Наприклад візьмемо **відомий** нам інтеграл (пр. 309.11)

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785\,398\ldots$$

і застосуємо до нього обидві наближені формули, взявши $n = 10$ і обчислюючи значення з точністю 4 знаків після коми.

За **формулою прямокутників** маємо

$$\begin{array}{rr}
x_{1/2} = 0{,}05 & y_{1/2} = 0{,}9975 \\
x_{3/2} = 0{,}15 & y_{3/2} = 0{,}9780 \\
x_{5/2} = 0{,}25 & y_{5/2} = 0{,}9412 \\
x_{7/2} = 0{,}35 & y_{7/2} = 0{,}8909 \\
x_{9/2} = 0{,}45 & y_{9/2} = 0{,}8316 \\
x_{11/2} = 0{,}55 & y_{11/2} = 0{,}7678 \\
x_{13/2} = 0{,}65 & y_{13/2} = 0{,}7030 \\
x_{15/2} = 0{,}75 & y_{15/2} = 0{,}6400 \\
x_{17/2} = 0{,}85 & y_{17/2} = 0{,}5806 \\
x_{19/2} = 0{,}95 & y_{19/2} = 0{,}5256 \\
\hline
 & \text{сума} = 7{,}8562
\end{array}$$

$$I \doteq \frac{7{,}8562}{10} = 0{,}785\,62\,.$$

За **формулою трапецій** маємо

$$\begin{array}{rr}
x_0 = 0{,}0 & y_0 = 1{,}0000 \\
x_{10} = 1{,}0 & y_{10} = 0{,}5000 \\
\hline
 & \text{сума} = 1{,}5000
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
x_1 = 0{,}1 & y_1 = 0{,}9901 \\
x_2 = 0{,}2 & y_2 = 0{,}9615 \\
x_3 = 0{,}3 & y_3 = 0{,}9174 \\
x_4 = 0{,}4 & y_4 = 0{,}8621 \\
x_5 = 0{,}5 & y_5 = 0{,}8000 \\
x_6 = 0{,}6 & y_6 = 0{,}7353 \\
x_7 = 0{,}7 & y_7 = 0{,}6711 \\
x_8 = 0{,}8 & y_8 = 0{,}6098 \\
x_9 = 0{,}9 & y_9 = 0{,}5525 \\
\hline
 & \text{сума} = 7{,}0998
\end{array}$$

$$I \doteq \frac{1}{10}\left(\frac{1{,}5000}{2} + 7{,}0998\right) = 0{,}784\,98\,.$$

Обидва отримані наближені результати мають приблизно однакову точність — вони відрізняються від справжнього значення (у той і в інший бік) менше, ніж на 0,0005.

Читач, звісно, усвідомлює, що ми змогли оцінити тут похибку лише тому, що наперед знали точне значення інтеграла. Для того щоб наші формули були справді придатні для наближених обчислень, потрібно мати зручний вираз для похибки, який давав би змогу не тільки оцінювати похибку при даному n, а й вибирати n, яке забезпечувало б необхідну точність. До цього питання ми повернемося в розд. 325.

323. Параболічна інтерполяція

Для наближеного обчислення інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ можна спробувати замінити функцію $f(x)$ "близьким" до неї многочленом

$$y = P_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k \tag{323.1}$$

і покласти

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \doteq \int\limits_a^b P_k(x)\,dx.$$

Іншими словами, тут при обчисленні площі "крива" $y = f(x)$ замінюється "параболою k-го порядку" (323.1), у зв'язку з чим цей процес отримав назву *параболічної інтерполяції*.

Вибір інтерполяційного многочлена $P_k(x)$ найчастіше роблять так. На проміжку $[a, b]$ беруть $k + 1$ значення незалежної змінної $\xi_0,\ \ldots,\ \xi_k$ і підбирають многочлен

$P_k(x)$ так, щоб при взятих значеннях x його значення збігалися зі значеннями функції $f(x)$. Цією умовою, як ми знаємо (розд. 128), многочлен $P_k(x)$ (128.4) визначається однозначно, і його вираз дається **інтерполяційною формулою Лаґранжа**:

$$P_k(x) = \frac{(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_k)}{(\xi_0-\xi_1)(\xi_0-\xi_2)\ldots(\xi_0-\xi_k)} f(\xi_0) + \frac{(x-\xi_0)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_k)}{(\xi_1-\xi_0)(\xi_1-\xi_2)\ldots(\xi_1-\xi_k)} f(\xi_1) + \\ + \cdots + \frac{(x-\xi_0)(x-\xi_1)\ldots(x-\xi_{k-1})}{(\xi_k-\xi_0)(\xi_k-\xi_2)\ldots(\xi_k-\xi_{k-1})} f(\xi_k).$$

При інтегруванні виходить **лінійний** вираз щодо значень $f(\xi_0)$, …, $f(\xi_k)$, коефіцієнти якого від цих значень не залежать. Обчисливши коефіцієнти один раз, можна ними користуватися для будь-якої функції $f(x)$ на даному проміжку $[a, b]$.

У найпростішому випадку при $k = 0$ функція $f(x)$ просто замінюється **сталою** $f(\xi_0)$, де ξ_0 — будь-яка точка на проміжку $[a, b]$, скажімо, середня: $\xi_0 = \frac{a+b}{2}$. Тоді наближено

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right). \qquad (323.2)$$

Геометрично — площа криволінійної фігури замінюється тут площею прямокутника з висотою, що дорівнює її середній ординаті.

При $k = 1$ функція $f(x)$ замінюється лінійною функцією $P_1(x)$, яка має однакові з нею значення при $x = \xi_0$ і $x = \xi_1$. Якщо взяти $\xi_0 = a$ і $\xi_1 = b$, то

$$P_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-b}{b-a} f(b) \qquad (323.3)$$

і, як легко обчислити,

$$\int_a^b P_1(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Отже, тут ми наближено вважаємо

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}. \qquad (323.4)$$

Цього разу площа криволінійної фігури замінюється площею трапеції: замість кривої береться хорда, що з'єднує її кінці.

Менш очевидний результат отримаємо, взявши $k = 2$. Якщо покласти

nebayduzhi.math@gmail.com

$\xi_0 = a$, $\xi_1 = \dfrac{a+b}{2}$, $\xi_2 = b$, то інтерполяційний многочлен $P_2(x)$ матиме вигляд

$$\begin{aligned} P_2(x) = {} & \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} f(a) + \\ & + \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \\ & + \frac{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)} f(b). \end{aligned} \tag{323.5}$$

За допомогою легкого обчислення знайдемо

$$\int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6} f(a) + 4\frac{b-a}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6} f(b).$$

Отже, приходимо до наближеної формули

$$\int_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \tag{323.6}$$

Тут площа фігури під кривою замінюється площею фігури, обмеженою звичайною параболою (з вертикальною віссю), що проходить через крайні та середню точки кривої.

Збільшуючи степінь k інтерполяційного многочлена, тобто проводячи параболу (323.1) через більш точок даної кривої, можна сподіватися отримати результат більшої точності. Але практичнішим виявляється інший спосіб, заснований на **поєднанні** ідеї параболічної інтерполяції з ідеєю **поділу проміжку**.

324. Поділ проміжку інтегрування

При обчисленні інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ можна зробити так. Розіб'ємо спочатку проміжок $[a, b]$ на деяке число (n) рівних проміжків

$$[x_0,\ x_1],\quad [x_1,\ x_2],\quad \ldots,\quad [x_{n-1},\ x_n]\quad (x_0 = a,\ x_n = b),$$

і шуканий інтеграл представиться у вигляді суми

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx. \tag{324.1}$$

Тепер до кожного з цих проміжків застосуємо параболічну інтерполяцію, тобто обчислюватимемо інтеграли (324.1) за однією з наближених формул (323.2), (323.4), (323.6).

Легко побачити, що, виходячи з формули (323.2) або (323.4), ми знову отримаємо вже відомі нам **формули прямокутників та трапецій**, (322.1) та (322.2).

Застосуємо тепер до інтегралів (324.1) формулу (323.6); при цьому, для стислості, покладемо, як і вище,

$$f(x_i) = y_i, \quad \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_{i+1/2}\,, \quad f(x_{i+1/2}) = y_{i+1/2}\,.$$

Ми отримаємо

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_{1/2} + y_1),$$

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6n}(y_1 + 4y_{3/2} + y_2),$$

$$\ldots$$

$$\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6n}(y_{n-1} + 4y_{n-1/2} + y_n).$$

Нарешті, додаючи почленно ці рівності, прийдемо до формули

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \doteq \frac{b-a}{6n}[(y_0+y_n)+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})+4(y_{3/2}+y_{5/2}+\cdots+y_{n-1/2})]. \quad (324.2)$$

Вона має назву *формули Сімпсона (англ. Thomas Simpson, Тóмас Сíмпсон)*; цією формулою користуються для наближеного обчислення інтегралів частіше, ніж формулами прямокутників і трапецій, бо вона зазвичай швидше дає точніший результат.

Для порівняння обчислимо знову інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

(дивіться розд. 322) використовуючи **формулу Сімпсона**. Ми візьмемо $n = 2$, так що кількість використаних ординат на цей раз буде навіть менше, ніж раніше. Маємо (обчислюючи до п'яті цифр після коми)

$$x_0 = 0; \quad x_{1/2} = \frac{1}{4}; \quad x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_{3/2} = \frac{3}{4}; \quad x_2 = 1.$$

$$y_0 = 1; \quad 4y_{1/2} = 3{,}764\,71; \quad 2y_1 = 1{,}6; \quad 4y_{3/2} = 2{,}56; \quad y_2 = 0{,}5.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

$$\frac{1}{12}(1+3{,}764\,71+1{,}6+2{,}56+0{,}5)=0{,}785\,39\ldots$$

— усі п'ять знаків співпадають!

Звичайно, до формули (324.2) можуть бути повторені зауваження, зроблені наприкінці розд. 322. До оцінки похибки наближених формул ми зараз і переходимо.

325. Додатковий член формули прямокутників

Почнемо із формули (323.2). Нехай на проміжку $[a,b]$ функція $f(x)$ має неперервні першу та другу похідні. Тоді, розкладаючи $f(x)$ (за формулою Тейлора (126.2)) за степенями двочлена $x-\dfrac{a+b}{2}$ аж до квадрата, матимемо для всіх значень x в $[a,b]$

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\tilde{\xi}),$$

де $\tilde{\xi}$ міститься між x і $\dfrac{a+b}{2}$ і залежить від x.

Якщо проінтегрувати цю рівність на проміжку від a до b, то другий член справа зникне, бо

$$\int\limits_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0. \tag{325.1}$$

Отже, отримуємо

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}\int\limits_a^b f''(\tilde{\xi})\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx,$$

так що **додатковий член** формули (322.1), що відновлює її точність, має вигляд

$$\rho=\frac{1}{2}\int\limits_a^b f''(\tilde{\xi})\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx.$$

Позначивши через m і M, відповідно, найменше та найбільше значення **неперервної** функції $f''(x)$ на проміжку $[a,b]$ (розд. 85) і *користуючись тим, що другий множник підінтегрального виразу* ***не змінює знака***, за узагальненої теоремою про середнє (вл. 304.7) можемо написати

$$\rho=\frac{1}{2}\mu\int\limits_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx=\frac{(b-a)^3}{24}\mu,$$

де μ міститься між m і M. За відомою властивістю неперервної функції (теор. 82.1), знайдеться в $[a, b]$ така точка ξ^*, що $\mu = f''(\xi^*)$, і остаточно

$$\rho = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi^*). \tag{325.2}$$

Зауваження. Природно було б, розкладаючи функцію $f(x)$ за степенями $x - \frac{a+b}{2}$, зупинити розкладання вже на першій степені цього двочлена, тобто скористатися формулою

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(\tilde{\xi}).$$

Це привело б нас, при інтегруванні, до рівності

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \int\limits_a^b f'(\tilde{\xi}) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx,$$

так що **додатковий член** був би інтегралом

$$\rho = \int\limits_a^b f'(\tilde{\xi}) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx,$$

що містить лише **першу** похідну $f'(x)$. Але тут *другий множник підінтегрального виразу* ***змінює знак*** на проміжку $[a, b]$, і застосування узагальненої теореми про середнє (з метою спрощення виразу для ρ) виявляється неможливим. Просування в розкладі Тейлора ще на один член, у зв'язку з рівністю (325.1), забезпечило нам успіх.

Якщо тепер розділити проміжок $[a, b]$ на n рівних частин, то для кожного частково проміжку $[x_i,\ x_{i+1}]$ матимемо **точну** формулу

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{b-a}{n} f(x_{i+1/2}) + \frac{(b-a)^3}{24n^3} f''(\xi_i^*) \quad (x_i \leqslant \xi_i^* \leqslant x_{i+1}).$$

Склавши ці рівності (при $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$) почленно, отримаємо при звичайних скорочених позначеннях

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}(y_{1/2} + y_{3/2} + \cdots + y_{n-1/2}) + R_n,$$

де вираз

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} \frac{f''(\xi_0^*) + f''(\xi_1^*) + \cdots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

і є додатковий член формули прямокутників (322.1). Оскільки вираз

$$\frac{f''(\xi_0^*) + \cdots + f''(\xi_{n-1}^*)}{n}$$

також міститься між m і M, то і він становить одне із значень функції $f''(x)$.

Тому остаточно маємо

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{325.3}$$

В міру зростання n цей додатковий член спадає **приблизно** як $\frac{1}{n^2}$. (Ми говоримо **приблизно**, бо і ξ може змінюватися зі зміною n. Це слід пам'ятати й надалі.)

Розглянемо приклад. Повернемося до обчислення інтеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

що ми вже робили у розд. 322. Для підінтегральної функції

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = 2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^2};$$

ця похідна на проміжку $[0,1]$ змінює знак, але її абсолютна величина залишається меншою за 2. Звідси, за формулою (325.3) $|R_10| < 0{,}85 \cdot 10^{-3}$. Ми обчислювали ординати до 4 цифр після коми з точністю до 0,000 05; нескладно бачити, що похибка від округлення ординат може бути включена до наведеної вище оцінки. Справжня похибка, насправді, менша за це значення.

326. Додатковий член формули трапецій

Займемося тепер формулою (323.4) при попередніх припущеннях щодо функції $f(x)$. Скориставшись інтерполяційною формулою Лаґранжа з додатковим членом (129.3), можемо написати (дивіться (323.3))

$$f(x) = P_1(x) + \frac{1}{2} f''(\tilde{\eta})(x-a)(x-b) \quad (a < \tilde{\eta} < b).$$

Інтегруючи цю формулу від a до b, знайдемо

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\tilde{\eta})(x-a)(x-b)\,dx,$$

так що додатковий член формули (323.4) буде

$$\rho = \frac{1}{2}\int\limits_a^b f''(\tilde{\eta})(x-a)(x-b)\,dx.$$

Розмірковуючи, як і вище, і користуючись тим, що *другий множник підінтегральної функції і тут **не змінює знака***, знайдемо

$$\rho = \frac{1}{2}f''(\eta^*)\int\limits_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta^*) \quad (a \leqslant \eta^* \leqslant b).$$

Нарешті, для випадку проміжку, поділеного на n рівних частин

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\eta) \quad (a \leqslant \eta \leqslant b). \tag{326.1}$$

Таким є додатковий член формули трапецій (322.2). У разі зростання n він також спадає приблизно як $\frac{1}{n^2}$. Ми бачимо, що застосування формули трапецій приводить до похибки того ж порядку, що й для формули прямокутників.

327. Додатковий член формули Сімпсона

Звернемося, нарешті, до формули (323.6). Можна було б, аналогічно до того, як це було зроблено щойно, знову скористатися інтерполяційною формулою Лаґранжа з додатковим членом (129.3) і вважати (дивіться (323.5))

$$f(x) = P_2(x) + \frac{f'''(\tilde{\zeta})}{3!}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b) \quad (a < \tilde{\zeta} < b). \tag{327.1}$$

Але ми стикаємось тут знов з таким станом речей, які мали у розд. 325 (дивіться зауваження). Саме, проінтегрувавши рівність (327.1), ми не могли б спростити інтегральний вираз для додаткового члена за допомогою теореми про середнє, тому що *вираз* $(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)$ *в підінтегральній функції вже **змінює знак*** на проміжку $[a,b]$. Тому ми вчинимо інакше.

Вираз

$$P_2(z) + K\cdot(z-a)\left(z-\frac{a+b}{2}\right)(z-b),$$

хоч би яке було число K, у точках $z = a, \frac{a+b}{2}, b$ набуває тих же значень, що і функція $f(z)$. Легко підібрати тепер число K так, щоб і **похідна** цього виразу при $z = \frac{a+b}{2}$ збігалася з похідною $f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Отже, при цьому значенні K, ми

nebayduzhi.math@gmail.com

маємо не що інше, як інтерполяційний многочлен Ерміта (розд. 130), що відповідає простим вузлам a, b та двократному вузлу $\frac{a+b}{2}$. Скориставшись формулою Ерміта з додатковим членом (130.4), припускаючи існування для функції $f(x)$ похідних до четвертого порядку включно, отримаємо:

$$f(x) = P_2(x) + K\cdot(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b) + \frac{f^{(4)}\left(\tilde{\zeta}\right)}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$$
$$\left(a<\tilde{\zeta}<b\right).$$

Тепер проінтегруємо цю рівність від a до b; ми знайдемо, що

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]+$$
$$+\frac{1}{24}\int\limits_a^b f^{(4)}\left(\tilde{\zeta}\right)(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx,$$

оскільки

$$\int\limits_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx = \int\limits_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(b-a)^2}{4}\right]dx = 0.$$

Якщо припустити похідну $f^{(4)}$ неперервною, то, як і в попередніх випадках, додатковий член формули (323.6)

$$\rho = \frac{1}{24}\int\limits_a^b f^{(4)}\left(\tilde{\zeta}\right)\cdot(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx,$$

користуючись тим, що *другий множник в підінтегральному виразі* ***не змінює знак***, можна записати в такій формі:

$$\rho = \frac{1}{24}f^{(4)}(\zeta^*)\cdot\int\limits_a^b(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx =$$
$$= \frac{1}{24}f^{(4)}(\zeta^*)\int\limits_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{(b-a)^2}{4}\right]dx =$$
$$= -\frac{(b-a)^5}{180\cdot 2^4}f^{(4)}(\zeta).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо $f(x)$ є многочлен степеня не вище третього, то, очевидно, ρ дорівнює 0. Отже, для такого многочлена формула (323.6) буде **точною** (у чому легко переконатися і безпосередньо).

Якщо проміжок $[a,b]$ поділений на n рівних частин, то для формули Сімпсона (324.2) отримаємо додатковий член у вигляді

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{180\cdot(2n)^4} f^{(4)}(\zeta) \quad (a \leqslant \zeta \leqslant b). \tag{327.2}$$

В міру зростання n цей вираз спадає **приблизно** як $\frac{1}{n^4}$; отже, формула Сімпсона справді вигідніша за дві попередні формули.

Звернемося знову до прикладу

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} dx.$$

Для того, щоб уникнути обчислення четвертої похідної, що фігурує у формулі (327.2), ми помітимо, що функція $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ сама є похідною від $y = \operatorname{arctg} x$, так що ми можемо скористатися готовою формулою з пр. 116.8. Матимемо

$$f^{(4)}(x) = y^{(5)} = 24\cos^5 x \sin 5\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 24\cos^5 x \cos 5x;$$

цей вираз, за абсолютною величиною, не перевищує 24, так що за формулою (327.2) $|R_2| < \frac{1}{1920} = 0{,}0006$. Справжня похибка, як ми бачили, значно менше цього значення.

Зауваження. На цьому прикладі бачимо, що межа похибки, знайдена за нашою формулою, виявляється досить грубою. На жаль (і в цьому практичний недолік виведених формул), подібна обставина трапляється нерідко.

Проте саме за допомогою цих формул, що дають змогу все ж таки оцінювати похибку наперед, можна здійснювати наближене обчислення визначених інтегралів. Звернемося до прикладів.

328. Приклади

1) Обчислимо інтеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$$

з точністю до 0,001 скориставшись **формулою прямокутників**.

Оскільки для $f(x) = \frac{1}{x}$ маємо $0 < f''(x) = \dfrac{2}{x^3} \leqslant 2$ (якщо $1 \leqslant x \leqslant 2$), то за формулою (325.3)

$$0 < R_n < \frac{1}{12n^2}\,.$$

Якщо взяти $n = 10$, то додатковий член нашої формули буде, $R_{10} < \dfrac{1}{1200} < 0{,}84 \cdot 10^{-3}$. Нам доведеться внести ще похибку, округляючи значення функції; спробуємо, щоб межі цієї нової похибки відрізнялися менш ніж на $0{,}16 \cdot 10^{-3}$. З цією метою достатньо обчислювати значення функції $\frac{1}{x}$ з чотирма знаками, з точністю до 0,000 05. Маємо:

$$\begin{aligned}
x_{1/2} &= 1{,}05 & y_{1/2} &= 0{,}9524\\
x_{3/2} &= 1{,}15 & y_{3/2} &= 0{,}8696\\
x_{5/2} &= 1{,}25 & y_{5/2} &= 0{,}8000\\
x_{7/2} &= 1{,}35 & y_{7/2} &= 0{,}7407\\
x_{9/2} &= 1{,}45 & y_{9/2} &= 0{,}6897\\
x_{11/2} &= 1{,}55 & y_{11/2} &= 0{,}6452\\
x_{13/2} &= 1{,}65 & y_{13/2} &= 0{,}6061\\
x_{15/2} &= 1{,}75 & y_{15/2} &= 0{,}5714\\
x_{17/2} &= 1{,}85 & y_{17/2} &= 0{,}5405\\
x_{19/2} &= 1{,}95 & y_{19/2} &= 0{,}5128
\end{aligned}$$

$$\text{сума} = 6{,}9284$$

$$I \doteq \frac{6{,}9284}{10} = 0{,}692\,84\,.$$

Враховуючи, що поправка до кожної ординати (а отже, і до їхнього середнього арифметичного) міститься між 0,000 05, а також зважаючи на оцінку додаткового члена R_{10}, знайдемо, що $\ln 2$ міститься між $0{,}692\,79 = 0{,}692\,84 - 0{,}000\,05$ та $0{,}693\,73 = 0{,}692\,84 + 0{,}000\,05 + 0{,}000\,84$, а отже, між 0,692 і 0,694.
Отже, $\ln 2 = 0{,}693 \pm 0{,}001$.

2) Провести те саме обчислення за **формулою трапецій**.

В цьому випадку за формулою (326.1)

$$R_n < 0, \quad |R_n| < \frac{1}{6n^2}\,.$$

Спробуємо і тут взяти $n = 10$, хоча тоді гарантувати можна лише, що

$|R_{10}| < \frac{1}{600} < 1{,}7 \cdot 10^{-3}$. Ординати (обчислені з тією ж точністю, що і вище) будуть

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1{,}0 & y_0 = 1{,}0000 \\ x_{10} = 2{,}0 & y_{10} = 0{,}5000 \\ \hline & \text{сума} = 1{,}5000 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1{,}1 & y_1 = 0{,}9091 \\ x_2 = 1{,}2 & y_2 = 0{,}8333 \\ x_3 = 1{,}3 & y_3 = 0{,}7692 \\ x_4 = 1{,}4 & y_4 = 0{,}7143 \\ x_5 = 1{,}5 & y_5 = 0{,}6667 \\ x_6 = 1{,}6 & y_6 = 0{,}6250 \\ x_7 = 1{,}7 & y_7 = 0{,}5882 \\ x_8 = 1{,}8 & y_8 = 0{,}5556 \\ x_9 = 1{,}9 & y_9 = 0{,}5263 \\ \hline & \text{сума} = 6{,}1877 \end{array}$$

$$I \doteq \frac{1}{10}\left(\frac{1{,}5000}{2} + 6{,}1877\right) = 0{,}693\,77\,.$$

Враховуючи всі поправки, знайдемо, що $\ln 2$ міститься між $0{,}692\,02 = 0{,}693\,77 - 0{,}000\,05 - 0{,}001\,70$ та $0{,}693\,82 = 0{,}693\,77 + 0{,}000\,05$, тобто знову між 0,692 і 0,694, і так далі.

3) За допомогою **формули Сімпсона**, зробивши теж саме число обчислень ординат, можна отримати точніший результат. Оскільки четверта похідна підінтегральної функції є $\frac{24}{x^5}$, то за формулою (327.2)

$$R_n < 0$$

і

$$|R_n| \leqslant \frac{24}{180 \cdot (2n)^4} = \frac{2}{15 \cdot (2n)^4}\,.$$

При $n = 5$ (тоді число ординат буде те саме, що й у попередньому випадку) маємо $|R_5| < 1{,}4 \cdot 10^{-6}$. Обчислення поведемо до п'яті цифр після коми, з точністю до

nebayduzhi.math@gmail.com

0,000 005:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1{,}0 & y_0 = 1{,}000\,00 \\ x_5 = 2{,}0 & y_5 = 0{,}500\,00 \\ \hline & \text{сума} = 1{,}5000 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 1{,}2 & y_1 = 0{,}833\,33 \\ x_2 = 1{,}4 & y_2 = 0{,}714\,29 \\ x_3 = 1{,}6 & y_3 = 0{,}625\,00 \\ x_4 = 1{,}8 & y_4 = 0{,}555\,56 \\ \hline & \text{сума} = 2{,}728\,18 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_{1/2} = 1{,}1 & y_{1/2} = 0{,}909\,09 \\ x_{3/2} = 1{,}3 & y_{3/2} = 0{,}769\,23 \\ x_{5/2} = 1{,}5 & y_{5/2} = 0{,}666\,67 \\ x_{7/2} = 1{,}7 & y_{7/2} = 0{,}588\,24 \\ x_{9/2} = 1{,}9 & y_{9/2} = 0{,}526\,32 \\ \hline & \text{сума} = 3{,}459\,55 \end{array}$$

$$I \doteq \frac{1}{30}\,(1{,}500\,00 + 2 \cdot 2{,}728\,18 + 4 \cdot 3{,}459\,55) = 0{,}693\,152\,.$$

Звідси $\ln 2$ міститься між

$$\begin{aligned} 0{,}693\,133 &= 0{,}693\,152 - 0{,}000\,005 - 0{,}000\,014, \\ 0{,}693\,157 &= 0{,}693\,152 + 0{,}000\,005, \end{aligned}$$

отже, наприклад, можна вважати $\ln 2 = 0{,}693\,15_{\pm 0{,}000\,02}\,.$

Насправді $\ln 2 = 0{,}693\,147\,18\ldots$, і справжня похибка виявляється меншою ніж 0,000 005 (порівняйте з зауваженням наприкінці попереднього розділу).

4) Розглянемо таку задачу:
обчислити повний еліптичний інтеграл 2-го роду (розд. 315)

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$$

nebayduzhi.math@gmail.com

з точністю до 0,001 **за формулою Сімпсона**.

Для функції

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}$$

при зміні x від 0 до $\frac{\pi}{2}$ маємо $|f^{(4)}| < 12$, тому (327.2)

$$|R_n| < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{180 \cdot (2n)^2} \cdot 2 < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(2n)^4}, \quad \text{оскільки} \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 < 10.$$

Візьмемо $n = 3$, так що $|R_n| < 0{,}000\,52$. Тоді

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0 \ (0^\circ) & y_0 &= 1{,}0000 \\
x_{1/2} &= \frac{\pi}{12} \ (15^\circ) & 4y_{1/2} &= \sqrt{12 + \sqrt{12}} = 3{,}9324 \\
x_1 &= \frac{\pi}{6} \ (30^\circ) & 2y_1 &= \frac{\sqrt{14}}{2} = 1{,}8708 \\
x_{3/2} &= \frac{\pi}{4} \ (45^\circ) & 4y_{3/2} &= \sqrt{12} = 3{,}4641 \\
x_2 &= \frac{\pi}{3} \ (60^\circ) & 2y_2 &= \frac{\sqrt{10}}{2} = 1{,}5811 \\
x_{5/2} &= \frac{\pi}{4} \ (75^\circ) & 4y_{5/2} &= \sqrt{12 - \sqrt{12}} = 2{,}9216 \\
x_3 &= \frac{\pi}{2} \ (90^\circ) & y_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071
\end{aligned}$$

$$\text{сума} = 15{,}4771$$

До отриманого результату, крім поправки R_3, слід додати ще (невід'ємну) поправку на округлення, яка не перевищує $\dfrac{0{,}0003 \cdot \pi}{36} < 0{,}000\,03$.

Отже,

$$1{,}350\,11 < E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1{,}351\,18,$$

і можна стверджувати, що

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1{,}351_{\pm 0{,}001}\,.$$

(Насправді в отриманому результаті всі знаки правильні.)

5) Обчислити інтеграл

$$W = \int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$$

з точністю до 0,0001 **за формулою Сімпсона**.

Безпосередньо обчисливши четверту похідну підінтегральної функції, переконуємося, що за абсолютною величиною вона не перевищує 12; тому

$$|R_n| \leqslant \frac{12}{180 \cdot (2n)^4} \,.$$

Достатньо взяти $n = 5$, бо $|R_5| < 0{,}7 \cdot 10^{-5}$. Маємо

$$\begin{array}{ll}
x_0 = 0{,}0 & y_0 = 1{,}000\,00 \\
x_5 = 1{,}0 & y_5 = 0{,}367\,88 \\
\hline
 & \text{сума} = 1{,}367\,88
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
x_1 = 0{,}2 & y_1 = 0{,}960\,79 \\
x_2 = 0{,}4 & y_2 = 0{,}852\,14 \\
x_3 = 0{,}6 & y_3 = 0{,}697\,68 \\
x_4 = 0{,}8 & y_4 = 0{,}527\,29 \\
\hline
 & \text{сума} = 3{,}037\,90
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
x_{1/2} = 0{,}1 & y_{1/2} = 0{,}990\,05 \\
x_{3/2} = 0{,}3 & y_{3/2} = 0{,}913\,93 \\
x_{5/2} = 0{,}5 & y_{5/2} = 0{,}776\,80 \\
x_{7/2} = 0{,}7 & y_{7/2} = 0{,}612\,63 \\
x_{9/2} = 0{,}9 & y_{9/2} = 0{,}444\,86 \\
\hline
 & \text{сума} = 3{,}740\,27
\end{array}$$

$$\frac{1}{30}\,(1{,}367\,88 + 2 \cdot 3{,}037\,90 + 4 \cdot 3{,}740\,27) = 0{,}746\,825\,.$$

$$0{,}746\,813 < W < 0{,}746\,837$$

$$W = 0{,}7468_{+0{,}000\,05}\,.$$

(І тут в отриманому результаті правильні усі **шість** знаків!)

6) Обчислити інтеграл

$$G = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$$

(порівняйте з пр. 314.6) **за формулою Сімпсона** при $n = 5$, обчислюючи п’ять знаків

$$\begin{array}{ll} x_0 = 0{,}0 & y_0 = 1{,}000\,00 \\ x_5 = 1{,}0 & y_5 = 0{,}785\,40 \\ \hline & \text{сума} = 1{,}785\,40 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0{,}2 & y_1 = 0{,}986\,98 \\ x_2 = 0{,}4 & y_2 = 0{,}951\,27 \\ x_3 = 0{,}6 & y_3 = 0{,}900\,70 \\ x_4 = 0{,}8 & y_4 = 0{,}843\,43 \\ \hline & \text{сума} = 3{,}682\,38 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_{1/2} = 0{,}1 & y_{1/2} = 0{,}996\,68 \\ x_{3/2} = 0{,}3 & y_{3/2} = 0{,}971\,52 \\ x_{5/2} = 0{,}5 & y_{5/2} = 0{,}927\,30 \\ x_{7/2} = 0{,}7 & y_{7/2} = 0{,}872\,46 \\ x_{9/2} = 0{,}9 & y_{9/2} = 0{,}814\,24 \\ \hline & \text{сума} = 4{,}582\,20 \end{array}$$

$$\frac{1}{30}\,(1{,}785\,40 + 2 \cdot 3{,}682\,38 + 4 \cdot 4{,}582\,20) = 0{,}915\,965\,.$$

$$G \doteq 0{,}915\,965\,.$$

В отриманому результаті всі знаки правильні. Залишаємо читачеві оцінити похибку за формулою (327.2).

Значення G називають *сталою Катальо (фр. Eugène Catalan, Ужéн Катальó)* (дивіться також пр. 440.6, далі).

Зауваження. Останні три приклади цікаві тому, що відповідні первісні функції в скінченному вигляді не виражаються, так що ними скористатися для обчислення визначених інтегралів було б неможливо.

Навпаки, якщо ці первісні подати у вигляді визначених інтегралів зі змінною верхньою межею, то можна було б обчислити значення цих інтегралів, що відповідають ряду значень верхньої межі. Цим, принципово, з'ясовується можливість складання для функцій, заданих лише їх інтегральними виразами, таких самих таблиць, які відомі читачеві для простих функцій.

На цьому шляху можна також отримати для згаданих функцій і наближені вирази.

nebayduzhi.math@gmail.com

Глава 10

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ГЕОМЕТРІЇ, МЕХАНІКИ І ФІЗИКИ

10.1. Довжина кривої

329. Обчислення довжини кривої

Нехай неперервна проста крива $\overset{\frown}{AB}$ задана на площині параметричними рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T). \tag{329.1}$$

У першому томі (розд. 247) було визначено поняття **довжини кривої** як точної верхньої межі S периметрів, вписаних у криву ламаних

$$S = \sup\{p\}. \tag{329.2}$$

Припускаючи, що функції (329.1) мають неперервні похідні, було вже доведено (розд. 248), що крива **спрямна**, тобто довжина дуги **скінченна**. Більш того, якщо розглянути змінну дугу $\overset{\frown}{AM}$, де M — будь-яка точка кривої, що відповідає значенню t параметра, то було визначено, що довжина

$$\overset{\frown}{AM} = s = s(t)$$

є диференційовна функція від t, похідна якої виражається так:

$$s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

або коротше

$$s'_t = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} \tag{329.3}$$

(248.5) і, очевидно, теж неперервна.

Володіючи поняттям інтеграла, ми можемо тепер перейти до **обчислення** довжини s кривої $\overset{\frown}{AB}$. За основною формулою інтегрального числення, одразу отримаємо

$$s(T) - s(t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} s'_t dt$$

або

$$\overset{\frown}{AB} = S = \int\limits_{t_0}^{T} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\, dt = \int\limits_{t_0}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt\,. \tag{329.4}$$

Довжина змінної дуги $\overset{\frown}{AM}$, про яку вище йшлося, як легко зрозуміти, запишеться формулою

$$\overset{\frown}{AM} = s = s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2_t + y'^2_t}\, dt\,. \tag{329.5}$$

Може статися, що за початкову точку відліку дуг береться якась **внутрішня** точка M_0. Якщо t_0 як і раніше визначає саме цю точку (в такому разі t_0 вже не буде **кінцем** проміжку, де змінюється t), то формула (329.5) дає, очевидно, **величину** дуги $\overset{\frown}{AM}$ **зі знаком**, саме зі знаком плюс, якщо $t > t_0$, і точка M лежить з додатного боку від початку відліку дуг M_0, і зі знаком мінус, якщо $t < t_0$ і точка M лежить з від'ємного боку від M_0.

Якщо крива задана **явним** рівнянням у прямокутних координатах

$$y = f(x) \quad (x_0 \leqslant x \leqslant X),$$

то, приймаючи x за параметр, з формули (329.4), як її окремий випадок, отримаємо

$$S = \int\limits_{x_0}^{X} \sqrt{1 + y'^2_x}\, dx = \int\limits_{x_0}^{X} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{329.6}$$

Зрештою, випадок **полярного** задання кривої

$$r = g(\theta) \quad (\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \Theta),$$

як відомо, також зводиться до параметричного за допомогою звичайних формул переходу

$$x = r\cos\theta = g(\theta)\cos\theta, \quad y = r\sin\theta = g(\theta)\sin\theta;$$

роль параметра тут відіграє θ. Для цього випадку

$$S = \int\limits_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{r^2 + r_\theta'^2}\, d\theta = \int\limits_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{\left[g(\theta)\right]^2 + \left[g'(\theta)\right]^2}\, d\theta. \tag{329.7}$$

Легко для цих двох окремих випадків задання кривої написати і вирази для величини змінної дуги $\overset{\frown}{AM}$, якщо M відповідає абсцисі x або полярному куті θ:

$$\overset{\frown}{AM} = s = s(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{1 + y_x'^2}\, dx. \tag{329.8}$$

або, відповідно,

$$\overset{\frown}{AM} = s = s(\theta) = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + r_\theta'^2}\, d\theta. \tag{329.9}$$

330. Інший підхід до означення поняття довжини кривої та її обчислення

При означенні поняття довжини неперервної простої кривої (329.1) ми виходили з рівності (329.2). Доведемо тепер наступне твердження.

Твердження 330.1. *У разі* ***незамкненої*** *кривої її довжина S є не тільки* ***точною верхньою межею*** *для множини довжин $\{p\}$, вписаних у криву ламаних, а й просто* ***границею*** *для p — за умови, що довжини всіх сторін ламаної (p) прямують до 0 (або, точніше, довжина λ^* найбільшої з цих сторін прямує до 0):*

$$S = \lim_{\lambda^* \to 0} p. \tag{330.1}$$

Доведення. Втім, зручніше виходити із значень параметра t:

$$t_0 < t_1 < ... < t_i < t_{i+1} < ... < t_n = T, \tag{330.2}$$

які визначають положення вершин ламаної (p) на кривій, і припустити, що прямують до нуля всі прирости $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ (або, точніше, найбільше з них $\lambda = max\Delta t_i$). лем. 245.1 та лем. 245.2 забезпечують рівносильність обох характеристик граничного процесу. Отже, потрібно довести граничне співвідношення

$$S = \lim_{\lambda \to 0} p. \tag{330.3}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Спочатку зазначимо таку важливу властивість периметра p. Якщо розділити проміжок $[t_0,\ T]$ за допомогою точок t_i (330.2), а потім вставити ще одну точку поділу $\bar{t}$:

$$t_k < \bar{t} < t_{k+1},$$

то периметр p хіба що збільшиться, причому приріст його не перевищить подвоєної суми коливань функцій $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ на проміжку $[t_k,\ t_{k+1}]$. Справді, додавання нової точки $\bar{t}$ замінює у сумі p один доданок (довжину сторони):

$$\sqrt{\left[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)\right]^2+\left[\psi(t_{k+1})-\psi(t_k)\right]^2} \tag{330.4}$$

сумою двох доданків (сумою довжин двох сторін)

$$\sqrt{\left[\varphi\left(\bar{t}\right)-\varphi(t_k)\right]^2+\left[\psi\left(\bar{t}\right)-\psi(t_k)\right]^2}+\sqrt{\left[\varphi(t_{k+1})-\varphi\left(\bar{t}\right)\right]^2+\left[\psi(t_{k+1})-\psi\left(\bar{t}\right)\right]^2} \tag{330.5}$$

яка принаймні не менше, ніж доданок (330.4).

З іншого боку, вся сума (330.5) не перевищує суму

$$\left|\varphi\left(\bar{t}\right)-\varphi(t_k)\right|+\left|\psi\left(\bar{t}\right)-\psi(t_k)\right|+\left|\varphi(t_{k+1})-\varphi\left(\bar{t}\right)\right|+\left|\psi(t_{k+1})-\psi\left(\bar{t}\right)\right|$$

і, отже, **приріст** периметра p також не перевищує цього числа, яке, очевидно, менше за згадану подвоєну суми коливань.

У подальших міркуваннях обмежимося випадком скінченного S. Для довільно малого числа $\varepsilon > 0$, за означенням **точної** верхньої межі, знайдеться такий спосіб розбиття проміжку $[t_0,\ T]$ на частини точками

$$t_0^* = t_0 < t_1^* < t_2^* < \ldots < t_m^* = T, \tag{330.6}$$

що для відповідного периметра p^* виконуватиметься нерівність

$$p^* > S - \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{330.7}$$

Зважаючи на рівномірну неперервність функцій $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ існує настільки мале число $\delta > 0$, що

$$|\varphi(t'')-\varphi(t')| < \frac{\varepsilon}{8m}, \quad |\psi(t'')-\psi(t')| < \frac{\varepsilon}{8m}$$

при $|t''-t'| < \delta$. Розіб'ємо ж проміжок $[t_0,\ T]$ на частини точками (330.2) за умови, що $\lambda < \delta$ (тобто всі $\Delta t_i < \delta$), та складемо відповідну суму p.

Розглянемо третій спосіб поділу проміжку на частини, при якому точками розподілу є як усі точки t_i поділу (330.2), так і всі точки t_k^* поділу (330.6); нехай йому відповідає периметр p_0. Оскільки цей спосіб отриманий з (330.6) додаванням нових точок, то як зазначено спочатку

$$p_0 \geqslant p^*. \tag{330.8}$$

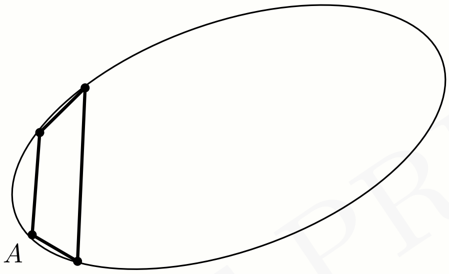


Рис. 330.1

З іншого боку, той же поділ отримано і з (330.2) додаванням точок t_k^*. Додавання кожної точки t_k^* збільшує p не більше ніж на подвоєну суму відповідних коливань функцій $\varphi(t)$ та $\psi(t)$, тобто менше, ніж на $\frac{\varepsilon}{2m}$. Оскільки цей процес повторюється менше ніж m разів, то p_0 перевищить p менше ніж на $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$p_0 < p + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{330.9}$$

З нерівностей (330.9), (330.8), (330.7) випливає, що

$$p > S - \varepsilon,$$

так що $0 < S - p < \varepsilon$, звідки маємо (330.3), отже і (330.1). □

Навпаки, оскільки з (330.1) випливає (329.2), то рівність (330.1) можна розглядати як нове означення довжини кривої, рівносильне колишньому.

Зауваження. Однак, як нескладно бачити, у випадку **замкненої** кривої таке означення не може бути застосоване беззастережно: адже навіть при дотриманні зазначеної умови ніщо не мішало б ламаної стягуватися в точку, а її периметру прямувати до 0 (рис. 330.1). Суть справи в тому, що при **незамкненій** кривій тільки спадання всіх ланок ламаною (p) до нуля вже забезпечує все тісніше примикання їх до відповідних часткових дуг; тому й природно границю її периметра p прийняти за довжину всієї дуги. В разі ж замкненої кривої все вже не так.

(Зазначимо, що якщо замість прямування до 0 довжин всіх сторін ламаною, вимагати того ж щодо діаметрів відповідних дуг, то нове означення було б однаково застосовне як до незамкнених, так і до замкнених кривих.)

Покажемо тепер, як із означення (330.1) або (що те саме) (330.3) безпосередньо вивести вираз (329.4) для довжини S кривої. Будемо виходити з готового виразу для периметра p ламаної (дивіться (248.1)):

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left[\varphi'(\tau_i)\right]^2 + \left[\psi'(\overline{\tau}_i)\right]^2} \cdot \Delta t_i,$$

де τ_i, $\overline{\tau}_i$ — деякі значення t з проміжку $[t_i,\ t_{i+1}]$.

Якщо замінити у другому доданку під знаком кореня скрізь $\overline{\tau}_i$ на τ_i, то перетворений вираз

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left[\varphi'(\tau_i)\right]^2 + \left[\psi'(\tau_i)\right]^2} \cdot \Delta t_i,$$

очевидно, є **інтегральною сумою** саме для інтеграла (329.4). При прямуванні λ до нуля, ця сума і матиме своєю границею згаданий інтеграл. Існування його не викликає сумнівів, бо підінтегральна функція неперервна (теор. 298.1). Для того, щоб показати, що до тієї самої границі прямує і периметр p ламаної, достатньо показати, що різниця $p - \sigma$ прямує до нуля.

Для цього зробимо оцінку цієї різниці

$$|p - \sigma| \leqslant \sum_i \left| \sqrt{\left[\varphi'(\tau_i)\right]^2 + \left[\psi'(\overline{\tau}_i)\right]^2} - \sqrt{\left[\varphi'(\tau_i)\right]^2 + \left[\psi'(\tau_i)\right]^2} \right| \cdot \Delta t_i\,.$$

Застосуємо елементарну нерівність

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2} \right| \leqslant |b - b_1|$$

до кожного доданку написаної вище суми окремо. Ця нерівність очевидна при $a = 0$; якщо $a \neq 0$, то вона безпосередньо випливає з тотожності

$$\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2} = \frac{b + b_1}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} (b - b_1), \quad \text{де} \quad \left| \frac{b + b_1}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b_1^2}} \right| < 1.$$

Це дасть нам

$$|p - \sigma| \leqslant \sum_i |\psi'(\tau_i) - \psi'(\overline{\tau}_i)|\, \Delta t_i\,.$$

Зважаючи на неперервність функції $\psi'(t)$, для будь-якого заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що $|\psi'(t) - \psi'(\overline{t})| < \varepsilon$, при $|t - \overline{t}| < \delta$. Якщо взяти $\lambda < \delta$ (тобто всі $\Delta t_i < \delta$), то і $|\tau_i - \overline{\tau}_i| < \delta$, отже $|\psi'(\tau_i) - \psi'(\overline{\tau}_i)| < \varepsilon$ і

$$|p - \sigma| \leqslant \varepsilon \sum_i \Delta t_i = \varepsilon (T - t_0).$$

Це доводить формулу (329.4).

331. Приклади

1) **Ланцюгова лінія** (рис. 331.1):

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{z}.$$

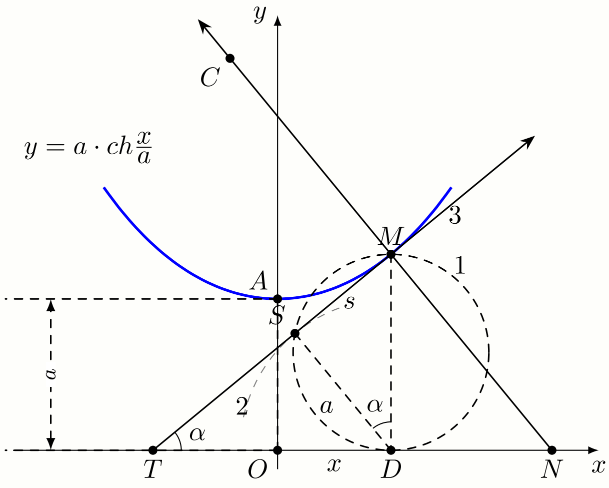


Рис. 331.1

Ми мали вже в пр. 252.1:

$$\sqrt{1+y_x'^2} = \operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

Тоді за формулою (329.8), якщо за початок відліку дуг прийняти вершину A кривої:

$$s = \overset{\frown}{AM} = \int\limits_0^x \operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx = a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\,.$$

Згадуючи, що $\operatorname{tg}\alpha = y_x' = \operatorname{sh}\frac{x}{a}$, маємо також $s = a\operatorname{tg}\alpha$. Отже, у $\triangle MDS$ (рис. 331.1) довжина катета $MS = a\operatorname{tg}\alpha$ дорівнює довжині дузі s. Ми отримали простий спосіб графічного спрямляння ланцюгової лінії.

2) **Парабола**:

$$y = \frac{x^2}{2p}\,.$$

Нехай початком відліку дуг буде вершина O $(x = 0)$, тоді для довільної точки M з абсцисою x маємо

$$s = \overset{\frown}{OM} = \frac{1}{p}\int\limits_0^x \sqrt{x^2+p^2}\,dx = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+p^2}\right)\right)\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{x}{2p}\sqrt{x^2+p^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+p^2}}{p}\,.$$

3) **Астроїда**:

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t.$$

Користуючись вже обчисленими (пр. 224.4) значеннями x'_t і y'_t, маємо

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = 3a \sin t \cos t \quad \left(\text{якщо} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Довжина чверті астроїди між точками $A(a, 0)$ та $B(0, a)$, за формулою (329.4), дорівнює

$$\overset{\frown}{AB} = 3a \int\limits_0^{\pi/2} \sin t \cos t \, dt = \frac{3a}{2} \sin^2 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2},$$

так що довжина всієї кривої буде $6a$.

4) **Циклоїду**:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

При $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2a \sin \frac{t}{2};$$

довжина однієї гілки циклоїди, за формулою (329.4), буде

$$2a \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

5) **Евольвента круга**:

$$x = a(t \sin t + \cos t), \quad y = a(\sin t - t \cos t).$$

Маємо (при $t > 0$)

$$\sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = a\sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2} = at,$$

отже змінна дуга $\overset{\frown}{AM}$ від точки A $(t = 0)$ до будь-якої точки M $(t > 0)$ буде

$$\overset{\frown}{AM} = s = \frac{at^2}{2}.$$

При $t < 0$ у попередній формулі праворуч потрібно лише поставити знак мінус.

6) **Спіраль Архімедеса**:

$$r = a\theta.$$

Застосуємо формулу (329.9). Довжина дуги від полюса O до будь-якої точки M (що відповідає куту θ) буде

$$\overset{\frown}{OM} = a \int\limits_0^{\theta} \sqrt{1 + \theta^2} \, d\theta = \frac{\theta}{2} \left[\theta\sqrt{1 + \theta^2} + \ln\left(\theta + \sqrt{1 + \theta^2}\right)\right].$$

nebayduzhi.math@gmail.com

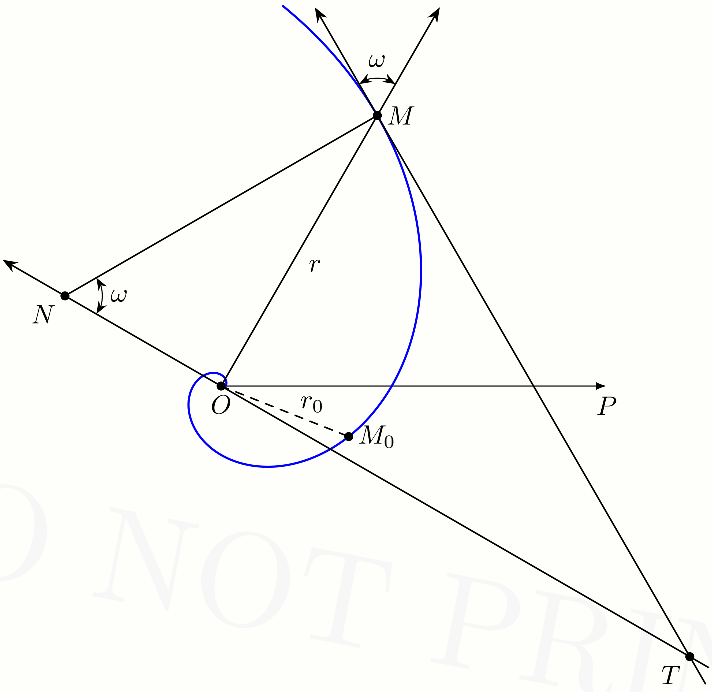


Рис. 331.2

Цікаво, що підставивши тут $\theta = \frac{r}{a}$, ми прийдемо до виразу, який формально схожий на вираз для довжини дуги параболи (дивіться 2).

7) **Логарифмічна спіраль** (рис. 331.2):

$$r = ae^{m\theta}.$$

Оскільки $r'_\theta = mr$, то $r = \frac{1}{m} r'_\theta$, і для дуги $\overset{\frown}{M_0 M}$ між двома точками з координатами $(r_0,\ \theta_0)$ та $(r,\ \theta)$ будемо мати за тією ж формулою (329.9)

$$s = \overset{\frown}{M_0 M} = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2 + r'^2_\theta}\, d\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \int\limits_{\theta_0}^{\theta} r'_\theta\, d\theta = \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}\,(r - r_0).$$

Якщо згадати, що для логарифмічної спіралі $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{m}$, то отриманий результат можна написати так:

$$r = \overset{\frown}{M_0 M} = \frac{r - r_0}{\cos\omega}\,.$$

Наближаючи точку M_0 до полюса O, тобто спрямовуючи r_0 до нуля, і **взявши границю довжини дуги** $\overset{\frown}{M_0 M}$ **за довжину дуги** $\overset{\frown}{OM}$, ми прийдемо до простішого виразу

$$s = \overset{\frown}{OM} = \frac{r}{\cos\omega}\,.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

За допомогою цієї формули з $\triangle MOT$ (дивіться рисунок) вже легко побачити, що дуга s дорівнює полярному відрізку дотичної t_p:

$$\overset{\frown}{OM} = TM.$$

(Ця властивість логарифмічної спіралі дає змогу легко довести таке твердження: *якщо ця крива котиться* ***без ковзання*** *по прямій* MT*, то полюс* O *(якщо вважати його незмінно пов'язаним з кривою) описує деяку пряму.* Залишаємо читачеві довести це.)

Ми отримали дуже простий спосіб графічного спрямляння нашої кривої.

8) **Еліпс**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Зручніше взяти рівняння еліпса в параметричній формі

$$x = a \sin t, \quad y = b \cos t.$$

Очевидно,

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2 t} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\,,$$

де $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ є ексцентриситет еліпса.

Обчислюючи довжину дуги еліпса від верхнього кінця малої осі до будь-якої точки у першому квадранті, отримаємо

$$s = a\int\limits_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt = a\mathbf{E}(\varepsilon, t).$$

Отже, довжина дуги еліпса виражається **еліптичним інтегралом 2-го роду** (розд. 293, розд. 305); як зазначалося, цей факт послужив приводом для назви "еліптичний".

Зокрема, довжина чверті контуру еліпса виражається через **повний** еліптичний інтеграл

$$a\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\, dt = a\mathbf{E}(\varepsilon).$$

Довжина ж всього контуру буде

$$S = 4a\mathbf{E}(\varepsilon).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

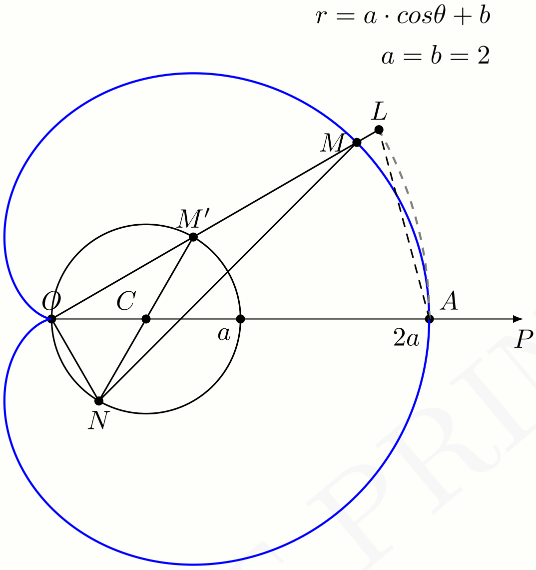


Рис. 331.3

Цікаво відзначити, що для довжини однієї хвилі синусоїди $y = c\sin\frac{x}{b}$, де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ випливає такий самий результат. Геометрично цей збіг легко пояснити. Уявимо прямий круговий циліндр; у перетині його поверхні площиною, похилою до твірних, вийде еліпс. Якщо розрізати поверхню циліндра вздовж твірної, що проходить через вершину малої осі, і розгорнути, то контур еліпса перейде в синусоїду.

Аналогічно до **еліптичних інтегралів** (обох типів) зводиться і обчислення дуги **гіперболи**.

9) **Равлик Паскаля** (рис. 331.3):

$$r = a\cos\theta + b.$$

Тут

$$r'_\theta = -a\sin\theta,$$

$$r^2 + r'^2_\theta = a^2 + 2ab\cos\theta + b^2 = (a+b)^2\left[1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right].$$

Тому (при $b \neq a$) для довжини дуги від точки, для якої $\theta = 0$, до точки з будь-яким

nebayduzhi.math@gmail.com

$\theta < \pi$ отримаємо вираз у вигляді **еліптичного інтеграла** (2-го роду)

$$\begin{aligned} s =&(a+b)\int\limits_0^{\theta}\sqrt{1-\frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 2(a+b)\int\limits_0^{\theta/2}\sqrt{1-\frac{4ab}{(a+b)^2}\sin^2 t}\,dt = \\ =&2(a+b)E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b},\ \frac{\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Довжина всієї кривої виразиться **повним** еліптичним інтегралом:

$$S = 4(a+b)E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).$$

Однак для окремого випадку, **кардіоїди** ($b = a$), справа значно спрощується. В цьому випадку

$$r^2 + r_\theta'^2 = 4a^2\cos^2\frac{\theta}{2},$$

так що

$$s = 2a\int\limits_0^{\theta}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 4a\sin\frac{\theta}{2}.$$

Якщо (рис. 331.3) з полюса O радіусом $2a$ описати дугу $\overset{\frown}{AL}$, до перетину з продовженим радіусом-вектором OM, то **хорда** AL, очевидно, дорівнюватиме дузі $s = \overset{\frown}{AM}$.

Довжина всієї кардіоїди буде $8a$.

10) **Лемніската Я. Бернуллі** (рис. 226.8):

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

Обчислимо довжину дуги лемніскати від вершини, що відповідає $\theta = 0$, до будь-якої точки з полярним кутом $\theta < \frac{\pi}{4}$.

Маємо

$$rr_\theta' = -2a^2\sin 2\theta, \quad \text{звідки} \quad r_\theta' = -\frac{2a^2\sin 2\theta}{r}.$$

В такому випадку

$$\sqrt{r^2 + r_\theta'^2} = \frac{2a^2}{r} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}},$$

та за формулою (329.9)

$$s = a\sqrt{2}\int\limits_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = a\sqrt{2}\int\limits_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{1-2\sin^2\theta}};$$

ми знову приходимо до **еліптичного інтеграла** (1-го роду). Оскільки таблиці обчислені для інтегралів, у яких множник k^2 при $\sin^2\theta$ менше одиниці, то зробимо заміну змінної. Покладемо $2\sin^2\theta = \sin^2\varphi$ (оскільки $\theta < \frac{\pi}{4}$, то $2\sin^2\theta < 1$, і кут φ звідси визначити можна); тоді

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi, \quad \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi\, d\varphi, \quad d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}},$$

$$\sqrt{1-2\sin^2\theta} = \cos\varphi$$

і остаточно

$$s = a\int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = aF\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi\right).$$

Вважаючи, що $\theta \to \frac{\pi}{4}$, а $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, для довжини чверті лемніскати отримаємо вираз через **повний** еліптичний інтеграл

$$s = a\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}} = aK\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

довжина всієї лемніскати буде

$$S = 4aK\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(Ми змушені розглядати $\theta \to \frac{\pi}{4}$ або $\varphi \to \frac{\pi}{2}$, оскільки при $\theta = \frac{\pi}{4}$ похідна $r'_\theta = \infty$ та формула (329.9) **безпосередньо** непридатна.)

Чудово, що задача спрямляння дути кривої так часто приводить саме до **еліптичних інтегралів**.

11) Насамкінець наведемо приклад використання формули для довжини дуги при побудові **евольвенти кривої** (розд. 256).

Розглянемо **ланцюгову лінію**. Якщо поточні координати її точки позначити через ξ, η (використовуючи позначення розд. 256), а її дугу, що відлічується від вершини, — через σ, то рівняння кривої набуде вигляду

$$\eta = a\,\mathrm{ch}\,\frac{\xi}{a},$$

а дуга представиться формулою (дивіться приклад 1)

$$\sigma = a\,\mathrm{sh}\,\frac{\xi}{a}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

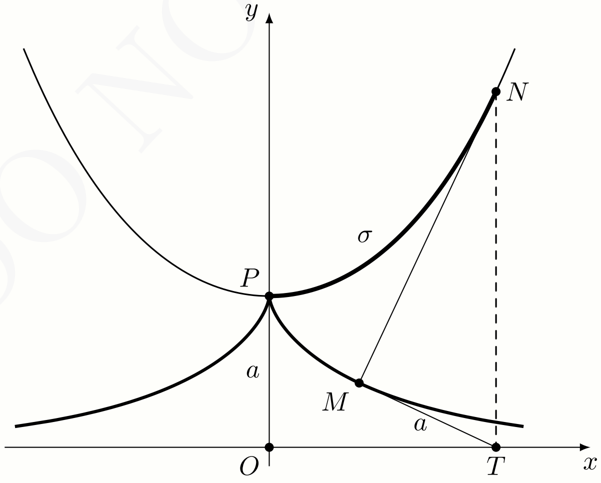


Рис. 331.4

Звідси можна записати ξ та η безпосередньо як функції від σ:

$$\xi = a\left[\ln\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + a^2}\right) - \ln a\right], \quad \eta = \sqrt{\sigma^2 + a^2}\,.$$

Тепер за формулами (256.2):

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}, \quad \sin\beta = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}},$$

а за формулами (256.1) можна написати параметричні рівняння довільної евольвенти

$$\begin{aligned} x &= a\left[\ln\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + a^2}\right) - \ln a\right] + (c - \sigma)\frac{a}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}\,, \\ y &= \sqrt{\sigma^2 + a^2} + (c - \sigma)\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + a^2}}\,. \end{aligned}$$

Зупинимося на тій із евольвент, яка відповідає $c = 0$; вона виходить із вершини ланцюгової лінії і має у ній точку повернення (рис. 331.4). Виключаючи σ, цю криву (її називають **трактрисою**) можна виразити і явним рівнянням

$$x = \pm\left[a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}\right].$$

Якщо згадати вираз "відрізка дотичної" (230.4)

$$t = \left|\frac{y}{y'_x}\sqrt{1 + y'^2_x}\right| = y\sqrt{\frac{1}{y'^2_x} + 1} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,,$$

то звідси легко отримати, що $t = a$. Цим виражено чудову властивість трактриси: *відрізок дотичної до неї має сталу довжину.* (З цим пов'язана і сама назва **трактриса** (англ. tractrix, походить від латинського дієслова trahere — **тягнути**): якщо точка T, що рухається по горизонталі, за допомогою нитки TM **тягне** за собою точку M, то остання буде описувати якраз **трактрису**.)

Цей результат легко випливає безпосередньо з властивостей ланцюгової лінії (дивіться в прикладі 1) її спрямляння, рис. 331.1).

332. Натуральне рівняння плоскої кривої

Задання кривої за допомогою рівняння між координатами її точок (по відношенню до будь-якої системи координат), незважаючи на всю користь такого задання, часто має штучний характер, адже координати не є істотними геометричними елементами кривої. Такими істотними елементами, навпаки, є **дуга** кривої s, що відлічується у певному напрямку від деякої початкової точки, та **радіус кривизни** R (або сама **кривизна** $k = \frac{1}{R}$) (дивіться розд. 250, розд. 251).

Для кожної кривої між цими елементами можна встановити залежність у вигляді

$$F(s, R) = 0,$$

яка і буде називатись *натуральним рівнянням* кривої. (Це переклад з німецької: natürliche Gleichung; не менш виразним є французький термін: èquation intrinsèque, тобто "внутрішнє рівняння".)

Доведемо наступне твердження.

Твердження 332.1. *Криві, які мають одне й те ж натуральне рівняння, можуть відрізнятися лише своїм положенням на площині, так що* ***форму*** *кривої натуральне рівняння визначає цілком однозначно.*

Доведення. Нехай дві криві (I) та (II) мають одне і те ж натуральне рівняння, яке ми візьмемо у вигляді

$$\frac{1}{R} = g(s). \tag{332.1}$$

Для того, щоб довести їх конгруентність, спочатку перенесемо одну з кривих так, щоб співпали точки, від яких на обох кривих відлічуються дуги, а потім повернемо цю криву так, щоб співпали додатні напрямки дотичних у цих точках.

Позначимо індексами (1 і 2) елементи обох кривих, що відповідають одному й тому ж значенню s:

— координати змінної точки: (x_1, y_1) та (x_2, y_2);
— кут між дотичною та віссю x: α_1 та α_2;
— радіус кривизни: R_1 та R_2.

З рівняння (332.1) маємо при всіх s: $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$, тобто (250.2)

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{d\alpha_2}{ds} \,. \tag{332.2}$$

Окрім того, згідно з припущенням, при $s = 0$

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \tag{332.3}$$

та

$$\alpha_1 = \alpha_2. \tag{332.4}$$

З (332.2) і спираючись на наслідок насл. 131.1.1, випливає, що α_1 та α_2 можуть відрізнятися лише на константу; але, оскільки при $s = 0$ ці величини співпадають, то рівність (332.4) завжди справедлива. В такому випадку для всіх значень s буде (249.4)

$$\frac{dx_1}{ds} = \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \frac{dx_2}{ds},$$
$$\frac{dy_1}{ds} = \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \frac{dy_2}{ds},$$

звідки аналогічним способом робимо висновок, що і рівності (332.3) справедливі завжди, тобто криві співпадають. □

Покажемо тепер, як по натуральному рівнянню (332.1) кривої відтворити її координатний вираз. Перед усім з (332.1) маємо $\frac{d\alpha}{ds} = g(s)$, так що

$$\alpha = \int\limits_0^s g(s)\, ds + \alpha_0, \tag{332.5}$$

де α_0 — стала. Потім, виходячи із рівностей

$$dx = \cos\alpha\, ds, \quad dy = \sin\alpha\, ds, \tag{332.6}$$

інтегруючи, знаходимо, що

$$x = \int\limits_0^s \cos\alpha\, ds + x_0, \quad y = \int\limits_0^s \sin\alpha\, ds + y_0, \tag{332.7}$$

де x_0 та y_0 — нові сталі.

Нескладно зрозуміти, що обертання кривої несе за собою зміну сталої α_0, а її паралельне перенесення пов'язане зі зміною сталих x_0, y_0. (Використовуючи зворотні твердження, легко отримати нове доведення пропозиції, що була сформульована вище.) Якщо ці сталі дорівнюють нулю, то це означає, очевидно, що крива розташована

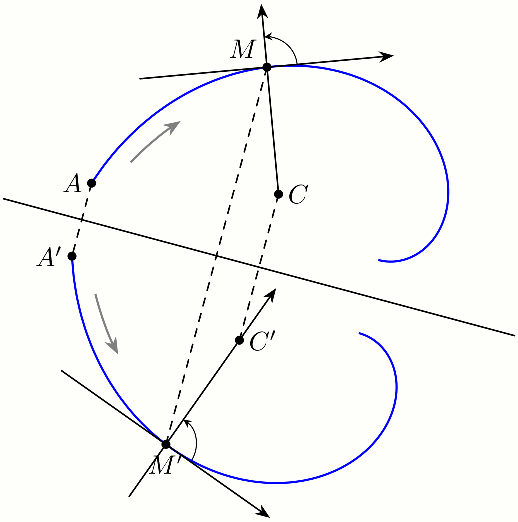


Рис. 332.1

так, що початкова точка відліку дуг співпадає з початком координат, а додатній напрямок дотичної в цій точці співпадає з додатнім напрямком осі x.

Нехай тепер рівняння (332.1) вибране довільно (лише функцію $g(s)$ ми будемо припускати **неперервною**). Тоді, визначивши спочатку α за формулою (332.5), а потім x та y — з рівнянь (332.7), отримаємо параметричний вираз деякої кривої. Диференціюючи (332.7), повернемося до (332.6), звідки перед усім вбачаємо, що

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

так що ds, справді, є диференціалом дуги цієї кривої, а s — дугою (якщо належним чином обрати початкову точку відліку). Потім ті ж рівності (332.6) приводять до висновку, що α є кутом дотичної до тієї ж кривої із віссю x. Нарешті, диференціюючи (332.5), знайдемо, що кривизна дорівнюватиме

$$\frac{d\alpha}{ds} = g(s)$$

і, отже, рівняння (332.1) справді виявляється **натуральним рівнянням** для нашої кривої. Отже, *кожне рівняння вигляду* (332.1), *де функція $g(s)$ неперервна, може розглядатися як* ***натуральне рівняння*** *деякої кривої.*

Звертаємо увагу читачів на те, що за рахунок вибору початкової точки і напрямку відліку дуг на кривій в її натуральне рівняння можна вносити (хоч і незначні) зміни.

Насамкінець зазначимо, що дві **симетрично** розташовані криві (сумістити їх перенесенням **на площині** неможливо; для цього знадобилося б обертання у **просторі**) (рис. 332.1) мають натуральні рівняння вигляду (330.1), що відрізняються лише знаком правої частини

$$\frac{1}{R} = g(s) \quad \text{і} \quad \frac{1}{R} = -g(s). \tag{332.8}$$

Справді, при узгодженому виборі початкових точок та напрямків для відліку дуг, їх радіуси кривизни будуть мати протилежні знаки. І навпаки, дві криві, що мають, відповідно, рівняння (332.8), перенесенням на площині можуть бути зведені до симетричного розташування. Можна також не вважати, що такі криві істотно відрізняються за формою.

333. Приклади

1) Знайти криву, що відповідає натуральному рівнянню

$$R^2 = 2as.$$

Маємо

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2as}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2s}{a}}, \quad s = \frac{a}{2}\alpha^2.$$

(Оскільки нам треба знайти хоча б **одну** криву, то вибирати сталі інтегрування ми будемо виключно із міркувань зручності. Це зауваження слід мати на увазі і надалі.)

Отже

$$ds = a\alpha\, d\alpha.$$

Обираючи α за параметр, отримаємо

$$dx = \cos\alpha\, ds = a\alpha\cos\alpha\, d\alpha, \quad dy = \sin\alpha\, ds = a\alpha\sin\alpha\, d\alpha,$$

звідки

$$x = a(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha), \quad y = a(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha).$$

Крива виявилася **евольвентою круга** (пр. 225.8).

2) Те ж саме для натурального рівняння

$$R^2 + s^2 = 16a^2.$$

Тут

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{16a^2 - s^2}}, \quad \alpha = \arcsin\frac{s}{4a}, \quad s = 4a\sin\alpha, \quad ds = 4a\cos\alpha\, d\alpha.$$

Тоді

$$dx = \cos\alpha\, ds = 4a\cos^2\alpha\, d\alpha, \quad dy = \sin\alpha\, ds = 4a\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha$$

nebayduzhi.math@gmail.com

і звідси, інтегруючи,

$$x = 2a\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) = a(2\alpha + \sin 2\alpha),$$
$$y = -a\cos 2\alpha = a - a(1 + \cos 2\alpha).$$

Якщо перейти до параметра $t = 2\alpha - \pi$, то рівняння отриманої кривої приймуть вигляд

$$x = \pi a + a(t - \sin t), \quad y = a - a(1 - \cos t),$$

і ми впізнаємо **циклоїду** (пр. 225.6), тільки зміщену та перевернуту в порівнянні з її звичайним положенням.

3) Те ж саме для натурального рівняння

$$R = ms.$$

Очевидно,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{ms}, \quad \alpha = \frac{\ln s}{m}, \quad s = e^{m\alpha}, \quad ds = me^{m\alpha}d\alpha,$$
$$dx = \cos\alpha \cdot me^{m\alpha}d\alpha, \quad dy = \sin\alpha \cdot me^{m\alpha}d\alpha$$

і, нарешті,

$$x = \frac{m}{1+m^2}(m\cos\alpha + \sin\alpha)e^{m\alpha}, \quad y = \frac{m}{1+m^2}(m\sin\alpha - \cos\alpha)e^{m\alpha}.$$

Перейдемо до полярних координат. Перед усім

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}e^{m\alpha}.$$

Потім, вводячи сталий кут ω, за умови $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{m}$, будемо мати

$$\frac{y}{x} = \frac{m\sin\alpha - \cos\alpha}{m\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(\alpha - \omega),$$

так що полярний кут θ можна взяти рівним $\alpha - \omega$, звідки $\alpha = \omega + \theta$. Остаточно полярне рівняння знайденої кривої буде таким:

$$r = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}e^{m\omega}e^{m\theta};$$

це **логарифмічна спіраль** (пр. 226.3). Величина коефіцієнту при $e^{m\theta}$ не має значення, його можна звести до 1 поворотом полярної осі.

4) Займемося тепер задачею іншого роду: за заданою кривою знайти її натуральне рівняння.

nebayduzhi.math@gmail.com

а) Для **ланцюгової лінії**

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

мали (пр. 331.1; пр. 252.1)

$$s = a\operatorname{sh}\frac{x}{a} = \sqrt{y^2 - a^2}, \quad R = \frac{y^2}{a};$$

звідси

$$R = a + \frac{s^2}{a}.$$

б) Для **астроїди**

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t,$$

якщо за початок відліку дуг обрати середину її гілки в першому квадранті, буде (порівняйте з пр. 331.3)

$$s = \frac{3a}{2}\sin^2 t - \frac{3a}{4}, \quad R = 3a\sin t\cos t.$$

Тому

$$R^2 = 4\cdot\frac{3a}{2}\sin^2 t\cdot\frac{3a}{2}\cos^2 t = 4\left(\frac{3a}{4} + s\right)\left(\frac{3a}{4} - s\right) = \frac{9a^2}{4} - 4s^2$$

і остаточно натуральне рівняння астроїди може бути записане у вигляді

$$R^2 + 4s^2 = \frac{9a^2}{4}.$$

в) У випадку **кардіоїди**

$$r = a(1 + \cos\theta)$$

у нас було (пр. 331.9; пр. 252.6)

$$s = 4a\sin\frac{\theta}{2}, \quad R = \frac{4}{3}a\cos\frac{\theta}{2};$$

очевидно,

$$9R^2 + s^2 = 16a^2.$$

г) Останні два результати містяться як окремі випадки у наступному. Для **епіциклоїди** та **гіпоциклоїди** (пр. 225.7) натуральне рівняння буде

$$(1 + 2m)^2R^2 + s^2 = 16m^2(1 + m^2)a^2.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

д) Нескладно знову отримати натуральні рівняння **евольventi круга, циклоїди та логарифмічної спіралі**, що відомі нам із 1)-3).

5) По натуральному рівнянню кривої можна знайти натуральне рівняння її еволюти. Ми мали вже відношення (255.6)

$$\rho = R\frac{dR}{ds}. \tag{333.1}$$

Якщо початок відліку дуг на еволюті обрати так, щоб було $R = \sigma$ (дивіться вл. 255.2), то, виключаючи R та s з цих двох співвідношень та натурального рівняння даної кривої, прийдемо до залежності між ρ та σ, тобто до **натурального рівняння еволюти**.

а) Для **логарифмічної спіралі** $R = ms$; тоді $\rho = mR = m\sigma$. З точністю до позначень ми повернулися до попереднього рівняння, звідки приходимо до висновку, що еволютою буде така сама логарифмічна спіраль, яка від початкової логарифмічної спіралі буде відрізнятися лише розташуванням (порівняйте з пр. 254.5).

б) Для **евольвенти круга**

$$\sigma = R = \sqrt{2as}, \quad s = \frac{\sigma^2}{2a},$$

$$\frac{dR}{ds} = \sqrt{\frac{a}{2}}\frac{1}{\sqrt{s}} = \frac{a}{\sigma}, \quad \rho = \sigma \cdot \frac{a}{\sigma} = a$$

(результат, який варто було передбачити).

в) Якщо натуральне рівняння кривої має вигляд

$$R^2 + k^2 s^2 = c^2,$$

то її еволюта буде такою самою кривою, але у k разів збільшеною по лінійним розмірам.

Справді, маємо

$$\sigma = R = \sqrt{c^2 - k^2 s^2}, \quad ks = \sqrt{c^2 - \sigma^2},$$

$$\frac{dR}{ds} = -\frac{k^2 s}{\sqrt{c^2 - k^2 s^2}} = -\frac{k\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sigma}$$

і, нарешті,

$$\rho = -\sigma \cdot \frac{k\sqrt{c^2 - \sigma^2}}{\sigma} = -k\sqrt{c^2 - \sigma^2} \quad \text{або} \quad \rho^2 + k^2\sigma^2 = (kc)^2.$$

Звідси і витікає поставлене твердження.

Отриманий результат може бути застосований до **циклоїди** (пр. 254.4), до **епіциклоїди** та **гіпоциклоїди**, зокрема, до **кардіоїди** та **астроїди** (пр. 254.3).

Зауваження. Вказаний метод у всіх випадках дає змогу судити лише про **форму** еволюти, залишаючи відкритим питання про її розташування.

334. Довжина дуги просторової кривої

По відношенню до простої **просторової кривої**

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

означення довжини дуги може бути дане в тому ж вигляді, як і для плоскої кривої (розд. 249, зауваження). Тут так само для довжини дуги випливає формула, аналогічна до (329.4),

$$s = \overset{\frown}{AB} = \int\limits_{t_0}^{T} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt$$

і так далі. На цей випадок, майже без змін, переноситься все сказане відносно плоскої кривої. Не затримуючись на цьому, наведемо **приклади**.

1) **Гвинтова лінія**:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = ct.$$

Оскільки тут

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

то довжина дуги кривої від точки A $(t = 0)$ до точки M (t — будь-яке) буде

$$s = \overset{\frown}{AM} = \int\limits_{0}^{t} \sqrt{a^2 + c^2}\, dt = \sqrt{a^2 + c^2}\, t$$

— очевидний результат, якщо згадати, що при розгортанні циліндричної поверхні гвинтова лінія на ній перетвориться в похилу пряму.

2) **Крива Вівіані**:

$$x = R\sin^2 t, \quad y = R\sin t\cos t, \quad z = R\cos t.$$

Маємо

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} = R\sqrt{1 + \sin^2 t}.$$

В такому випадку довжина усієї кривої буде виражатися **повним еліптичним інтегралом** 2-го роду

$$S = 4R \int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2 t}\, dt = 4R \int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 4\sqrt{2}\, R \int\limits_{0}^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 t}\, dt = 4\sqrt{2}\, R \cdot E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

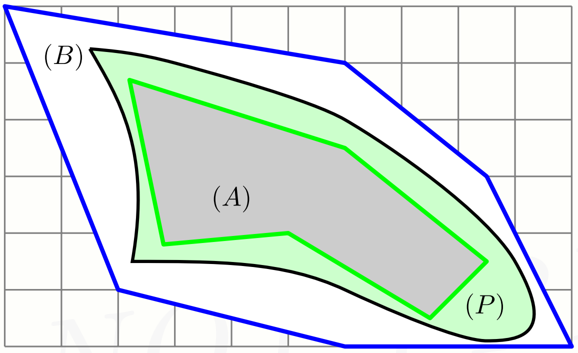


Рис. 335.1

10.2. Площі та об’єми

335. Означення поняття площі. Властивість адитивності

Многокутною областю (або коротше **многокутником**), ми будемо називати довільну скінченну (можливо, і незв’язну) плоску фігур, обмежену однією або декількома замкненими ламаними. Для такої фігури поняття **площі** було досить вивчено у шкільному курсі геометрії, його ми покладемо в основу.

Візьмемо тепер довільну фігуру (P) на площині, що являє собою **обмежену** та **замкнену** область. Її **межу** або **контур** (K) ми завжди будемо собі уявляти у вигляді замкнутої кривої (або декількох таких кривих). (У цьому розділі, говорячи про криву, ми завжди матимемо на увазі **неперервну** просту криву, що допускає параметричне задання. Як довів Жордан (фр. Camille Jordan, Камíль Жордáн), замкнена крива цього типу завжди розбиває площину на дві області, внутрішню та зовнішню, для яких вона виступає спільною межею.)

Розглянемо усі можливі многокутники (A), що цілковито містяться у (P), та многокутники (B), що цілковито містять у собі (P) (рис. 335.1). Якщо A та B означають, відповідно їх площі, то завжди $A \leqslant B$. Множина чисел $\{A\}$, обмежена зверху будь-яким B, має **точну** верхню межу P_* (розд. 11), до того ж $P_* \leqslant B$. Так само множина чисел $\{B\}$, обмежена знизу числом P_*, має **точну** нижню межу $P^* \geqslant P_*$. Ці дві межі можна було б назвати так: першу — **внутрішньою**, а другу — **зовнішньою** площею фігури (P).

Якщо обидві межі

$$P_* = \sup\{A\} \quad \text{та} \quad P^* = \inf\{B\}$$

*співпадають, то їх спільне значення P називається **площею** фігури (P).* У цьому випадку фігуру (P) називають **квадрованою**.

Легко побачити наступну властивість.

nebayduzhi.math@gmail.com

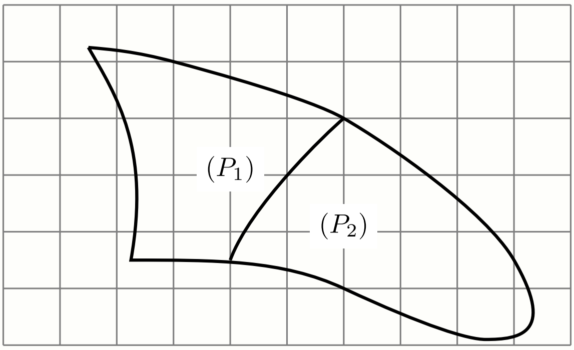


Рис. 335.2

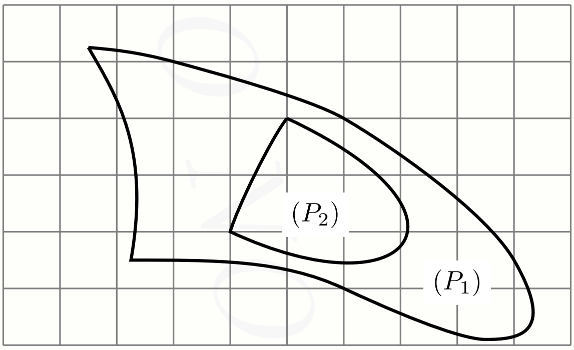


Рис. 335.3

Властивість 335.1. *Для існування площі необхідно та достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайшлись такі два многокутника (A) та (B), що $B - A < \varepsilon$.*

Доведення. Справді, необхідність цієї умови витікає з основних властивостей точних меж (розд. 11): якщо площа P існує, то знайдеться $A > P - \frac{\varepsilon}{2}$ та $B < P + \frac{\varepsilon}{2}$. Достатність зразу ж випливає з нерівностей

$$A \leqslant P_* \leqslant P^* \leqslant B.$$

□

Нехай тепер фігура (P) розкладена на дві фігури (P_1) та (P_2) (вони можуть мати частково спільну межу, але **не накладаються** одна на одну, тобто не мають спільних **внутрішніх** точок). Можна уявити, наприклад, що це зроблено за допомогою кривої, що з'єднує дві точки її контуру, або що цілком міститься всередині (P) (рис. 335.2, рис. 335.3). Доведемо таку властивість.

Властивість 335.2 (Властивість адитивності). *З квадрованості двох із трьох цих фігур* (P), (P_1), (P_2) *випливає квадрованість третьої, причому завжди*

$$P = P_1 + P_2, \tag{335.1}$$

*тобто площа має **властивість адитивності**.*

Доведення. Нехай, для визначеності, фігури (P_1) та (P_2) мають визначені площі. Розглянемо відповідні внутрішні та оточуючи многокутники (A_1), (B_1) та (A_2), (B_2). Із взаємно не накладених многокутників (A_1), (A_2) складеться многокутна область (A) із площею $A = A_1 + A_2$, що цілком міститься всередині області (P). З многокутників (B_1) та (B_2), що можуть і накладатися, складеться область (B) із площею $B \leqslant B_1 + B_2$, що містить у собі область (P). Очевидно що,

$$A_1 + A_2 = A \leqslant B \leqslant B_1 + B_2.$$

Оскільки при цьому B_1 від A_1 та B_2 від A_2 можуть відрізнятись на довільно малу величину, то те ж саме справедливо і для B та A, звідки і випливає квадрованість області (P).

З іншого боку, маємо одночасно

$$A_1 + A_2 = A \leqslant P \leqslant B \leqslant B_1 + B_2$$

та

$$A_1 + A_2 \leqslant P_1 + P_2 \leqslant B_1 + B_2,$$

так що числа P та $P_1 + P_2$ містяться між одними і тими ж, до того ж довільно близькими, межами $A_1 + A_2$ та $B_1 + B_2$, отже ці числа дорівнюють одне одному, що й потрібно було довести. ☐

Зауважимо, зокрема, що звідси випливає $P_1 < P$, тобто що *частина фігури має площу меншу, ніж ціла фігура.*

336. Площа як границя

Умова квадрованості, що сформульована вище, може бути перефразована так.

Твердження 336.1. *Для того, щоб фігура* (P) *була квадрованою, необхідно і достатньо, щоб існували такі дві послідовності многокутників* $\{(A_n)\}$ *та* $\{(B_n)\}$, *які відповідно містяться в* (P) *та оточують* (P) *та площі яких мали б спільну границю*

$$\lim A_n = \lim B_n = P. \tag{336.1}$$

*Ця границя, очевидно, і буде **площею** фігури* (P).

nebayduzhi.math@gmail.com

Іноді замість многокутників зручніше використовувати інші фігури, квадрованість яких вже визначена.

Твердження 336.2. *Якщо для фігури* (P) *можна побудувати такі дві послідовності* ***квадрованих*** *фігур* $\{(Q_n)\}$ *та* $\{(R_n)\}$*, які відповідно містяться в* (P) *та оточують* (P) *та площі яких мають спільну границю*

$$\lim Q_n = \lim R_n = P, \tag{336.2}$$

то фігура (P) *також буде* ***квадрованою****, причому вказана границя буде її* ***площею****.*

Доведення. Це одразу витікає із попереднього твердження, якщо замінити фігуру (Q_n) многокутником (A_n), що міститься в ній, а фігуру (R_n) — многокутником (B_n), що оточує її, настільки близькими за площею, щоб водночас виконувалось і (336.1). □

Хоча на практиці вибір фігур (A_n), (B_n), (Q_n), (R_n), що згадані у сформульованих вище ознаках, і не викликає труднощів, але принциповий інтерес викликає усунення **невизначеності** пов’язаної з цим вибором. З цією метою можна зробити, наприклад, так.

Оточивши розглянуту фігуру (P) деяким прямокутником (R), сторони якого будуть паралельні координатним осям, розіб’ємо його на частини за допомогою прямих, що паралельні до його сторін. Із прямокутників, що цілком містяться у області (P), складемо фігуру $(\tilde{A})$ (на рис. 336.1 вона зафарбована), а з прямокутників, що мають з (P) спільні внутрішні точки, але можуть виходити за межі цієї області, складемо фігуру $(\tilde{B})$. Ці фігури, очевидно, являють собою окремий випадок тих многокутників (A) та (B), про які йшлося у визначенні поняття площі; їх площі $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ залежать від способу розкладання на частини прямокутника (R). Через d позначимо довжину найбільшої з діагоналей часткових прямокутників.

Твердження 336.3. *Якщо при* $d \to 0$ *обидві площі* $\tilde{A}$ *та* $\tilde{B}$ *прямують до спільної границі* P*,* ***і тільки тоді****, область* (P) *буде квадрованою; при виконанні цієї умови вказана границя і буде* ***площею*** *фігури* (P)*.*

Читач може легко сам виразити поняття границі, яке тут фігурує, як “мовою ε-δ” так і “мовою послідовностей”.

Доведення. Доведення потребує лише **необхідність** вказаних умов. Нехай площа P існує, покажемо, що тоді

$$\lim_{d\to 0} \tilde{A} = \lim_{d\to 0} \tilde{B} = P. \tag{336.3}$$

За заданим $\varepsilon > 0$ знайдуться (розд. 335) такі многокутники A та B, що $B - A < \varepsilon$; при цьому можна припустити, що **їх контури не мають спільних точок**

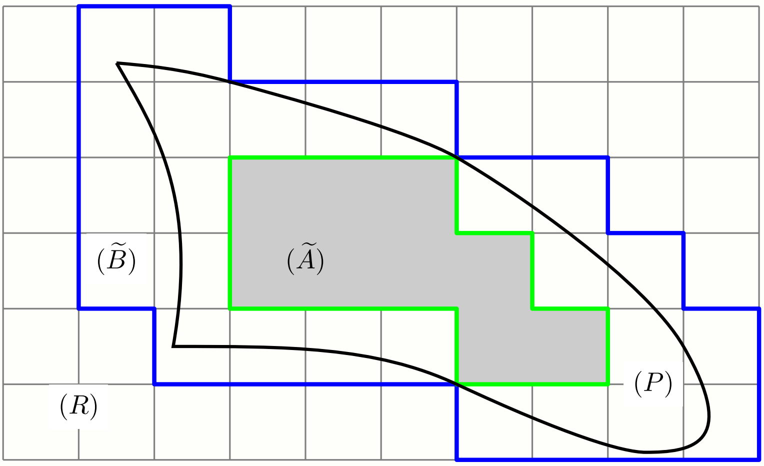


Рис. 336.1

з контуром (K) фігури (P). Позначимо через δ **найменшу** з відстаней між точками контурів обох многокутників, з одного боку, і точками кривої (K) — з іншого.

[Нехай маємо дві скінченні **неперервні** криві на площині; припустимо, наприклад, що вони задані параметрично

$$\begin{aligned}&\text{(I)} \quad x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T);\\ &\text{(II)} \quad x = \varphi^*(u),\ y = \psi^*(u) \quad (u_0 \leqslant u \leqslant U),\end{aligned}$$

де φ, ψ, φ^*, ψ^* — неперервні функції, кожна від свого аргументу. Тоді відстань між двома довільними точками цих кривих

$$\sqrt{[\varphi(t) - \varphi^*(u)]^2 + [\psi(t) - \psi^*(u)]^2}$$

буде неперервною функцією від (t, u) в замкненій області $[t_0, T;\ u_0, U]$ і, отже, досягає там свого найменшого значення (розд. 173). Якщо криві не перетинаються, то ця **найменша** відстань буде відмінна від нуля.]

Якщо тепер взяти $d < \delta$, то кожен частковий прямокутник, що хоча б в одній точці дотичний до кривої (K), заздалегідь лежить за межами многокутника (A) і всередині многокутника (B). Звідси випливає, що

$$A \leqslant \tilde{A} \leqslant P \leqslant \tilde{B} \leqslant B,$$

так що $P - \tilde{A} < \varepsilon$ і $\tilde{B} - P < \varepsilon$, що і приводить до (336.3). □

Зрозуміло, що, базуючись на тотожності (336.3), можна було б побудувати і саме означення площі, яке було б, очевидно, рівносильне попередньому. Таке означення видається досить простим і природнім; однак його недоліком є залежність (звісно, удавана) від орієнтації координатних осей.

337. Класи квадрованих областей

Крива (K), контур області (P), відіграє істотну роль у питанні щодо **квадрованості** цієї області.

Якщо область квадрована, то як ми бачили в розд. 335, за заданим $\varepsilon > 0$ крива (K) може бути поміщена в деяку многокутну область $(B - A)$, що міститься між контурами обох многокутників (A) та (B) (дивіться рис. 335.1) і має площу $B - A < \varepsilon$.

Припустимо тепер протилежне, що контур (K) може бути поміщений в многокутну область (C) з площею $C < \varepsilon$, де ε — будь-яке наперед задане додатне число. При цьому, не зменшуючи загальності, можна припустити, що (C) не покриває усієї фігури (P). Тоді із точок області (P), що не потрапляють до (C), складеться многокутна область (A), що міститься в (P); якщо ж до (A) приєднати (C), то вийде многокутна область (B), яка вже буде оточувати (P). Оскільки різниця $B - A = C < \varepsilon$, то застосувавши критерій вл. 335.1 матимемо квадрованість області (P).

Для спрощення, домовимося вважати, що (замкнена чи незамкнена) **крива** (R) **має площу** 0, якщо її можна покрити многокутною областю із довільно малою площею. Тоді наведене вище міркування дає змогу сформулювати наступну **умову квадрованості**.

Властивість 337.1. *Для того, щоб фігура (P) була квадрованою, необхідно і достатньо, щоб її контур (K) мав площу* 0.

У зв'язку з цим набуває важливості виділення широких класів кривих з площею 0.

Передусім легко показати, що ця властивість притаманна будь-якій неперервній кривій, що виражається **явним** рівнянням виду

$$\underset{(a \leqslant x \leqslant b)}{y = f(x)} \quad \text{або} \quad \underset{c \leqslant y \leqslant d}{x = g(y)} \tag{337.1}$$

(f та g — неперервні функції).

Нехай, наприклад, ми маємо справу з першим із цих рівнянь. За заданим $\varepsilon > 0$ проміжок $[a, b]$ можна розкласти на частини $[x_i,\ x_{i+1}]$ $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ так, щоб у кожній з них коливання ω_i функції f було $< \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ (розд. 87). Якщо позначити, як зазвичай, через m_i та M_i найменше і найбільше значення функції f на i-тому проміжку, то вся наша крива покриється фігурою, що складається з прямокутників

$$[x_i,\, x_{i+1};\ m_i,\, M_i] \quad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$$

(дивіться рис. 337.1) з загальною площею

$$\sum_i (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_i \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_i \Delta x_i = \varepsilon,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

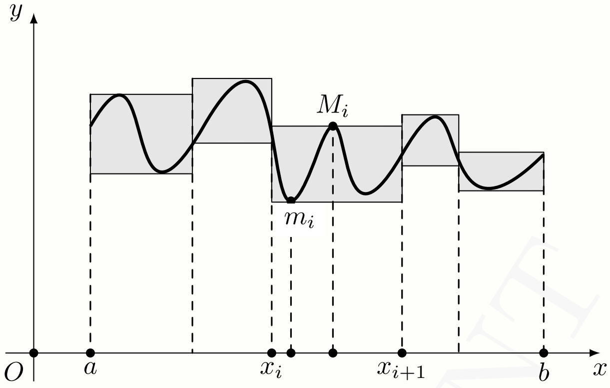


Рис. 337.1

що і треба було довести. Отже, крива (337.1) має площу 0. Звідси випливає така властивість.

Властивість 337.2. *Якщо фігура* (P) *обмежена декількома неперервними кривими, кожна з яких окремо описується явним рівнянням* (337.1) *(того чи іншого типу), то ця фігура квадрована.*

Доведення. Справді, оскільки кожна із згаданих кривих має площу 0, то й увесь контур, очевидно, також буде мати площу 0. ☐

З цього критерію можна отримати інший, менш загальний, критерій, який на практиці, однак, виявляється більш зручним.

Назвемо криву, що задана параметричними рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant T) \tag{337.2}$$

гладкою, якщо

1) функції φ та ψ мають неперервні похідні на всьому проміжку $[t_0, T]$ зміни параметра, та

2) на кривій немає ні кратних, ні, взагалі, особливих точок. У випадку **замкненої** кривої, будемо вимагати ще виконання тотожності

$$\varphi'(t_0) = \varphi'(T), \quad \psi'(t_0) = \psi'(T).$$

Покажемо тепер, що гладка крива має площу 0.

Візьмемо на кривій довільну точку $\overline{M}$, що визначається значенням параметра $\bar{t}$. Оскільки ця точка не особлива, то як ми вже бачили (розд. 223), існує такий проміжок:

$$\bar{\sigma} = (\bar{t} - \bar{\delta},\ \bar{t} + \bar{\delta}),$$

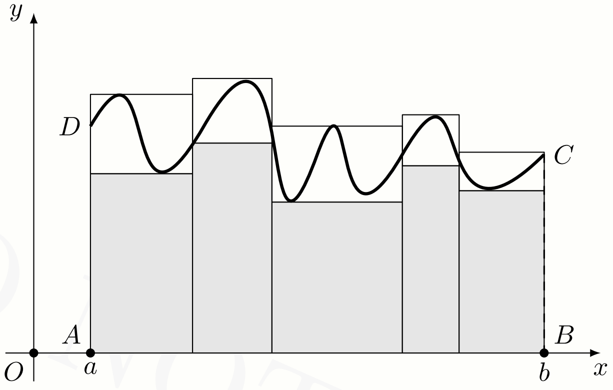


Рис. 338.1

що відповідна ділянка кривої може бути виражена і явним рівнянням.

Застосуємо тепер лему Бореля (лем. 88.1) до проміжку $[t_0, T]$ і системи околів $\Sigma = \{\sigma\}$, що покривають його; весь проміжок покриється скінченним числом таких околів, так що крива розпадається на скінченне число частин, кожна з яких виражається явним рівнянням (337.1) (того чи іншого типу). Залишається лише застосувати твердження, яке було доведене вище. Отже маємо таку властивість.

Властивість 337.3. *Якщо фігура (P) обмежена однією чи кількома* ***гладкими*** *кривими, то вона квадрована.*

Цей висновок залишається справедливим навіть у випадку, коли крива має **скінченне** число особливих точок: відокремивши ці точки за допомогою околів довільно малої площі, ми будемо мати справу вже з гладкими кривими.

338. Обчислення площі за допомогою інтеграла

Звернемося тепер до обчислення площ плоских фігур за допомогою інтегралів.

Насамперед розглянемо, *вперше — у строгому викладенні*, задачу про визначення площі **криволінійної трапеції** $ABCD$, яку ми вже бачили раніше (рис. 338.1). Ця фігура обмежена зверху кривою DC, що має рівняння

$$y = f(x),$$

де $f(x)$ — додатна і неперервна на проміжку $[a, b]$ функція; знизу вона обмежена відрізком AB осі x; а з боків — двома ординатами AD та BC (кожна з яких може звестися до точки). Власне, **існування** площі P даної фігури $ABCD$ випливає з доведеного щойно, і мова піде лише про її обчислення.

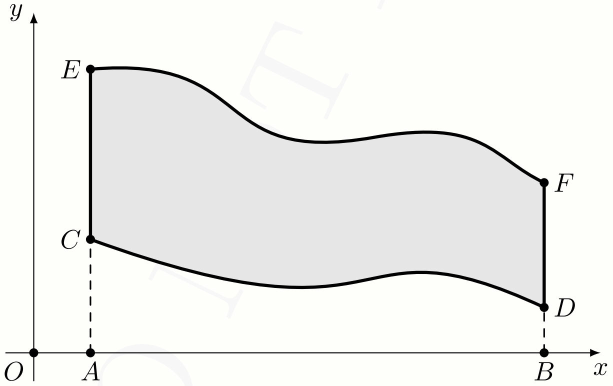


Рис. 338.2

З цією метою розіб’ємо проміжок $[a, b]$, як зазвичай, на частини, додавши між a та b ряд точок

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \dots < x_i < x_{i+1} < \ \dots < x_n = b.$$

Позначимо через m_i та M_i, відповідно, найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на i-тому проміжку $[x_i,\ x_{i+1}]$ $(i = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1)$ і складемо суми (Дарбу)

$$s = \sum_i m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_i M_i \Delta x_i.$$

Вони, очевидно, являють собою площі східчастих фігур, що складаються, відповідно, з прямокутників, які цілковито містяться та цілковито містять у собі $ABCD$ (дивіться рис. 338.1). Тому

$$s < P < S.$$

Але при прямуванні до нуля найбільшої з різниць Δx_i границею обох сум буде інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, отже, саме йому і дорівнює площа, яку ми шукали

$$P = \int\limits_a^b y\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{338.1}$$

Це само по собі (розд. 336) доводить квадрованість криволінійної трапеції $ABCD$; щоб отримати згадані в розд. 336 **послідовності фігур**, можна було б, наприклад, ділити проміжок на рівні частини.

Якщо **криволінійна трапеція** $CDFE$ (рис. 338.2) обмежена і знизу, і зверху кривими, рівняння яких

$$y_1 = f_1(x) \quad \text{та} \quad y_2 = f_2(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

nebayduzhi.math@gmail.com

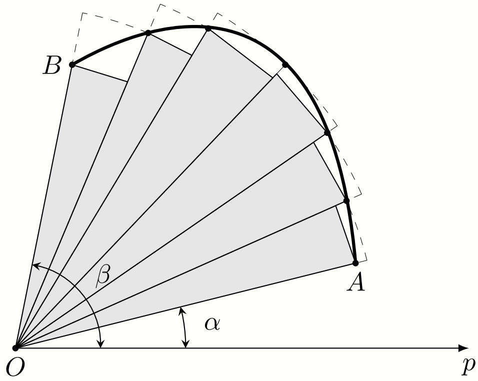


Рис. 338.3

то, розглядаючи її як різницю двох фігур $ABFE$ та $ABDC$, отримаємо площу початкової трапеції у вигляді

$$P = \int_a^b (y_2 - y_1)\,dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx. \tag{338.2}$$

Нехай тепер маємо **сектор** AOB (рис. 338.3), що обмежений кривою AB та двома радіус-векторами OA та OB (кожен з яких може звестись до точки). При цьому крива AB задається полярним рівнянням $r = g(\theta)$, де $g(\theta)$ — додатна і неперервна на проміжку $[\alpha, \beta]$ функція. **Обчислимо** площу P сектора, оскільки **існування** площі обумовлено властивостями контуру фігури.

Введемо між α та β (дивіться рис. 338.3) проміжні значення

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ \dots < \theta_n = \beta$$

та проведемо радіус-вектори, що відповідають цим кутам. Якщо ввести і тут найменше і найбільше значення функції $g(\theta)$ на проміжку $[\theta_i,\ \theta_{i+1}]$: μ_i та M_i, то кругові сектори, описані цими радіусами, будуть, відповідно, цілком міститься та цілком містить фігуру AOB. Складемо окремо дві фігури, площі яких будуть

$$\sigma = \frac{1}{2}\sum_i \mu_i^2 \Delta\theta_i \qquad \Sigma = \frac{1}{2}\sum_i \mathrm{M}_i^2 \Delta\theta_i$$

і, очевидно, $\sigma < P < \Sigma$.

У цих сумах легко впізнати суми Дарбу для інтеграла $\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta [g(\theta)]^2\,d\theta$; при прямуванні до нуля найбільшої з різниць $\Delta\theta_i$ обидві суми прямують до спільної границі, до цього

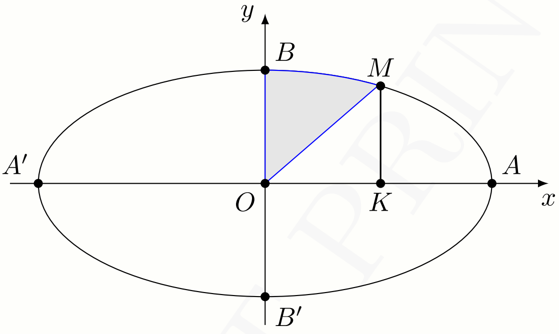


Рис. 339.1

інтеграла, так що і

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2\, d\theta. \qquad (338.3)$$

Тут можна було б навести зауваження, аналогічне зауваженню з попереднього прикладу, але з посиланням до тв. 336.2.

339. Приклади

1) Визначити площу P фігури, обмеженої **ланцюговою лінією**

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,,$$

віссю x та двома ординатами, що відповідають абсцисам 0 та x (рис. 331.1).

Маємо

$$P = \int\limits_{0}^{x} a\operatorname{ch}\frac{x}{a}\, dx = a^2\operatorname{sh}\frac{x}{a} = as,$$

де s — довжина дуги AM ланцюгової лінії (пр. 331.1). Отже, шукана площа $AODM$ дорівнює площі прямокутника, побудованого на відрізках DS та SM (оскільки $SM = AM$).

2) Дано **еліпс**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

і точку $M(x, y)$ на ньому (рис. 339.1). Визначити площі криволінійної трапеції $BOKM$ та сектора OMB.

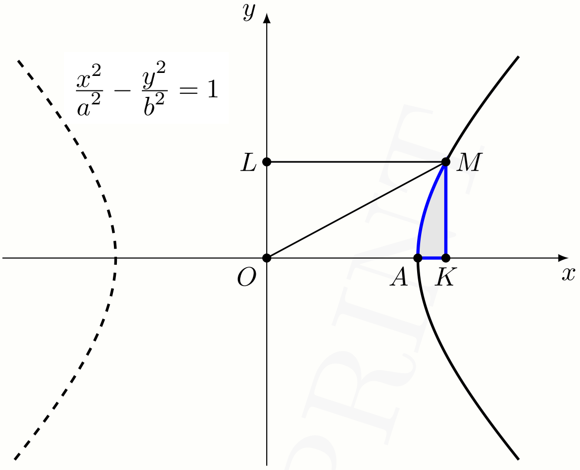


Рис. 339.2

З рівняння еліпса маємо $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, тоді згідно з формулою (338.1)

$$P_1=\text{пл.}BOKM=\int\limits_0^x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{b}{2a}x\sqrt{a^2-x^2}=\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{xy}{2}\,.$$

Оскільки останній доданок є площа $\triangle OKM$, то, віднявши її, отримаємо вираз для площі сектору

$$P_2=\text{пл.}OMB=\frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a}\,.$$

При $x=a$ для площі чверті еліпса отримаємо значення $\frac{\pi ab}{4}$, так що площа цілого еліпса $P=\pi ab$. Для круга $a=b=r$; звідки і випливає відома формула $P=\pi r^2$.

3) Нехай дана **гіпербола**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

і на ній точка $M(x,\,y)$ (рис. 339.2). Визначити площі криволінійних фігур AKM, OAM та $OAML$.

З рівняння гіперболи маємо $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, і, використовуючи формулу (338.1), маємо

$$P_1=\text{пл. }AKM=\frac{b}{a}\int\limits_a^x\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]\Bigg|_a^x=$$

$$=\frac{1}{2}xy-\frac{ab}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\,.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

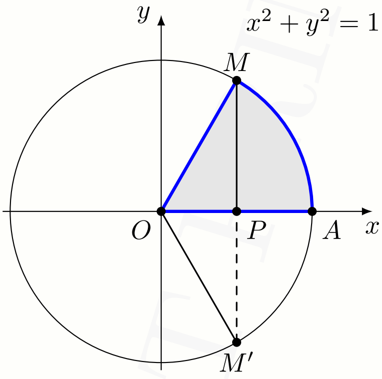


Рис. 339.3

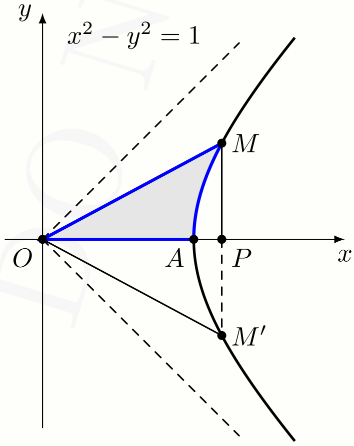


Рис. 339.4

Оскільки $\dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} = \dfrac{y}{b}$, то цей вираз можна звести до більш симетричної форми

$$P_1 = \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Звідки вже легко отримати

$$P_2 = \text{пл. } OAM = \frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$
$$P_3 = \text{пл. } OAML = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}ab\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Зауваження. Отриманий результат дасть змогу нам дещо поглибити аналогію між тригонометричними (круговими) та гіперболічними функціями. Зіставимо **круг** радіуса 1: $x^2 + y^2 = 1$ та рівнобічну **гіперболу**: $x^2 - y^2 = 1$ (рис. 339.3, рис. 339.4).

Ці криві параметрично можуть бути виражені так:

$$\textit{для круга:}\qquad OP = x = \cos t,\quad PM = y = \sin t,$$

$$\textit{для гіперболи:}\quad OP = x = \operatorname{ch} t,\quad PM = y = \operatorname{sh} t.$$

Але в той час як у випадку круга зрозуміла геометрична роль t — це $\angle AOM$, для гіперболи так трактувати числовий параметр t не можна. Можна, однак, для круга дати й інше трактування параметра t, а саме: t **є подвоєна площа сектора** AOM (або площа сектора $M'OM$). Виявляється, що **це** трактування переноситься і на випадок гіперболи.

Справді, якщо координати точки M є

$$x = \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\,,\quad y = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}\,,$$

то $x + y = e^t$ і $t = \ln(x + y)$. Якщо пригадати формулу для P_2, що була отримана вище, і підставити у ній $a = b = 1$, то отримаємо, що t **дорівнює подвоєній площі сектора** AOM (як і для круга).

Отже, **у крузі** відрізки PM та OP виражають **кругові** синус та косинус від подвоєної площі **кругового сектора** AOM, а для **гіперболи** аналогічні відрізки виражають **гіперболічні** синус та косинус від подвоєної площі **гіперболічного** сектора AOM. Роль гіперболічних функцій по відношенню до гіперболи цілком аналогічна ролі кругових (тригонометричних) функцій по відношенню до круга.

Із вказаним тлумаченням аргументу гіперболічних функцій, як деякої **площі**, пов'язані і позначення обернених до них функцій (дивіться пр. 49.3 та пр. 49.4),

$$\operatorname{Arsh} x,\ \operatorname{Arch} x\quad \text{і так далі.}$$

Літери Ar тут є початковими від латинського слова Area, що означає “площа”.

4) Знайти площу P фігури, що обмежена осями координат та параболою

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}\quad (a > 0).$$

Відповідь:

$$P = \int\limits_0^a y\,dx = \frac{1}{6}a^2.$$

(Читачеві надається можливість самому виконати рисунок.)

5) Визначити площу фігури, що обмежена двома конгруентними параболами

$$y^2 = 2px\quad \text{і}\quad x^2 = 2py$$

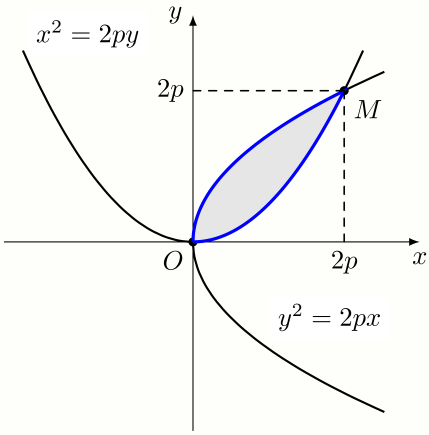


Рис. 339.5

(рис. 339.5).

Вочевидь, потрібно скористатися формулою (338.2), підставляючи там

$$y_1 = \frac{x^2}{2p}, \quad y_2 = \sqrt{2px}\,.$$

Для визначення проміжку інтегрування розв’яжемо об’єднану систему з даних рівнянь і знайдемо абсцису точки M перетину цих парабол, що відмінна від початку координат: вона дорівнюватиме $2p$. Маємо

$$P = \int\limits_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right) dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{6p}\right)\Bigg|_0^{2p} = \frac{4}{3}p^3.$$

6) Знайти площу P еліпса, що заданий рівнянням

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 \quad (AC - B^2 > 0,\ C > 0). \tag{339.1}$$

Розв’язок. Із цього рівняння

$$y_1 = \frac{-Bx - \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C}\,,$$

$$y_2 = \frac{-Bx + \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C}\,,$$

причому y_1, y_2 набудуть дійсних значень лише для таких x, що задовольняють нерівність

$$C - (AC - B^2)x^2 \leqslant 0,$$

тобто знаходяться на проміжку $[-\alpha,\, \alpha]$, де $\alpha = \sqrt{\dfrac{C}{AC-B^2}}$.

Тоді шукана площа буде

$$P = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} (y_2 - y_1)\, dx = \frac{2}{C} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{C - (AC-B^2)x^2}\, dx =$$
$$= \frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx = \frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\cdot\frac{1}{2}\pi\alpha^2 = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}\,.$$

7) Нехай, врешті решт, еліпс задано **загальним** рівнянням

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2\partial x + 2ey + f = 0;$$

треба знайти його площу P.

Ця задача може бути зведена до попередньої.

Якщо перенести центр еліпса $(\xi,\, \eta)$, який, як відомо, визначається з рівнянь

$$\begin{aligned} a\xi + b\eta + \partial &= 0, \\ b\xi + c\eta + e &= 0, \end{aligned} \tag{339.2}$$

тоді рівняння прийме вигляд

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + f' = 0,$$

де

$$\partial\xi + e\eta + f = f'. \tag{339.3}$$

Виключаючи ξ, η з рівнянь (339.2) та (339.3), знайдемо

$$\begin{vmatrix} a & b & \partial \\ b & c & e \\ \partial & e & f-f' \end{vmatrix} = 0,$$

звідки

$$f' = \frac{\Delta}{ac-b^2}, \quad \text{де} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & \partial \\ b & c & e \\ \partial & e & f \end{vmatrix}.$$

(Очевидно, що f' та Δ від'ємні, інакше рівняння б не виражало дійсної кривої.)

Отримане рівняння легко зводиться до вигляду, розглянутому у попередньому прикладі, якщо підставити

$$A = -\frac{a}{f'}, \quad B = -\frac{b}{f'}, \quad C = -\frac{c}{f'}\,.$$

Отже, площа еліпса буде

$$P = \frac{\pi|f'|}{\sqrt{ac-b^2}} = -\frac{\pi\Delta}{(ac-b^2)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

8) Формула (338.1) може бути використана і у тому випадку, коли крива, що обмежує криволінійну трапецію, задана параметрично або рівняннями вигляду (337.2). Виконавши заміну в інтегралі (338.1), отримаємо (за умови, що $x = a$ при $t = t_0$ та $x = b$ при $t = T$):

$$P = \int\limits_{t_0}^{T} y x'_t\,dt = \int\limits_{t_0}^{T} \psi(t)\varphi'(t)\,dt. \tag{339.4}$$

Якщо, наприклад, при обчисленні площі **еліпса** виходити з його параметричного задання

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

і прийняти до уваги, що x зростає від $-a$ до a, тоді як t спадає від π до 0, то знайдемо

$$P = 2\int\limits_{\pi}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,dt = 2ab\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 t\,dt = \pi ab.$$

Тут ми обчислили площу верхньої половини еліпса та подвоїли її.

9) Аналогічно обчислюється площа фігури, що обмежена **циклоїдою**

$$x = a(t-\sin t), \quad y = a(1-\cos t).$$

Згідно з формулою (339.4)

$$P = \int\limits_{0}^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 dt = a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Отже, шукана площа дорівнює потроєній площі круга.

10) Знайти площу одного витка **спіралі Архімедеса**

$$r = a\theta$$

(рис. 339.6).

Згідно з формулою (338.3) матимемо

$$P_1 = \frac{1}{2}a^2\int\limits_{0}^{2\pi}\theta^2\,d\theta = \frac{a^2}{6}\theta^3\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2,$$

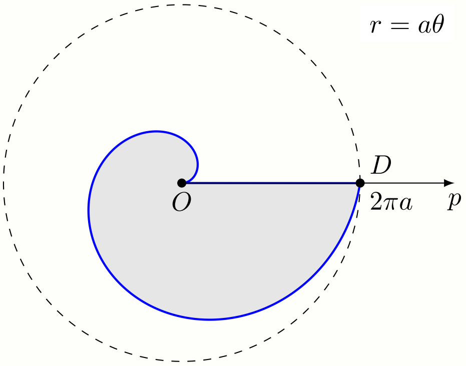


Рис. 339.6

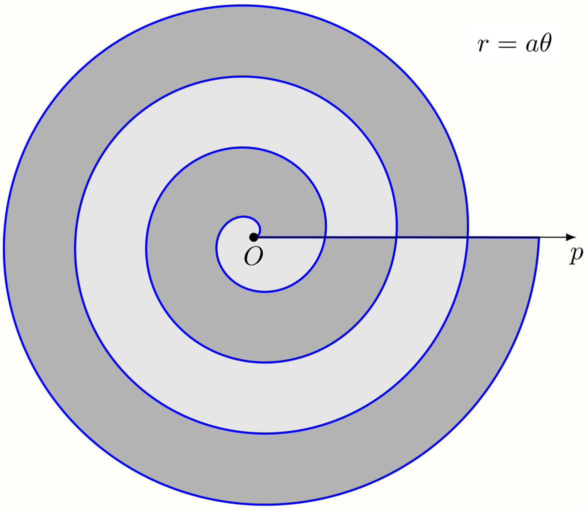


Рис. 339.7

тоді як площа круга радіуса $2\pi a$ дорівнюватиме $4\pi^3 a^2$. *Площа витку спіралі дорівнює третині площі круга* (цей результат був відомий ще Архімедесу).

Залишаємо читачеві самостійно показати, що площі фігур, обмежених послідовними витками, складають арифметичну прогресію з різницею $8\pi^3 a^2$.

11) Знайти площу **равлика**

$$r = a\cos\theta + b \quad \text{при } b \leqslant a.$$

Згідно з формулою (338.3) матимемо

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (a\cos\theta + b)^2\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)\theta + \frac{1}{4}a^2\sin 2\theta + 2ab\sin\theta\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}(a^2 + 2b^2).$$

Зокрема, площа **кардіоїди** $(b = a)$ дорівнює $\frac{3}{2}\pi a^2$.

12) Знайти площу **лемніскати Я. Бернуллі** (рис. 226.8)

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta.$$

Достатньо подвоїти площу правого овалу, якому відповідає зміна кута θ від $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$:

$$P = 2\cdot\frac{1}{2}2a^2\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\theta\, d\theta = 4a^2\int\limits_0^{\pi/4}\cos 2\theta\, d\theta = 2a^2.$$

13) Знайти площу **листа Декарта**

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Перейдемо до полярних координат. Зробимо таку заміну

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

і після скорочення на r^2 прийдемо до такого полярного рівняння:

$$r = \frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}.$$

Оскільки сам виток кривої відповідає зміні кута θ від 0 до $\frac{\pi}{2}$, то згідно з формулою (338.3)

$$P = \frac{9a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\left(\sin^3\theta + \cos^3\theta\right)^2}\, d\theta.$$

Роблячи заміну $\sin\theta$ на $\operatorname{tg}\theta\cos\theta$, зведемо підінтегральний вираз до вигляду

$$\frac{\operatorname{tg}^2\theta\cdot d\operatorname{tg}\theta}{\left(1+\operatorname{tg}^3\theta\right)^2},$$

звідки одразу знаходиться первісна функція

$$-\frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\theta}=-\frac{1}{3}\,\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}.$$

Отже,

$$P=-\frac{3a^2}{2}\,\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}\bigg|_0^{\pi/2}=\frac{3a^2}{2}.$$

14) Заново розв’язати задачу 6), скориставшись полярними координатами.

Розв’язок. Вводячи полярні координати, запишемо рівняння еліпса (339.1) у вигляді

$$r^2=\frac{1}{A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta}.$$

Тоді згідно з формулою (338.3) одразу отримуємо (пр. 309.9)

$$P=2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\theta}{A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

Площу всього еліпса ми тут прирівняли до подвоєної площі його частини, що лежить в I та IV координатних кутах. Які складності з’явилися б при використанні результату пр. 288.10 для обчислення безпосередньо усієї площі еліпса?

15) Формулу (338.3) можна пристосувати до випадку, коли крива задана своїми параметричними рівняннями у вигляді (337.2). Оскільки

$$r^2=x^2+y^2,\quad \theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\quad\text{та}\quad \theta'_t=\frac{xy'_t-x'_ty}{x^2+y^2},$$

то

$$\frac{1}{2}r^2\,d\theta=\frac{1}{2}(xy'_t-x'_ty)\,dt.$$

Якщо зміні кута θ від α до β відповідає зміна параметра t від t_0 до T, тоді

$$P=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T}(xy'_t-x'_ty)\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T}[\varphi(t)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi(t)]\,dt. \tag{339.5}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Зважаючи на більшу симетричність ця формула часто приводить до більш простих викладок. Наприклад, якщо по ній обчислити площу **еліпса**, виходячи з його параметричних рівнянь $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, то отримаємо

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t + a\sin t \cdot b\sin t)\,dt = \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

16) Обчислимо ще за формулою (339.5) площу **астроїди**

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t.$$

Маємо

$$P = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + 3a\cos^2 t\sin t \cdot a\sin^3 t]\,dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3}{16}a^2\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

340. Означення поняття об’єму. Його властивості

На зразок того, як у розд. 335, виходячи з поняття площі многокутника, було введене поняття площі для довільної плоскої фігури, ми зараз дамо визначення об’єму тіла, опираючись на об’єм многогранника.

Отже, нехай дано тіло (V) довільної форми, тобто обмежена замкнута область у тривимірному просторі. Межею (S) тіла нехай служить замкнута поверхня (або декілька таких поверхонь). Ми маємо на увазі неперервні поверхні, які допускають параметричне задання.

Ми будемо розглядати многогранники (X) об’єму X, що цілковито містяться у нашому тілі, та многогранники (Y) об’єму Y, що містять це тіло у собі. Завжди існує точна верхня межа V_* для X та точна нижня межа V^* для Y, причому $V_* \leqslant V^*$; їх можна було б назвати, відповідно, **внутрішнім** та **зовнішнім об’ємами тіла**.

Якщо обидві межі

$$V_* = \sup\{X\} \quad \text{та} \quad V^* = \inf\{Y\}$$

співпадають, тоді їх спільне значення V називається ***об’ємом*** *тіла (V).*

В такому випадку тіло (V) іноді називається *кубованим.*

І тут легко побачити, що *для існування об’єму необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайшлись такі два многогранники (X) та (Y), для яких $Y - X < \varepsilon$.*

Далі:

Якщо тіло (V) розкладене на два тіла (V_1) та (V_2), то із існування об'єму для двох із цих трьох тіл витікає існування об'єму і для третього тіла. При цьому

$$V = V_1 + V_2,$$

тобто об'єм також має **властивість адитивності**.

Легко перефразувати для об'ємів і ті твердження 1), 2), 3), які в розд. 336 були доведені для площ.

Твердження 340.1. *Для того, щоб тіло (V) мало об'єм, необхідно і достатньо, щоб існували такі дві послідовності, відповідно, вхідних та вихідних многогранників $\{(X_n)\}$ та $\{(Y_n)\}$, об'єми котрих мали б* ***спільну границю***

$$\lim X_n = \lim Y_n = V.$$

Ця границя і буде ***об'ємом*** *тіла (V).*

Корисно зазначити і таке твердження, де замість многогранників фігурують довільні тіла, що заздалегідь мають об'єми.

Твердження 340.2. *Якщо для тіла (V) можна побудувати такі дві послідовності, відповідно, вхідних та вихідних тіл $\{(T_n)\}$ та $\{(U_n)\}$, що мають об'єми, і якщо до того ж ці об'єми прямують до* ***спільної границі***

$$\lim T_n = \lim U_n = V,$$

то і тіло (V) має об'єм, що дорівнює вказаній границі.

Насамкінець нагадаємо про можливість вибирати многогранники, що наближаються до тіла, "стандартним" чином. Помістивши тіло всередину деякого прямокутного паралелепіпеда (W) з гранями, що паралельні до координатних площин, розіб'ємо його на частини за допомогою послідовності площин, що паралельні до його граней. З часткових паралелепіпедів, що входять у (V), складемо тіло $(\tilde{X})$, а додавши до них частково вихідні з (V) паралелепіпеди, отримаємо тіло $\tilde{Y}$. Ці тіла являють собою окремі випадки многогранників (X) та (Y), про які йшлося вище. Будемо позначати через d найбільшу з діагоналей тих прямокутних паралелепіпедів, на які був розкладений паралелепіпед (W).

Твердження 340.3. *Якщо при $d \to 0$ обидва об'єми $\tilde{X}$ та $\tilde{Y}$ прямують до спільної границі V,* ***і тільки в цьому випадку****, тіло (V) буде мати об'єм; при виконанні цієї умови, згадана границя і виражатиме об'єм тіла (V).*

Доведення всіх цих тверджень ми залишаємо читачеві; їх легко скопіювати з міркувань розд. 336.

341. Класи тіл, що мають об'єм

Як і у випадку площі, існування об'єму для тіла (V) цілком залежить від властивостей межі (поверхні) (S) цього тіла. Легко (розд. 338) довести наступний критерій.

Твердження 341.1. *Для того щоб існував об'єм тіла* (V)*, необхідно і достатньо, щоб його межа мала об'єм* 0*, тобто щоб цю межу можна було б помістити в многогранник с довільно малим об'ємом.*

Твердження 341.2. *До числа поверхонь з об'ємом* 0 *передусім належать поверхні, що виражаються явним рівнянням одного з трьох типів:*

$$z = f(x, y), \quad y = g(z, x), \quad x = h(y, z),$$

де f*,* g*,* h *—* ***неперервні*** *функції від двох аргументів у деяких обмежених областях.*

Доведення. Нехай, скажімо, дано рівняння першого типу в області (P), яка міститься у прямокутнику (R). Застосувавши насл. 174.1.1 з теорема Кантора маємо: яким би не було $\varepsilon > 0$, цей прямокутник можна розкласти на настільки малі прямокутники (R_i) $(i = 1, 2, \ \ldots\ n)$, щоб коливання функції f у тій частині (P_i) області (P), що міститься у (R_i), було $< \frac{\varepsilon}{R}$. Якщо m_i та M_i — найменше та найбільше із значень функції f у (P_i), тоді уся наша поверхня може бути поміщена у многогранник, складений із прямокутних паралелепіпедів з площами основ R_i та висотами $\omega_i = M_i - m_i$. Об'єм цього многогранника буде

$$\sum \omega_i R_i < \frac{\varepsilon}{R} \sum R_i = \varepsilon,$$

що й потрібно було довести. ☐

Твердження 341.3. *Тому, якщо тіло* (V) *обмежене декількома неперервними поверхнями, кожна з яких окремо виражається явним рівнянням (одного з трьох типів), тоді це тіло має об'єм.*

Щоб дати частковий критерій, що зазвичай використовується на практиці, введемо поняття **гладкої** поверхні.

Нехай поверхня виражається параметричними рівняннями

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v),$$

де функції φ, ψ, χ неперервні разом зі своїми частковими похідними у деякій обмеженій замкненій області (Q) на площині uv. Уявимо собі, що межа цієї області (L) складається з **гладких** кривих. Нарешті, припустимо, що поверхня не має ні кратних, ні жодних інших особливих точок. При виконанні усіх цих умов поверхня і буде називатися **гладкою**.

Нехай $\overline{M}$ — будь-яка точка поверхні, що задається значеннями параметрів $u = \overline{u}$, $v = \overline{v}$; оскільки вона не є особливою, то можна (дивіться розд. 228) оточити точку $(\overline{u}, \overline{v})$ на площині uv таким околом

$$\overline{\sigma} = (\overline{u} - \overline{\delta}, \overline{u} + \overline{\delta};\ \overline{v} - \overline{\delta}, \overline{v} + \overline{\delta}),$$

щоб відповідна ділянка поверхні виражалась явним рівнянням. (Якщо точка $(\overline{u}, \overline{v})$ лежить на межі (L) області (Q), то до неї можна застосувати сказане у розд. 262.) Залишається лише застосувати до замкненої області (Q) та покриваючої її системи околів $\Sigma = \{\overline{\sigma}\}$ лему Бореля (лем. 175.1), щоб встановити можливість розкладання нашої гладкої поверхні на скінченне число частин, кожна з яких буде виражатись явним рівнянням одного з трьох типів. Звідси, згідно з попереднім, випливає, що **гладка поверхня має об'єм** 0.

Твердження 341.4. *Тепер зрозуміло, що тіло, обмежене однією чи декількома гладкими поверхнями, заздалегідь має об'єм.*

Втім, припустима і наявність на поверхні, що обмежує тіло, скінченного числа **особливих** точок, що можуть бути виділені околами з довільно малим об'ємом.

342. Обчислення об'єму за допомогою інтеграла

Почнемо з майже очевидного твердження.

Твердження 342.1. *Прямий циліндр з висотою H, основою якого є* ***квадрована*** *плоска фігура (P), має об'єм, що дорівнює добутку площі основи на висоту:*

$$V = PH.$$

Доведення. Візьмемо (тв. 336.1) многокутники (A_n) та (B_n), що відповідно містяться у (P) та оточують (P), так, щоб їх площі A_n та B_n прямували до P. Якщо на цих многокутниках побудувати прямі призми (X_n) та (Y_n) з висотою H, то їх об'єми

$$X_n = A_n H \quad \text{та} \quad Y_n = B_n H$$

будуть прямувати до спільної границі $V = PH$, яка і буде об'ємом нашого циліндра (пр. 340.1). ☐

Розглянемо тепер (рис. 342.1) деяке тіло (V), що міститься між площинами $x = a$ та $x = b$, і станемо розрізати його площинами, перпендикулярними до осі x. Припустимо, що всі ці перерізи є **квадрованими**, і нехай площа перерізу, що відповідає абсцисі x — позначимо її через $P(x)$ — буде неперервною функцією від x (при $a \leqslant x \leqslant b$).

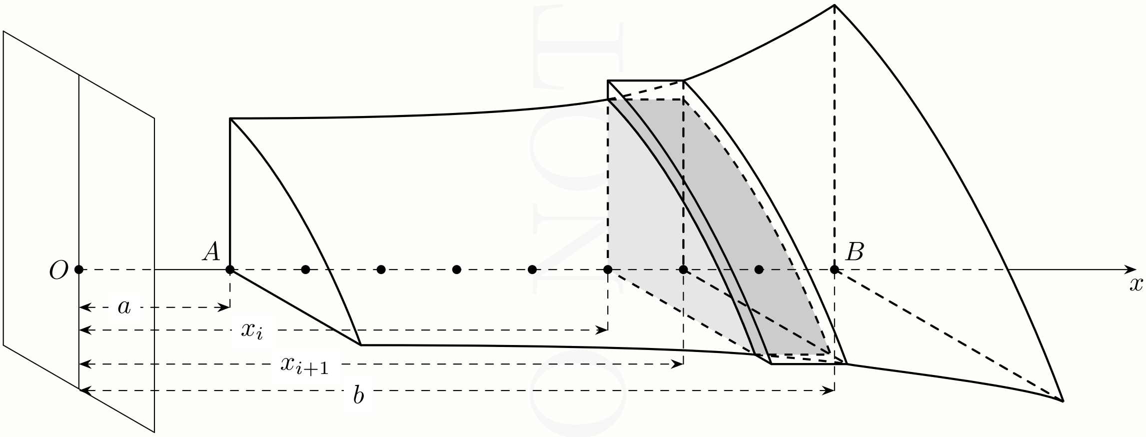
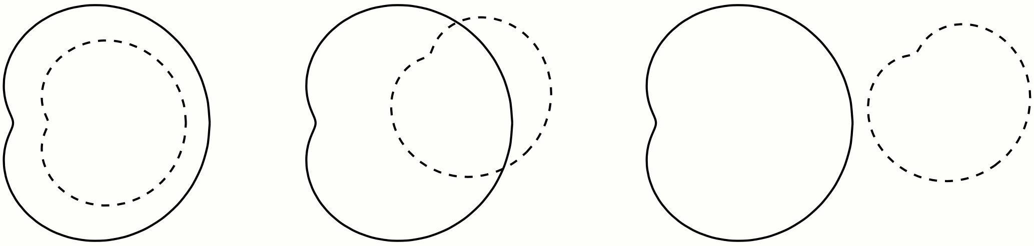


Рис. 342.1



а б в

Рис. 342.2

Якщо спроєктувати (без спотворення) два подібних перерізи на яку-небудь площину, перпендикулярну до осі x, то вони можуть або міститися один в одному (як на рис. 342.2 а), або частково накладатися один на одного, чи лежати один поза іншим (дивіться рис. 342.2 б, в).

Ми зупинимося спочатку на тому випадку, коли два різних перерізи, спроєктовані на площину, що перпендикулярна до осі x, **виявляються завжди суміщеними так, що один міститься у іншому.**

При такому припущенні можна стверджувати, що тіло (V) має об'єм, який виражається формулою

$$V = \int_a^b P(x)\,dx. \tag{342.1}$$

Доведення. Для доведення розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на осі x точками

$$a = x_0 < x_1 < \ \dots < x_i < x_{i+1} < \ \dots < x_n = b$$

на частини і розріжемо площинами $x = x_i$, що проведені через точки поділу, все тіло на шари. Розглянемо i-й шар, що міститься між площинами

$$x = x_i \quad \text{та} \quad x = x_{i+1} \quad (i = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1).$$

У проміжку $[x_i,\ x_{i+1}]$ функція $P(x)$ має найбільше значення M_i та найменше значення m_i; якщо перерізи, що відповідають різним значенням x на цьому проміжку, розмістити на одній площині, скажімо, $x = x_i$, то всі вони (враховуючи зроблене припущення) будуть міститися у найбільшому з них, що має площу M_i, і містити у собі найменший переріз, з площею m_i. Якщо на цих, найбільшому та найменшому, перерізах побудувати прямі циліндри з висотою $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, тоді більший з них буде вміщувати у собі розглянутий шар нашого тіла, а менший сам буде міститися у цьому шарі. Базуючись на зауваженні, зробленому спочатку, об'єми цих циліндрів будуть, відповідно, $M_i \Delta x_i$ та $m_i \Delta x_i$.

Із вхідних циліндрів складемо тіло (T), а з вихідних — тіло (U); їх об'єми дорівнюватимуть, відповідно,

$$\sum_i M_i \Delta x_i \quad \text{та} \quad \sum_i m_i \Delta x_i;$$

і, коли $\lambda = \max \Delta x_i$ прямує до нуля, вони мають спільну границю (342.1). Тоді, спираючись на тв. 340.2, таким же буде і об'єм тіла (V). (Якщо, наприклад, поділити проміжок на рівні частини, легко виділити ті **послідовності** вхідних та вихідних тіл, про які ідеться.) □

Важливим частковим випадком, коли заздалегідь виконується вказане вище припущення про взаємне розташування перерізів, являють собою **тіла обертання**.

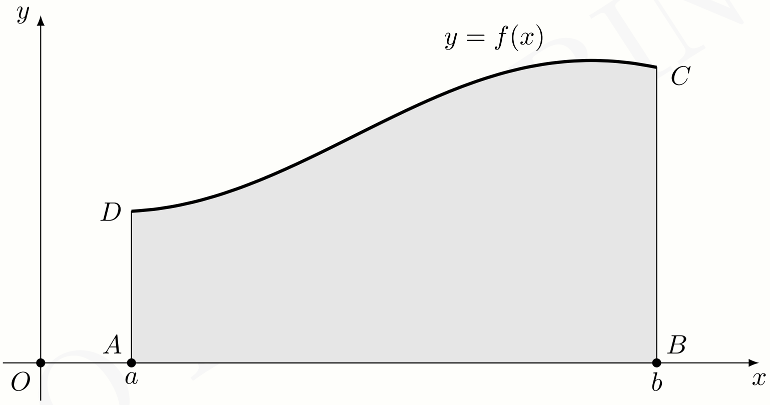


Рис. 342.3

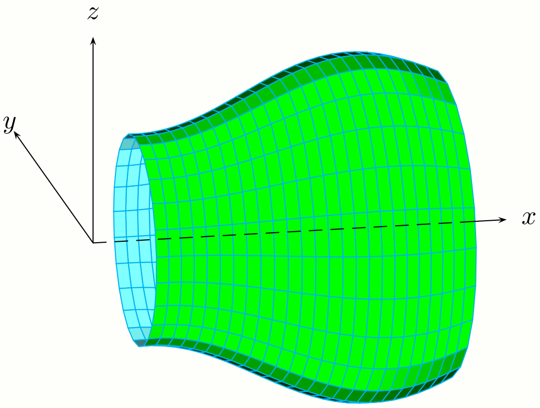


Рис. 342.4

Уявимо на площині xy криву, задану рівнянням $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, де $f(x)$ неперервна та невід'ємна; почнемо обертати криволінійну трапецію, що обмежена цією кривою, навколо осі x (рис. 342.3, рис. 342.4). Отримане тіло (V), очевидно, підходить під розглянутий випадок, бо його перерізи проєктуються на площину, перпендикулярну до осі x, у вигляді концентричних кіл. Тут

$$P(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2,$$

тож

$$V = \pi \int\limits_a^b y^2\,dx = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2 dx. \tag{342.2}$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена і знизу, і зверху кривими $y_1 = f_1(x)$ та

$y_2 = f_2(x)$, то, очевидно,

$$V = \pi \int\limits_a^b [y_2^2 - y_1^2]\,dx = \pi \int\limits_a^b \{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\}\,dx, \tag{342.3}$$

хоча припущення щодо накладання перерізів тут може і не виконуватися. Взагалі доведений результат легко поширюється на всі такі тіла, які отримуються додаванням чи відніманням із тіл, для яких виконується згадане припущення.

В загальному випадку можна стверджувати лише наступне.

Твердження 342.2. *Якщо тіло* (V) *має об’єм (наприклад, якщо тіло обмежене однією чи декількома* ***гладкими*** *поверхнями розд. 341), то його об’єм виражається формулою* (342.1).

Доведення. Справді, взявши довільне $\varepsilon > 0$, ми можемо між площинами $x = a$ та $x = b$ побудувати такі два тіла, $(\tilde{X})$ та $(\tilde{Y})$, що **складені з паралелепіпедів**, так щоб перше містилося у (V), а друге вміщувало (V) у собі, і при цьому було б виконано $\tilde{Y} - \tilde{X} < \varepsilon$. Оскільки для цих тіл нашу формулу, очевидно, можна застосувати, то, позначивши через $A(x)$ та $B(x)$ площі їх поперечних перерізів, будемо мати

$$\tilde{X} = \int\limits_a^b A(x)\,dx, \quad \tilde{Y} = \int\limits_a^b B(x)\,dx.$$

З іншого боку, оскільки $A(x) \leqslant P(x) \leqslant B(x)$, то й

$$\tilde{X} = \int\limits_a^b A(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b P(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b B(x)\,dx = \tilde{Y},$$

так що об’єм V та інтеграл $\int\limits_a^b P(x)\,dx$ одночасно містяться між одними й тими ж межами $\tilde{X}$ та $\tilde{Y}$, що відрізняються менше ніж на ε. Звідси і випливає наше твердження. □

343. Приклади

1) Обчислити об’єм V **кругового конуса** з радіусом основи r та висотою h.

Проведемо через вісь конуса січну площину і виберемо цю вісь за вісь x, вважаючи початковою точкою вершину конуса; вісь y проведемо перпендикулярно до осі конуса (рис. 343.1). Рівняння твірної конуса буде

$$y = \frac{r}{h}x;$$

nebayduzhi.math@gmail.com

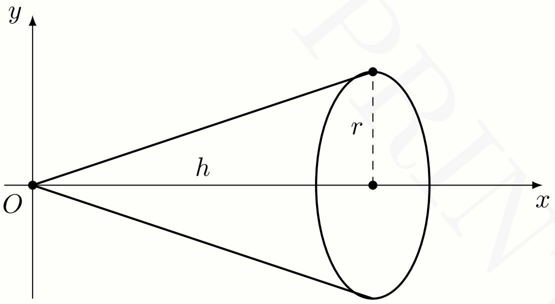


Рис. 343.1

Застосуємо формулу (342.2) і отримаємо

$$V = \pi \int\limits_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\,\frac{x^3}{3}\,\Bigg|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Цей результат відомий читачеві зі шкільного курсу.

2) Нехай **еліпс**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

обертається навколо осі x. Оскільки

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

то для об'єму **еліпсоїда обертання** знайдемо

$$V = \pi \int\limits_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = 2\pi \frac{b^2}{a^2}\int\limits_0^a (a^2 - x^2)\,dx = 2\pi\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

Аналогічно, для об'єму тіла, що отримане обертанням навколо осі y, знайдемо вираз $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. Вважаючи у цих формулах $a = b = r$, ми отримаємо для об'єму кулі з радіусом r відоме значення $\frac{4}{3}\pi r^3$.

3) Визначити об'єм тіла, що отримане обертанням **ланцюгової лінії**

$$y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

навколо осі x, між перерізами, що відповідають точкам 0 та x. Маємо

$$V = \pi a^2 \int\limits_0^x \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{2}\pi a^2 \int\limits_0^x \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a}\right) dx = \frac{1}{2}\pi a^2 \left(x + \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{2x}{a}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\pi a \left(ax + a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \cdot a \operatorname{sh} \frac{x}{a}\right).$$

Згадуючи (пр. 331.1), що $a \operatorname{sh} \frac{x}{a}$ це довжина дуги s нашої кривої, остаточно отримуємо

$$V = \frac{1}{2}\pi a(ax + sy).$$

4) Те ж саме для **циклоїди**

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Параметричні рівняння кривої спрощують виконання підстановки $x = a(t - \sin t)$, $dx = a(1 - \cos t)\, dt$ у формулі

$$V = \pi \int\limits_0^{2\pi a} y^2\, dx.$$

А саме:

$$V = \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\, dt = \pi a^3 \left(\frac{5}{2}t - 4\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

5) Те ж саме для **астроїди**

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Маємо

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad V = \pi \int\limits_{-a}^{a} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

Пропонується самостійно повторити обчислення, виходячи з параметричних рівнянь астроїди і здійснивши заміну змінної (як у попередній задачі).

6) Знайти об'єм тіла обмеженого поверхнями **параболоїда** $2az = x^2 + y^2$ та **сфери** $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$.

Розв'язок. Разом з тілом параболоїда та кулею і їх спільна частина буде **тілом обертання** навколо осі z. Перетин вказаних поверхонь лежить в площині $z = a$.

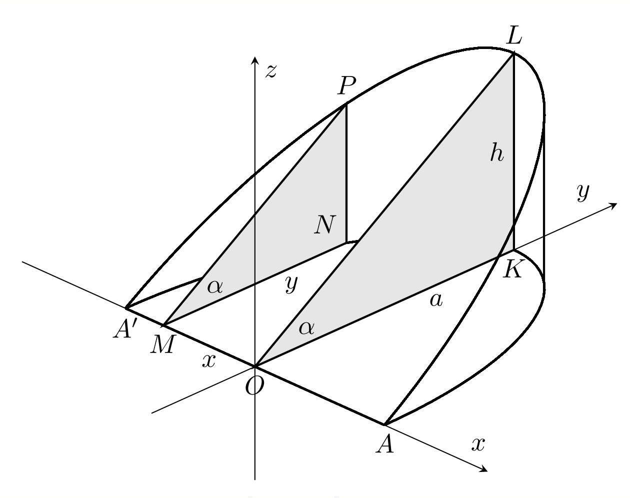


Рис. 343.2

Площини, що перпендикулярні до осі z, перерізають це тіло по колам; квадрати радіусів цих кіл дорівнюють $2az$, доки $z \leqslant a$, і $3a^2 - z^2$, як тільки z стає $> a$. Користуючись формулою, аналогічною до (342.2), будемо мати

$$V = 2\pi a \int\limits_0^a z\,dz + \pi \int\limits_a^{a\sqrt{3}} (3a^2 - z^2)\,dz = \frac{\pi a^3}{3}\left(6\sqrt{3} - 5\right).$$

7) Знайти об'єм тіла обмеженого поверхнями **сфери** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ та **конуса** $x^2 = y^2 + z^2$ $(x \geqslant 0)$.

Вказівка. Перетин поверхонь проходить по площині $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Маємо

$$V = \pi \int\limits_0^{R/\sqrt{2}} x^2 dx + \pi \int\limits_{R/\sqrt{2}}^{R} (R^2 - x^2) dx = \frac{\pi R^3}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right).$$

Досі ми розглядали приклади застосування часткової формули (342.2). Перейдемо тепер до загальної формули (342.1). Оскільки **існування** об'єму у всіх випадках може бути обґрунтоване, наприклад, опираючись на розд. 341, то ми на цьому зупинятися не будемо і зосередимося лише на **обчисленні** об'єму.

8) Визначити об'єм **циліндричного відрізку**. Так називають геометричне тіло, що відтинається від прямого кругового циліндру площиною, що проходить через діаметр його основи (рис. 343.2).

Припустимо, що в основі циліндру лежить круг з радіусом a:

$$x^2 + y^2 \leqslant a^2,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

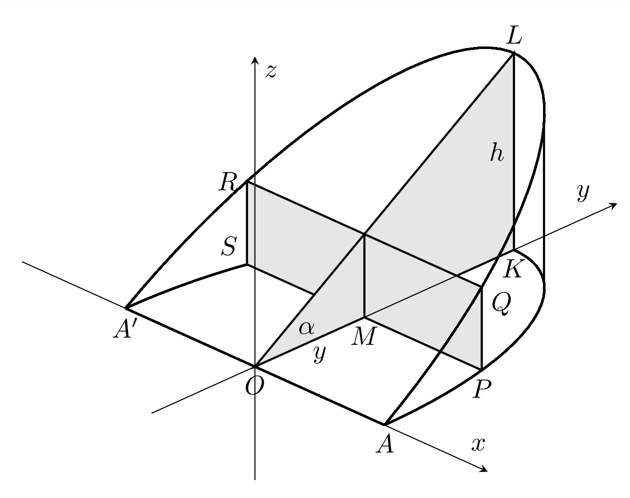


Рис. 343.3

і що січна площина проходить через діаметр AA' і утворює кут α із площиною основи. Визначимо площу перерізу, що перпендикулярний до осі x та перетинає її у точці $M(x)$. Цей переріз буде **прямокутним трикутником**; очевидно,

$$P(x) = \text{пл. } MNP = \frac{1}{2}y^2 \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)\operatorname{tg}\alpha,$$

так що згідно з формулою (342.1)

$$V = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha \int\limits_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{3}a^3 \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}a^2 h,$$

де $h = KL$ — висота циліндричного відрізку.

Цікаво зазначити, що те саме значення об'єму можна було б отримати, змусивши вісь y відігравати ту роль, яку досі відігравала вісь x, тобто розрізаючи тіло площинами, що перпендикулярні до осі y (рис. 343.3). Така площина, проведена через точку M з ординатою y, розріже наше тіло по **прямокутнику** $SPQR$, площа якого буде

$$P(y) = 2xy \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha \cdot y\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Тому, аналогічно до (342.1),

$$V = 2\operatorname{tg}\alpha \int\limits_{0}^{a} y\sqrt{a^2 - y^2}\,dy = \frac{2}{3}\operatorname{tg}\alpha (a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{2}{3}a^3 \operatorname{tg}\alpha.$$

9) Знайти об'єм тривісного **еліпсоїда**, поверхня якого задана канонічним рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

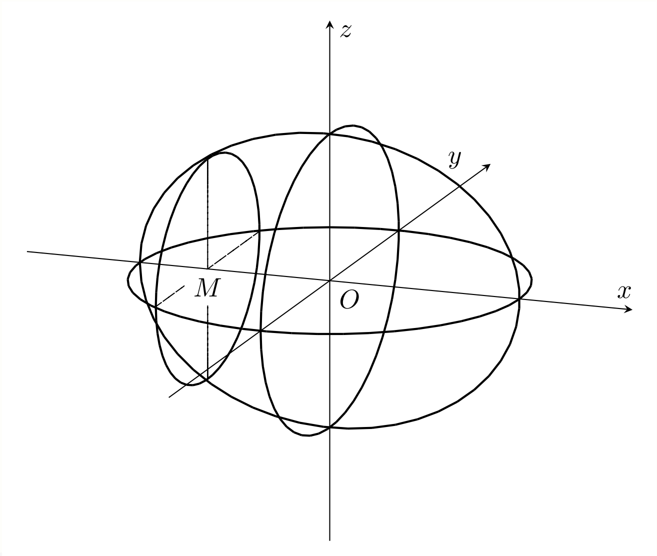


Рис. 343.4

(рис. 343.4).

Площина, що перпендикулярна до осі x і проходить через точку $M(x)$ на цій осі, розріже еліпсоїд по еліпсу; рівняння його проєкції (без викривлення) на площину yz буде таким:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1 \quad (x=\text{const}).$$

Звідси зрозуміло, що півосі його будуть, відповідно,

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad \text{та} \quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

а площа (дивіться пр. 339.2, пр. 339.8, пр. 339.15) буде виражена так:

$$P(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2).$$

Отже, згідно з формулою (342.1) шуканий об’єм

$$V=\frac{\pi bc}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi abc.$$

10) Знайти об’єм **еліпсоїда**, віднесеного від центру,

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Fyz+2Gzx+2Hxy=1.$$

Розв'язок. Якщо зафіксувати z, то рівняння відповідного перерізу (або, точніше, його проєкції на площину xy) буде

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

де виконана підстановка

$$a = A, \quad b = H, \quad c = B, \quad d = Gz, \quad e = Fz, \quad f = Cz^2 - 1.$$

Згідно з пр. 339.7, площа цього перерізу дорівнює

$$P(z) = -\frac{\pi\Delta^*}{(AB - H^2)^{\frac{3}{2}}},$$

якщо через Δ^* позначити визначник

$$\begin{vmatrix} A & H & Gz \\ H & B & Fz \\ Gz & Fz & Cz^2 - 1 \end{vmatrix} = \Delta \cdot z^2 - (AB - H^2),$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}.$$

Підставляючи, отримаємо

$$P(z) = -\frac{\pi}{(AB - H^2)^{\frac{3}{2}}}[\Delta \cdot z^2 - (AB - H^2)].$$

Очевидно, що z може змінюватися лише у межах

$$\text{від} \quad -\sqrt{\frac{AB - H^2}{\Delta}} \quad \text{до} \quad +\sqrt{\frac{AB - H^2}{\Delta}};$$

інтегруючи у цих межах, знайдемо остаточно

$$V = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{\sqrt{\Delta}}.$$

11) Розглянемо два кругових циліндра з радіусом r, осі яких перетинаються під прямим кутом, і визначимо об'єм тіла, обмеженого ними.

Тіло $OABCD$, зображене на рис. 343.5, складає восьму частину тіла, що нас цікавить. Вісь x проведемо через точку O перетину осей циліндрів перпендикулярно

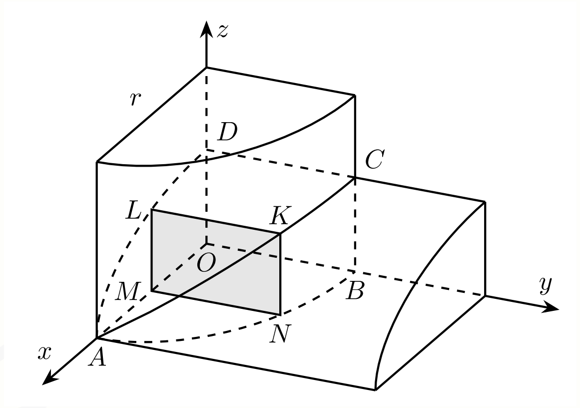


Рис. 343.5

до осей циліндрів. Розглянемо переріз тіла $OABCD$ площиною, проведеною на відстані x від O, перпендикулярно до осі x; вийде **квадрат** $KLMN$, сторона якого $MN = \sqrt{r^2 - x^2}$, так що $P(x) = r^2 - x^2$. Тоді, згідно з формулою (342.1),

$$V = 8\int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = \frac{16}{3} r^3.$$

12) На завершення, розв'яжемо ту ж задачу, але з умовою, що циліндри мають **різні** радіуси: r та $R > r$.

Різниця, у порівнянні з попереднім, буде лише у тому, що, замість квадрата, переріз тіла площиною на відстані x від O буде мати форму **прямокутника** зі сторонами $\sqrt{r^2 - x^2}$ та $\sqrt{R^2 - x^2}$. Отже, в цьому випадку об'єм V буде виражений вже **еліптичним інтегралом**

$$V = 8\int_0^t \sqrt{(R^2 - x^2)(r^2 - x^2)}\, dx$$

або, якщо зробити підстановку $x = r\sin\varphi$ і взяти $k = \frac{r}{R}$,

$$V = 8Rr^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \cdot \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 8Rr^2 \cdot I.$$

Займемося зведенням інтеграла I до повних еліптичних інтегралів обох видів. Передусім

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi - k^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi = I_1 + I_2.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Але

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1-\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi = \frac{k^2-1}{k^2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{1}{k^2}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$
$$= \left(1-\frac{1}{k^2}\right)\mathbf{K}(k) + \frac{1}{k^2}\mathbf{E}(k).$$

З іншого боку, інтегруючи частинами, маємо

$$I_2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2\varphi\, d\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\Big|_0^{\pi/2} -$$
$$- \int\limits_0^{\pi/2}\cos 2\varphi\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2}\left(1-2\cos^2\varphi\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$
$$= \mathbf{E}(k) - 2I.$$

Звідси

$$I = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{k^2}+1\right)\mathbf{E}(k) - \left(\frac{1}{k^2}-1\right)\mathbf{K}(k)\right].$$

Отже, остаточно

$$V = \frac{8R^3}{3}\left[(1+k^2)\mathbf{E}(k) - (1-k^2)\mathbf{K}(k)\right].$$

344. Площа поверхні обертання

Нехай маємо на площині xy (а саме, у верхній півплощині) деяку криву AB (рис. 344.1), задану рівняннями вигляду (337.2), де φ, ψ — неперервні функції з неперервними похідними φ', ψ'. Припускаючи відсутність особливих і кратних точок на кривій, ми можемо за параметр взяти довжину дуги s, що відлічується від точки $A(t_0)$, і перейти до іншого параметричного задання кривої:

$$x = \Phi(s), \quad y = \Psi(s). \tag{344.1}$$

Параметр s змінюється тут від 0 до S, де S — довжина усієї кривої AB.

Якщо обертати криву навколо осі x, то вона опише деяку **поверхню обертання**. Спробуємо обчислити **площу** цієї поверхні.

nebayduzhi.math@gmail.com

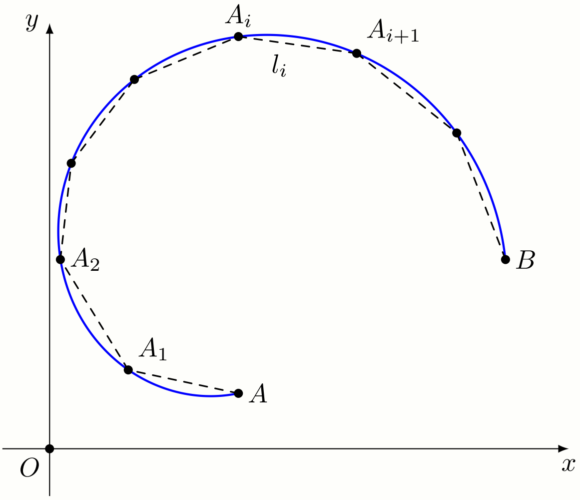


Рис. 344.1

Ми позбавлені можливості розглянути тут в загальному вигляді поняття площі “кривої” (тобто **неплоскої**) поверхні; це буде зроблено у третьому томі. Зараз же ми визначимо це поняття спеціально для поверхні обертання і навчимося обчислювати її площу, причому будемо виходити з даних ще у шкільному курсі правил обчислення бічних поверхонь циліндра, конуса та зрізаного конуса. *Згодом ми переконаємося, що отримана нами формула є окремим випадком загальної формули для площі кривої поверхні.*

Візьмемо на кривій AB в напрямку від A до B послідовність точок (дивіться рис. 344.1)

$$A = A_0,\ A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_i,\ A_{i+1},\ \dots,\ A_{n-1},\ A_n = B \tag{344.2}$$

і розглянемо ламану $AA_1 \dots A_{n-1}B$, вписану у цю криву. Станемо разом з кривою обертати навколо осі x цю ламану; вона опише деяку поверхню, площу якої ми вміємо визначати за допомогою правил елементарної геометрії. **Домовимося за площу поверхні, описаної кривою, вважати границю P площі Q поверхні, що описана ламаною**, при прямуванні до нуля найбільшої з її часткових дуг. Це означення площі поверхні обертання дає нам ключ до її обчислення.

Ми вже знаємо, що послідовність точок (344.2) може бути отримана, виходячи з послідовності зростаючих значень s, розміщених між 0 та S:

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_i < s_{i+1} < \dots < s_{n-1} < s_n = S.$$

Кожна ланка ламаної при обертанні навколо осі x буде описувати поверхню зрізаного конуса. (Зокрема, ця поверхня може звестись до поверхні конуса або циліндра; площу її, однак, і в цьому випадку можна обчислити використовуючи загальну формулу для поверхні зрізаного конуса.) Якщо позначити ординати точок A_i та A_{i+1} відповідно через y_i та y_{i+1}, а довжину ланки A_iA_{i+1} через l_i, то площа поверхні, що описана i-тою ланкою, буде

$$2\pi\frac{y_i+y_{i+1}}{2}l_i.$$

А площа поверхні, що описана усією ламаною лінією, буде

$$Q=2\pi\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y_i+y_{i+1}}{2}l_i.$$

Отриману суму можна розбити на дві суми так:

$$Q=2\pi\sum_{i=0}^{n-1}y_il_i+\pi\sum_{i=0}^{n-1}(y_{i+1}-y_i)l_i.$$

Оскільки функція $y=\Psi(s)$ неперервна, то (згідно з властивістю рівномірної неперервності) можна припустити, що наша крива розкладена на настільки дрібні частини, що усі різниці $y_{i+1}-y_i$ за абсолютною величиною не перевищать довільно малого додатного числа ε. Тоді

$$\left|\pi\sum_{i=0}^{n-1}(y_{i+1}-y_i)l_i\right|\leqslant\varepsilon\pi\sum_{i=0}^{n-1}l_i\leqslant\varepsilon\pi S;$$

звідси випливає, що ця сума прямує до нуля при $\max\Delta s_i\to 0$.

Стосовно суми:

$$2\pi\sum_{i=0}^{n-1}y_il_i,$$

то її можна розкласти на дві суми:

$$2\pi\sum_{i=0}^{n-1}y_i\Delta s_i-2\pi\sum_{i=0}^{n-1}y_i(\Delta s_i-l_i).$$

Оскільки функція $\Psi(s)$ неперервна, то вона обмежена, так що всі $|y_i|\leqslant M$, де M — деяке стале число. Позначивши останню суму через τ, маємо

$$|\tau|=2\pi\left|\sum_{i=0}^{n-1}y_i(\Delta s_i-l_i)\right|\leqslant 2\pi M\left(S-\sum_{i=0}^{n-1}l_i\right).$$

При поділу кривої на все менші та менші частини різниця

$$S-\sum_{i=0}^{n-1}l_i,$$

за означенням довжини дуги, як границя периметра вписаної ламаної (це безпосередньо випливає із означення тільки для простої **незамкненої** кривої, але потім легко випливає і для простої **замкненої** кривої, розкладанням на дві незамкнені криві), повинна прямувати до нуля. Але тоді і $\tau \to 0$.

Сума, що залишилася

$$\sigma = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} y_i \Delta s_i$$

є інтегральною сумою для інтеграла

$$2\pi \int_0^S y\, ds,$$

який внаслідок неперервності функції $y = \Psi(s)$ існує, так що при $\max \Delta s_i \to 0$ сума σ прямує до цього інтеграла.

Ми отримуємо остаточно, що при зроблених припущеннях площа поверхні обертання існує і виражається формулою

$$P = 2\pi \int_0^S y\, ds = 2\pi \int_0^S \Psi(s)\, ds. \tag{344.3}$$

Якщо повернутися до загального параметричного задання (337.2) для нашої кривої, то, виконавши у попередньому інтегралі заміну змінної (дивіться (313.1) та (248.6)), перетворимо його до вигляду

$$P = 2\pi \int_{t_0}^{T} y\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt = 2\pi \int_{t_0}^{T} \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \tag{344.4}$$

Зокрема, якщо крива задана явним рівнянням $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, так, що у ролі параметра опиняється x, будемо мати (248.7)

$$P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y_x'^2}\, dx = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{344.5}$$

345. Приклади

1) Визначити площу поверхні **кульового шару**. Нехай півколо, описане навколо початку радіусом r, обертається навколо осі x. З рівняння кола маємо $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; далі,

$$y_x' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1 + y_x'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad y\sqrt{1 + y_x'^2} = r.$$

У такому випадку площа поверхні шару, описаного дугою, кінці якого мають абсциси x_1 та $x_2 \geqslant x_1$, згідно з формулою (344.5) буде

$$P = 2\pi \int\limits_{x_1}^{x_2} r\,dx = 2\pi r(x_2 - x_1) = 2\pi r h,$$

де h — висота шару. Отже, площа поверхні кульового шару дорівнює добутку довжини окружності великого кола на висоту шару.

Зокрема, при $x_1 = -r$, $x_2 = r$, тобто при $h = 2r$, отримаємо площу усієї кульової поверхні $P = 4\pi r^2$.

2) Знайти площу поверхні, що утворена обертанням дуги **ланцюгової лінії** $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, кінці якої мають абсциси 0 та x.

Оскільки $\sqrt{1 + y_x'^2} = \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, то згідно з формулою (344.5)

$$P = 2\pi \int\limits_0^x \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}\,dx = \frac{2}{a} V,$$

де V — об'єм відповідного тіла обертання (дивіться пр. 343.3).

3) Те ж саме для **астроїди** $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Достатньо подвоїти площу поверхні, описаної дугою астроїди, що лежить у I квадранті $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Ми вже мали

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = 3a \sin t \cos t;$$

у такому випадку згідно з формулою (344.4)

$$P = 2 \cdot 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t\,dt = 12\pi a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\,dt = 12\pi a^2 \frac{\sin^5 t}{5} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2.$$

4) Те ж саме для **циклоїди** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Оскільки $y = 2a \sin^2 \frac{t}{2}$, $ds = 2a \sin \frac{t}{2}\,dt$, то

$$P = 2\pi \int\limits_0^{2\pi} 4a^2 \sin^3 \frac{t}{2}\,dt = 16\pi a^2 \int\limits_0^{\pi} \sin^3 u\,du = 16\pi a^2 \left(\frac{\cos^3 u}{3} - \cos u\right) \bigg|_0^{\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

5) Знайти площу поверхні, що утворена обертанням **кардіоїди** $r = a(1 + \cos\theta)$ навколо полярної осі.

В основній формулі (344.4) слід перейти до полярних координат:

$$P = 2\pi \int\limits_0^S y\,ds = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta r\sin\theta\sqrt{r^2 + r_\theta'^2}\,d\theta. \tag{345.1}$$

У нашому випадку $\alpha = 0$, $\beta = \pi$, і

$$y = r\sin\theta = a(1+\cos\theta)\sin\theta = 4a\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}, \quad ds = 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta,$$

тому

$$P = 2\pi\cdot 8a^2\int\limits_0^\pi \cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

6) Те ж саме для **лемніскати** Я. Бернуллі $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$.
Тут

$$y = a\sqrt{2}\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta \quad ds = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta,$$

отже згідно з формулою (345.1)

$$P = 2\cdot 2\pi\cdot 2a^2\int\limits_0^{\pi/4}\sin\theta\,d\theta = 8\pi a^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \doteq 7{,}361a^2.$$

7) Нарешті, визначимо площу поверхні **еліпсоїда** як видовженого так і стиснутого (сфероїда).

Якщо еліпс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ обертається навколо осі x, і $a > b$, тоді маємо послідовно

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2, \quad yy' = -\frac{b^2}{a^2}x,$$

$$y\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{y^2 + (yy')^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{b^4}{a^4}x^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}.$$

Але $a^2 - b^2 = c^2$, де c — відстань фокуса від центру і $\frac{c}{a}$ дорівнює ексцентриситету ε еліпса. Отже,

$$y\sqrt{1+y'^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a - \varepsilon^2x^2}$$

та

$$P = 2\pi\frac{b}{a}\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2}\,dx = 4\pi\frac{b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2}\,dx =$$

$$= 4\pi\frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - \varepsilon^2x^2} + \frac{a^2}{2\varepsilon}\arcsin\frac{\varepsilon x}{a}\right)\Bigg|_0^a = 2\pi\frac{b}{a}\left(a\sqrt{a^2 - \varepsilon^2a^2} + a^2\arcsin\varepsilon\right);$$

nebayduzhi.math@gmail.com

але $a^2 - \varepsilon^2 a^2 = a^2 - c^2 = b^2$, отже остаточно маємо

$$P = 2\pi b\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right).$$

Якщо еліпс обертається навколо малої осі, то для того, щоб зручніше було скористатися уже зробленими викладками, ми будемо вважати, що вісь x і служить малою віссю. Тоді у отриманому для $y\sqrt{1+y'^2}$ виразі потрібно лиш поміняти місцями a та b, отже тепер

$$y\sqrt{1+y'^2} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + \frac{a^2-b^2}{b^2}x^2} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2};$$

у такому випадку

$$P = 2\pi\frac{a}{b}\int\limits_{-b}^{b}\sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2}\,dx = 2\pi\frac{a}{b}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2} + \frac{b^2}{2c}\ln\left(\frac{c}{b}x + \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2}\right)\right]\Bigg|_{-b}^{b} =$$
$$= 2\pi a\left(\sqrt{b^2+c^2} + \frac{a^2}{2c}\ln\frac{\sqrt{b^2+c^2}+c}{\sqrt{b^2+c^2}-c}\right);$$

але $\sqrt{b^2+c^2} = a$, $c = \varepsilon a$, отже остаточний вираз для P буде таким

$$P = 2\pi a\left(a + \frac{b^2}{2c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right) = 2\pi a\left(a + \frac{b^2}{2a}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right).$$

346. Площа циліндричної поверхні

Розглянемо ще один окремий тип **кривої** поверхні, для якої ми також тут дамо визначення **площі** (*випереджуючи те загальне означення, яке буде дано лише згодом*). Ми маємо на увазі **циліндричну поверхню**.

Повернемося до кривої AB на площині xy, про яку йшлося у розд. 344. Прийнявши її за напрямну, уявимо собі циліндричну поверхню з твірними, що паралельні до осі z (рис. 346.1). По цій поверхні проведемо криву CD, яка перетне кожну твірну в єдиній точці; ця крива визначиться, якщо до рівнянь (337.2) додати ще третє

$$z = \chi(t) \quad (z > 0). \tag{346.1}$$

Мова піде про обчислення площі P частини циліндричної поверхні “під цією кривою”.

Як і у розд. 344, візьмемо довжину дуги s за параметр; тоді не тільки рівняння (337.2) кривої AB заміняться на рівняння (344.1), але й рівняння (346.1) перейде у

$$z = \mathrm{X}(s).$$

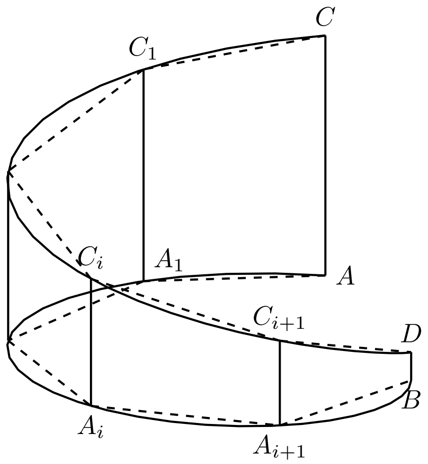


Рис. 346.1

Вписавши в криву AB ламану AA_1 ... $A_{n-1}B$ і, у відповідності з цим, в криву CD ламану CC_1 ... $C_{n-1}D$ (дивіться рис. 346.1), з трапецій $A_iA_{i+1}C_{i+1}C_i$ складемо призматичну поверхню, вписану у циліндричну поверхню. **Площею циліндричної поверхні будемо вважати границю P площі Q згаданої призматичної поверхні** при прямуванні до нуля найбільшої з часткових дуг.

Позначивши $z_i = A_iC_i$, матимемо (зберігаючи решту позначень без змін)

$$Q = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z_i + z_{i+1}}{2} l_i.$$

Користуючись тими ж міркуваннями, що і у розд. 344 (провести їх повністю читач може самостійно), питання зводиться до обчислення границі суми

$$\sum_{i=0}^{n-1} z_i \Delta s_i,$$

в якій легко упізнати інтегральну суму. Остаточно

$$P = \int_0^S z\,ds = \int_0^S \mathrm{X}(s)\,ds.$$

(Цей результат стає цілком наочним, якщо уявити собі циліндричну поверхню розгорнутою на площині, так що циліндр перетвориться на "криволінійну трапецію".)

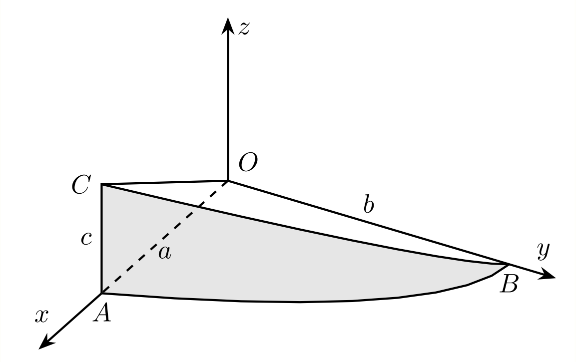


Рис. 347.1

Повертаючись до довільного параметра t, легко отримати і загальну формулу

$$P = \int\limits_{t_0}^{T} z\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = \int\limits_{t_0}^{T} \chi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{346.2}$$

Нарешті, для випадку явного задання кривої AB: $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ ця формула перепишеться так:

$$P = \int\limits_{a}^{b} z\sqrt{1 + y_x'^2}\,dx = \int\limits_{a}^{b} \chi(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \tag{346.3}$$

347. Приклади

1) Нехай на рис. 347.1 крива AB являє собою **параболу** з вершиною в точці B. Її рівняння (в позначеннях рисунку)

$$y = b - \frac{bx^2}{a^2}.$$

Побудована на ній циліндрична поверхня перетнута площиною OBC з рівнянням

$$z = \frac{c}{a}x.$$

Знайти площу P частини циліндричної поверхні ABC.

Розв'язок. Згідно з формулою (346.3)

$$P = \int\limits_{0}^{a} z\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \frac{c}{a^3}\int\limits_{0}^{a} x\sqrt{a^4 + 4b^2x^2}\,dx = \frac{c}{12b^2}\left((a^2 + 4b^2)^{\frac{3}{2}} - a^3\right).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

2) Якщо крива AB буде четвертиною кола $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$, то скористатися формулою (346.3) беззастережно не можна, бо при $x = a$ похідна y'_x дорівнюватиме ∞. Скориставшись параметричним виразом кола

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

ми згідно з загальною формулою (346.2) матимемо

$$P = \int\limits_0^{\pi/2} z\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt = ac\int\limits_0^{\pi/2} \cos t\,dt = ac.$$

Якщо повернутися до **циліндричного відрізку**, про який йшлося в пр. 343.8, то площа його бічної поверхні, як випливає із щойно отриманого результату, дорівнюватиме $2ah$ $(c = h)$.

3) Нарешті, розв'яжемо ту ж саму задачу припускаючи, що кривою AB буде чверть **еліпса**

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

(Явним рівнянням тут не слід користуватись по тій самій причині, що й вище).

а) Нехай спочатку $a > b$. Вводячи ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ згідно з формулою (346.2), отримаємо

$$P = c\int\limits_0^{\pi/2} \cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = \frac{c}{b}\int\limits_0^{a} \sqrt{b^2 + \varepsilon^2 u^2}\,du$$

(підстановка $u = a\sin t$), і остаточно

$$P = \frac{1}{2}ac\left(1 + \frac{1 - \varepsilon^2}{2\varepsilon}\ln\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right).$$

б) У випадку $a < b$, ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$ та

$$P = bc\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}\cos t\,dt = \frac{bc}{2}\left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right).$$

4) Розглянемо частину циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = Rx$, обмежену сферою $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; крива, що виходить на перетині (крива Вівіані, пр. 229.1), як ми знаємо, може бути виражена параметрично так:

$$x = R\sin^2 t, \quad y = R\sin t\cos t, \quad z = R\cos t.$$

Якщо обмежитись першим октантом, то t буде змінюватись у межах від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Очевидно, що перші два рівняння відіграють роль (337.2), а останнє — рівняння (346.1).

Площа згаданої поверхні згідно з формулою (346.2) буде

$$P = 4R^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos t\, dt = 4R^2.$$

5) Визначити площу поверхні тіла, що є спільним для двох циліндрів з радіусом r, осі яких перетинаються під прямим кутом (дивіться пр. 343.11). Введемо систему координат як на рис. 343.5.

Обмежившись однією з циліндричних поверхонь, для першого октанту маємо

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t$$

і, нарешті,

$$z = \sqrt{r^2 - x^2} = r\sin t \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Згідно з формулою (346.2) половина шуканої площі дорівнює

$$\frac{1}{2}P = 8r^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sin t\, dt, \quad \text{тож} \quad P = 16r^2.$$

6) Та ж сама задача, але для випадку, коли циліндри мають різні радіуси r та R $(R > r)$ (пр. 343.12).

Обчислимо спочатку площу частини циліндричної поверхні з радіусом r. Маємо

$$x = r\sin t, \quad y = r\cos t \quad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

$$z = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - r^2\sin^2 t} = R\sqrt{1 - k^2\sin^2 t} \quad \left(k = \frac{r}{R}\right).$$

Згідно з формулою (346.2)

$$P_1 = 8Rr \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\, dt = 8Rr\mathbf{E}(k).$$

Повертаючись тепер до циліндричної поверхні з радіусом R, поміняємо ролями вісь z та вісь y. На цей раз

$$x = R\sin t, \quad z = R\cos t,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 t} = r\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2 t} \quad \left(k = \frac{r}{R}\right),$$

причому t може змінюватись (якщо, як завжди, обмежитися першим октантом) лише від 0 до $\arcsin k$. Тоді згідно з формулою, аналогічної до (346.2), отримаємо

$$P_2 = 8 \int\limits_0^{\arcsin k} y\sqrt{x_t'^2 + z_t'^2}\, dt = 8Rr \int\limits_0^{\arcsin k} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2 t}\, dt.$$

Підстановка

$$\sin t = k \sin\varphi, \quad dt = \frac{k\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

де φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$, дає

$$\int\limits_0^{\arcsin k} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2 t}\, dt = k \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Останній інтеграл ми вже бачили в пр. 343.12; він дорівнює

$$\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\mathbf{K}(k) + \frac{1}{k^2}\mathbf{E}(k).$$

Отже,

$$P_2 = 8R^2\Big(\mathbf{E}(k) - (1 - k^2)\mathbf{K}(k)\Big).$$

Остаточно

$$P = P_1 + P_2 = 8R(R + r)\Big(\mathbf{E}(k) - (1 - k)\mathbf{K}(k)\Big).$$

На цьому вичерпуються найпростіші геометричні застосування визначеного інтеграла. З обчисленням геометричних протяжностей у більш складних та більш загальних випадках ми зустрінемося у третьому томі.

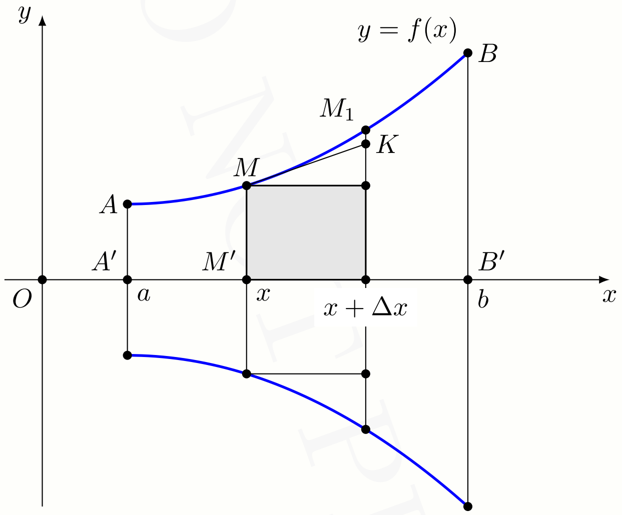


Рис. 348.1

10.3. Обчислення механічних і фізичних величин

348. Схема застосування визначеного інтеграла

Перш ніж перейти до застосування визначеного інтеграла в області механіки, фізики та техніки, корисно насамперед усвідомити той шлях, по якому у прикладних питаннях зазвичай приходять до визначеного інтеграла. З цією метою ми намітимо загальну схему застосування інтеграла, ілюструючи її прикладами вже вивчених геометричних задач.

Уявимо, що потрібно визначити сталу величину Q (геометричну чи будь-яку іншу) **зв'язану з проміжком** $[a, b]$. При цьому нехай кожному частковому проміжку $[\alpha, \beta]$, що міститься у $[a, b]$, відповідає певна частина величини Q так, що поділ проміжку $[a, b]$ на частини приводить до поділу на відповідні складові і величини Q.

Точніше кажучи, ідеться про деяку "функцію від проміжку" $Q([\alpha, \beta])$, якій притаманна "властивість адитивності"; це означає, що якщо проміжок $[\alpha, \beta]$ складається з частин $[\alpha, \gamma]$ та $[\gamma, \beta]$, тоді і

$$Q([\alpha, \beta]) = Q([\alpha, \gamma]) + Q([\gamma, \beta]).$$

Задача ж полягає в обчисленні її значення, що відповідає усьому проміжку $[a, b]$.

Для прикладу візьмемо на площині криву $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ (рис. 348.1). (Припускається, що функція $f(x)$ неперервна і має неперервну похідну. Для визначеності ми припустимо, що крива постійно йде **вгору** і опукла **униз**.) Тоді 1) **довжина** S кривої AB, 2) **площа** P криволінійної трапеції $AA'B'B$ та 3) **об'єм** V тіла, утвореного обертанням цієї трапеції навколо осі x, — всі три будуть величинами вказаного типу. Нескладно усвідомити, які "функції від проміжку" ними породжуються.

Розглянемо "елемент" ΔQ величини Q, що відповідає "елементарному проміжку" $[x,\ x+\Delta x]$. Виходячи з умов питання, намагаються знайти для ΔQ наближене значення у вигляді $q(x)\Delta x$, *лінійне відносно* Δx, так щоб воно відрізнялося від ΔQ хіба що на нескінченно малу величину порядку більшого за Δx. Інакше кажучи, *із нескінченно малого (при $x \to 0$) "елемента" ΔQ виділяють його* ***головну частину***. Зрозуміло, що тоді відносна похибка наближеної рівності

$$\Delta Q \doteq q(x)\Delta x \tag{348.1}$$

буде прямувати до нуля разом з Δx.

Так, у прикладі 1) елемент дуги $\overset{\frown}{MM_1}$ можна замінити відрізком дотичної MK, так, що з ΔS виділяється лінійна частина

$$\sqrt{1+y_x'^2}\Delta x = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\Delta x.$$

У прикладі 2) природно замінити елементарну смугу ΔP вхідним прямокутником з площею

$$y\Delta x = f(x)\Delta x.$$

Насамкінець, у прикладі 3) з елементарного шару ΔV виділяється його головна частина у вигляді вхідного кругового циліндру, з об'ємом

$$\pi y^2\Delta x = \pi[f(x)]^2\Delta x.$$

У всіх трьох випадках нескладно показати, що похибка від такої заміни буде нескінченно малою більш високого порядку, ніж Δx. А саме, у випадку 1) вона буде меншою ніж $KM_1 = \Delta y - dy$, у випадку 2) — меншою ніж $\Delta x\Delta y$, а у випадку 3) — меншою ніж $\pi(2y+\Delta y)\Delta x\Delta y$.

Як тільки це зроблено, можна вже стверджувати, що *шукана величина Q* ***точно*** *обчислюється інтегралом*

$$Q = \int\limits_a^b q(x)\,dx. \tag{348.2}$$

Для обґрунтування цього розділимо проміжок $[a,b]$ точками $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}$ на елементарні проміжки

$$[a,\ x_1],\quad [x_1,\ x_2],\ \ldots,\ [x_i,\ x_{i+1}],\ \ldots,\ [x_{n-1},\ b].$$

Оскільки кожному проміжку $[x_i,\ x_{i+1}]$ або $[x_i,\ x_i+\Delta x_i]$ відповідає елементарна частина нашої величини, що приблизно дорівнює $q(x_i)\Delta x_i$, то уся шукана величина Q наближено буде виражена за допомогою суми

$$Q \doteq \sum_i q(x_i)\Delta x_i.$$

Рівень точності отриманого значення буде тим вище, чим дрібніші часткові проміжки, так що Q, очевидно, буде границею згаданої суми, тобто справді виразиться визначеним інтегралом

$$\int_a^b q(x)\,dx.$$

Це в повній мірі стосується всіх трьох розгляданих прикладів. Якщо вище ми отримали формули для величин S, P, V дещо по-іншому, то це тому, що наша задача полягала не тільки у їх **обчисленні**, але й у доведенні їх **існування** — згідно з даними раніше означеннями.

Отже, вся робота зводиться до знаходження наближеної рівності (348.1), з якої безпосередньо випливає остаточний результат (348.2).

Втім, зазвичай замість Δx та ΔQ пишуть dx та dQ, а рівність (348.1) для "елемента" dQ величини Q записують у формі

$$dQ = q(x)\,dx. \tag{348.3}$$

Далі "додають" ці "елементи" (насправді беручи інтеграл!), що і приводить до формули (348.2) для усієї величини Q.

Ми підкреслюємо, що використання тут **інтеграла**, замість звичайної **суми**, доволі суттєво. Сума давала б тільки наближене значення для Q, оскільки на ній би відобразились похибки окремих рівностей типу (348.3); граничний перехід, за допомогою якого із суми випливає інтеграл, усуває похибку і приводить до точного результату. Отже, спочатку заради спрощення, у вираженні елемента dQ відкидаються нескінченно малі величини вищих порядків і виділяється головна частина, а потім, в інтересах точності, сума заміняється інтегруванням, і отриманий результат виявляється **точним**.

Втім, можна було б підійти до цього питання з іншого боку і з іншої точки зору. Позначимо через $Q(x)$ змінну частину величини Q, що відповідає проміжку $[a, x]$, причому $Q(a)$, природно, приймаємо рівним 0. Зрозуміло, яким чином розглянута вище "функція проміжку" $Q([\alpha, \beta])$ виражається через "функцію точки" $Q(x)$

$$Q([\alpha, \beta]) = Q(\beta) - Q(\alpha).$$

У наших прикладах функціями точки є: 1) змінна дуга $\overset{\frown}{AM}$, 2) площа змінної трапеції $AA'M'M$ і, насамкінець, 3) об'єм тіла, що виходить обертанням цієї трапеції.

Величина ΔQ є просто приростом функції $Q(x)$, а добуток $q(x)\Delta x$, що являє собою **головну частину**, є нічим іншим, як диференціалом цієї функції (розд. 103, розд. 104). Отже, рівність (348.3), записана у диференціальних позначеннях, насправді виявляється не наближеною, а **точною**, *тільки якщо під* dQ *розуміти саме* $dQ(x)$.

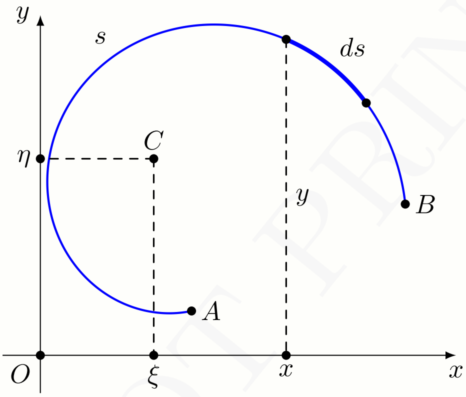


Рис. 349.1

Звідси одразу випливає шуканий результат:

$$\int\limits_a^b q(x)\,dx = Q(b) - Q(a) = Q([a,b]) = Q.$$

Зазначимо, все ж, що у застосуваннях більш зручною і результативною виявляється **ідея додавання нескінченно малих елементів**.

349. Знаходження статичних моментів та центру маси кривої

Як відомо, статичний момент M матеріальної точки маси m відносно деякої осі дорівнює добутку маси m на відстань d від точки до осі. У випадку **системи** з n матеріальних точок з масами $m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_n$, що лежать в одній площині з віссю, відповідно на відстанях $d_1,\ d_2,\ \dots,\ d_n$ від осі, статичний момент виражатиметься **сумою**

$$M = \sum_i m_i d_i.$$

При цьому відстані до точок, що лежать з одного боку від осі, беруться зі знаком плюс, а відстані до точок з іншого боку — зі знаком мінус.

Якщо ж маси не зосереджені у окремих точках, а розташовані суцільно заповнюючи певну лінію чи плоску фігуру, тоді для обчислення статичного моменту замість суми буде застосовуватись **інтеграл**.

Зупинимося на визначенні статичного моменту M відповідно осі x мас, розташованих вздовж деякої плоскої кривої AB (рис. 349.1). При цьому ми припустимо, що крива є однорідною, тобто її **лінійна густина** ρ (тобто маса, що припадає на одиницю довжини) буде постійною; для простоти припустимо навіть, що $\rho = 1$ (у іншому випадку доведеться отриманий результат лише домножити на ρ). При цих припущеннях маса будь-якої дуги нашої кривої визначається просто її довжиною, і поняття статичного моменту набуває чисто геометричного характеру. Зауважимо взагалі, що коли говорять про статичний момент (або центр маси) кривої без посилання щодо розподілення маси вздовж неї, то завжди мають на увазі статичний момент (центр маси), визначений саме у таких припущеннях.

Виділимо тепер довільний **елемент** ds кривої (маса якого також виражається числом ds). Вважаючи цей елемент наближено за матеріальну точку, що лежить на відстані y від осі, для його статичного моменту отримаємо вираз

$$dM_x = y\,ds.$$

Додаючи ці елементарні статичні моменти, причому за незалежну змінну візьмемо довжину дуги s, відлічуючи від точки A, ми отримаємо статичний момент відносно осі x

$$M_x = \int\limits_0^S y\,ds. \tag{349.1}$$

Аналогічним чином визначається і момент відносно осі y

$$M_y = \int\limits_0^S x\,ds. \tag{349.2}$$

Звісно, тут припускається, що y (або x) виражається через s. На практиці, у цих формулах s виражають через ту змінну (t, x, або θ), яка відіграє роль незалежної у аналітичному рівнянні кривої.

Статичні моменти M_x та M_y кривої дають можливість легко визначити положення її **центру маси** $C(\xi, \eta)$ (**барицентр**). *Точка C має таку властивість, що якщо у ній зосередити всю "масу" S кривої (що виражається тим же числовим значенням, що й довжина), тоді момент цієї маси відносно* ***будь-якої*** *осі співпаде з моментом усієї кривої відносно цієї осі*; зокрема, якщо розглянути моменти кривої відносно осей координат, то визначимо

$$S\xi = M_y = \int\limits_0^S x\,ds, \quad S\eta = M_x = \int\limits_0^S y\,ds,$$

звідки

$$\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{1}{S}\int\limits_0^S x\,ds, \quad \eta = \frac{M_x}{S} = \frac{1}{S}\int\limits_0^S y\,ds. \tag{349.3}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

З формули для ординати η центру маси ми отримаємо чудовий геометричний наслідок. Справді, маємо

$$\eta S = \int_0^S y\,ds, \quad \text{звідки} \quad 2\pi\eta S = 2\pi \int_0^S y\,ds;$$

але права частина цієї тотожності є площею P поверхні, отриманої обертанням кривої AB (дивіться (344.3)), у лівій же частині тотожності $2\pi\eta$ означає довжину кола, що описана центром маси кривої при обертанні її довкола осі x, а S — довжина нашої кривої. Отже, приходимо до наступної *теореми Ґульдіна (швейц. Paul Guldin, Па́уль Ґу́льдін)*.

Теорема 349.1 (Перша теорема Ґульдіна)**.** *Площа поверхні, отриманої обертанням кривої довкола деякої осі, що не перетинає її, дорівнює довжині дуги цієї кривої, помноженій на довжину кола, що описане центром маси C цієї кривої (рис. 349.1)*

$$P = S \cdot 2\pi\eta.$$

Ця теорема дає змогу визначити координату η центру маси кривої, якщо відомі її довжина S та площа P описаної нею поверхні обертання.

350. Приклади

1) Знайти статичний момент верхньої половини контуру еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ відносно осі x (припускаючи, що $a > b$).

Для верхньої половини еліпса цей момент відрізняється від відповідної поверхні обертання тільки відсутністю множника 2π. Тому (дивіться пр. 345.7)

$$M_x = S\eta = \frac{P}{2\pi} = b\left(b + \frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right).$$

2) Якщо дуга **симетрична** відносно деякої прямої, то центр маси цієї дуги обов'язково лежить на цій прямій.

Для доведення приймемо вісь симетрії за вісь y, а точку її перетину з кривою — за початкову точку відліку дуг. Тоді функція $x = \Phi(s)$ виявиться **непарною** функцією від s і, якщо на цей раз довжину усієї кривої позначити через $2S$, будемо мати (дивіться пр. 314.9)

$$M_y = \int_{-S}^{S} x\,ds = 0,$$

звідки і $\xi = 0$.

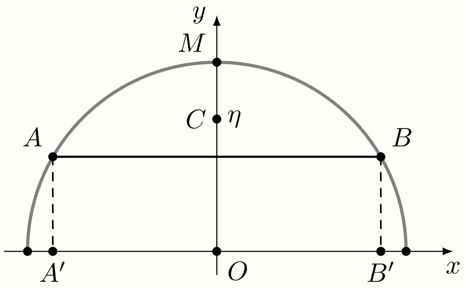


Рис. 350.1

3) Користуючись теоремою Ґульдіна теор. 349.1, визначити положення центру маси дуги $\overset{\frown}{AB}$ (рис. 350.1) кола з радіусом r.

Оскільки ця дуга симетрична відносно радіуса OM, що проходить через середину M, то її центр маси C лежить на цьому радіусі, і для повного визначення положення центру маси необхідно лише знайти його відстань η від центру O. Обираємо осі, як показано на рисунку, і позначимо довжину дуги $\overset{\frown}{AB}$ через s, а її хорду AB $(= A'B')$ — через d. Від обертання дуги $\overset{\frown}{AB}$ навколо осі x утворюється кульовий пояс, площа поверхні P якого, як ми знаємо (пр. 345.1), дорівнює $2\pi rd$. Згідно з теоремою Ґульдіна та ж поверхня має площу, яка дорівнює $2\pi\eta s$, отже

$$s\eta = rd \quad \text{та} \quad \eta = \frac{rd}{s}.$$

Зокрема, для **півкола** $d = 2r$, $s = \pi r$ та

$$\eta = \frac{2}{\pi}r \doteq 0{,}637r.$$

4) Визначити центр маси гілки **циклоїди**

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Якщо прийняти до розгляду симетрію, то одразу зрозуміло, що $\xi = \pi a$. Враховуючи результати пр. 345.4, легко отримати слідом $\eta = \frac{4}{3}a$.

5) У тих випадках, коли наперед зрозуміло положення центру маси, теоремою Ґульдіна можна скористатися для визначення площі поверхні обертання. Нехай, наприклад, треба визначити площу поверхні кільця (**тора**), тобто тіла, утвореного обертанням кола навколо осі, що не перетинає його (рис. 350.2). Оскільки очевидно, що центр маси кола співпадає з його центром, то (у позначеннях рисунку) маємо

$$P = 2\pi r \cdot 2\pi d = 4\pi^2 rd.$$

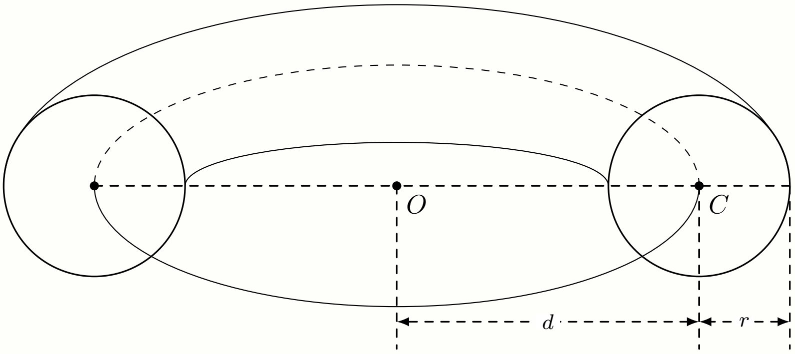


Рис. 350.2

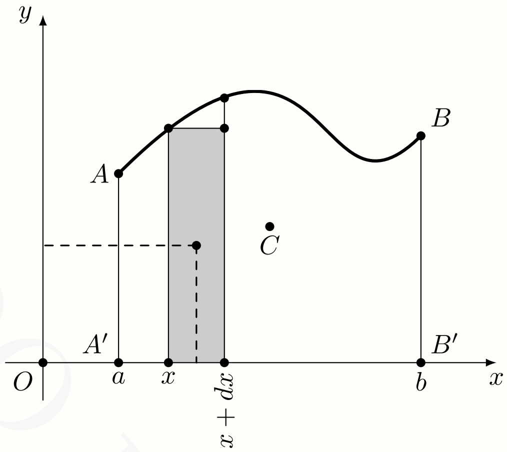


Рис. 351.1

351. Знаходження статичних моментів та центру маси плоскої фігури

Розглянемо плоску фігуру $AA'B'B$ (рис. 351.1), що обмежена зверху кривою AB, яка задана явним рівнянням $y = f(x)$. Припустимо, що по цій фігурі рівномірно розподілені маси, так що їх **поверхнева густина** ρ (тобто маса, що припадає на одиницю площі) є сталою. Без істотного обмеження загальності можна прийняти, що $\rho = 1$, тобто, що **маса** будь-якої частини нашої фігури повністю визначається її **площею**. Зазвичай саме це і мають на увазі, коли говорять просто про статичні моменти (або про центр мас) плоскої фігури.

Бажаючи визначити статичні моменти M_x, M_y цієї фігури відносно осей координат, ми виділяємо, як зазвичай, довільний елемент нашої фігури у вигляді нескінченно вузької вертикальної смуги (дивіться рисунок). Прийнявши цю смугу наближено за прямокутник, ми бачимо, що її маса (що виражається тим самим числом, що й площа) буде $y\,dx$. Для визначення відповідних елементарних моментів dM_X, dM_y припустимо, що вся маса смуги зосереджена у її центрі мас (тобто у центрі прямокутника), що, як відомо, не впливає на величини статичних моментів. Отримана матеріальна точка віддалена від осі x на відстань $\frac{1}{2}y$, а від осі y — на відстань $\left(x+\frac{1}{2}dx\right)$; останній вираз можна замінити просто на x, адже відкинута величина $\frac{1}{2}dx$, помножена на масу $y\,dx$, дала б нескінченно малу величину вищого порядку. Отже, маємо

$$dM_x = \frac{1}{2}y^2dx, \quad dM_y = xy\,dx.$$

Додавши ці елементарні моменти, прийдемо до результату

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2dx, \quad M_y = \int\limits_a^b xy\,dx, \tag{351.1}$$

причому під y маємо на увазі, звісно, функцію $f(x)$, яка є рівнянням кривої AB.

Як і у випадку кривої, по цим статичним моментам нашої фігури відносно осей координат легко визначити тепер і координати ξ, η центру мас фігури. Якщо через P позначити площу (а отже, і масу) фігури, то згідно з основною властивістю центру мас

$$P\xi = M_y = \int\limits_a^b xy\,dx, \quad P\eta = M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2\,dx,$$

звідки

$$\xi = \frac{M_y}{P} = \frac{1}{P}\int\limits_a^b xy\,dx, \quad \eta = \frac{M_x}{P} = \frac{1}{2P}\int\limits_a^b y^2\,dx. \tag{351.2}$$

І в даному випадку ми отримаємо важливий геометричний наслідок з формули для ординати η центру мас. Справді, з цієї формули маємо

$$2\pi\eta P = \pi\int\limits_a^b y^2\,dx.$$

Права частина цієї тотожності виражає об'єм V тіла, отриманого обертанням плоскої фігури $AA'B'B$ довкола осі x (342.2), а ліва частина виражає добуток площі цієї фігури P на $2\pi\eta$ — довжину кола, описаного центром мас фігури. Звідси *друга теорема Ґульдіна.*

Теорема 351.1 (Друга теорема Ґульдіна)**.** *Об'єм тіла обертання плоскої фігури довкола осі, що не перетинає її, дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину кола, описаного центром мас цієї фігури:*

$$V = P\cdot 2\pi\eta.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Зазначимо, що формули (351.1), (351.2) поширюються на випадок фігури, обмеженої кривими і зверху, і знизу (рис. 338.2). Наприклад, для цього випадку

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx, \quad M_y = \int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx; \tag{351.3}$$

звідси вже зрозуміло, як перетворюються формули (351.2). Якщо згадати формулу (338.2), то легко помітити, що теорема Ґульдіна справедлива і для цього випадку.

352. Приклади

1) Знайти статичні моменти M_x, M_y та координати центру мас фігури, обмеженої **параболою** $y^2 = 2px$, віссю x та ординатою, що відповідає абсцисі x.

Оскільки $y = \sqrt{2px}$, то згідно з формулами (351.1)

$$M_x = \frac{1}{2}\cdot 2p\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}px^2,$$

$$M_y = \sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2\sqrt{2p}}{5}x^{\frac{5}{2}}.$$

З іншого боку, площа (338.1)

$$P = \sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2\sqrt{2p}}{3}x^{\frac{3}{2}}.$$

У такому випадку згідно з формулами (351.2)

$$\xi = \frac{3}{5}x, \quad \eta = \frac{3}{8}\sqrt{2px} = \frac{3}{8}y.$$

Користуючись значеннями ξ та η і другою теоремою Ґульдіна теор. 351.1, легко знайти об'єм тіла обертання фігури навколо осей координат або навколо кінцевої ординати. Наприклад, якщо зупинитися на останньому випадку, оскільки відстань від центру мас до осі обертання становить $\frac{2}{5}x$, то шуканий об'єм буде

$$V = \frac{8}{15}\pi x^2 y.$$

2) Знайти центр мас першого квадранту **еліпса** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, скориставшись результатами пр. 339.2 та пр. 343.2.

Згідно з теоремою Ґульдіна $\xi = \frac{4a}{3\pi}$, $\eta = \frac{4b}{3\pi}$.

3) Якщо фігура має вісь симетрії, то центр мас обов'язково лежатиме на цій осі.

Доведемо це для випадку фігури, обмеженої знизу і зверху кривими $y_1 = f_1(x)$ та $y_2 = f_2(x)$. Якщо прийняти вісь симетрії за вісь y, то обидві функції y_1 та y_2 виявляться **парними**; проміжок, в межах якого змінюється x, у цьому випадку буде мати вигляд $[-a, a]$. Тоді згідно з другою з формул (351.3) (дивіться пр. 314.9)

$$M'_y = \int\limits_{-a}^{a} x(y_2 - y_1)\,dx = 0, \quad \text{а разом з цим і} \quad \xi = 0.$$

4) Знайти центр мас фігури, що обмежена гілкою **циклоїди**
$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ та віссю x.

Скориставшись пр. 339.9 та пр. 343.4 та теоремою Ґульдіна, легко знайти: $\eta = \frac{5}{6}a$. Завдяки симетрії $\xi = \pi a$.

5) Те ж саме для фігури, обмеженої двома **параболами** $y^2 = 2px$ та $x^2 = 2py$ (дивіться рис. 339.5).

Згадуючи пр. 339.5 та застосовуючи (351.3), знаходимо

$$\eta = \xi = \frac{1}{P}\int\limits_{0}^{2p} x\left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right)dx = \frac{\frac{6}{5}p^3}{\frac{4}{3}p^2} = \frac{9}{10}p.$$

6) Коли положення центру мас очевидно, друга теорема Ґульдіна може бути використана для визначення об'єму тіла обертання, подібно до того як перша теорема Ґульдіна може бути використана для обчислення площ (пр. 350.5).

Наприклад для **тора** (рис. 350.2) отримаємо об'єм $V = 2\pi^2 r^2 d$.

353. Механічна робота

З елементарної механіки читачеві відомо, що якщо сила, прикладена до рухомої точки M, зберігає постійну величину F і постійний кут з напрямком руху точки, то робота $\mathbf{A}$ цієї сили по переміщенню s точки буде виражена добутком $F\cos(F, s)\cdot s$, де (F, s) означає кут між напрямками вектора сили і власне переміщенням точки. Добуток $F_s = F\cos(F, s)$, очевидно, являє собою проєкцію вектора сили F на траєкторію переміщення s; вводячи цю проєкцію, можна вираз для роботи представити у вигляді $\mathbf{A} = F_s s$. Якщо напрямок сили співпадає з напрямком руху точки, то $\mathbf{A} = Fs$; а у випадку, коли ці два напрямки протилежні, $\mathbf{A} = -Fs$.

Однак, взагалі, і величина сили F і кут (F, s) між нею та напрямком переміщення можуть не залишатися постійними. При неперервній зміні хоч однієї з цих величин

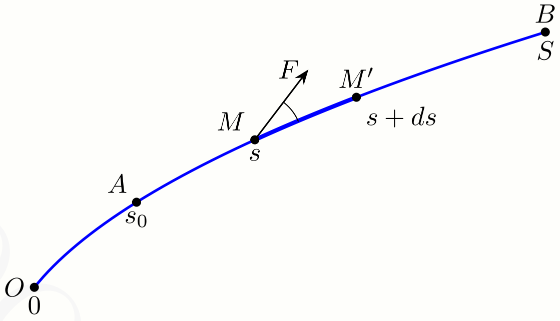


Рис. 353.1

для обчислення величини роботи доводиться знову звертатися до визначеного інтеграла.

Нехай шлях s, що проходить точка, буде незалежною змінною; при цьому припустимо, що початковому положенню A нашої точки M відповідає значення $s = s_0$, а кінцевому B — значення $s = S$ (рис. 353.1). Кожному значенню s на проміжку $(s_0,\, S)$ відповідає певне положення рухомої точки, а також відповідні значення величин F та $\cos(F,\, s)$, які, отже, можна розглядати як функції від s. Взявши точку M у довільному її положенні, що визначається значенням s шляху, знайдемо тепер наближений вираз для елемента роботи, що відповідає приросту ds шляху, від s до $s + ds$, при якому точка M перейде у близьке положення M' (дивіться рисунок). У положенні M на точку діє певна сила F під певним кутом $(F,\, s)$; оскільки зміна цих величин при переході точки з M до M' — при малому ds — також мала, знехтуємо цими змінами і, вважаючи величину сили F та кут $(F,\, s)$ наближено постійними, знайдемо для елемента роботи на переміщенні ds вираз

$$d\mathbf{A} = F\cos(F,\, s)\cdot ds,$$

так що вся робота **A** буде виражена інтегралом

$$\mathbf{A} = \int\limits_{s_0}^{S} F\cos(F,\, s)\cdot ds. \tag{353.1}$$

З цього загального виразу для роботи сили F зрозуміло, що при $(F,\, s) = \frac{\pi}{2}$ робота дорівнюватиме нулю; справді, при цьому $\cos(F,\, s) = 0$, так що підінтегральна функція виявляється рівною нулю. Отже, сила, що перпендикулярна до напрямку переміщення, не виконує механічної роботи.

Якщо діючу на точку силу розкласти (згідно з правилом паралелограма) на дві складові — по дотичній до шляху, тобто за напрямком переміщення, і по нормалі до нього, то, згідно зі сказаним, роботу буде виконувати лише дотична складова

$F_s = F\cos(F,\, s)$:

$$\mathbf{A} = \int_{s_0}^{S} F_s\, ds. \tag{353.2}$$

Нехай тепер, F є рівнодійна всіх сил, прикладених до точки; тоді, згідно з законом руху Ньютена, дотична складова F_s дорівнює добутку маси m точки на її прискорення a, і вираз для роботи можна записати у вигляді

$$\mathbf{A} = \int_{s_0}^{S} ma\, ds.$$

Нагадаємо тепер, що

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{та} \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad \text{так що} \quad a = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v;$$

у такому випадку

$$\mathbf{A} = \int_{s_0}^{S} mv\frac{dv}{ds}\, ds = \int_{s_0}^{S} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{s_0}^{S} = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

де через v_0 та V позначені величини швидкості, відповідно, у початковій та кінцевій точках шляху.

Як відомо, $\frac{1}{2}mv^2$ є **жива сила** або **кінетична енергія** точки; отже, ми прийшли до важливого твердження: *механічна робота* **A***, що виконана силою, під дією якої здійснювалось переміщення точки, дорівнює приросту кінетичної енергії точки.* (Зрозуміло, що робота **A** і приріст кінетичної енергії можуть одночасно бути і від'ємними). Цей принцип, який можна поширити і на системи матеріальних точок, і на суцільні тіла, відіграє у механіці і фізиці дуже важливу роль. Його називають "законом живої сили".

354. Приклади

1) Як приклад, застосуємо формулу (353.1) до обчислення роботи видовження (або стискання) пружини з закріпленим одним кінцем (рис. 354.1); з цим доводиться мати справу, наприклад, при розрахунку буферів у залізничних вагонів.

Відомо, що видовження s пружини (якщо тільки пружина не перенавантажена) створює натяг p, що по величині пропорційний до видовження, так що $p = cs$, де c — деяка стала, що залежить від пружних властивостей пружини ("жорсткість" пружини). Сила, що видовжує пружину, має долати цей натяг. **Якщо враховувати лише**

nebayduzhi.math@gmail.com

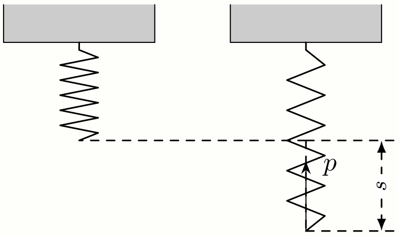


Рис. 354.1

ту частину діючої сили, що витрачається на це, то її робота при видовженні від 0 до S виражатиметься так:

$$\mathbf{A} = \int\limits_0^S p\,ds = c\int\limits_0^S s\,ds = c\frac{s^2}{2}\bigg|_0^S = \frac{cS^2}{2}.$$

Позначивши через P найбільшу величину натягу (або сили, затраченої на його подолання), що відповідає видовженню S пружини (і дорівнює cS), ми зможемо звести вираз для роботи до вигляду

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}PS.$$

Якщо б до вільного кінця пружини була одразу прикладена сила P (наприклад, підвішено тягар), то на переміщенні S нею була б виконана вдвічі більша робота PS. Як бачимо, лише половина її витрачається на видовження пружини; друга половина піде на здобуття пружиною з тягарем кінетичної енергії.

2) Нехай деяка кількість газу (пари) міститься у циліндрі (рис. 354.2) з одного боку поршня, і припустимо, шо цей газ розширився і пересунув поршень праворуч. Спробуємо визначити роботу, що була виконана при цьому газом. Якщо початкову та кінцеву відстані від поршня до лівого дна циліндра позначити через s_1 та s_2, тиск (на одиницю площі поршня) — через p, а площу поршня — через Q, то вся сила, що діє на поршень, буде pQ, і робота, як ми знаємо, виразиться інтегралом

$$\mathbf{A} = Q\int\limits_{s_1}^{s_2} p\,ds.$$

Позначивши через V об'єм розгляданої маси газу, очевидно будемо мати $V = Qs$. Нескладно тепер перейти від змінної s до нової змінної V; ми отримаємо

$$\mathbf{A} = \int\limits_{V_1}^{V_2} p\,dV, \tag{354.1}$$

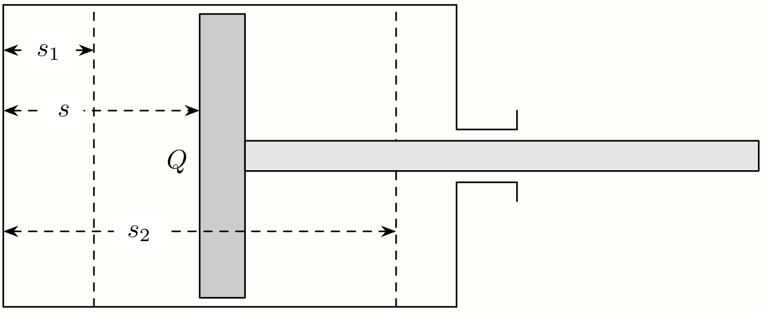


Рис. 354.2

де V_1 та V_2 означають початкове та кінцеве значення об'єму V.

Якщо б була відома залежність тиску p як функції від об'єму V, то на цьому значення роботи **A** було б визначене. Припустимо спочатку, що при розширенні газу його температура залишається сталою, отже енергія, необхідна для його розширення надходить ззовні; у цьому випадку процес називають **ізотермічним**. Вважаючи газ "ідеальним", згідно з законом Бойля – Маріотта матимемо: $pV = c = \text{const}$, отже $p = \frac{c}{V}$, і для роботи отримуємо значення

$$\mathbf{A} = \int\limits_{V_1}^{V_2} \frac{c}{V}\,dV = c\ln V\Big|_{V_1}^{V_2} = c\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Якщо позначити через p_1 та p_2 значення тиску на початку і у кінці процесу, то $p_1V_1 = p_2V_2$ і $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$. Тому роботу розширення газу, пов'язану з переходом від тиску p_1 до $p_2 < p_1$, можна виразити у вигляді

$$\mathbf{A} = c\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

Насамкінець, замість c у ці формули можна підставити добуток p_1V_1.

Однак, часто буває більш природно припустити, що під час розширення не відбувається теплового обміну між газом та зовнішнім середовищем, і на виконання роботи витрачається власна енергія самого газу, температура якого при цьому зменшується; такий процес називається **адіабатичним**. У цьому випадку залежність між тиском p та об'ємом V розгляданої маси газу матиме вигляд

$$pV^k = c = \text{const}$$

(ця залежність буде виведена згодом, пр. 361.3), де k — стала, характерна для кожного газу (пари, водяної пари), що завжди більша за одиницю. Звідси $p = cV^{-k}$ і

$$\mathbf{A} = \int\limits_{V_1}^{V_2} cV^{-k}\,dV = \frac{c}{1-k}V^{1-k}\Bigg|_{V_1}^{V_2} = \frac{c}{1-k}(V_2^{1-k} - V_1^{1-k}) = \frac{c}{1-k}\left(\frac{1}{V_2^{k-1}} - \frac{1}{V_1^{k-1}}\right).$$

Цей результат можна виразити у більш зручній формі, якщо згадати, що $cV_1^{-k} = p_1$, $cV_2^{-k} = p_2$; виконавши підстановку, прийдемо до наступного виразу для роботи:

$$\mathbf{A} = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{k-1}.$$

Ми лише для простоти та наочності припустили, що газ міститься у циліндрі. Основна формула (354.1), та отримані з неї формули для окремих випадків, зберігають силу незалежно від форми, яку займає розглядана маса газу у кожний момент. Зрозуміло, ті ж самі формули виражають також роботу **стискання** газу від об'єму V_2 до об'єму $V_1 < V_2$ (що супроводжується підвищенням тиску від p_2 до $p_1 > p_2$), тобто роботу зовнішньої сили, що змушує газ стискатись; робота самого газу у цьому випадку від'ємна!

355. Робота сили тертя у плоскій п'яті

Взагалі, **п'ятою** називають опорну частину вертикального обертового валу; нерухома опора, у якій обертається п'ята, називається **підп'ятником**. У цьому розділі ми розглянемо питання потужності, що витрачається на подолання сили тертя у п'ятах, обмежившись найпростішим випадком — **плоскої п'яти**.

Плоска п'ята являє собою циліндричне тіло, яке опирається на підп'ятник своєю плоскою основою (рис. 355.1). Ця основа має, в загальному випадку, форму кругового кільця, з зовнішнім радіусом R та внутрішнім радіусом r_0; у окремому випадку, при $r_0 = 0$ ми отримаємо суцільну кругову основу.

Позначимо через P повне значення тиску, що передається п'ятою; через ω (1/сек) — кутову швидкість обертання вала; через μ — коефіцієнт тертя; насамкінець, через p — тиск на одиницю площі п'яти у розгляданій точці. Не торкаючись поки що питання **розподілу** тиску, зазначимо лише одну очевидну обставину: точки п'яти, що рівновіддалені від центру O, знаходяться в однакових умовах, і в них тиск має бути однаковим. Отже, p взагалі можна вважати функцією від радіус-вектора r. Згодом будуть наведені припущення, які зазвичай робляться відносно цієї функції; але одній умові вона має відповідати у будь-якому випадку, а саме, повний тиск на п'яту повинен врівноважуватись тиском P з боку вала.

Для того, щоб обчислити цей повний тиск, застосуємо знову метод суми нескінченно малих елементів по схемі розд. 348, причому за незалежну змінну візьмемо радіус r, що змінюється від r_0 до R. Розбиваючи цей проміжок на частини, ми тим самим

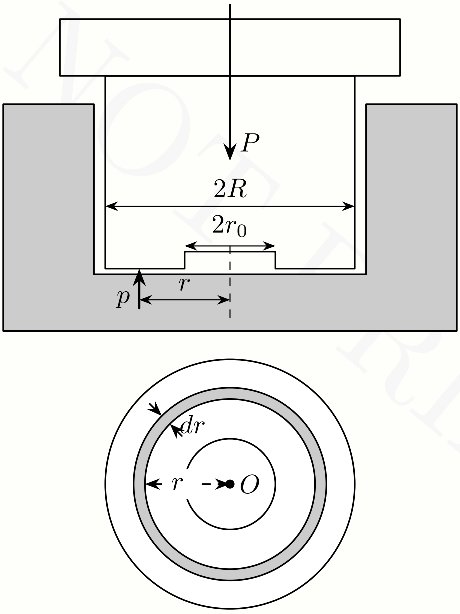


Рис. 355.1

можемо розкласти усе кільце на елементарні концентричні кільця, так що увесь тиск P буде сумою елементарних тисків, що відповідають окремим кільцям. Розглянемо тепер кільце, що обмежене колами з радіусами r та $r + dr$ (на рис. 355.1 внизу воно зафарбоване). Площа цього кільця буде $\pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\,dr + \pi(dr)^2$; відкидаючи нескінченно малу другого порядку $\pi(dr)^2$, можна прийняти цю площу наближено рівною до $2\pi r\,dr$. Якщо p — це тиск (на одиницю площі) у точці, що віддалена від центру на відстань r, то кільцю відповідає елементарний тиск

$$dP = p \cdot 2\pi r\,dr;$$

отже, додаючи, отримуємо рівність

$$P = 2\pi \int\limits_{r_0}^{R} pr\,dr. \tag{355.1}$$

Вона, повторимо, відображає той факт, що загальний тиск, розподілений по п'яті, дорівнює тиску з боку вала.

Визначимо тепер момент **M** сили тертя у п'яті, що обертається, відносно осі обертання. Розглянемо знову елементарне кільце, про яке йшлося вище; сила тертя, що розвивається у ньому і протидіє обертанню, буде

$$\mu\,dP = 2\pi\mu pr\,dr,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

отже відповідний цій силі елементарний момент $d\mathbf{M}$ буде виражатися добутком цієї сили на плече r (що є загальним для всіх точок кільця)

$$d\mathbf{M} = 2\pi\mu p r^2\,dr.$$

Звідси повний момент сили тертя буде

$$\mathbf{M} = 2\pi\mu\int\limits_{r_0}^{R} pr^2\,dr. \tag{355.2}$$

Як відомо з механіки, робота $\mathbf{A}$, що виконується таким постійним обертальним моментом $\mathbf{M}$ за одну секунду, виходить множенням моменту $\mathbf{M}$ на кутову швидкість обертання ω (1/сек)

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\omega.$$

Для того, щоб довести до кінця обчислення роботи $\mathbf{A}$, тепер треба зробити ті чи інші припущення стосовно закону розподілу p на поверхні п'яти.

Найпростішим є припущення, що тиск розподіляється рівномірно, тобто що $p = c = \text{const}$. Величина цієї сталої визначається з умови (355.1). Втім, в цьому випадку безпосередньо зрозуміло, що якщо тиск P рівномірно розподіляється по площі кільця $\pi(R^2 - r_0^2)$, то на одиницю площі припадає тиск $p = c = \dfrac{P}{\pi(R^2 - r_0^2)}$.

Підставляючи це значення замість p у (355.2), знайдемо далі

$$\mathbf{M} = 2\pi\mu\frac{P}{\pi(R^2 - r_0^2)}\int\limits_{r_0}^{R} r^2\,dr = \frac{2}{3}\mu P\frac{R^3 - r_0^3}{R^2 - r_0^2}.$$

Зокрема, для суцільної п'яти матимемо: $\mathbf{M} = \frac{2}{3}\mu PR$.

Однак, ці результати застосовують лише до нових п'ят, що ще не обтерлися. Справа у тому, що при обертанні вала точки п'яти, що знаходяться далі від центру O, рухаються з більшою швидкістю, в них робота сили тертя більша і, відповідно, більше і зношування як п'яти, так і підп'ятника; завдяки цьому частина тиску перекладається на ближчі до центру ділянки. Для старих спрацьованих п'ят зазвичай припускається, що тиск на них розподіляється так, що робота сили тертя (на одиницю площі), а з нею і зношування, усюди зберігають постійну величину. Поділивши елементарну роботу $d\mathbf{A} = \omega\,d\mathbf{M}$ на площу $2\pi r\,dr$ елементарного кільця, запишемо наше припущення у вигляді

$$\omega\mu pr = \text{const}, \quad \text{звідки і} \quad pr = c = \text{const};$$

отже, ми припускаємо, що p змінюється обернено пропорційно відстані r від центру. Підставляючи c замість pr в умову (355.1), знайдемо величину цієї сталої

$$P = 2\pi c\int\limits_{r_0}^{R} dr = 2\pi c(R - r_0), \quad \text{звідки} \quad c = \frac{P}{2\pi(R - r_0)}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Насамкінець, замінивши і у (355.2) pr отриманим виразом, прийдемо до наступного результату:

$$\mathbf{M} = 2\pi\mu\frac{P}{2\pi(R-r_0)}\int\limits_{r_0}^{R} r\,dr = \frac{1}{2}\mu P(R+r_0).$$

Для суцільної п'яти $\mathbf{M} = \frac{1}{2}\mu PR$.

Легко помітити, що втрата потужності на подолання сили тертя у випадку спрацьованих п'ят менша, ніж у випадку нових п'ят.

356. Задачі на підсумовування нескінченно малих елементів

Наведемо ще ряд задач, що розв'язуються методом підсумовування нескінченно малих елементів.

1) Знайти формулу для вираження статичного моменту M тіла (V) відносно даної площини, якщо відомі площі поперечних перетинів тіла, що паралельні до цієї площини (у вигляді функції від відстані x до неї). Густина, нехай, дорівнює одиниці.

При позначеннях розд. 342, маса (об'єм) елементарного шару тіла на відстані x від площини буде $P(x)\,dx$, його статичний момент $dM = xP(x)\,dx$, отже, додаючи, отримаємо

$$M = \int\limits_a^b xP(x)\,dx.$$

Відстань ξ між центром мас тіла та даною площиною буде виражатись так:

$$\xi = \frac{M}{V} = \frac{\int\limits_a^b xP(x)\,dx}{\int\limits_a^b P(x)\,dx}.$$

Зокрема, для тіла обертання

$$\xi = \frac{\int\limits_a^b xy^2\,dx}{\int\limits_a^b y^2\,dx}.$$

Якщо застосувати цей результат до кругового конуса, то знайдемо, що відстань між центром мас та основою складає $\frac{1}{4}$ висоти. У випадку півкулі: $\frac{3}{8}$ радіуса.

2) Знайти формулу для вираження статичного моменту M **поверхні обертан-**

nebayduzhi.math@gmail.com

ня відносно площини, що перпендикулярна до осі обертання. "Поверхнева густина" приймається рівною одиниці.

Приймемо вісь обертання за вісь x, а за початок координат візьмемо точку її перетину зі згаданою площиною. При позначеннях розд. 344 маса (площа) елементарного кільцевого шару на відстані s від початку дуги є $2\pi y\,ds$, його статичний момент $dM = 2\pi xy\,ds$ і, остаточно,

$$M = 2\pi \int_0^S xy\,ds = 2\pi \int_0^S \Phi(s)\Psi(s)\,ds.$$

Зокрема, якщо крива, що обертається, задана явним рівнянням
$y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$,

$$M = 2\pi \int_a^b xy\sqrt{1+y_x'^2}\,dx = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Відстань ξ від центру мас поверхні до даної площини буде

$$\xi = \frac{M}{P} = \frac{\int\limits_0^S xy\,ds}{\int\limits_0^S y\,ds} = \frac{\int\limits_a^b xy\sqrt{1+y_x'^2}\,dx}{\int\limits_a^b y\sqrt{1+y_x'^2}\,dx}.$$

Застосувати останню формулу до поверхні а) кругового конуса, б) напівсфери.

Відповідь. Відстань від центру мас до основи дорівнює а) $\frac{1}{3}$ висоти, б) $\frac{1}{2}$ радіуса.

3) Визначити статичні моменти M_{yz}, M_{zx}, M_{xy} відносно координатних площин для **циліндричної поверхні** (рис. 346.1) та положення її центру мас. Застосувати отримані формули до бічної поверхні циліндричного відрізку (пр. 343.8).

Відповідь. Загальні формули

$$M_{yz} = \int_0^S xz\,ds, \quad M_{zx} = \int_0^S yz\,ds, \quad M_{xy} = \frac{1}{2}\int_0^S z^2\,ds,$$
$$\xi = \frac{M_{yz}}{P}, \qquad \eta = \frac{M_{zx}}{P}, \qquad \zeta = \frac{M_{xy}}{P},$$

де P — площа поверхні. У запропонованому прикладі: $\xi = 0$, $\eta = \frac{\pi}{4}a$, $\zeta = \frac{\pi}{8}h$.

4) **Моментом інерції** (або **квадратичним** моментом) матеріальної точки з масою m відносно деякої осі (або площини) називається добуток маси m на **квадрат**

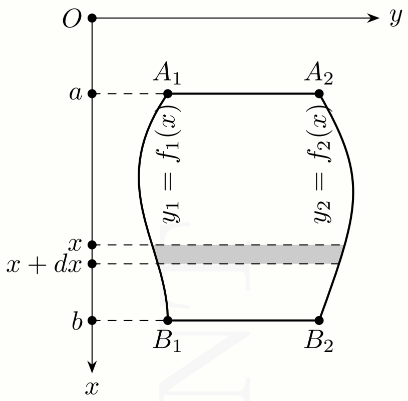


Рис. 356.1

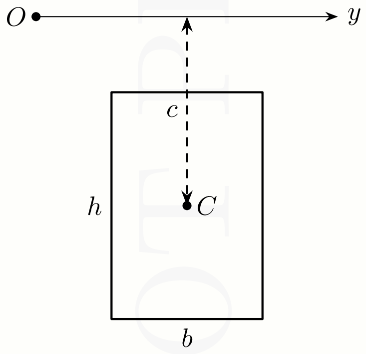


Рис. 356.2

відстані d від точки до осі (або площини). Виходячи з цього, пропонується знайти вираз для моменту інерції I_y відносно осі y плоскої фігури $A_1B_1B_2A_2$ (рис. 356.1), у припущенні, що "поверхнева густина" розподілу мас дорівнює одиниці.

Маємо

$$dI_y = x^2(y_2 - y_1)\,dx, \qquad I_y = \int\limits_a^b x^2(y_2 - y_1)\,dx.$$

Наприклад, для випадку, зображеному на рис. 356.2, отримаємо:

$$y_2 - y_1 = b, \qquad I_y = b \int\limits_{c-\frac{h}{2}}^{c+\frac{h}{2}} x^2\,dx = bc^2h + \frac{bh^3}{12},$$

зокрема, при $c = 0$ буде $I_y = \dfrac{bh^3}{12}$.

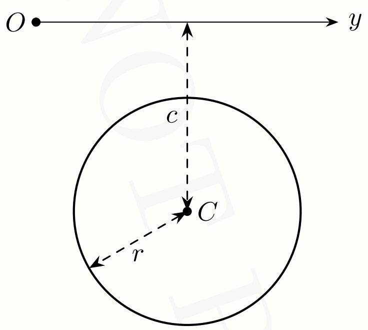


Рис. 356.3

Для випадку, зображеному на рис. 356.3, матимемо:

$$y_2 - y_1 = 2\sqrt{r^2 - (x-c)^2}, \quad I_y = 2\int\limits_{c-r}^{c+r} x^2\sqrt{r^2-(x-c)^2}\,dx = \pi r^2 c^2 + \frac{\pi r^4}{4},$$

зокрема, при $c = 0$ буде $I_y = \dfrac{\pi r^4}{4}$.

5) Визначити момент інерції **тіла** (V), розглянутого у задачі пр. 356.1, відносно згаданої там **площини**. Застосувати отриману формулу до обчислення моменту інерції а) кругового конуса та б) півкулі відносно площини основи.

Відповідь. $I = \int\limits_a^b x^2 P(x)\,dx$; зокрема,

$$\text{а) } I = \frac{\pi}{30}R^2h^3, \quad \text{б) } I = \frac{2\pi}{15}R^5.$$

6) Тиск рідини на довільну плоску ділянку, розташовану на глибині h(м) під її поверхнею, дорівнює вазі циліндричного стовпа рідини висотою h, що має цю ділянку своєю основою. Отже, тиск (у кг/м^2) на глибині h(м), що припадає на одиницю площі, дорівнює $h\gamma$, якщо γ означає питому вагу рідини (кг/м^3).

Припустимо, що у рідину вертикально занурена плоска фігура $A_1B_1B_2A_2$ (рис. 356.1). (Ми приймаємо, що вісь y лежить на вільній поверхні рідини.)

Знайти повний гідростатичний тиск **W** на цю фігуру і його момент **M** (відносно вільної поверхні рідини).

Елементарна ділянка $dP = (y_2 - y_1)\,dx$ знаходиться під тиском

$$d\mathbf{W} = \gamma x(y_2 - y_1)\,dx,$$

момент якого відносно осі y дорівнює

$$d\mathbf{M} = \gamma x^2(y_2 - y_1)\,dx.$$

Звідси

$$\mathbf{W} = \gamma \int\limits_a^b x(y_2 - y_1)\,dx, \quad \mathbf{M} = \gamma \int\limits_a^b x^2(y_2 - y_1)\,dx.$$

Перший інтеграл, очевидно, являє собою **статичний момент** M_y фігури відносно осі y; а другий дає **момент інерції** I_y фігури відносно тієї ж осі.

Якщо ξ є відстанню від центру мас C фігури до вільної поверхні, а P — її площа, то можна написати, що $\mathbf{W} = \gamma P\xi$. Центр **тиску**, тобто точка прикладання рівнодійної усього тиску, знаходиться на відстані

$$\xi^* = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{W}} = \frac{P\xi}{I_y}$$

від вільної поверхні рідини.

Застосуємо ці формули до випадків а) рис. 356.2 та б) рис. 356.3.

У випадку а): $\xi = c$, $P = bh$ та $\mathbf{W} = \gamma bhc$. Далі, оскільки в пр. 356.4 ми вже обчислили $I_y = bc^2h + \frac{bh^3}{12}$, то можемо одразу написати $\xi^* = c + \frac{h^2}{12c}$. Зокрема, якщо $c = \frac{h}{2}$ (тобто верхня сторона прямокутника лежить на рівні з поверхнею рідини), маємо $\mathbf{W} = \frac{1}{2}\gamma bh^2$, $\xi^* = \frac{2}{3}c$.

У випадку б): $\xi = c$, $P = \pi r^2$ та $\mathbf{W} = \gamma c\pi r^2$. Тут $I_y = \pi r^2c^2 + \frac{\pi r^2}{4}$ (дивіться пр. 356.4). Тому $\xi^* = c + \frac{r^2}{4c}$.

7) Якщо у стінці резервуару, наповненого водою, на глибині h (м) під рівнем поверхні води є горизонтальна щілина, то через неї вода буде витікати зі швидкістю $\left(\frac{\text{м}}{\text{сек}}\right)$ $v = \sqrt{2gh}$. Ця формула, що доводиться у гідродинаміці, відома під назвою формули Торрічеллі (іт. Evangelista Torricelli, Еванджеліста Торрічеллі). Зазначимо, що вона має такий самий вигляд, як і формула швидкості, набутої важкою матеріальною точкою при падінні з висоти h.

Припустимо тепер, що у стінці резервуару є прямокутний отвір рис. 356.4. Треба визначити затрати води, тобто об'єм води Q (м^3), що витікає за 1 секунду.

Елементарній смузі шириною dx на глибині x відповідає швидкість $v = \sqrt{2gx}$; оскільки її площа дорівнює $b\,dx$, то затрати води через цю смугу будуть дорівнювати: $dQ = \sqrt{2gx} \cdot b\,dx$. Підсумовуючи, знайдемо

$$Q = \sqrt{2g} \cdot b \int\limits_{h_0}^{h} x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2g} \cdot b \left(h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}}\right).$$

Фактичні затрати є дещо менші за обчислений результат, оскільки присутнє тертя в рідині і стискання струменя. Вплив цих факторів зазвичай враховують за допомо-

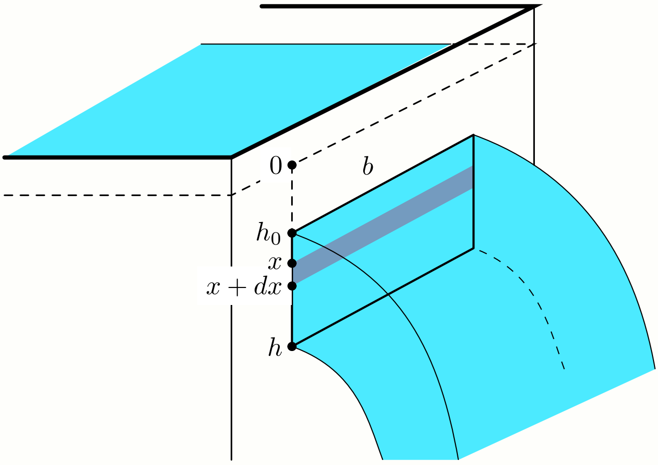


Рис. 356.4

гою деякого емпіричного коефіцієнту $\mu < 1$ і пишуть формулу у вигляді

$$Q = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\,b\left(h^{\frac{3}{2}} - h_0{}^{\frac{3}{2}}\right).$$

При $h_0 = 0$ звідси виходить формула затрат води через прямокутний водозлив

$$Q = \frac{2}{3}\mu\sqrt{2g}\,bh^{\frac{3}{2}}.$$

8) Вивчаючи магнітне поле електричного струму, Біо (фр. Jean-Baptiste Biot, Жа́н-Баті́ст Біо́) та Савар (фр. Félix Savart, फелі́кс Сава́р) прийшли до висновку, що сила, з якою струм діє на "магнітний заряд", може розглядатися як рівнодійна сил, що ніби виходять із окремих нескінченно малих "елементів струму". Згідно з встановленим ними законом, елемент струму ds (рис. 356.5) діє на магнітний заряд m, що розміщений у точці O, із силою

$$dF = \frac{Im\sin\varphi\,ds}{r^2},$$

де I - сила струму, r — відстань OM, а φ — кут $(ds,\,r)$.

(Формула матиме зміст у такому вигляді лише при правильному виборі одиниць (наприклад, якщо силу виражати у динах, відстань — у *см*, магнітний заряд та силу струму — у електромагнітних одиницях).)

Ця сила направлена по перпендикуляру до площини, що проходить через O та ds і у випадку, що зображено на рисунку, у бік читача. Бажаючи встановити дію **скінченного** відрізку струму на магнітний полюс, доводиться підсумовувати ці елементарні сили.

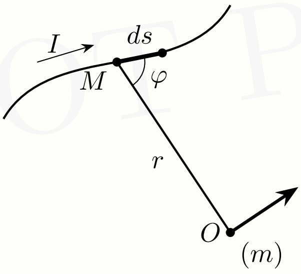


Рис. 356.5

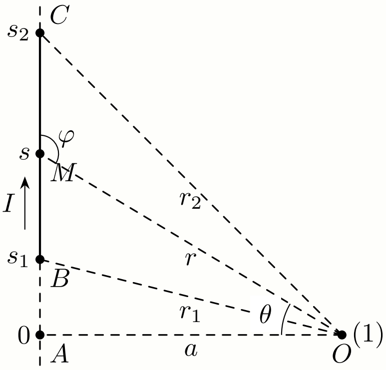


Рис. 356.6

Для прикладу визначимо силу, з якою на одиницю “магнітного заряду” діє прямолінійний відрізок струму BC (рис. 356.6), при вказаних на рисунку позначеннях.

Оскільки $\sin\varphi = \sin\angle OMA = \frac{a}{r}$, то dF можна виразити у вигляді

$$dF = \frac{aI\,ds}{r^3} - \frac{aI\,ds}{(a^2+s^2)^{3/2}}.$$

Елементарні сили тут можна додавати безпосередньо, бо вони всі мають один і той самий напрямок. Тому

$$F = aI\int\limits_{s_1}^{s^2} \frac{ds}{(a^2+s^2)^{3/2}} = \frac{I}{a}\,\frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\Bigg|_{s_1}^{s_2} = \frac{I}{a}\left(\frac{s_2}{r_2} - \frac{s_1}{r_1}\right).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

10.4. Найпростіші диференціальні рівняння

357. Основні поняття. Рівняння першого порядку

У розділі розд. 263 ми розглядали задачу визначення функції $y = y(x)$ по її заданій похідній

$$y' = f(x) \tag{357.1}$$

(або, що те ж саме, по її диференціалу $dy = f(x)\,dx$) і вчились виконувати операцію **інтегрування** або **квадратуру**, за допомогою якої ця задача розв'язується,

$$y = \int f(x)\,dx + C. \tag{357.2}$$

(У цьому розділі під символом $\int f(x)\,dx$ ми будемо розуміти хоч і довільну, але **визначену** первісну функцію, так що сталу інтегрування ми у цей символ не включаємо і будемо писати її окремо.)

У цьому **загальному розв'язку** фігурує стала C. Як ми бачили на прикладах (розд. 263, розд. 264), якщо дані **початкові умови**

$$y = y_0 \quad \text{при} \quad x = x_0, \tag{357.3}$$

то вони визначають конкретне значення сталої $C = C_0$. Підставивши його у (357.2), ми прийдемо до **частинного розв'язку** нашої задачі, тобто до конкретної функції $y = y(x)$, яка не тільки має наперед задану похідну, але й задовольняє початкові умови (357.3).

Часто, однак, доводиться визначати функцію $y = y(x)$ з більш складних співвідношень вигляду

$$F(x,\, y,\, y',\, y'',\, \dots) = 0,$$

що зв'язують значення незалежної змінної x зі значеннями як самої шуканої функції y, так і її похідних y', y'', $\dots$. Такого роду співвідношення взагалі називаються **диференціальними рівняннями**.

Зупинимося на рівнянні **першого порядку**, що містить лише першу похідну y',

$$F(x, y, y') = 0. \tag{357.4}$$

Його розв'язком буде будь-яка функція $y = y(x)$, яка задовольняє його тотожно відносно x. Як можна показати (при відомих припущеннях щодо функції F), його **загальний розв'язок**, подібно до найпростішого випадку (дивіться (357.2)), і тут також матиме довільну сталу C, тобто матиме вигляд

$$y = \varphi(x, C). \tag{357.5}$$

Втім, іноді цей розв'язок виражається у неявній формі

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{або} \quad \psi(x, y) = C. \tag{357.6}$$

Знаходження загального розв'язку диференціального рівняння, у тій чи іншій формі, називається **інтегруванням рівняння**.

Для прикладу розглянемо таку задачу: **знайти криві, для яких піднормаль є сталою**. Якщо уявити собі таку криву вираженою явним рівнянням $y = y(x)$, то питання зведеться до знаходження таких функцій, які задовольняють рівняння $yy' = p$, де $p = \text{const}$ (230.3). Перепишемо його у вигляді $\left(y^2\right)' = 2p$; тепер зрозуміло, що його загальним розв'язком буде

$$y^2 = 2px + c \quad \text{або} \quad y = \pm\sqrt{2px + C}. \tag{357.7}$$

Отже, поставлені умови задовольняє ціле сімейство парабол, що виходять одна з одної зміщенням вздовж осі x.

Тут відповіддю для задачі є загальний розв'язок, оскільки треба було знайти **усі** криві, що мають згадану властивість. Якби у задачі було додатково вказано, що крива повинна проходити через задану точку (x_0, y_0), то, підставивши ці значення x та y у отримане рівняння (357.7), ми зможемо знайти значення C:

$$C_0 = y_0^2 - 2px_0.$$

Підставляючи у (357.7) $C = C_0$, ми прийдемо до **частинного розв'язку**

$$y^2 = 2px + C_0,$$

що визначає вже конкретну криву.

Слід сказати, що найчастіше буває саме так, що задача, що приводить до диференціального рівняння, вимагає конкретного **частинного розв'язку**. Зазвичай він визначається **початковими умовами** типу (357.3), що висуваються самою задачею. Згідно з цими умовами, як і щойно, передусім може бути встановлено конкретне значення $C = C_0$; воно визначиться з рівняння, яке вийде, якщо у загальному розв'язку (357.5) (або (357.6)) підставити $x = x_0$, $y = y_0$. Якщо тепер у цей загальний розв'язок підставити знайдене значення C_0 замість C, то і прийдемо до частинного розв'язку, який задовольняє задачу.

358. Рівняння першого степеня відносно похідної. Відокремлення змінних

Припустимо тепер, що у рівнянні (357.4) похідна y' входить у **першій степені**, тобто, що рівняння має вигляд

$$P(x, y) + Q(x, y) \cdot y' = 0,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

де P, Q є функціями від x та y. Приймаючи тепер $y' = \dfrac{dy}{dx}$, можна виразити це рівняння у формі

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \tag{358.1}$$

яка часто виявляється більш зручною.

Ми зосередимося тут лише на тих найпростіших окремих випадках рівняння (358.1), коли його інтегрування **безпосередньо** зводиться до квадратур; отже, розбір цих випадків виступає природнім доповненням до глави 8.

Якщо у рівнянні (358.1) функцію P насправді залежить лише від x, а функція Q — тільки від y, тобто якщо рівняння має вигляд

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0, \tag{358.2}$$

то кажуть, шо **змінні відокремлені**. У цьому випадку інтегрування відбувається дуже просто.

Нехай функції $P(x)$ та $Q(y)$ неперервні (у відповідних проміжках). Тоді $P(x)\,dx$ буде диференціалом функції $\overline{P}(x) = \int P(x)\,dx$, а $Q(y)\,dy$ — диференціалом функції $\overline{Q}(y) = \int Q(y)\,dy$, навіть якщо під y розуміти функцію $y(x)$, що задовольняє рівняння (358.2) (зважаючи на інваріантність форми диференціала (розд. 106)). У такому випадку ліва частина рівняння (358.2) являє собою диференціал від суми $\overline{P}(x) + \overline{Q}(y)$. Оскільки цей диференціал, зважаючи на рівняння (358.2), дорівнює 0, то сама функція зводиться до сталої

$$\overline{P}(x) + \overline{Q}(y) = C. \tag{358.3}$$

Легко побачити, що й навпаки, якщо функція $y = y(x)$ задовольняє це рівняння (тотожно при будь-якому x), то виконується і рівняння (358.2). Рівняння (358.3) дає **загальний розв'язок** рівняння (358.2).

Розв'язуючи рівняння (358.2) інколи члени з dx та dy поміщають у різних частинах рівняння

$$Q(y)\,dy = -P(x)\,dx. \tag{358.4}$$

Інтегруючи кожну частину окремо та не забуваючи про довільну сталу, яку достатньо додати до одного з інтегралів, прийдемо до результату

$$\int Q(y)\,dy = -\int P(x)\,dx + C,$$

що рівносильно до результату отриманого вище.

Припустимо, що треба задовольнити **початкові умови** (357.3). Замість того, щоб спочатку знаходити загальний розв'язок, а потім підбирати сталу C, виходячи з цих умов, можна вчинити простіше: "підсумувати" елементарні величини (358.4), справа між x_0 та x, а зліва — між відповідними значеннями y_0 та y. Ми отримаємо рівність

$$\int\limits_{y_0}^{y} Q(y)\,dy = -\int\limits_{x_0}^{x} P(x)\,dx,$$

яке і дає шуканий частинний розв'язок; самий його вигляд підкреслює, що він заздалегідь виконується при $x = x_0$ та $y = y_0$. Читач легко може переконатися, що цей спосіб лише формою відрізняється від попереднього.

Приклади.

1) Нехай дано рівняння

$$\sin x\, dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0.$$

Інтегруємо

$$\int \sin x\, dx + \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = C \quad \text{або} \quad -\cos x + 2\sqrt{y} = C,$$

звідки

$$y = \frac{(\cos x + C)^2}{4}\,.$$

Таким є **загальний розв'язок** запропонованого рівняння. Якщо задані **початкові умови**, наприклад $y = 1$ при $x = 0$, тоді, підставляючи ці значення, одразу знаходимо $C = 1$, що приводить до частинного розв'язку

$$y = \frac{(1 + \cos x)^2}{4}\,.$$

Як згадувалось раніше, можна у цьому випадку уникнути необхідності попередньо знаходити загальний розв'язок, написавши одразу

$$\int\limits_1^y \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\int\limits_0^x \sin x\, dx, \quad \text{тобто} \quad 2(\sqrt{y} - 1) = \cos x - 1,$$

звідки

$$\sqrt{y} = \frac{1 + \cos x}{2}, \quad y = \left(\frac{1 + \cos x}{2}\right)^2.$$

Часто виходить, що хоча рівняння (358.1) і не має вигляду (358.2), але воно може бути перетворене до цього вигляду, після чого інтегрується, як показано вище. Таке перетворення і має назву **відокремлення змінних**. Змінні легко відокремлюються у тому випадку, коли P та Q являють собою добутки множників, що залежать кожен лише від однієї змінної, тобто коли

$$P(x, y) = P_1(x)P_2(y) \quad \text{та} \quad Q(x, y) = Q_1(x)Q_2(y).$$

Справді, достатньо поділити обидві частини рівняння

$$P_1(x)P_2(y)\, dx + Q_1(x)Q_2(y)\, dy = 0 \tag{358.5}$$

на $P_2(y)Q_1(x)$, щоб цим уже відокремити змінні:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,dy = 0.$$

2)

$$y\sin\frac{x}{2}\,dx - \cos\frac{x}{2}\,dy = 0.$$

Рівняння має вигляд (358.5); відокремимо змінні

$$\frac{dy}{y} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,dx$$

та проінтегруємо

$$\ln y = -2\ln\cos\frac{x}{2} + c.$$

Потенціюючи, визначимо звідси y

$$y = \frac{e^c}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2e^c}{1+\cos x}\,.$$

Приймаючи до того ж $C = 2e^c$, зведемо загальний розв'язок до вигляду

$$y = \frac{C}{1+\cos x}\,.$$

359. Задачі

Розглянемо ряд задач із різних областей знань, що безпосередньо приводять до диференціальних рівнянь зі змінними, що можна відокремити одне від одного.

1) Знайти криві, у яких відрізок нормалі n (до перетину з віссю x) зберігає сталу величину r.

Згадуючи вираз для n (230.4), запишемо умову, якій має відповідати шукана функція y від x, у вигляді диференціального рівняння

$$\left|y\sqrt{1+y'^2}\right| = r \quad \text{або} \quad y^2(1+y'^2) = r^2.$$

Звідси

$$y' = \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{y} \quad \text{або} \quad \frac{y\,dy}{\sqrt{r^2-y^2}} = \pm dx.$$

Інтегруємо:

$$-\sqrt{r^2-y^2} = \pm(x+C) \quad \text{або} \quad (x+C)^2 + y^2 = r^2.$$

Як і слід було очікувати, ми отримали сімейство кіл з радіусом r та центром на осі x.

2) Знайти криві, у яких відрізок дотичної t до перетину з віссю x зберігає сталу величину a.

Використовуючи (230.4), запишемо диференціальне рівняння для цієї задачі

$$\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right| = a.$$

Підставляючи $y' = \dfrac{dy}{dx}$, його легко перетворити так:

$$\left|y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right| = a$$

або

$$dx = \pm\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\,dy.$$

Інтегруємо:

$$x + C = \pm\left[a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}\right];$$

ми отримали сімейство **трактрис** (дивіться пр. 331.11).

3) **Закон охолодження**. Нехай тіло, що охолоджується, має температуру $\theta^\circ\,C$ та оточене середовищем з температурою $0^\circ\,C$. Ньютен встановив закон, згідно з яким **швидкість охолодження** пропорційна самій температурі θ, тобто

$$\frac{d\theta}{dt} = -k\theta,$$

де k — додатна стала. Визначити закон, згідно з яким спадає температура тіла, починаючи з моменту $t = 0$.

Маємо

$$\frac{d\theta}{\theta} = -k\,dt,$$

звідки, інтегруючи, знайдемо $\ln\theta = -kt + \ln C$. (Передбачаючи потенціювання, ми одразу для зручності оберемо сталу у вигляді $\ln C$.) Очевидно, $\theta = Ce^{-kt}$. Підставляючи тут $t = 0$, ми бачимо, що C є нічим іншим, як **початковим значенням температури** θ_0. Підставляючи це значення, прийдемо до остаточної формули

$$\theta = \theta_0 e^{-kt},$$

яка визначає температуру тіла у будь-який момент, якщо тільки вона була відомою у початковий момент (θ_0).

Коефіцієнт k залежить від властивостей тіла та середовища; він визначається за допомогою досліджувань.

4) **Екстраструми розмикання та замикання**. Якщо в електричному колі діє постійна напруга V, то, позначаючи через R опір у колі і через I — силу струму, згідно з законом Ома, матимемо $V = RI$. Якщо ж напруга V змінюється (а також у момент розмикання чи замикання струму постійної напруги), у багатьох випадках виникає самоіндукція, яка полягає у появі додаткової електрорушійної сили, що пропорційна **швидкості зміни сили струму** $\frac{dI}{dt}$, але має протилежний знак. Отже, величину цієї електрорушійної сили самоіндукції можна виразити так: $-L\frac{dI}{dt}$, де L — "коефіцієнт самоіндукції" ($L > 0$).

Якщо самоіндукція присутня, то при розмиканні струму, його сила не одразу падає до нуля, а при замиканні — не одразу досягає своєї нормальної величини. Дослідимо ці явища аналітично.

Закон Ома тепер має наступний вигляд:

$$V - L\frac{dI}{dt} = RI \quad \text{або} \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{V}{L}. \tag{359.1}$$

а) Нехай постійний струм сили I_0 у момент $t = 0$ розмикається. Оскільки тоді $V = 0$, то маємо

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$

та (аналогічно до пр. 359.3)

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Цей струм, що проходить у колі під дією однієї лиш електрорушійної сили самоіндукції, називається **екстраструмом розмикання**. Зі зростанням t його сила прямує до 0, і через деякий час він стає невідчутним.

б) Якщо коло в момент $t = 0$ **замикається**, у ньому починає діяти постійна напруга V, тоді з рівняння (359.1), знову відокремлюючи змінні, отримаємо

$$\frac{-R\,dI}{V - RI} = -\frac{R}{L}dt, \quad \ln(V - RI) = -\frac{R}{L}t + \ln C, \quad V - RI = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Значення сталої C визначимо з **початкових умов** $I = 0$ при $t = 0$; очевидно, $C = V$, отже остаточно

$$I = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Ми бачимо, що поряд зі струмом $\frac{V}{R}$, що відповідає закону Ома, одночасно протікає у зворотному напрямку струм

$$\frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Це і є **екстраструм замикання**; його сила також швидко спадає зі зростанням t.

5) **Рівняння хімічної реакції**. Розглянемо хімічний процес, що складається з перетворень взаємодіючих речовин A, B, ... у речовини M, N, ... Для оцінювання кількості речовини, що бере участь у реакції, її виражають у грам-молекулах або **молях**. Молем будь-якої речовини називається така його масова кількість, яка виражається у грамах числом, що дорівнює її молекулярній масі. У молі будь-якої речовини завжди міститься одна і та ж кількість молекул, незалежно від речовини.

Якщо припустити, що у взаємодію вступають по одній молекулі однієї речовини на кожну молекулу іншої речовини, то на один моль однієї речовини припадає один моль іншої. Після проходження часу t після початку реакції, від кожної із взаємодіючих речовин вступить у реакцію одна й та ж сама кількість x молів. **Швидкість зростання** x відносно часу, тобто похідна $\frac{dx}{dt}$, називається **швидкістю хімічної реакції**.

Нехай у процесі беруть участь **дві** речовини A та B, початкові кількості яких (у молях) позначимо через a та b (при цьому нехай, скажімо, $b > a$). Через проміжок часу t матимемо кількість $a - x$ речовини A та кількість $b - x$ речовини B. Природно припустити, що швидкість хімічної реакції у момент t пропорційна **добутку** реагуючих мас, тобто добутку кількостей реагентів, що ще не піддалися перетворенню. Це приводить до такого диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x) \quad \text{або} \quad \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k\,dt.$$

Інтегруючи, отримаємо

$$\frac{1}{b-a}\ln\frac{a-x}{b-x} = -kt + C.$$

Оскільки при $t = 0$ ми повинні мати $x = 0$, то $C = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a}{b}$. Підставляючи це значення C:

$$\ln\frac{(a-x)b}{(b-x)a} = -k(b-a)t, \quad \text{легко знаходимо, що} \quad x = ab\frac{1-e^{-k(b-a)t}}{b-ae^{-k(b-a)t}}.$$

В міру зростання t показниковий вираз прямує до 0; через скінченний проміжок часу він стає настільки малим, що x практично дорівнює a, і реакція припиняється.

6) **Математичний маятник**. Нехай матеріальна точка з масою m підвішена на нерозтяжній нитці або стержні довжиною l (вагою яких ми нехтуємо) так, що може

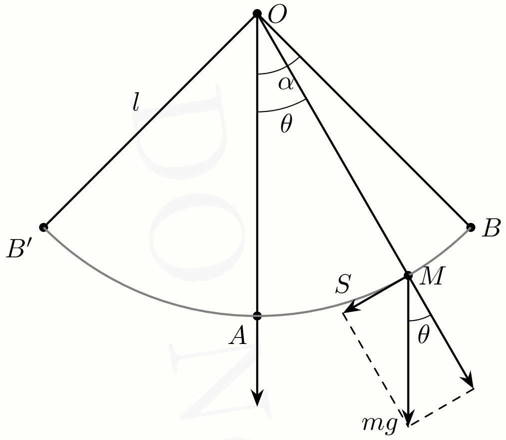


Рис. 359.1

вільно рухатися по дузі кола (рис. 359.1). Ця система називається *математичним маятником*. Виведемо маятник з положення рівноваги OA у положення OB ($\alpha < \pi/2$) і відпустимо не надаючи йому при цьому початкову швидкість.

Маятник перейде у симетричне положення OB', потім повернеться у положення OB і так далі. Задача полягає в з'ясуванні характеру коливань маятника, тобто в знаходженні залежності між кутом $\theta = \angle AOM$ та часом t. Для визначення залежності розглянемо рух точки M по дузі $\overset{\frown}{AB}$, відраховуючи пройдений шлях $s = \overset{\frown}{AM} = l\theta$ від точки A, а час t — від моменту проходження маятника через положення рівноваги.

Розкладаючи силу ваги $F = mg$, що діє на точку M, як показано на рисунку, бачимо, що її **дотична складова** $F_s = -mg\sin\theta$ (направлена **проти** напрямку руху), тоді, як нормальна складова компенсується силою опору нитки або стержня. Якщо через v позначити швидкість точки M, то її кінетична енергія у розгляданому положенні буде $\frac{1}{2}mv^2$ і зведеться до 0 при переході M у положення B. З іншого боку, робота $\mathbf{A}$, виконана силою F_s на шляху MB виразиться так (353.2):

$$\mathbf{A} = -\int_s^S mg\sin\theta\,ds$$

(тут $S = \overset{\frown}{AB}$) або, якщо перейти до змінної θ,

$$\mathbf{A} = -mgl\int_0^\alpha \sin\theta\,d\theta = -mgl\,(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Тоді, згідно з законом живої сили (розд. 353), маємо:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl\,(\cos\theta - \cos\alpha), \quad v = \sqrt{gl}\,\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}.$$

Оскільки $v = \dfrac{ds}{dt} = l\,\dfrac{d\theta}{dt}$, то для визначення залежності між θ і t отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)} \quad \text{або} \quad dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}},$$

де змінні вже відокремлені.

Інтегруючи зліва від 0 до t, а справа від 0 до θ, приходимо до шуканої залежності:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\alpha)}}. \tag{359.2}$$

Однак, *інтеграл на цей раз у скінченному вигляді не береться:* як зараз побачимо, інтеграл справа безпосередньо зводиться до еліптичного інтеграла 1-го роду.

Переписавши (359.2) у вигляді

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

і підставивши $\sin\frac{\alpha}{2} = k$ $(0 < k < 1)$, введемо нову змінну інтегрування φ згідно з формулами

$$\sin\frac{\theta}{2} = k \cdot \sin\varphi, \quad \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = k \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi; \tag{359.3}$$

при цьому зміні θ від 0 до α відповідає зміна φ від 0 до $\frac{\pi}{2}$. Тоді

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2\varphi}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \mathbf{F}(\varphi, k). \tag{359.4}$$

Оскільки, використовуючи першу з формул (359.3), легко виразити φ через θ, то залежність t від θ можна вважати знайденою.

Бажаючи вивести, навпаки, θ через t, ми приходимо до необхідності знаходження величини **оберненої** до еліптичного інтеграла

$$u = \int\limits_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2\varphi}}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Ця рівність визначає u як **монотонно зростаючу** неперервну (і навіть диференційовну) функцію від φ на проміжку $(-\infty, +\infty)$, яка і сама при цьому змінюється від $-\infty$ до $+\infty$. У такому випадку (розд. 83) змінна φ виявляється однозначною функцією від u на проміжку $(-\infty, +\infty)$; Якобі її позначив через $\operatorname{am} u$ (am — це початкові літери слова amplitudo (амплітуда)). Із (359.4) тепер зрозуміло, що

$$\varphi = \operatorname{am}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \quad \text{і, отже,} \quad \sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\operatorname{am}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Функцію $\sin\operatorname{am} u$ (“синус амплітуди” або “еліптичний синус”) зазвичай позначають просто через $\operatorname{sn} u$. (Функція $\operatorname{sn} u$, розглядана як функція від комплексного аргументу, є однією з найпростіших (введених Абелєм та Якобі), так званих **еліптичних функцій**.) Отже, остаточно, залежність θ від t виражається рівністю

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{sn}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Визначимо, насамкінець, тривалість T одного розмаху маятника із положення OB' у положення OB; вона **вдвічі** більша за проміжок часу, що потрібен для переходу з OA у OB. Приймаючи у (359.2) $\theta = \alpha$ або у (359.3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, отримаємо (після **подвоєння**) вираз для T через повний еліптичний інтеграл 1-го роду:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2\varphi}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\mathbf{K}(k).$$

(Якщо верхню границю інтеграла (359.2) взяти рівною α, то інтеграл стане “невласним” (дивіться нижче розд. 479), оскільки на цій межі підінтегральна функція дорівнює ∞. Це ускладнення зникає якщо користуватися інтегралом (359.4).)

Зауважимо, що період коливання T насправді **залежить** від кута α, на який маятник було відхилено спочатку, оскільки k залежить від α. Замінюючи, при малих значеннях α, модуль k нулем, отримаємо просту **наближену формулу**

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

яка зазвичай і наводиться у елементарних курсах фізики.

360. Зауваження щодо складання диференціальних рівнянь

Обмежуючись рівнянням першого порядку, що має вигляд (358.1), ми зупинимося на питанні складання такого рівняння. Наші зауваження з цього приводу читач може порівняти із сказаним у розд. 348 відносно найпростішого рівняння $dQ = q(x)\,dx$.

Як правило, при складанні рівнянь доводиться розглядати нескінченно малі елементи тіл, що потребують розгляду, і нескінченно малі прирости тих величин, про які ідеться. Щоправда, у задачах розд. 359 нам, нібито, вдалося уникнути цього, але виключно за рахунок використання вже **готового** виразу для кутового коефіцієнту дотичної, **готового** виразу для швидкості зміни тієї чи іншої величини, **які самі є результатом розгляду нескінченно малих елементів**.

При встановленні залежності між нескінченно малими елементами слід користуватися усіма можливими **припущеннями, щоб спростити** вираз; робити **наближені заміни**, які, по суті, відкидають нескінченно малі вищих порядків. Зокрема, усі нескінченно малі **прирости величин рекомендується замінити їх диференціалами**; як читач знає, це також зводиться до відкидання нескінченно малих вищих порядків. Справжній зміст усіх цих вказівок найкраще виявиться у прикладах (дивіться розд. 361).

Тут же ми хочемо зупинитися ще на поясненні тієї важливої обставини, що диференціальне рівняння вигляду (358.1), що виходить у результаті усіх цих спрощень та відкидань,

$$P(x,\, y)\, dx + Q(x,\, y)\, dy = 0$$

виявляється зовсім не **наближеним**, а цілком **точним**. (Це аналогічно до сказаного у кінці розд. 348 щодо рівності $dQ = q(x)\, dx$.)

Отже, припустимо, що заміняючи прирости Δx та Δy на диференціали dx та dy і відкидаючи (якщо потрібно) нескінченно малі доданки порядку **вищого** за Δx, ми прийшли до рівняння (358.1). Якщо б ми не робили цієї заміни, то замість dx та dy ми мали б Δx та Δy. Більш того, повернемо усі відкинуті нескінченно малі вищих порядків, перенесемо їх у праву частину та позначимо їх суму через α; очевидно, що α також буде нескінченно малою **вищого** порядку. Отже, розмірковуючи строго, ми прийшли б не до рівняння (358.1), а до такого рівняння:

$$P(x,\, y)\, \Delta x + Q(x,\, y)\, \Delta y = \alpha,$$

яке є цілковито точним. Розділимо тепер обидві частини її на Δx

$$P(x,\, y) + Q(x,\, y)\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\alpha}{\Delta x}$$

і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$. Оскільки при цьому $\frac{\alpha}{\Delta x} \to 0$, то отримаємо рівність

$$P(x,\, y) + Q(x,\, y)y' = 0, \quad \text{або} \quad P(x,\, y) + Q(x,\, y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

яка тотожна до (358.1). Тому і рівняння (358.1) виявляється точним.

Хоча користуючись звичайним методом складання рівнянь ми явно не застосовуємо граничний перехід, але фактично ми саме його і виконуємо, коли відкидаємо нескінченно малі вищих порядків та замінюємо прирости на диференціали.

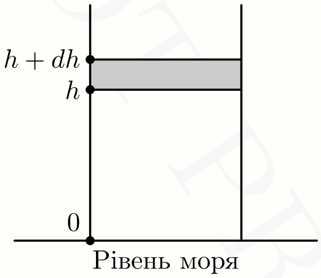


Рис. 361.1

Звертаємо увагу читача на те, що ми зовсім не стверджуємо, що будь-яке відкидання нескінченно малих вищого порядку приводить до **точного** результату. Лише у тому випадку, коли це відкидання доведене “до кінця”, і у результаті вийшло рівняння вигляду (358.1), **лінійне та однорідне** відносно диференціалів, можна вже стверджувати його точність. (Знову ж аналогія з розд. 348!)

361. Задачі

1) **Барометрична формула**. Спробуємо знайти залежність між висотою h (м) місця над рівнем моря і тиском повітря p (кг/м^2).

Уявимо над рівнем моря майданчик площею 1 м^2 і розглянемо призматичний стовп повітря, що спирається на цей майданчик. Тиск повітря p у перетині цього стовпа на висоті h обумовлений вагою тієї частини стовпа, яка спирається на цей перетин. **Збільшення** висоти h на нескінченно малу величину dh приводить до **спадання** тиску $-dp$, яке визначається масою повітря між перетинами на висотах h та $h+dh$ (рис. 361.1)

$$-dp = s\,dh,$$

де s - маса (кг) 1 м^3 під тиском p. Ми нехтуємо тут тим, що насправді s **змінюється** при переході з нижнього майданчика розгляданого шару до верхнього.

Як легко вивести із закону Бойля – Маріотта, величина s сама є пропорційною тиску p: $s = kp$, отже остаточно

$$dp = -kp\,dh \quad \text{або} \quad \frac{dp}{p} = -k\,dh$$

— рівняння уже знайомого нам типу (порівняйте з пр. 359.3 та пр. 359.4).

Звідси

$$p = p_0 e^{-kh}.$$

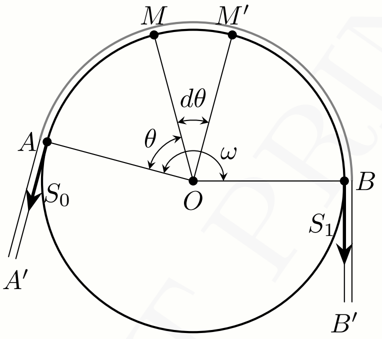


Рис. 361.2

Якщо розв'язати це рівняння відносно h, то отримаємо формулу

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{p_0}{p},$$

що дає можливість визначати висоту h підйому над рівнем моря, використовуючи тиску повітря p.

Стала $1/k$, як виводиться у фізиці, дорівнює (наближено) $8000 \cdot (1 + 0{,}004 \cdot t)$, де t — середня температура повітря. Якщо перейти до десяткових логарифмів (помноживши та розділивши на модуль $M = 0{,}43$) та замінити відношення тисків p_0/p відношенням барометричних величин b_0/b, то отримаємо остаточну формулу

$$h = 18\,400 \cdot (1 + 0{,}004 \cdot t) \lg \frac{b_0}{b}.$$

Ця формула годиться і для визначення різниці висот h будь-яких двох точок, у яких покази барометра відповідно дорівнюють b_0 та b.

2) **Тертя канатів та ременів**. Уявимо собі, що через нерухомо закріплений циліндричний барабан перекинуто канат (ремінь, абощо), який прилягає до циліндру по деякій дузі AB (рис. 361.2), що відповідає центральному куту ω ("кут охоплення"). Нехай до кінця канату A прикладена сила S_0, а до кінця B — сила S_1.

Якщо між канатом і барабаном існує тертя, то сила S_0 може урівноважувати навіть більшу за неї силу, прикладену до іншого кінця. Яка ж та **найбільша** сила S_1, що при наявності тертя може бути врівноважена даною силою S_0?

Для знаходження відповіді на це питання розглянемо спочатку, як розподілиться **натяг** S вздовж частини канату AB у той момент, коли ковзання лише розпочинається. Те, що цей натяг не буде постійним, випливає із того, що у точках A та B він відповідно дорівнює S_0 та S_1.

Візьмемо на дузі AB довільну точку M, положення якої визначається кутом $\theta = \angle AOM$, і покажемо, які сили діють на елемент канату $\overset{\frown}{MM'}$, що відповідає

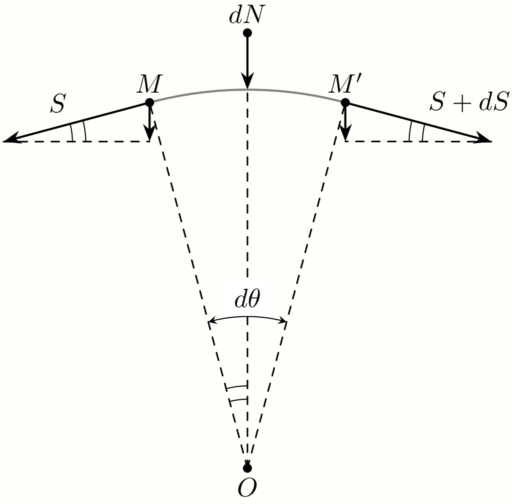


Рис. 361.3

центральному куту $d\theta$. Передусім у точці M діє натяг $S = S(\theta)$, а у точці M' — натяг $S + dS$ (рис. 361.3). Обидві ці сили направлені по дотичним до кола барабану. Для того, щоб визначити силу тертя на цьому елементі, треба обчислити нормальну силу dN, що притискає цей елемент до поверхні барабану. Вона складається з радіальних складових обох сил натягу, отже

$$dN = S \sin \frac{d\theta}{2} + (S + dS) \sin \frac{d\theta}{2}.$$

Тут можна відкинути добуток $dS \sin \frac{d\theta}{2}$ як нескінченно малу вищого порядку та замінити $\sin \frac{d\theta}{2}$ еквівалентною нескінченно малою $\frac{d\theta}{2}$ (що знову рівносильно відкиданню нескінченно малої вищого порядку). Остаточно $dN = S\,d\theta$. Оскільки сила тертя є пропорційною до цієї нормальної сили, то, позначивши множник пропорційності (коефіцієнт тертя) через μ, отримаємо $dR = \mu\,dN = \mu S\,d\theta$. Тертя протидіє руху, що починається, отже сила dR разом із натягом S у точці M повинні урівноважувати натяг $S + dS$ у точці M', звідки $dS = \mu S\,d\theta$. Ми знову отримали диференціальне рівняння знайомого типу. Можна одразу написати його результат (з урахуванням початкової умови $S = S_0$ при $\theta = 0$): $S = S_0 e^{\mu\theta}$. Насамкінець, приймаючи тут $\theta = \omega$, знайдемо

$$S_1 = S_0 e^{\mu\omega}.$$

Ця важлива формула належить Ойлеру.

3) **Формула Пуассона**. Спробуємо знайти залежність між об'ємом V та тиском p одного моля ідеального газу при **адіабатичному** процесі (тобто у випадку повної відсутності теплового обміну між газом та зовнішнім середовищем).

nebayduzhi.math@gmail.com

Стан газу, окрім величин V та p, характеризується ще його (абсолютною) температурою T. Втім, ці величини не є незалежними; вони пов'язані відомою формулою Кляпейрона

$$pV = RT \quad (R \text{ — газова стала}) \tag{361.1}$$

Знайдемо, яку кількість енергії dU, в одиницях тепла, треба витратити, щоб перевести газ із стану $(p,\ V,\ T)$ у нескінченно близький стан $(p + dp,\ V + dV,\ T + dT)$.

Можна уявити, що процес переходу складається з двох стадій. По-перше, об'єм газу V збільшується на dV і, по-друге, температура газу T при постійному об'ємі змінюється на dT.

Щоб визначити елементарну роботу розширення газу, припустимо для простоти, що маса газу знаходиться у циліндрі з одного боку від поршня (дивіться пр. 354.2). Сила, що діє з боку газу на поршень, буде pQ, де Q — площа поршня. Якщо при розширенні газу поршень змістився на відстань ds, то робота, виконана газом, дорівнюватиме $pQ\,ds$ або $p\,dV$ (оскільки $Q\,ds = dV$). Так виражається робота — у звичайних одиницях роботи, наприклад, у **кгм** (якщо p дано у кг/м^2, V — у м^3). Бажаючи знайти затрачене на цю роботу тепло, треба отриманий вираз домножити на так званий "термічний еквівалент роботи" $A = \frac{1}{427}$ кал/кгм, що дасть $Ap\,dV$.

Зміна температури на dT вимагає $c_v\,dT$ кал, де c_v — теплоємність газу при постійному об'ємі. Додаючи, отримаємо

$$dU = c_v\,dT + Ap\,dV. \tag{361.2}$$

Виключити звідси dT легко. Якщо продиференціювати формулу (361.1)

$$p\,dV + V\,dp = R\,dT \tag{361.3}$$

і виразити dT

$$dT = \frac{1}{R}(p\,dV + V\,dp),$$

то залишається лише підставити цей вираз у (361.2)

$$dU = \frac{c_v}{R}V\,dp + \frac{c_v + AR}{R}p\,dV.$$

Можна показати, що $c_v + AR$ є якраз теплоємність газу **при постійному тиску**. Якщо з (361.3) визначити $p\,dV = R\,dT - V\,dp$ і підставити у (361.2), то отримаємо $dU = (c_v + AR)\,dT - AV\,dp$. Приймаючи тут $p = \text{const}$, тобто $dp = 0$, прийдемо до рівності $dU = (c_v + AR)\,dT$, яке і показує, що $c_v + AR$ і є c_p. Так що остаточно

$$dU = \frac{c_v}{R}V\,dp + \frac{c_p}{R}p\,dV.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Повернемося тепер до припущення, зробленого на початку, що наш процес **адіабатичний**; тоді $dU = 0$. Отже, ми приходимо до диференціального рівняння, що пов'язує p та V,

$$c_v V\,dp + c_p p\,dV = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dp}{p} + k\frac{dV}{V} = 0 \quad \left(\text{де } k = \frac{c_p}{c_v} > 1\right).$$

Інтегруючи, знайдемо

$$\ln p + k\ln V = 0 \quad \text{або} \quad pV^k = C.$$

Це і є *формула Пуассона.*

Глава 11

НЕСКІНЧЕННІ РЯДИ ЗІ СТАЛИМИ ЧЛЕНАМИ

11.1. Вступ

362. Основні поняття

Нехай задано деяку нескінченну послідовність чисел

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots \tag{362.1}$$

Складена з цих чисел сума

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \tag{362.2}$$

називається **нескінченним рядом**, а самі числа (362.1) — **членами ряду**. Замість (362.2) за допомогою знака суми часто пишуть так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \tag{362.3}$$

де n набуває всіх значень від 1 до ∞. (Втім, нумерацію членів ряду іноді буває зручніше починати не одиниці, а з нуля або з будь-якого натурального числа більшого за одиницю.)

Послідовним додаванням членів ряду можна отримати **часткові суми** (або **відрізки**) ряду:

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \dots,\ A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n,\ \dots; \tag{362.4}$$

Цю послідовність часткових сум $\{A_n\}$ ми завжди будемо асоціювати з рядом (362.2): роль часткових сум — це утворення цієї послідовності.

nebayduzhi.math@gmail.com

Скінченну або нескінченну границю A часткової суми A_n ряду (362.2) при $n \to \infty$:

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

називають ***сумою*** *ряду* і пишуть

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

що надає сумі (362.2) або (362.3) числовий зміст. *Якщо ряд має* ***скінченну*** *суму, його називають* ***збіжним****, інакше (тобто, якщо сума дорівнює $\pm\infty$ або зовсім не існує) —* ***розбіжним****.* (Про це вже ішлося в пр. 25.9)

Отже, питання збіжності ряду (362.2), **за означенням**, рівносильне питанню про існування скінченної границі послідовності (362.4). І в іншу сторону, яку б послідовність $x = x_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ не взяти, питання існування її скінченної границі можна звести до питання збіжності ряду

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots, \qquad (362.5)$$

для якого частковими сумами якраз і будуть значення варіанти:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

При цьому сума ряду дорівнює границі варіанти.

Іншими словами, дослідження нескінченного ряду та його суми — це просто **нова форма** дослідження варіанти та її границі. Але ця форма, як читач помітить з подальших викладок, має значні переваги як при з'ясуванні самого факту існування границі, так і при її обчисленні. Ця обставина робить нескінченні ряди важливим засобом дослідження в математичному аналізі та його застосуваннях.

363. Приклади

1) Найпростішим прикладом нескінченного ряду є вже відома читачеві геометрична прогресія:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \ldots$$

Її часткова сума при $q \neq 1$ дорівнює

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Якщо знаменник прогресії q за абсолютною величиною менше 1, то (як ми вже знаємо, пр. 25.7) s_n має скінченну границю

$$s = \frac{a}{1-q},$$

тобто цей ряд збігається, і s буде його сумою.

При $|q| \geqslant 1$ та сама прогресія буде прикладом розбіжного ряду. Якщо $q \geqslant 1$, то його сумою буде нескінченність (певного знака), а при $q \leqslant -1$ сума не існує взагалі. Зокрема, звернемо увагу на цікавий ряд, який утворюється при $a = 1$ і $q = -1$:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \equiv 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots .$$

Його часткові суми по черзі дорівнюють то 1, то 0.

(Якщо якийсь член a ряду виявляється **від'ємним** числом: $a = -b$ (де $b > 0$), то замість того, щоб писати:

$$\ldots + (-b) + \ldots ,$$

пишуть

$$\ldots - b + \ldots ,$$

Підкреслимо, що **членом** ряду тут буде все ж таки $-b$, а не b.)

2) Дійсне число α, розкладене в нескінченний десятковий дріб

$$C_0, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$$

(розд. 9) очевидно, є сумою ряду:

$$\alpha = C_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \ldots$$

3) За зразком (362.5) можна утворити ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln n),$$

в якому часткові суми дорівнюють

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^{n} (\ln(n+1) - \ln n) = \\ &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln(n+1) - \ln n = \\ &= \ln(n+1). \end{aligned}$$

Отже, ряд є розбіжним, бо $\ln(n+1) \to +\infty$.

4) За тим само принципом побудовано наступні ряди (де α — довільне число, відмінне від $-1,\ -2,\ -3,\ \ldots$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{\alpha+n+1}\right) = \frac{1}{\alpha+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} - \frac{1}{(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}\right) = \frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

і, взагалі, для будь-якого цілого $p \geqslant 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n+p)} = \frac{1}{p(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+p)}\,.$$

5) Аналогічно трактується ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1-x^{2^n}} \right),$$

де x — довільне фіксоване число, окрім ± 1. Оскільки n-а часткова сума дорівнює

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}\,,$$

то при $|x| < 1$ ряд збігається до суми $\dfrac{x}{1-x}$, а при $|x| > 1$ — до суми $\dfrac{1}{1-x}$.

6) Нескладно встановити розбіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

Справді, оскільки його члени спадають, то n-а часткова сума

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

і зростає до нескінченності зі збільшенням n.

7) Нарешті, менш тривіальний приклад нам дасть вже відомий (37.1) розклад числа e:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,.$$

Згадуючи наближене обчислення числа e (розд. 37), читач на цьому прикладі зможе оцінити користь від послідовного введення все менших і менших поправок, які поступово покращують отримані наближення числа e у формі часткових сум.

364. Основні теореми

Якщо в ряді (362.2) відкинути перші m членів, то отримаємо ряд:

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \tag{364.1}$$

що називається **залишком ряду** (362.2) **після** m**-того члена**.

nebayduzhi.math@gmail.com

Теорема 364.1. *Якщо збігається ряд* (362.2), *то збігається і будь-який його залишок* (364.1); *навпаки, зі збіжності залишку* (364.1) *випливає збіжність вихідного ряду* (362.2).

Доведення. Зафіксуємо m та позначимо k-ту часткову суму ряду (364.1) через A'_k:

$$A'_k = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k}.$$

Тоді, очевидно,

$$A'_k = A_{m+k} - A_m. \tag{364.2}$$

Якщо ряд (362.2) збігається, тобто $A_n \to A$, то при нескінченному зростанні k існує скінченна границя

$$A' = A - A_m \tag{364.3}$$

і для суми A'_k, що й означає збіжність ряду (364.1).

В іншу сторону: якщо відомо, що ряд (364.1) збігається, тобто $A'_k \to A'$. Перепишемо рівність (364.2), замінивши там $k = n - m$ (при $k > m$):

$$A_n = A_m + A'_{n-m}.$$

Звідси видно, що при нескінченному зростанні n часткова сума A_n має границю

$$A = A_m + A', \tag{364.4}$$

тобто ряд (362.2) збігається. □

Інакше кажучи, *відкидання скінченної кількості початкових членів ряду або додавання на його початку кількох нових членів не змінює* ***поведінки*** *ряду — його збіжності або розбіжності.*

Суму ряду (364.1), якщо він збігається, позначимо замість A' символом α_m, вказуючи, після якого члена береться залишок. Тоді формули (364.4) та (364.3) можна буде переписати так:

$$A = A_m + \alpha_m, \quad \alpha_m = A - A_m. \tag{364.5}$$

Якщо m буде зростати до нескінченності, то $A_m \to A$, а $\alpha_m \to 0$. Отже маємо наступну теорему.

Теорема 364.2. *Якщо ряд* (362.2) *збігається, то сума* α_m *його залишку після* m-*того члена прямує до* 0.

Наведемо також наступні прості властивості збіжних рядів.

Теорема 364.3. *Якщо члени збіжного ряду* (362.2) *помножити на сталий множник* c, *то його збіжність не порушиться, а сума помножиться на* c.

Доведення. Справді, часткова сума $\overline{A}_n$ ряду

$$ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots,$$

очевидно, дорівнює

$$\overline{A}_n = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = cA_n$$

і має границю cA. □

Теорема 364.4. *Два збіжних ряди*

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

та

$$B = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

можна почленно додавати та віднімати, причому ряд

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) + \dots$$

також збігається, і його сума дорівнює, відповідно, $A \pm B$.

Доведення. Якщо A_n, B_n та C_n позначають часткові суми цих рядів, то, очевидно,

$$\begin{aligned} C_n &= (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = A_n \pm B_n. \end{aligned}$$

Звідси видно, що

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} A_n + \lim_{n\to\infty} B_n,$$

що й потрібно було довести. □

Наостанок звернемо увагу на ще одну властивість.

Теорема 364.5.
Загальний член a_n *збіжного ряду прямує до* 0.

Доведення. Це можна довести дуже просто: оскільки A_n, а разом з ним і A_{n-1}, має скінченну границю A, то

$$a_n = A_n - A_{n-1} \to 0.$$

□

Це твердження є **необхідною умовою** збіжності ряду, якою ми будемо часто користуватись. **Якщо цю умову порушено, то ряд розбігається.** Але варто зауважити, що ця умова не є достатньою для збіжності: навіть якщо вона виконується, ряд може розбігатися. Прикладами є ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

розглянуті вище (пр. 363.3, пр. 363.6). Багато інших прикладів такого типу читач побачить далі.

11.2. Збіжність додатних рядів

365. Умова збіжності додатного ряду

Займемося тепер дослідженням збіжності та розбіжності ряду. Найпростішим випадком тут будуть ряди, члени яких є невід'ємними; задля стислості називатимемо такі ряди просто **додатними**.

Нехай ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \tag{A}$$

буде додатним, тобто $a_n \geqslant 0$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$. Тоді, очевидно,

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geqslant A_n,$$

тобто **варіанта** (**послідовність**) A_n **зростає**. Посилаючись на теорему про границю монотонної варіанти (теор. 34.1), ми отримуємо наступне основне твердження теорії додатних рядів.

Теорема 365.1. *Додатний ряд* (A) *завжди має суму; ця сума буде скінченною (а ряд, відповідно, — збіжним), якщо часткові суми ряду обмежені зверху, і нескінченною (а ряд — розбіжним) в іншому випадку.*

Всі ознаки збіжності (та розбіжності) додатних рядів, зрештою, базуються на цій простій теоремі. Але **безпосереднє** її застосування дає можливість зробити висновок про характер ряду лише в часткових рідкісних випадках. Наведемо приклади такого типу.

1) Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

відомий як **гармонічний ряд**.

Кожен його член, починаючи з другого, є **середнім гармонічним** двох сусідніх членів. Число c називається **середнім гармонічним** чисел a і b, якщо $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

Маємо очевидну нерівність:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{365.1}$$

Якщо відкинути перші два члени, а інші члени гармонічного ряду послідовно розбити на групи по $2,\ 4,\ 8,\ \dots,\ 2^{k-1},\ \dots$ членів в кожній, тобто

$$\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2};\quad \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{2^2};\quad \underbrace{\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}}_{2^3};\quad \dots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}};\quad \dots,$$

то кожна з цих сум окремо буде більше $\frac{1}{2}$. В цьому нескладно переконатися, підставляючи в (365.1) по черзі $n = 2,\ 4,\ 8,\ \dots,\ 2^{k-1},\ \dots$. Позначимо n-ту часткову суму гармонічного ряду H_n. Тоді, очевидно,

$$H_{2^k} > k\cdot\frac{1}{2}.$$

Отже, часткові суми не можуть бути обмежені зверху: **ряд має нескінченну суму**.

Зауважимо, що H_n з ростом n росте доволі повільно. Ойлер, наприклад, обчислив

$$H_{1000} = 7{,}48\dots,\qquad H_{1000000} = 14{,}39\dots\quad \text{і так далі.}$$

Згодом ми матимемо нагоду точніше з'ясувати зростання сум H_n (пр. 367.10).

2) Розглянемо тепер більш загальний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\dots+\frac{1}{n^s}+\dots,$$

де s — довільне дійсне число. Його називають **узагальнений гармонічний ряд**. Зокрема, при $s = 1$ отримаємо попередній ряд — гармонічний.

Оскільки при $s < 1$ члени даного ряду більше відповідних членів ряду 1), то в цьому випадку часткові суми тим паче не обмежені зверху, тому ряд розбігається.

Розглянемо тепер випадок $s > 1$. Для зручності позначимо $s = 1+\sigma$, де $\sigma > 0$.

Аналогічно до (365.1), маємо

$$\frac{1}{(n+1)^s}+\frac{1}{(n+2)^s}+\dots+\frac{1}{(2n)^s} < n\cdot\frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\sigma}. \tag{365.2}$$

Групуючи, як і раніше, послідовні групи членів:

$$\underbrace{\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}}_{2};\quad \underbrace{\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}}_{2^2};\quad \underbrace{\frac{1}{9^s}+\dots+\frac{1}{16^s}}_{2^3};\quad \dots;$$

$$\underbrace{\frac{1}{(2^{k-1}+1)^s}+\dots+\frac{1}{(2^k)^s}}_{2^{k-1}};\quad \dots,$$

за допомогою (365.2) нескладно показати, що ці суми менше відповідних членів прогресії

$$\frac{1}{2^\sigma}, \quad \frac{1}{4^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^2}, \quad \frac{1}{8^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^3}, \ \dots, \ \frac{1}{(2^{k-1})^\sigma} = \frac{1}{(2^\sigma)^{k-1}}, \quad \dots$$

В такому випадку зрозуміло, що будь-яка часткова сума даного ряду буде менша за число

$$L = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{\frac{1}{2^\sigma}}{1 - \frac{1}{2^\sigma}},$$

тому цей ряд **збігається**.

Його сума, що залежить від s, є знаменитою **дзета функцією Рімана** $\zeta(s)$, що має важливу роль в теорії чисел.

366. Теореми порівняння рядів

Збіжність чи розбіжність додатного ряду часто досліджують, порівнюючи його з іншим рядом, який є збіжним чи розбіжним. Підґрунтям для такого порівняння є наступна проста теорема.

Теорема 366.1. *Нехай дано два додатних ряди*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \tag{A}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots. \tag{B}$$

Якщо, хоча б з якогось номера (припустимо для $n > N$), виконується нерівність $a_n \leqslant b_n$, то зі збіжності ряду (B) випливає збіжність ряду (A), що теж саме, що з розбіжності ряду (A) випливає розбіжність (B).

Доведення. Оскільки відкидання скінченної кількості початкових членів ряду не змінює його поведінки (теор. 364.1), без зменшення загальності можна вважати, що $a_n \leqslant b_n$ для всіх $n = 1, 2, 3, \dots$. Позначимо часткові суми рядів (A) та (B), відповідно, A_n та B_n, і отримаємо

$$A_n \leqslant B_n.$$

Нехай ряд (B) збігається. Тоді, за основною теоремою (теор. 365.1), суми B_n обмежені:

$$B_n \leqslant L \quad (L = \text{const}; n = 1, 2, 3, \dots).$$

З попередньої нерівності, очевидно,

$$A_n \leqslant L,$$

а це, за тією ж теоремою, означає збіжність ряду (A). □

Іноді на практиці виявляється зручнішою наступна теорема, що випливає з попередньої.

Теорема 366.2. *Якщо* $b_n \neq 0$ *та існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \quad (0 \leqslant K \leqslant +\infty),$$

то при $K < +\infty$ *зі збіжності ряду* (B) *випливає збіжність ряду* (A), *а при* $K > 0$ *з розбіжності ряду* (B) *випливає розбіжність* (A). *Отже, якщо* $0 < K < +\infty$, *то обидва ряди збігаються чи розбігаються одночасно.*

Доведення. Нехай ряд (B) збігається і $K < +\infty$. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$, і за означенням границі для досить великих n матимемо

$$\frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon, \quad \text{звідки} \quad a_n < (K+\varepsilon) b_n.$$

За теор. 364.3, одночасно з (B) буде збігатися і ряд $\sum (K+\varepsilon) b_n$, отриманий множенням його членів на сталу $K+\varepsilon$. Звідси, за попередньою теоремою, випливає збіжністю ряду (A).

Якщо ж ряд (B) розбігається і $K > 0$, то відношення $\frac{b_n}{a_n}$ має скінченну границю. Ряд (A) має бути розбіжним, бо інакше, за вже доведеним, збігався і ряд (B). □

Наведемо ще одну теорему порівняння, яка теж є наслідком теор. 366.1.

Теорема 366.3. *Якщо* a_n, $b_n \neq 0$ *і, хоча б з якогось номера* $n > N$, *виконується нерівність*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}, \tag{366.1}$$

то зі збіжності ряду (B) *випливає збіжність ряду* (A), *що теж саме, що з розбіжності ряду* (A) *випливає розбіжність* (B).

Доведення. Як і раніше, під час доведення теор. 366.1, без зменшення загальності можна вважати, що нерівність (366.1) виконується для всіх $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$. В такому випадку матимемо

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_2}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Якщо перемножити ці нерівності, отримаємо

$$\frac{a_n}{a_1} \leqslant \frac{b_n}{b_1} \quad \text{або} \quad a_n \leqslant \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Нехай ряд (B) збігається. Тоді разом з ним збігається і ряд $\sum \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$, отриманий множенням його членів на сталий множник $\frac{a_1}{b_1}$. А отже, за теор. 366.1, збігається ряд (A), що й потрібно було довести. □

Перейдемо тепер до прикладів застосування **теорем порівняння**.

367. Приклади

1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n} \quad (a>0).$$

Якщо $a \leqslant 1$, то порушується **необхідна** умова збіжності, теор. 364.5 і ряд розбігається. При $a>1$ члени ряду виявляються меншими за члени збіжного ряду $\sum \left(\frac{1}{a}\right)^n$: ряд збігається (теор. 366.1).

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

збігається, оскільки

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!}{2^n \cdot (2n-1)!!} < \frac{1}{2^n}$$

(теор. 366.1).

3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\frac{x}{3^n} \quad (0<x<3\pi).$$

Оскільки

$$2^n \cdot \sin\frac{x}{3^n} < x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

і ряд $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ збігається, то те ж саме справедливо і для нашого ряду (теор. 366.1).

4) Знову розглянемо **гармонічний** ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

та порівняємо його, згідно з теор. 366.2, із заздалегідь розбіжним рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\ln(n+1)-\ln n] = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1)$$

(пр. 363.3).

Оскільки (77.1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1,$$

то звідси вже випливає розбіжність гармонічного ряду.

Або навпаки: застосовуючи до функції $\ln x$ на проміжку $[n,\ n+1]$ формулу скінченних приростів, знайдемо, що

$$\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{n+\theta}\quad(0<\theta<1).$$

Члени гармонічного ряду більше, отже гармонічний ряд розбігається (теор. 366.1).

5) Аналогічно можна знову довести збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}\quad(\sigma>0),$$

якщо порівняти його з заздалегідь збіжним рядом

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^{\sigma}}-\frac{1}{n^{\sigma}}\right).$$

Застосовуючи до функції $\frac{1}{x^{\sigma}}$ на проміжку $[n-1,\ n]$ формулу скінченних приростів, знайдемо:

$$\frac{1}{(n-1)^{\sigma}}-\frac{1}{n^{\sigma}}=\frac{\sigma}{(n+\theta)^{1+\sigma}}\quad(0<\theta<1).$$

Отже, при $n\geqslant 2$

$$\frac{1}{n^{1+\sigma}}<\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{(n-1)^{\sigma}}-\frac{1}{n^{\sigma}}\right),$$

звідки, згідно з теор. 366.1, і випливає збіжність ряду, який ми досліджуємо.

6) Щоб схожим чином отримати **новий** результат, розглянемо ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

(члени якого ще менші, за відповідні члени гармонічного ряду).

Порівняємо його із заздалегідь розбіжним рядом

$$\sum_{n=2}^{\infty}[\ln\ln(n+1)-\ln\ln n].$$

Застосовуючи формулу скінченних приростів до функції $\ln\ln x$ на проміжку $[n,\ n{+}1]$, отримаємо

$$\ln\ln(n+1)-\ln\ln n=\frac{1}{(n+\theta)\ln(n+\theta)}\quad(0<\theta<1),$$

звідки, згідно з теор. 366.1, робимо висновок, що наш ряд, члени якого є відповідно більшими за ці, розбігається.

7) Порівняння з гармонічними рядами пр. 367.4 та пр. 367.5 дає змогу встановити поведінку багатьох рядів. Згідно з теор. 366.1:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ розбігається: $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n+1}$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ збігається: $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\frac{1}{n^{3/2}}$;

в) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^p}$ $(p>0)$ розбігається: $(\ln n)^p<n$ для досить великих n;

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ збігається: $\displaystyle\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\ldots\frac{n}{n}<\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot 1\ldots 1=\frac{2}{n^2}$ (для $n>3$);

ґ) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ збігається: $\displaystyle\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln\ln n}}<\frac{1}{n^2}$ для досить великих n;

д) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ збігається: $\displaystyle\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}}<\frac{1}{n^2}$, те ж саме;

е) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ розбігається: $\displaystyle\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}=\frac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}}>\frac{1}{e^{\ln n}}=\frac{1}{n}$, те ж саме.

nebayduzhi.math@gmail.com

8) Згідно з теор. 366.2

а) $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{(a+bn)^s}\quad (b>0)$ збігається при $s>1$, розбігається при $s\leqslant 1$:
$\displaystyle\frac{1}{(a+bn)^s}:\frac{1}{n^s}\to\frac{1}{b^s}$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ розбігається: $\displaystyle\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}:\frac{1}{n}\to 1$;

в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{n}\quad (0<x<\pi)$ розбігається: $\displaystyle\sin\frac{x}{n}:\frac{1}{n}\to x$;

аналогічно розбігаються і ряди $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\ (x>0)$ та $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-1)\ (a\neq 1)$;

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ збігається: $\displaystyle 1-\cos\frac{x}{n}:\frac{1}{n^2}\to\frac{x^2}{2}$.

9) Ось кілька більш складних прикладів того ж типу:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$

Позначимо через x_n відношення загального члена цього ряду до $\frac{1}{n}$:

$$\ln x_n=\ln n+n\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right).$$

Користуючись розкладом $\ln(1+x)$, про який йшлося в пр. 125.5, можна написати:

$$\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)=-\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2+\alpha_n\cdot\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2,$$

де $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$. Тому

$$\ln x_n=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln^2 n}{n}+\alpha_n\cdot\frac{\ln^2 n}{n}\to 0,$$

отже, $x_n\to 1$, і запропонований ряд розбігається.

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$.

Користуючись і тут згаданим розкладом $\ln(1+x)$, матимемо:

$$\ln\frac{2n+1}{2n-1} = \ln\left(1+\frac{2}{2n-1}\right) = \frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3 + \beta_n\cdot\left(\frac{2}{2n-1}\right)^3,$$

де $\beta_n \to 0$ при $n\to\infty$, отже

$$n\ln\frac{2n+1}{2n-1} - 1 = \frac{2n+3}{3(2n-1)}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2 + \beta_n\cdot\frac{8n}{2n-1}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2.$$

Отже, відношення загального члена даного ряду до $\frac{1}{(2n-1)^2}$ має границю $\frac{1}{3}$: наш ряд збігається.

10) Насамкінець, розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right).$$

Ми знаємо (пр. 133.4), що

$$\ln(1+x) < x \quad (x\neq 0,\ -1<x<+\infty).$$

Користуючись цим, можемо написати:

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

і водночас

$$\ln\frac{n+1}{n} = -\ln\frac{n}{n+1} = -\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

Тому

$$0 < \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}.$$

Отже, члени нашого ряду додатні і менші за відповідні члени збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (пр. 365.2); отже, наш ряд збігається.

Якщо позначити його суму через $\mathbf{C}$, то часткова сума

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k}\right) = H_n - \ln(n+1) \to \mathbf{C},$$

де H_n позначає, як завжди, часткову суму гармонічного ряду, а $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k} = \ln(n+1)$ (пр. 363.3). Можна замінити тут $\ln(n+1)$ на $\ln n$, оскільки їх різниця, що дорівнює $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, прямує до нуля. Остаточно: позначаючи через γ_n деяку нескінченно малу, маємо для H_n чудову формулу

$$H_n = \ln n + \mathbf{C} + \gamma_n \tag{367.1}$$

Вона показує, що при нескінченно малому зростанні n часткова сума H_n гармонічного ряду росте як $\ln n$.

Стала $\mathbf{C}$, що фігурує у формулі (367.1), називається **сталою Ойлера** (або сталою Ойлера – Маскероні). Її числове значення (яке вдається визначити із інших міркувань) таке:

$$\gamma = \mathbf{C} = 0{,}577\,215\,664\,90\ldots. \tag{367.2}$$

Маскероні (іт. Lorenzo Mascheroni, Лоре́нцо Маскеро́ні) обчислив 32 знаки після коми.

368. Ознаки Коші та д'Аламбера

Порівняння даного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \tag{A}$$

із різноманітними **стандартними** рядами, заздалегідь збіжними чи розбіжними, може бути проведене і у іншій, так би мовити, більш організованій формі.

Візьмемо для порівняння такий ряд (B): з одного боку, **збіжну** геометричну прогресію

$$\sum q^n = q + q^2 + \dots + q^n + \dots \quad (0 < q < 1),$$

а з іншого — **розбіжну** прогресію

$$\sum 1 = 1 + 1 + \dots + 1 + \dots.$$

Порівнюючи досліджуваний ряд (A) із цими рядами застосовуючи теор. 366.1, прийдемо до наступної ознаки.

Теорема 368.1 (Ознака Коші)**.** *Побудуємо для ряду* (A) *варіанту*

$$\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{a_n}.$$

Якщо для досить великих n, виконується нерівність

$$\mathcal{C}_n \leqslant q,$$

*де q — **стале** число, що є меншим за одиницю, то ряд збігається; якщо ж, починаючи з деякого місця,*

$$\mathcal{C}_n \geqslant 1,$$

то ряд розбігається.

Доведення. Справді, нерівності $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ або $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ рівносильні до, відповідно, таких $a_n \leqslant q^n$ або $a_n \geqslant 1$; залишається застосувати теор. 366.1. (**Розбіжність** ряду, звісно, може бути доведена і простим посиланням на порушення необхідної умови збіжності — теор. 364.5.) ☐

Частіше, однак, цю ознаку застосовують у іншій, **граничній** формі.

Теорема 368.2 (Гранична форма ознаки Коші)**.** *Припустимо, що варіанта* $\mathcal{C}_n$ *має границю (скінченну або ні):*

$$\lim \mathcal{C}_n = \mathcal{C}.$$

Тоді при $\mathcal{C} < 1$ *ряд збігається, а при* $\mathcal{C} > 1$ *ряд розбігається.*

Доведення. Якщо $\mathcal{C} < 1$, то візьмемо додатне число ε, менше за $1 - \mathcal{C}$, так що і $\mathcal{C} + \varepsilon < 1$. За означенням границі, для $n > N$ буде:

$$\mathcal{C} - \varepsilon < \mathcal{C}_n < \mathcal{C} + \varepsilon.$$

Число $\mathcal{C}+\varepsilon$ відіграє роль числа q у попередньому формулюванні, отже ряд збігається.

Якщо ж $\mathcal{C} > 1$ (і є скінченним), то, взявши $\varepsilon = \mathcal{C} - 1$, так що $\mathcal{C} - \varepsilon = 1$, для досить великих значень n на цей раз матимемо $\mathcal{C}_n > 1$, отже ряд розбігається. Аналогічний результат і при $\mathcal{C} = +\infty$. ☐

У випадку, коли $\mathcal{C} = 1$, ця ознака не дає можливості судити про поведінку ряду.

Варіанту $\mathcal{C}_n$ називатимемо **варіантою Коші**.

Якщо порівняння ряду (A) із вказаними стандартними рядами проводити згідно з теор. 366.3, то прийдемо до такої ознаки.

Теорема 368.3 (Ознака д'Аламбера)**.** *Розглянемо для ряду* (A) *варіанту*

$$\mathcal{D}_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Якщо для досить великих n*, справедлива нерівність*

$$\mathcal{D}_n \leqslant q,$$

де q *—* ***стале*** *число, менше за одиницю, то ряд збігається; якщо ж, починаючи з деякого місця,*

$$\mathcal{D} \geqslant 1,$$

то ряд розбігається. (І тут ***розбіжність*** *прямо випливає з порушення необхідної умови збіжності: адже якщо* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ *або* $a_{n+1} \geqslant a_n$*, то* a_n *не може прямувати до* 0*.)*

І в цьому випадку зручніше користуватися **граничною** формою ознаки.

Теорема 368.4. *Припустимо, що варіанта* $\mathcal{D}_n$ *має границю (скінченну чи ні):*

$$\lim \mathcal{D}_n = \mathcal{D}.$$

Тоді при $\mathcal{D} < 1$ *ряд збігається, а при* $\mathcal{D} > 1$ *ряд розбігається.*

Доведення — таке ж, як і у випадку ознаки Коші.

І ця ознака нічого не дає, якщо виявляється, що $\mathcal{D} = 1$**.**

Варіанту $\mathcal{D}_n$ назвемо **варіантою д'Аламбера**.

У пр. 77.4 ми бачили, що із існування границі для варіанти $\mathcal{D}_n$ випливає існування границі і для варіанти $\mathcal{C}_n$, причому ці границі дорівнюють одна одній. Отже, в усіх випадках, коли ознака д'Аламбера дає відповідь на питання про поведінку ряду, відповідь можна отримати і за допомогою ознаки Коші. На прикладах ми переконаємося нижче, що зворотне твердження не є вірним, і ознака Коші є сильнішою за ознаку д'Аламбера. Однак на практиці користуватися ознакою д'Аламбера зазвичай простіше.

369. Ознака Раабе

У тих випадках, коли вказані прості ознаки не дають відповіді, доводиться користуватися більш складними ознаками, що ґрунтуються на порівнянні ряду вже з іншими **стандартними** рядами, що "повільніше" збігаються або "повільніше" розбігаються, ніж прогресія (порівняйте з пр. 375.7, далі).

Ми розглянемо тут ознаку Раабе (укр.-швейц. Joseph Ludwig Raabe, Йо́зеф Раа́бе); вона здійснює порівняння даного ряду (A) з гармонічними рядами — збіжним:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots \quad (s > 1) \tag{Hs}$$

та розбіжним:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \dots \tag{H}$$

— саме за допомогою теор. 366.3. При цьому доводиться розглядати **варіанту Раабе**:

$$\mathcal{R}_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Теорема 369.1 (Ознака Раабе)**.** *Якщо для досить великих* n*, виконується нерівність*

$$\mathcal{R}_n \geqslant r,$$

*де r — **стале** число, більше за одиницю, то ряд збігається; якщо ж, починаючи з деякого місця,*

$$\mathcal{R}_n \leqslant 1,$$

то ряд розбігається.

Доведення. Отже, нехай для досить великих n маємо:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant r > 1 \quad \text{або} \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant 1 + \frac{r}{n}.$$

Візьмемо тепер довільне число s між 1 та r: $r > s > 1$. Оскільки, згідно з відомим граничним відношенням (77.3):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} = s,$$

то для досить великих n буде

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} < r \quad \text{або} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{r}{n},$$

а відповідно, і

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^s.$$

Цю нерівність можна переписати так:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}.$$

Справа ми маємо відношення двох послідовних членів ряду (Hs); застосувавши теор. 366.3, переконуємося у збіжності ряду (A).

Якщо ж, починаючи з деякого місця,

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1,$$

то звідси одразу знаходимо, що

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}};$$

застосувавши до рядів (A) та (H) теор. 366.3, приходимо до висновку щодо розбіжності ряду (A). □

nebayduzhi.math@gmail.com

Ознака Раабе також застосовується здебільшого у **граничній** формі.

Теорема 369.2 (Гранична форма ознаки Раабе)**.** *Припустимо, що варіанта* $\mathcal{R}_n$ *має границю (скінченну, або ні):*

$$\lim \mathcal{R}_n = \mathcal{R}.$$

Тоді при $\mathcal{R} > 1$ *ряд збігається, а при* $\mathcal{R} < 1$ *ряд розбігається.*

Порівнюючи ознаки д'Аламбера та Раабе, бачимо, що остання істотно сильніша за першу. Якщо границя $\mathcal{D} = \lim \mathcal{D}_n$ існує і відмінна від одиниці, то для $\mathcal{R}_n = n\left(\dfrac{1}{\mathcal{D}_n} - 1\right)$ існує границя $\mathcal{R}$, що дорівнюватиме $+\infty$ при $\mathcal{D} < 1$ та $-\infty$ при $\mathcal{D} > 1$. Отже, якщо ознака д'Аламбера дає відповідь на питання про поведінку даного ряду, то ознака Раабе тим більше її дає: більше того, усі такі випадки охоплюються всього **двома** із можливих значень $\mathcal{R}$, а саме $\pm\infty$. Усі інші значення $\mathcal{R}$ (окрім $\mathcal{R} = 1$), що також дають відповідь на питання щодо збіжності, відносяться до випадків, коли ознака д'Аламбера не дає таких відповідей, бо $\mathcal{D} = 1$.

Але все ж і тут **при** $\mathcal{R} = 1$ **ми не маємо відповіді на питання щодо збіжності ряду**; у таких випадках (які трапляються дуже рідко) доводиться застосовувати ще більш витончені та складні ознаки (дивіться, наприклад, розд. 371).

Звернемося до прикладів.

370. Приклади

1) Застосуємо ознаку Коші до наступних рядів:

а) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}, \quad \mathcal{C}_n = \frac{1}{\ln n}, \quad \mathcal{C} = 0:$ ряд збігається

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n \ (x > 0), \quad \mathcal{C}_n = \frac{x}{n}, \quad \mathcal{C} = 0:$ ряд збігається

в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n$ ($x > 0$; a_n — додатна варіанта, що має границю a), $\quad \mathcal{C}_n = \dfrac{x}{a_n}$.

Якщо $a = 0$, то $\mathcal{C} = +\infty$, і ряд розбігається; якщо $a = +\infty$, то $\mathcal{C} = 0$, і ряд збігається; насамкінець, при $0 < a < +\infty$ буде $\mathcal{C} = \frac{x}{a}$ і поведінка ряду залежить від x: при $x < a$ ряд збігається, при $x > a$ — розбігається. При $x = a$ в загальному випадку про поведінку ряду сказати нічого неможливо, воно залежить від характеру наближення

a_n до a.

2) Застосуємо ознаку д'Аламбера до наступних рядів:

а) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ $(x > 0)$, $\quad \mathcal{D}_n = \dfrac{x}{n+1}$, $\quad \mathcal{D} = 0:$ ряд збігається;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ $(x > 0)$, $\quad \mathcal{D}_n = x \cdot \dfrac{n+1}{n}$, $\quad \mathcal{D} = x:$

ряд збігається при $x < 1$ і розбігається при $x \geqslant 1$ (при $x = 1$ у цьому переконуємося безпосередньо).

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^s}$ $(x > 0,\ s > 0)$, $\quad \mathcal{D}_n = x\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^s$, $\quad \mathcal{D} = x:$

ряд збігається при $x < 1$ і розбігається при $x > 1$; при $x = 1$ виходить гармонічний ряд, поведінка якого, як ми вже знаємо, залежить від s.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \left(\dfrac{x}{n}\right)^n$ $(x > 0)$, $\quad \mathcal{D}_n = \dfrac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$, $\quad \mathcal{D} = \dfrac{x}{e}:$

при $x < e$ ряд збігається; при $x > e$ розбігається; при $x = e$ ознака д'Аламбера в граничній формі нічого не дає, але оскільки варіанта $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ наближається до e **зростаючи**, так що $\mathcal{D}_n > 1$, то початкова форма ознаки дає змогу все ж таки зробити висновок щодо розбіжності ряду.

ґ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(nx)^n}{n!}$ $(x > 0)$, $\quad \mathcal{D}_n = x \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $\quad \mathcal{D} = x \cdot e:$

при $x < \frac{1}{e}$ ряд збігається, а при $x > \frac{1}{e}$ розбігається; при $x = \frac{1}{e}$ на цей раз за допомогою ознаки д'Аламбера нічого довести не вдається, оскільки $\mathcal{D}_n$ наближається до $\mathcal{D} = 1$ знизу. Ми повернемося до цього випадку нижче, у пр. 370.5.

3) Візьмемо ряд

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \dots + a^nb^{n-1} + a^nb^n + \dots,$$

де a та b — два різних додатних числа. Тут $\mathcal{D}_{2n-1} = a$, $\mathcal{D}_{2n} = b$, і ознака д'Аламбера (в початковій формі) дає змогу зробити висновок щодо збіжності чи розбіжності ряду, тільки якщо обидва числа a та b одночасно менші за одиницю, або обидва — більші.

Водночас

$$\mathcal{C}_{2n-1} = \sqrt[2n-1]{a^{n-1}b^{n-1}} \quad \text{та} \quad \mathcal{C}_{2n} = \sqrt[2n]{a^nb^{n-1}},$$

отже $\mathcal{C} = \sqrt{ab}$; згідно з ознакою Коші, при $ab < 1$ ряд збігається, а при $ab > 1$ (очевидно, і при $ab = 1$) — розбігається.

4) Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n,$$

де $x > 0$ і $\tau(n)$ означає число дільників натурального числа n. Зважаючи на вибагливий хід зміни функції $\tau(n)$, тут неможливо застосувати ознаку д'Аламбера. Між тим, ознака Коші є цілком придатною:

$$x \leqslant \mathcal{C}_n = \sqrt[n]{\tau(n)} \cdot x \leqslant \sqrt[n]{n} \cdot x, \quad \text{тож} \quad \mathcal{C} = x,$$

і при $x < 1$ ряд збігається, а при $x > 1$ (очевидно, і при $x = 1$) — розбігається.

5) Наведемо приклади застосування ознаки Раабе.

а) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \dfrac{1}{2n+1}$.

Ознака д'Аламбера не може бути застосована до цього ряду, бо

$$\mathcal{D}_n = \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} \to 1$$

(причому $\mathcal{D}_n < 1$). Побудуємо варіанту Раабе:

$$\mathcal{R}_n = n\left(\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2} - 1\right) = \frac{(6n-1)n}{(2n-1)^2}.$$

Оскільки $\mathcal{R} = \lim \mathcal{R}_n = \frac{3}{2} > 1$, то ряд збігається.

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(x+1)\ldots(x+n)} \quad (x > 0)$.

Оскільки $\mathcal{D}_n = \dfrac{n+1}{x+n+1}$, $\mathcal{D} = 1$, то тут ознака д'Аламбера не може бути застосована. Далі, маємо $\mathcal{R}_n = \dfrac{n}{n+1} x$, отже $\mathcal{R} = x$. Отже, при $x < 1$ ряд розбігається, а при $x > 1$ збігається; при $x = 1$ маємо розбіжний гармонічний ряд (без першого члена).

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n! x^n}{(x+a_1)(2x+a_2) \cdot \ldots \cdot (nx+a_n)}$,

де $x > 0$ та a_n — додатна варіанта, що має скінченну границю a.

Маємо: $\mathcal{D}_n = \dfrac{(n+1)x}{(n+1)x + a_{n+1}}$, $\mathcal{D} = 1$. Далі, $\mathcal{R}_n = \dfrac{n a_{n+1}}{(n+1)x}$, $\mathcal{R} = \frac{a}{x}$. Отже, при $x < a$ ряд збігається, при $x > a$ він розбігається. При $x = a$ в загальному випадку нічого сказати неможливо: поведінка ряду тоді залежить від характеру наближення a_n до a.

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Для нього

$$\mathcal{R}_n = n\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} - 1\right];$$

щоб визначити границю цієї варіанти, замінимо її більш загальним виразом:

$$\frac{1}{x}\left[\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - 1\right] \quad (x \to 0),$$

до якого вже можна застосувати методи диференціального числення. Згідно з правилом Лопіталя (теор. 150.1), переходимо до відношення похідних $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, де:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} - 1 \to 0;\\ g(x) &= x \to 0;\\ \frac{f'(x)}{g'(x)} &= -\frac{e}{\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^2}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \ln(1+x) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x} \cdot (1+x)^{\frac{1}{x}-1}\right] =\\ &= \frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{x^2}. \end{aligned}$$

Тут ми використали (36.2) та (99.2). Після заміни

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \qquad \frac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2),$$

одразу отримуємо, що шукана границя дорівнює $\frac{1}{2}$. Ряд розбігається.

371. Ознака Куммара

Тепер ми наведемо одну доволі загальну ознаку, що належить Куммару (нім. Ernst Kummer, Éрнст Кýммар); її швидше за все можна розглядати як **загальну схему** для отримання конкретних ознак.

Теорема 371.1 (Ознака Куммара)**.** *Нехай*

$$c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n,\ \dots$$

буде довільною послідовністю додатних чисел, такою що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$$

розбігається. (Звертаємо увагу читача на те, що останнім припущенням ми будемо користуватися лише при доведенні ознаки ***розбіжності****; ознака* ***збіжності*** *цього не потребує.) Складемо для досліджуваного ряду* (A) *варіанту*

$$\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}.$$

Якщо (для $n > N$) виконується нерівність

$$\mathcal{K}_n \geqslant \delta,$$

де δ — ***стале*** *додатне число, то ряд* (A) *збігається. Якщо ж (для $n > N$)*

$$\mathcal{K}_n \leqslant 0,$$

то ряд (A) *розбігається.*

Доведення. Нехай

$$\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geqslant \delta > 0$$

(цю нерівність, очевидно, можна вважати виконаною для **всіх** n).

Домноживши обидві частини цієї нерівності на a_{n+1}, отримаємо:

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geqslant \delta \cdot a_{n+1} > 0, \tag{371.1}$$

або

$$c_n a_n > c_{n+1} a_{n+1}.$$

Звідси витікає, що змінна $c_n a_n$ монотонно спадає і, отже, прямує до скінченної границі (оскільки знизу вона обмежена нулем).

Отже, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1})$$

збігається, бо сума його перших n членів:

$$c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

має скінченну границю. Але тоді із нерівності (371.1), згідно з теор. 366.1, витікає, що збігається і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta a_{n+1}$, а разом із ним і ряд (A). (Ми тут не використовували умову, що ряд $\sum \frac{1}{c_n}$ розбігається.)

Якщо ж, для $n > N$,

$$\mathcal{K}_n = c_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leqslant 0,$$

то маємо:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{\frac{1}{c_{n+1}}}{\frac{1}{c_n}}.$$

Оскільки ряд $\sum \frac{1}{c_n}$ за припущенням розбігається, то, згідно з теор. 366.3, розбігається і досліджуваний ряд (A), що й потрібно було довести. □

В **граничній** формі ознака Куммара виглядає так.

Теорема 371.2 (Гранична форма ознаки Куммара)**.** *Припустимо, що варіанта* $\mathcal{K}_n$ *має границю (скінченну або ні):*

$$\lim \mathcal{K}_n = \mathcal{K}.$$

Тоді при $\mathcal{K} > 0$ *ряд збігається, а при* $\mathcal{K} < 0$ *— розбігається.*

Покажемо тепер, як за допомогою ознаки Куммара можна отримати деякі важливі ознаки збіжності як окремі його випадки.

а) Нехай, наприклад, $c_n = 1$; умова, щоб ряд $\sum \frac{1}{c_n}$ розбігався, виконана. Маємо:

$$\mathcal{K}_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\mathcal{D}_n} - 1.$$

Якщо варіанта $\mathcal{D}_n$ прямує до границі $\mathcal{D}$, то $\mathcal{K}_n$ прямує до границі $\mathcal{K} = \frac{1}{\mathcal{D}} - 1$ ($\mathcal{K} = +\infty$, якщо $\mathcal{D} = 0$; $\mathcal{K} = -1$, якщо $\mathcal{D} = +\infty$). При $\mathcal{D} > 1$ очевидно, $\mathcal{K} < 0$, і згідно з ознакою Куммара ряд розбігається; якщо ж $\mathcal{D} < 1$, то $\mathcal{K} > 0$, і ряд збігається. Отже, ми знову прийшли до ознаки д'Аламбера.

б) Нехай тепер $c_n = n$. Зазначимо, що ряд $\sum \frac{1}{n}$ розбігається. Вираз $\mathcal{K}_n$ прийме вигляд:

$$\mathcal{K}_n = n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) = \mathcal{R}_n - 1.$$

Якщо варіанта $\mathcal{R}_n$ прямує до границі $\mathcal{R}$, то $\mathcal{K}_n$ прямує до границі $\mathcal{K} = \mathcal{R} - 1$ ($\mathcal{K} = \pm\infty$, якщо $\mathcal{R} = \pm\infty$). При $\mathcal{R} > 1$ маємо $\mathcal{K} > 0$, і згідно з ознакою Куммара

nebayduzhi.math@gmail.com

ряд збігається; якщо ж $\mathcal{R} < 1$, то $\mathcal{K} < 0$, отже ряд розбігається. Ми знову отримали ознаку Раабе.

в) Насамкінець, візьмемо $c_n = n \ln n$ $(n \geqslant 2)$, такий вибір припустимий, бо ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$ розбігається (пр. 367.6). У цьому випадку маємо:

$$\mathcal{K}_n = n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1)\ln(n+1),$$

що можна також звести до вигляду:

$$\mathcal{K}_n = \ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathcal{B}_n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

якщо позначити через $\mathcal{B}_n$ нову варіанту:

$$\mathcal{B}_n = \ln n \cdot \left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = \ln n \cdot (\mathcal{R}_n - 1).$$

Звідси виходить уже нова ознака.

Теорема 371.3 (Ознака Бертрона)**.**
Бертрон (фр. Joseph Bertrand, Жозе́ф Бертро́н)
Припустимо, що варіанта $\mathcal{B}_n$ має границю (скінченну або ні):

$$\mathcal{B} = \lim \mathcal{B}_n.$$

Тоді при $\mathcal{B} > 1$ ряд збігається, а при $\mathcal{B} < 1$ — розбігається.

Доведення. Справді, оскільки $\lim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \ln e = 1$, то варіанта Куммара $\mathcal{K}_n$ прямує до границі $\mathcal{K} = \mathcal{B} - 1$ ($\mathcal{K} = \pm\infty$, якщо $\mathcal{B} = \pm\infty$). Залишається застосувати ознаку Куммара. ☐

Порівнюючи ознаки Раабе та Бертрона, можна було б повторити ті ж зауваження, які ми вище зробити стосовно ознак д'Аламбера та Раабе (розд. 369). Ця послідовність ознак, все більш чутливих (і більш складних!), може бути необмежено продовжена.

372. Ознака Ґаусса

З ознак д'Аламбера, Раабе та Бертрона легко можна отримати наступну ознаку Ґаусса.

Теорема 372.1 (Ознака Ґаусса)**.** *Припустимо, що для даного ряду* (A) *відношення* $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ *може бути виражене у вигляді:*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

де λ *та* μ *— сталі, а* θ_n *є обмеженою величиною:* $|\theta_n| \leqslant L$*; тоді ряд збігається, якщо* $\lambda > 1$*; або якщо* $\lambda = 1,\ \mu > 1$*; і розбігається, якщо* $\lambda < 1$ *або якщо* $\lambda = 1,\ \mu \leqslant 1$*.*

Доведення. Випадки $\lambda \gtrless 1$ зводяться до ознаки д'Аламбера, бо $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\lambda}$. Нехай тепер $\lambda = 1$; тоді

$$\mathcal{R}_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \mu + \frac{\theta_n}{n}, \quad \mathcal{R} = \mu,$$

і випадки $\mu \gtrless 1$ вичерпуються ознакою Раабе. Нарешті, якщо $\mu = 1$, то маємо:

$$\mathcal{B}_n = \ln n(\mathcal{R}_n - 1) = \frac{\ln n}{n} \cdot \theta_n.$$

Оскільки $\frac{\ln n}{n}$, як відомо, прямує до нуля при $n \to \infty$, а θ_n обмежена, то $\mathcal{B} = \lim \mathcal{B}_n = 0$, отже згідно з ознакою Бертрона ряд розбігається. □

Приклади.

1) Розглянемо так званий *гіпергеометричний ряд* (Ґаусс):

$$F(\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha+n-1) \cdot \beta \cdot (\beta+1) \cdot \ldots \cdot (\beta+n-1)}{n!\gamma \cdot (\gamma+1) \cdot \ldots \cdot (\gamma+n-1)} x^n =$$
$$= 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdot \beta \cdot (\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} x^2 +$$
$$+ \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdot (\alpha+2) \cdot \beta \cdot (\beta+1) \cdot (\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1) \cdot (\gamma+2)} x^3 + \ldots,$$

припускаючи **поки що** $\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, x > 0$. Тут

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} x \to x,$$

отже, згідно з ознакою д'Аламбера одразу маємо збіжність при $x < 1$ та розбіжність при $x > 1$. Якщо ж $x = 1$, то візьмемо відношення

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)}$$

і, користуючись розкладами:

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{1+\frac{\alpha}{n}} \cdot \frac{1}{n^2}, \qquad \frac{1}{1+\frac{\beta}{n}} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\beta^2}{1+\frac{\beta}{n}} \cdot \frac{1}{n^2},$$

виразимо його у вигляді:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

де θ_n обмежена. Застосовуючи ознаку Ґаусса, бачимо, що ряд $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ збігається при $\gamma - \alpha - \beta > 0$ та розбігається при $\gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$. Згодом ми повернемося до гіпергеометричного ряду при більш загальних припущеннях стосовно α, β, γ та x.

2) Іншим прикладом на застосування ознаки Ґаусса може служити ряд

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \cdots + \left(\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right)^p + \ldots \quad (p > 0),$$

який збігається при $p > 2$ і розбігається при $p \leqslant 2$. Тут — згідно з формулою Тейлора

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n}{2n-1}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-p} = 1 + \frac{p}{2n} + \frac{p(p+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(2n)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

звідки

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\frac{p}{2}}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad (\theta_n \text{ обмежена}),$$

і так далі.

373. Інтегральна ознака Маклорена – Коші

Ця ознака за формою відрізняється від усіх попередніх. Вона базується на ідеї зіставлення ряду з інтегралом, і, по суті, є узагальненням того способу, яким ми користувалися для дослідження збіжності чи розбіжності рядів в пр. 367.4, пр. 367.5 та пр. 367.6.

Нехай ряд, що досліджується, має вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \tag{373.1}$$

де $f(n)$ — значення деякої функції $f(x)$, що визначена для $x \geqslant 1$, при $x = n$. Цю функцію вважатимемо неперервною, додатною і монотонно спадною. (Початковим значенням n, замість 1, може бути будь-яке натуральне число n_0; тоді й функцію $f(x)$ розглядатимемо при $x \geqslant n_0$.)

Розглянемо довільну **первісну** $F(x)$ для $f(x)$; оскільки її похідна $F'(x) = f(x) > 0$, то $F(x)$ зростає разом з x та має границю при $x \to +\infty$ — скінченну або ні. В першому випадку ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}[F(n+1) - F(n)] \tag{373.2}$$

збігається, а в другому — розбігається. З цим рядом ми і порівнюватимемо той ряд, який досліджуємо.

Згідно з формулою скінченних приростів, загальний член ряду (373.2) можна записати як

$$F(n+1) - F(n) = f(n+\theta) \quad (0 < \theta < 1),$$

тому, як наслідок з монотонності функції $f(x)$,

$$a_{n+1} = f(n+1) < F(n+1) - F(n) < f(n) < a_n. \tag{373.3}$$

Якщо ряд (373.2) збігається, то за теор. 366.1 збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n+1)$, члени якого менше за відповідні члени ряду (373.2); отже, збігається і ряд (373.1). Якщо ж ряд (373.2) є розбіжним, то розбігається і ряд (373.1), оскільки його члени більші за відповідні члени ряду (373.2).

Отже, ми вивели таку цікаву ознаку, вперше отриману в геометричній формі Маклореном, але забуту, і пізніше знов отриману Коші.

Теорема 373.1 (Інтегральна ознака)**.** *В разі дотримання всіх припущень, згаданих вище, збіжність або розбіжність ряду* (373.1) *залежить від того, чи має функція*

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

при $x \to +\infty$ скінченну границю, чи ні.

Наведемо приклади застосування цієї ознаки (окрім тих, що вже були розглянуті в розд. 367).

1)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^{1+\sigma} n} \quad (\sigma > 0).$$

Тут

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^{1+\sigma} x} \qquad F(x) = -\frac{1}{\sigma \ln^{\sigma} x} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty;$$

nebayduzhi.math@gmail.com

ряд збігається.

2)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}.$$

Маємо

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln \ln x}; \quad F(x) = \ln \ln \ln x \to +\infty;$$

ряд розбігається.

3)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot (\ln \ln n)^{1+\sigma}} \quad (\sigma > 0).$$

В цьому випадку

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot (\ln \ln x)^{1+\sigma}}; \quad F(x) = -\frac{1}{\sigma \cdot (\ln \ln x)^{\sigma}} \to 0,$$

ряд збігається.

Первісну функції $F(x)$ можна також взяти у формі визначеного інтеграла

$$F(x) = \int\limits_{1}^{x} f(t)\, dt.$$

Його границю при $x \to +\infty$ називають “інтегралом від 1 до $+\infty$” (це так званий **невласний інтеграл**; такими інтегралами ми будемо займатись в 13 (Невласні інтеграли)) та позначають

$$F(+\infty) = \int\limits_{1}^{+\infty} f(t)\, dt.$$

Отже, *ряд* (373.1) *збігається чи розбігається залежно від того, чи є значення цього інтеграла скінченним, чи ні.* (В такому формулюванні ознаку можна довести без припущення про **неперервність** функції $f(x)$, використовуючи лише **визначений** інтеграл, який для монотонної функції завжди існує, теор. 298.3).

У такій формі інтегральна ознака допускає просте геометричне тлумачення, що є близьким до ідеї Маклорена. Якщо зобразити функцію $f(x)$ за допомогою кривої рис. 373.1, то інтеграл $F(x)$ виражатиме площу фігури, обмеженої цією кривою, віссю x та двома ординатами; а інтеграл $F(+\infty)$, у деякому сенсі, можна розглядати як вираз для площі **усієї** нескінченно продовженої вправо фігури під кривою. З іншого ж боку, члени $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots$ ряду (373.1) є значеннями ординати у точках $x =$

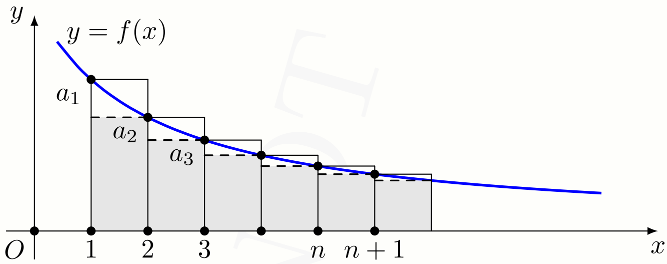


Рис. 373.1

1, 2, ... , n, ... або, що те ж саме, площами прямокутників з основами 1 і висотами, що дорівнюють згаданим ординатам.

Отже, сума ряду (371.1) є нічим іншим, як сумою площ вихідних **прямокутників**, і лише першим членом відрізняється від суми площ **вхідних** прямокутників. Це робить цілковито наочним встановлений вище результат: якщо площа криволінійної фігури скінченна, то тим більше є скінченною площа ступінчатої фігури, що міститься у ній, і запропонований ряд збігається; якщо ж площа криволінійної фігури нескінченна, то нескінченна і площа ступінчатої фігури, що містить її, отже у цьому випадку ряд розбігається.

Зробимо тепер деякі зауваження стосовно подальшого використання нерівностей (373.3).

а) Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty),$$

можна отримати зручну **оцінку залишку** ряду, що розглядається. Додавши усі нерівності

$$a_k < F(k) - F(k-1) < a_{k-1}$$

для $k = n+1,\ \dots,\ n+m$, отримаємо

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k < F(n+m) - F(n) < \sum_{k=n}^{n+m-1} a_k.$$

Перейдемо до границі при $m \to \infty$:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leqslant F(+\infty) - F(n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

або ж

$$F(+\infty) - F(n+1) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leqslant F(+\infty) - F(n), \tag{373.4}$$

що дає шукані оцінки залишку як зверху, так і знизу.

Оскільки

$$F(n+m)-F(n)=\int\limits_{n}^{n+m} f(t)\,dt,$$

то переходячи до границі при $m\to\infty$, отримуємо **невласний** інтеграл

$$F(+\infty)-F(n)=\int\limits_{n}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Це означає, що нерівності (373.4) можна переписати як

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leqslant \int\limits_{n}^{+\infty} f(t)\,dt. \tag{373.5}$$

Наприклад, для ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}} \quad (\sigma>0)$$

маємо

$$f(x)=\frac{1}{x^{1+\sigma}}, \quad F(x)=-\frac{1}{\sigma\cdot x^{\sigma}}, \quad F(+\infty)=0,$$

звідки отримуємо

$$\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\sigma}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\sigma}} \leqslant \frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{n^{\sigma}}. \tag{373.6}$$

б) Якщо ж $F(x)$ прямує до нескінченності разом з x, то ця функція дає змогу зробити висновок про **швидкість зростання** часткової суми ряду, що розглядається. Розглянемо нерівності

$$0<f(k)-[F(k+1)-F(k)]<f(k)-f(k+1)$$

та, додавши їх для $k=1,\ \dots,\ n$, отримаємо **зростаючу**, але обмежену варіанту

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)-[F(n+1)-F(1)]<f(1)-f(n+1)<f(1),$$

яка має скінченну границю. Те ж саме виконується і для варіанти

$$\sum_{k=1}^{n} f(k)-F(n+1).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо позначити її границю через C, а α_n — нескінченно малу, якою послідовність відрізняється від границі, то отримаємо формулу

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = F(n+1) + C + \alpha_n.$$

Наприклад, при $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \ln x$, звідси знову можна отримати формулу (367.1).

374. Ознака Єрмакова

Приблизно ту ж саму область застосування, що й інтегральна ознака, має ознака, запропонована Єрмаковим (бел.-укр. Василь Єрмаков, Васи́ль Петро́вич Єрмако́в). Її формулювання не містить понять інтегрального числення.

Теорема 374.1 (Ознака Єрмакова)**.** *Нехай функція $f(x)$ є неперервною, додатною і монотонно спадною при $x > 1$ (як і раніше, можливе й інше натуральне n_0 замість 1). Тоді, якщо для досить великих x (скажімо, для $x \geqslant x_0$) виконується нерівність*

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} \leqslant q < 1,$$

то ряд (373.1) *збігається, а якщо (для $x \geqslant x_0$)*

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} \geqslant 1,$$

то ряд (373.1) *розбігається.*

(Насправді, вимогу про неперервність можна прибрати, дивіться розд. 373.)

Доведення. Нехай виконується перша нерівність. Тоді

$$f(e^x)\cdot e^x \leqslant q\cdot f(f);$$

інтегруємо

$$\int_{x_0}^{x} f(e^u)\cdot e^u\,du \leqslant q\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt;$$

і після заміни $t = e^u$ отримаємо для будь-якого $x \geqslant x_0$:

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(e^u)\cdot e^u\,du \leqslant q\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Звідки

$$(1-q)\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)dt \leqslant q\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt\right) = q\left(\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt - \int_{x}^{e^x} f(t)\,dt\right) \leqslant q\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)dt,$$

оскільки

$$e^x > x, \tag{374.1}$$

і інтеграл, що віднімається в останніх дужках, є додатним. В такому випадку

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt \leqslant \frac{q}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt,$$

тому після додавання до обох сторін інтеграла $\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt$ отримаємо

$$\int_{x_0}^{e^x} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{1-q}\int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt = L,$$

причому, враховуючи (374.1),

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \leqslant L \quad (x \geqslant x_0).$$

Оскільки з ростом x сам інтеграл теж зростає, то для нього існує скінченна границя при $x \to \infty$:

$$\int_{x_0}^{\infty} f(t)\,dt,$$

тому за інтегральною ознакою ряд (373.1) збігається.

Нехай тепер виконується друга нерівність. Тоді

$$\int_{e^{x_0}}^{e^x} f(t)\,dt \geqslant \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

і, якщо додати до обох частин інтеграл $\int_{x}^{e^{x_0}} f(t)\,dt$, отримаємо

$$\int_{x}^{e^x} f(t)\,dt \geqslant \int_{x_0}^{e^{x_0}} f(t)\,dt = \gamma > 0,$$

оскільки з (374.1) маємо $x_0 < e^{x_0}$. Задамо тепер послідовність

$$x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n,\ \dots,$$

де $x_n = e^{x_{n-1}}$; за доведеним

$$\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)\,dt \geqslant \gamma,$$

тому

$$\int\limits_{x_0}^{x_n} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \geqslant n\gamma.$$

Звідси зрозуміло, що

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt = +\infty,$$

і за інтегральною ознакою ряд (373.1) розбігається. □

Застосуємо до прикладів з розд. 373 щойно доведену ознаку.

1)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln^{1+\sigma} n} \qquad (\sigma > 0).$$

В цьому випадку

$$f(x) = \frac{1}{x\cdot \ln^{1+\sigma} x},$$

і вираз

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} = \frac{\ln^{1+\sigma} x}{x^{\sigma}} \to 0 \quad \text{при } x\to\infty,$$

тому при досить великих x цей вираз стає меншим за будь-який правильний дріб: **ряд збігається.**

2)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln n\cdot \ln\ln n}.$$

Тут

$$f(x) = \frac{1}{x\cdot \ln x\cdot \ln\ln x},$$

а вираз

$$\frac{f(e^x)\cdot e^x}{f(x)} = \ln\ln x \to \infty \quad \text{при } x\to\infty,$$

і для досить великих x він стане більшим за 1: **ряд розбігається.**

3)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot (\ln\ln n)^{1+\sigma}} \,.$$

Цього разу маємо

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot (\ln\ln x)^{1+\sigma}} \,,$$

$$\frac{f(e^x) \cdot e^x}{f(x)} = \frac{(\ln\ln x)^{1+\sigma}}{\ln^{\sigma} x} \to 0 \quad \text{при } x \to \infty;$$

ряд збігається.

Насамкінець зазначимо, що функцію e^x в ознаці **Єрмакова** можна замінити на будь-яку іншу функцію $\varphi(x)$, яка є монотонно зростаючою, додатною, має неперервну похідну та для якої виконується нерівність

$$\varphi(x) > x, \tag{374.2}$$

яка є заміною (374.1). Доведення буде аналогічним до наведеного вище. Отже, в загальній формі ознака Єрмакова дає змогу отримувати низку різних ознак для різних функцій $\varphi(x)$.

375. Додатки

1) Скористаємося оцінками (373.6), щоб описати поведінку **дзета-функції Рімана** (пр. 365.2)

$$\zeta(1+\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\sigma}},$$

що визначена для $\sigma > 0$, коли σ наближається до 0.

Передусім, підстановкою $n = 0$ в першу нерівність (373.6) та $n = 1$ в другу легко отримати

$$1 \leqslant \sigma \cdot \zeta(1+\sigma) \leqslant 1 + \sigma,$$

звідки

$$\lim_{\sigma \to 0} \sigma \cdot \zeta(1+\sigma) = 1.$$

Можна отримати більш точний результат, якщо скористатися очевидною рівністю

$$\zeta(1+\sigma) = 1 + \frac{1}{2^{1+\sigma}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\sigma}},$$

застосувавши до неї нерівності (373.6) для довільного n:

$$1+\frac{1}{2^{1+\sigma}}+\dots+\frac{1}{n^{1+\sigma}}+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{(n+1)^{\sigma}}-1\right)<\zeta(1+\sigma)-\frac{1}{\sigma}<$$
$$<1+\frac{1}{2^{1+\sigma}}+\dots+\frac{1}{n^{1+\sigma}}+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{n^{\sigma}}-1\right).$$

Перейшовши тут до границі при $\sigma\to 0$, отримаємо

$$1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)\leqslant$$
$$\leqslant\varliminf_{\sigma\to 0}\left(\zeta(1+\sigma)-\frac{1}{\sigma}\right)\leqslant\varlimsup_{\sigma\to 0}\left(\zeta(1+\sigma)-\frac{1}{\sigma}\right)\leqslant$$
$$\leqslant 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln(n).$$

Ми поки не знаємо, чи існує границя виразу $\zeta(1+\sigma)-\frac{1}{\sigma}$ при $\sigma\to 0$, тому користуємося найбільшою та найменшою границями (розд. 42). Границі виразів $\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{n^{1+\sigma}}-1\right)$ та $\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{(n+1)^{1+\sigma}}-1\right)$ знаходимо за формулою (77.2).

Нарешті, оскільки n є довільним, спрямуємо його до нескінченності. Оскільки перший та останній вирази, зважаючи на (367.1), при цьому прямують до сталої Ойлера $\mathbf{C}$, то найбільша та найменша границі рівні, тому існує звичайна границя

$$\lim_{\sigma\to 0}\left(\zeta(1+\sigma)-\frac{1}{\sigma}\right)=\mathbf{C}. \tag{375.1}$$

Ці результати належать **Діріхлє**.

2) Доведемо спочатку таку теорему Коші.

Теорема 375.1. *Нехай члени ряду* (A) *є* ***монотонно*** *спадними. Тоді ряд* (A) *збігається чи розбігається одночасно з рядом*

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k a_{2^k}\,.$$

Доведення. Справді, з одного боку,

$$A_{2^k}<a_1+(a_2+a_3)+\dots+(a_{2^k}+\dots+a_{2^{k+1}-1})<a_1+2a_2+\dots+2^k a_{2^k},$$

а з іншого —

$$A_{2^k}=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\dots+(a_{2^{k-1}+1}+\dots+a_{2^k})>$$
$$>\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\dots+2^{k-1}a_{2^k}=\frac{1}{2}\left(a_1+2a_2+4a_4+\dots+2^k a_{2^k}\right),$$

звідки і отримуємо потрібний висновок. □

nebayduzhi.math@gmail.com

Наприклад, поведінка ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є такою ж, як ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k\cdot\frac{1}{2^k}\equiv\sum\limits_{k=0}^{\infty}1$, який, очевидно, є розбіжним. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}$ $(\sigma>0)$ збігається разом з рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k\cdot\frac{1}{2^{k(1+\sigma)}}\equiv\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k\sigma}}$. Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ розбігається, бо розбігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^k\cdot\frac{1}{2^k\ln 2^k}\equiv\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot\ln 2}$, і так далі.

В цій теоремі порівняння ряд $\sum 2^k a_{2^k}$ можна замінити рядом більш загального виду $\sum\limits_{k=0}^{\infty}m^k a_{m^k}$, де m — довільне натуральне число.

3) Нехай (A) буде довільним **збіжним** рядом. Які висновки можна зробити щодо порядку малості загального члена a_n в порівнянні з $\frac{1}{n}$?

Насамперед очевидно, що якщо ці нескінченно малі взагалі можна порівняти між собою (розд. 60), тобто якщо існує границя

$$\lim\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lim na_n=c,$$

то необхідно має бути $c=0$, тож

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{375.2}$$

Справді, інакше, зважаючи на розбіжність гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, і цей ряд був би розбіжним (теор. 366.2).

Однак існування такої границі, взагалі кажучи, не гарантоване, як видно на прикладі ряду

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10^2}+\dots.$$

Збіжність цього ряду зрозуміла, якщо порівняти його з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Водночас, якщо n не є повний квадрат, то для нього $na_n=\frac{1}{n}$, в іншому випадку: $na_n=1$.

Втім, якщо члени ряду **монотонно спадають**, то для збіжності його умова (375.2) все ж таки **необхідна**. Справді, для будь-яких m та $n>m$:

$$(n-m)a_n<a_{m+1}+\dots+a_n<\alpha_m,$$

де α_m — залишок ряду. Звідси

$$na_n<\frac{n}{n-m}\cdot\alpha_m\,.$$

Нехай спочатку m взято так, щоб α_m було менше довільно заданого числа $\varepsilon > 0$; якщо взяти тепер n настільки великим, що

$$\frac{n}{n-m} < \frac{\varepsilon}{\alpha_m}\,,$$

то одночасно $na_n < \varepsilon$, що й потрібно було довести.

Насамкінець зауважимо, що навіть для рядів з монотонно спадними членами умова (375.2) не є **достатньою** для збіжності. Це видно на прикладі ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

4) Доведемо таку теорему Абеля та Діні.

Теорема 375.2. *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ *розбіжний, і* D_n *означає його* n*-у часткову суму, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}$ *також розбіжний, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}$ $(\sigma > 0)$ *збіжний.*

Доведення. Маємо:

$$\frac{d_{n+1}}{D_{n+1}} + \cdots + \frac{d_{n+m}}{D_{n+m}} > \frac{d_{n+1} + \cdots + d_{n+m}}{D_{n+m}} = 1 - \frac{D_n}{D_{n+m}}\,.$$

Наскільки великими не взяти n, завжди можна вибрати таке m, щоб було

$$\frac{D_n}{D_{n+m}} < \frac{1}{2},$$

і отже,

$$\frac{d_{n+1}}{D_{n+1}} + \cdots + \frac{d_{n+m}}{D_{n+m}} > \frac{1}{2}\,.$$

Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n}$ порушено основну умову збіжності (теор. 364.5), отже ряд розбіжний.

Для доведення збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}$ $(\sigma > 0)$ ми використаємо спосіб, що використовував Коші (розд. 373).

Розглянемо функцію

$$\int \frac{dx}{x^{1+\sigma}} = -\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{x^{\sigma}}$$

і застосуємо до неї формулу скінченних приростів на проміжку від $x = D_{n-1}$ до $x = D_n$:

$$\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{D_{n-1}^{\sigma}} - \frac{1}{D_n^{\sigma}}\right) = \frac{d_n}{\overline{D}_n^{1+\sigma}}, \quad \text{де} \quad D_{n-1} < \overline{D}_n < D_n\,.$$

Отже, члени розглянутого ряду відповідно менші за членів збіжного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{D_{n-1}^{\sigma}} - \frac{1}{D_n^{\sigma}} \right),$$

що і доводить наведене твердження. □

5) Разом з Діні (іт. Ulisse Dini, Улі́се Ді́ні) доведемо таке твердження.

Твердження 375.1. *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *збіжний і* γ_n *— його залишок після* n*-го члена, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\gamma_{n-1}}$$

розбіжний, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\gamma_{n-1}^{1-\sigma}} \quad (0 < \sigma < 1)$$

збіжний.

Доведення аналогічне до попереднього.

6) Наступна ознака збіжності нещодавно була вказана Сапоґовим (рос. Nikolai Sapogov, Ніколá́й Сапоґóв).

Теорема 375.3. *Якщо* u_n *— додатна монотонно зростаюча варіанта, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}} \right),$$

а також і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right),$$

збіжні за умови обмеженості цієї варіанта і розбіжні — в іншому випадку.

Доведення. Нехай (при $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$)

$$d_n = u_{n+1} - u_n, \quad D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k = u_{n+1} - u_1,$$

тоді запропонований ряд перепишеться так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n + u_1},$$

та його збіжність така сама як і ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n},$$

а значить і така сама як ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ (у разі розбіжності можна використати теор. 375.2). Останній же ряд збіжний або розбіжний залежно від того, чи буде варіанта u_n обмеженою чи ні. ☐

7) Нехай дані два збіжних ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c'_n\,.$$

Другий ряд називається **повільніше збіжним**, ніж перший ряд, якщо залишок γ'_n другого ряду є нескінченно мала **нижчого порядку** ніж залишок γ_n першого ряду:

$$\lim \frac{\gamma_n}{\gamma'_n} = 0.$$

Твердження 375.2. *Для кожного збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ завжди можна побудувати **повільніше** збіжний ряд.*

Доведення. Достатньо розглянути, наприклад, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c'_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}),$$

тому що в цьому випадку $\gamma'_n = \sqrt{\gamma_n}$. (Вважаємо, що $\gamma_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$.) ☐

Розглянемо тепер два розбіжних ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d'_n\,.$$

Про другий кажуть, що він **повільніше розбіжний**, ніж перший ряд, якщо його часткова сума D'_n є нескінченно велика **нижчого порядку**, ніж часткова сума D_n першого ряду:

$$\lim \frac{D'_n}{D_n} = 0.$$

Твердження 375.3. *Для кожного розбіжного ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ *можна побудувати* ***повільніше*** *розбіжний ряд.*

Доведення. З цією метою можна, наприклад, взяти ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} d'_n \equiv \sqrt{D_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}\right);$$

тут $D'_n = \sqrt{D_n}$.

Аналогічні висновки можна отримати за допомогою рядів Абеля та Діні, розглянутих у 4) та 5). □

Побудовані приклади приводять до такого принципово важливого твердження.

Твердження 375.4. *Ніякий збіжний (розбіжний) ряд не може служити* ***універсальним*** *засобом для порівняння з ним, щоб з'ясувати збіжність (розбіжність) іншого ряду (за допомогою теорем розд. 366).*

Це ясно з того, що

$$\frac{c_n}{c'_n} = \frac{\gamma_{n-1} - \gamma_n}{\sqrt{\gamma_{n-1}} - \sqrt{\gamma_n}} = \sqrt{\gamma_{n-1}} + \sqrt{\gamma_n} \to 0$$

і

$$\frac{d_n}{d'_n} = \frac{D_n - D_{n-1}}{\sqrt{D_n} - \sqrt{D_{n-1}}} = \sqrt{D_n} + \sqrt{D_{n-1}} \to +\infty.$$

8) Нехай дані дві послідовності додатних чисел

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots \quad \text{та} \quad b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots.$$

Хоч би яке було n, для перших n чисел справедлива нерівність Коші – Хьольдара (133.6):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right]^{\frac{1}{k}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^{k'}\right]^{\frac{1}{k'}}$$

$$(a_i,\ b_i > 0; \quad k,\ k' > 1,\ \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1)$$

та нерівність Мінковського (133.9):

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^k\right]^{\frac{1}{k}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right]^{\frac{1}{k}} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right]^{\frac{1}{k}}$$

$$(a_i,\ b_i > 0; \quad k > 1).$$

Переходячи в цих нерівностях до границі при $n \to \infty$, отримаємо подібні ж нерівності для нескінченних рядів:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \leqslant \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k\right]^{\frac{1}{k}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} b_i^{k'}\right]^{\frac{1}{k'}}$$

і

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty}(a_i + b_i)^k\right]^{\frac{1}{k}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k\right]^{\frac{1}{k}} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} b_i^k\right]^{\frac{1}{k}}$$

причому *зі збіжності рядів у правих частинах випливає збіжність рядів у лівих частинах.*

11.3. Збіжність довільних рядів

376. Загальна умова збіжності ряду

Звернемося до питання збіжності рядів, члени яких можуть мати довільні знаки. Оскільки, за визначенням, збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{A}$$

зводиться до збіжності послідовності

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots,\ A_{n+m},\ \ldots, \tag{376.1}$$

складеною з **часткових сум** ряду, то природно застосувати до цієї послідовності *принцип збіжності* (теор. 39.1). З двох чисел n і n', які в ньому згадуються, можна, не применшуючи загальності, вважати $n' > n$ і покласти $n' = n+m$, де m — будь-яке натуральне число. Якщо згадати, що

$$A_{n+m} - A_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m},$$

то *принцип збіжності* стосовно ряду можна перефразувати так.

Теорема 376.1 (Принцип збіжності). *Для того щоб ряд* (A) *збігався, необхідно і достатньо, щоб кожному числу $\varepsilon > 0$ відповідав такий номер N, що при $n > N$ нерівність*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| < \varepsilon \tag{376.2}$$

виконується, яким би не було $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Іншими словами: *сума **будь-якого** числа членів ряду, наступних за **досить далеким** членом, має бути **довільно мала**.*

(Обидва автори принципу збіжності Бользано та Коші сформулювали його саме як умову збіжності нескінченного ряду.)

Якщо, припускаючи, що ряд збігається, у нерівності (376.2) взяти, **зокрема**, $m = 1$, то отримаємо:

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \quad (\text{при } n > N),$$

так що $a_{n+1} \to 0$ або (що те саме) $a_n \to 0$, і ми знову приходимо до відомої **необхідної** умови збіжності ряду (теор. 364.5). Воно вимагає набагато меншого, ніж принцип збіжності: необхідно, щоб не тільки далекі члени, **окремо взяті**, були малі, але й **сума** далеких членів, **взятих у будь-якій кількості**, має бути мала! У цьому сенсі повчально повернутися до гармонічного ряду (пр. 365.1) та до нерівності (365.1), отриманої для його членів. Хоча спільний член тут і прямує до 0, але нерівність

nebayduzhi.math@gmail.com

(376.2) при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ та $m = n$ не виконується для жодного n, і гармонічний ряд є розбіжним!

Потрібно, однак, сказати, що перевірка виконання наведеної загальної умови збіжності ряду в окремих випадках зазвичай буває складною. Тому є цікавим вивчення класу випадків, коли питання вирішується за допомогою простіших засобів.

377. Абсолютна збіжність

Ми бачили вище, що стосовно додатних рядів збіжність, більшою частиною, з'ясовується легко завдяки наявності зручних ознак. Тому природно почати з тих випадків, коли питання про збіжність даного ряду зводиться до питання збіжності **додатного** ряду.

Якщо члени ряду не всі додатні, але починаючи з деякого місця стають додатними, то відкинувши достатню кількість початкових членів ряду (теор. 364.1) зведемо справу до дослідження додатного ряду. Якщо члени ряду від'ємні або принаймні з деякого місця стають від'ємними, то ми повернемося до вже розглянутих випадків зміною знаків всіх членів (теор. 364.3). Отже, суттєво новим випадком буде той, коли **серед членів ряду є нескінченна кількість як додатних, так і від'ємних** членів. Тут часто буває корисною наступна загальна теорема.

Теорема 377.1. *Нехай ряд (A) має члени довільних знаків. Якщо ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots, \tag{A*}$$

складений з ***абсолютних величин*** *його членів, збіжний, то і ряд (A) також збіжний.*

Доведення. Доведення одразу одержується з принципу збіжності: нерівність

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+m}|$$

показує, що якщо умова збіжності виконується для ряду (A*), то воно тим більше виконується для ряду (A).

Можна міркувати і інакше. З **додатних** членів ряду (A), перенумерувавши їх по порядку, складемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots; \tag{P}$$

так само вчинимо з **від'ємними** членами і складемо ряд з їх **абсолютних величин**

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m = q_1 + q_2 + \dots + q_m + \dots. \tag{Q}$$

Скільки б членів того чи іншого ряду не взяти, всі вони містяться серед членів збіжного ряду (A*), і для всіх часткових сум P_k і Q_m виконуються нерівності

$$P_k \leqslant A^*, \quad Q_m \leqslant A^*,$$

так що обидва ряди (P) і (Q) збіжні (розд. 365); позначимо їх суми, відповідно, як P і Q.

Якщо взяти n членів ряду (A), то в їх складі виявиться k додатних і m від'ємних, так що

$$A_n = P_k - Q_m.$$

Тут номера k і m залежать від n. Якщо в ряду (A) як додатних, так і від'ємних членів нескінченна кількість, то при $n \to \infty$ одночасно $k \to \infty$ і $m \to \infty$.

Переходячи в цій рівності до границі, приходимо знову до висновку щодо збіжності ряду (A), причому його сума виявляється рівною

$$A = P - Q. \tag{377.1}$$

Можна сказати, що при зроблених припущеннях *сума даного ряду дорівнює різниці між сумою ряду, складеного з лише додатних його членів, і сумою ряду, складеного з абсолютних величин від'ємних членів.* (Цим ми будемо користуватися далі.) □

Якщо ряд (A) *збіжний разом з рядом* (A*), *складеним з абсолютних величин його членів, то про ряд* (A) *кажуть, що він* ***абсолютно збіжний***. За доведеною теоремою, однієї збіжності ряду (A*) вже достатньо для **абсолютної** збіжності ряду (A).

Як побачимо нижче, можливі випадки, коли ряд (A) збіжний, а ряд (A*) — ні. *Тоді ряд* (A) *називають* ***неабсолютно збіжним***.

Для з'ясування **абсолютної** збіжності ряду (A), до додатного ряду (A*) можуть бути використані всі ознаки **збіжності**, вивчені раніше. Але потрібно бути обережними з ознаками **розбіжності**: навіть якщо ряд (A*) виявиться розбіжним, то ряд (A) все ж таки може бути збіжним (**неабсолютно**). Окремими є лише ознаки Коші і д'Аламбера, і саме тому, що коли вони стверджують розбіжність ряду (A*), це значить, що загальний член $|a_n|$ ряду (A*) не прямує до нуля, а тоді і a_n до нуля не прямує, отже і ряд (A) розбіжний. Тому згадані ознаки можуть бути перефразовані відносно довільного ряду. Зробимо це, наприклад, для ознаки д'Аламбера (яка переважно і використовується на практиці).

Теорема 377.2 (Ознака д'Аламбера)**.** *Нехай для варіанти* $\mathcal{D}_n^* = \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *існує деяка границя:*

$$\mathcal{D}^* = \lim \mathcal{D}_n^*,$$

тоді при $\mathcal{D}^* < 1$ *ряд* (A) ***абсолютно*** *збіжний, а при* $\mathcal{D}^* > 1$ *він розбіжний.*

nebayduzhi.math@gmail.com

378. Приклади

1) Застосувати ознаку д'Аламбера до усіх рядів з пр. 370.2, але відкинувши вимогу $x > 0$. Ми отримаємо, що:

а) ряд **абсолютно** збіжний для всіх значень x;

б) ряд **абсолютно** збіжний при $-1 < x < 1$ і розбіжний при $x \geqslant 1$ або $x \leqslant -1$ (при $x = \pm 1$ порушується необхідна умова збіжності);

в) ряд абсолютно збіжний при $-1 < x < 1$ і розбіжний при $x > 1$ або $x < -1$; якщо $s > 1$, то при $x = \pm 1$ ряд також **абсолютно** збіжний; якщо ж $0 < s \leqslant 1$, то при $x = 1$ ряд явно розбіжний, а при $x = -1$ **питання поки що залишається відкритим**;

г) ряд **абсолютно** збіжний при $-e < x < e$ і розбіжний при $x \geqslant e$ або $x \leqslant -e$ (при $x = \pm e$ порушується необхідна умова збіжності);

ґ) ряд **абсолютно** збіжний при $-\frac{1}{e} < x < \frac{1}{e}$ і розбіжний при $x \geqslant \frac{1}{e}$ або $x < -\frac{1}{e}$ (при $x = -\frac{1}{e}$ **питання поки що залишається відкритим**).

2)
$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdot \ldots \cdot (1+x^n)} \quad (x \neq -1).$$

Маємо
$$\mathcal{D}_n^* = \frac{|x|}{|1+x^n|}, \quad \mathcal{D}_n^* = \begin{cases} |x|, & \text{якщо } -1 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } x = 1, \\ 0, & \text{якщо } x < -1 \quad \text{або} \quad x > 1; \end{cases}$$

отже, ряд абсолютно збіжний для всіх значень $x \neq -1$.

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (x \neq \pm 1)$$

Тут
$$\mathcal{D}_n^* = \left| \frac{x - x^{n+1}}{1 - x^{n+1}} \right|, \quad \mathcal{D}^* = \begin{cases} |x|, & \text{якщо } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{якщо } x < -1 \quad \text{або} \quad x > 1; \end{cases}$$

При $|x| < 1$ ряд **абсолютно** збіжний; при $|x| > 1$ ознака д'Аламбера нічого не дає, але все ж можна зробити висновок про розбіжність ряду, оскільки порушується необхідна умова збіжності.

4) Повернемося до **гіпергеометричного** ряду пр. 372.1.

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\gamma\cdot(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}x^n$$

для будь-яких α,β,γ,x (параметри α,β,γ припускаються лише відмінними від нуля і від цілих від'ємних чисел).

Використовуючи ознаку д'Аламбера в новій формі, переконуємося що для $|x|<1$ цей ряд **абсолютно** збіжний, а для $|x|>1$ — розбіжний.

Нехай тепер $x=1$; оскільки відношення

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad (|\theta_n| \leqslant L)$$

для досить великих n буде додатнім, то члени ряду, починаючи з деякого місця, будуть мати один і той самий знак, а тоді до них (або до їх абсолютних величин) застосуємо ознаку Ґаусса, яка показує, що ряд збіжний (звісно, **абсолютно**) при $\gamma-\alpha-\beta>0$ і розбіжний при $\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$.

Нехай, нарешті, $x=-1$. З тільки що сказаного зрозуміло, що при $\gamma-\alpha-\beta>0$ буде збіжним ряд, складений з абсолютних величин членів даного ряду $F(\alpha,\beta,\gamma,\ -1)$, так що гіпергеометричний ряд в цьому випадку збіжний **абсолютно**. При $\gamma-\alpha-\beta<-1$ будемо мати, починаючи з деякого місця,

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < 1 \quad \text{тобто} \quad |a_n| < |a_{n+1}|,$$

a_n не прямує до нуля, і отже ряд розбіжний.

У випадку якщо $x=-1$ і $-1 \geqslant \gamma-\alpha-\beta \leqslant 0$ **питання про збіжність** ряду $F(\alpha,\beta,\gamma,\ -1)$ залишається **поки що відкритим**.

379. Степеневий ряд, його проміжок збіжності

Розглянемо **степеневий ряд** виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \tag{379.1}$$

який є якби "нескінченним многочленом", де елементи розташовані в порядку зростання степенів змінної x (тут $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots$ — сталі коефіцієнти). Вище ми не один раз мали справу з такими рядами (дивіться пр. 378.1).

Спробуємо з'ясувати, який **вигляд** має "область збіжності" степеневого ряду, тобто множина $\mathcal{X}=\{x\}$ тих значень змінної, для яких ряд (379.1) збіжний. Це послужить важливим прикладом використання сказаного вище.

nebayduzhi.math@gmail.com

Лема 379.1. *Якщо ряд* (379.1) *збіжний для значення* $x = \overline{x}$, *відмінного від* 0, *то він* ***абсолютно*** *збіжний для будь-якого значення* x, *яке задовольняє нерівність:* $|x| < |\overline{x}|$.

Доведення. Зі збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{x}^n = a_0 + a_1 \overline{x} + a_2 \overline{x}^2 + \dots + a_n \overline{x}^n + \dots$$

витікає, що його загальний член прямує до 0 (теор. 364.5), і отже, обмежений (теор. 26.4):

$$|a_n \overline{x}^n| \leqslant M \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots). \tag{379.2}$$

Візьмемо тепер будь-який x, для якого $|x| < |\overline{x}|$, і складемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \tag{379.3}$$

Оскільки (379.2):

$$|a_n x^n| = |a_n \overline{x}^n| \cdot \left|\frac{x}{\overline{x}}\right|^n \leqslant M \cdot \left|\frac{x}{\overline{x}}\right|^n,$$

і члени ряду (379.3) виявляються менше від відповідних членів **збіжної** геометричної прогресії (зі знаменником $\left|\frac{x}{\overline{x}}\right| < 1$):

$$M + M \cdot \left|\frac{x}{\overline{x}}\right| + M \cdot \left|\frac{x}{\overline{x}}\right|^2 + \dots + M \cdot \left|\frac{x}{\overline{x}}\right|^n + \dots,$$

то за теор. 366.1 ряд (379.3) збіжний. В такому випадку, як ми знаємо, ряд (379.1) збіжний **абсолютно**, що й потрібно було довести. ☐

При $x = 0$ збіжний, очевидно, всілякий ряд (379.1). Але існують степеневі ряди, які (окрім цього) не збіжні ні при якому значенні x. Прикладом такого "усюди розбіжного" ряду може бути ряд $\sum n! x^n$, як у цьому легко переконатися за допомогою ознаки д'Аламбера (теор. 377.2). Подібні ряди для нас не цікаві.

Припустимо, що для ряду (379.1) взагалі **існують** такі відмінні від 0 значення $x = \overline{x}$, за яких він збіжний, і розглянемо множину $\{\overline{x}\}$. Ця множина може виявитися або обмеженою зверху, або ні.

В останньому випадку, яке б значення x не взяти, необхідно знайдеться таке $\overline{x}$, що $|x| < |\overline{x}|$, а тоді, за лемою, при взятому значенні x ряд (379.1) **абсолютно** збіжний. Ряд виявляється "усюди збіжним".

Нехай тепер множина $\{\overline{x}\}$ обмежена зверху, і R — його **точна** верхня границя. Якщо $|x| > R$, то одразу зрозуміло, що при цьому значенні x ряд (379.1) розбіжний.

Візьмемо тепер будь-яке x, для якого $|x| < R$. За означенням точної границі, необхідно знайдеться таке $\overline{x}$, що $|x| < |\overline{x}| \leqslant R$; а це, за лемою, знову означає **абсолютну** збіжність ряду (379.1).

Отже, на відкритому проміжку $(-R, R)$ ряд (379.1) **абсолютно збіжний**; для $x > R$ і $x < -R$ ряд **розбіжний**, і лише про кінці проміжку $x = \pm R$ загального твердження зробити неможливо — там, залежно від випадку, може бути і збіжність, і розбіжність.

Поставлена нами задача розв'язана.

Для кожного степеневого ряду вигляду (379.1)*, якщо тільки він не є всюди розбіжним, "область збіжності" $\mathcal{X}$ являє собою суцільний проміжок від $-R$ до R, з включенням кінців або ні; проміжок цей може бути і нескінченним. Всередині проміжку ряд збіжний **абсолютно**.*

Вище наведений проміжок називають **проміжком** збіжності, а число R $(0 < R \leqslant +\infty)$ — **радіусом збіжності** ряду.

Якщо повернутися до пр. 378.1 попереднього розділу, то, як легко бачити, у випадку

$$\text{а) } R = +\infty; \quad \text{б), в) } R = 1; \quad \text{г) } R = e; \quad \text{ґ) } R = \frac{1}{e}\,.$$

Для всюди розбіжного ряду приймають $R = 0$: його "область збіжності" зводиться до однієї лише точки $x = 0$.

380. Запис радіуса збіжності використовуючи коефіцієнти

Тепер ми доведемо більш точну теорему, в якій не тільки доводиться існування радіуса збіжності, а й визначається його величина залежно від коефіцієнтів самого ряду (379.1).

Розглянемо послідовність:

$$\rho_1 = |a_1|, \quad \rho_2 = \sqrt{|a_2|}, \quad \ldots, \quad \rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \ldots$$

Позначимо **найбільшу границю** цієї послідовності (яка завжди існує, розд. 42), через ρ, так що

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \rho_n = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Теорема 380.1 (Теорема Коші – Адамара)**.** *Радіус збіжності ряду* (379.1) *є величиною, оберненою до найбільшої границі ρ варіанти $\rho_n = \sqrt[n]{|a_n|}$:*

$$R = \frac{1}{\rho}$$

(при цьому, якщо $\rho = 0$, то $R = +\infty$, якщо $\rho = +\infty$, то $R = 0$).

Теорема ця, відкрита Коші, була забута.
Адамар (фр. Jacques Hadamard, Жáк Адамáр) знову знайшов її і вказав важливі застосування.

Доведення. *1-й випадок*: $\rho = 0$. Доведемо, що в цьому випадку $R = +\infty$, тобто що при будь-якому x ряд (379.1) **абсолютно** збіжний.

Оскільки послідовність $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ складена з додатних елементів, то з того, що $\rho = 0$, витікає, що вона має визначену границю:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0;$$

звідси варіанта Коші

$$\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} \to 0$$

при $n \to \infty$, яким би не було значення x. Отже, за ознакою Коші теор. 368.3, ряд, складений з абсолютних величин членів ряду (379.1), збіжний, а отже сам ряд (379.1) збіжний **абсолютно**.

2-й випадок: $\rho = +\infty$. Доведемо, що в цьому випадку $R = 0$, тобто при всілякому $x \neq 0$ ряд (379.1) розбіжний.

Оскільки

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty,$$

то, очевидно, можна знайти таку послідовність $\{n_i\}$, щоб

$$\lim_{i\to\infty} \sqrt[n_i]{|a_{n_i}|} = +\infty.$$

Отже, при кожному $x \neq 0$ знайдеться такий номер i_0, що при $i > i_0$ буде виконуватися нерівність:

$$\sqrt[n_i]{|a_{n_i}|} > \frac{1}{|x|}, \quad \text{або} \quad |a_{n_i} \cdot x^{n_i}| > 1.$$

Бачимо, що в цьому випадку не виконується необхідна умова збіжності ряду (загальний член не прямує до нуля). Отже, ряд (379.1) розбіжний.

3-й випадок: ρ — скінченне додатне число, $0 < \rho < +\infty$. Доведемо, що в цьому випадку $R = \frac{1}{\rho}$, тобто що при $|x| < \frac{1}{\rho}$ ряд **абсолютно** збіжний, а при $|x| > \frac{1}{\rho}$ — він розбіжний. Візьмемо будь-яке x, для якого $|x| < \frac{1}{\rho}$. Оберемо $\varepsilon > 0$ настільки малим, щоб виконувалася нерівність

$$|x| < \frac{1}{\rho + \varepsilon}.$$

За цим ε, очевидно, завжди можна знайти таке число N_ε, щоб для всіх $n > N_\varepsilon$ було:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \varepsilon$$

nebayduzhi.math@gmail.com

(зважаючи на **1-у властивість** найбільшої границі послідовності, розд. 42). Звідси витікає, що варіанта Коші

$$\mathcal{C}_n = \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} < |x| \cdot (\rho + \varepsilon) < 1$$

при всіх $n > N_\varepsilon$. За ознакою Коші, ряд, складений з абсолютних величин ряду (379.1) збіжний, а отже сам ряд (379.1) збіжний **абсолютно**.

Візьмемо тепер будь-яке x, для якого $|x| > \frac{1}{\rho}$. Оберемо ε настільки малим, щоб було

$$|x| < \frac{1}{\rho - \varepsilon}.$$

За **2-ю властивістю** найбільшої границі (розд. 42), для скільки завгодно великих n буде виконуватися нерівність:

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \rho - \varepsilon,$$

так що

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} > |x| \cdot (\rho - \varepsilon) > 1.$$

Отже, для скільки завгодно великих n загальний член ряду

$$|a_n x^n| > 1,$$

і ряд (379.1) розбіжний. □

381. Знакозмінні ряди

Знакозмінними називаються ряди, члени яких через один мають то додатній, то від'ємний знаки. Знакозмінний ряд зручніше записувати отже, щоб знаки членів були виявлені:

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + (-1)^{n-1} c_n + \dots \quad (c_n > 0) \tag{381.1}$$

Розглянемо наступну просту теорему стосовно знакозмінних рядів.

Теорема 381.1 (Теорема Ляйбніца)**.** *Якщо члени знакозмінного ряду* (381.1) *монотонно спадають за абсолютною величиною:*

$$c_{n+1} < c_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots) \tag{381.2}$$

і прямують до нуля:

$$\lim c_n = 0,$$

то ряд збіжний.

Доведення. Часткову суму **парного** порядку C_{2m} можна записати у вигляді:

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \dots + (c_{2m-1} - c_{2m}).$$

Оскільки кожна дужка, зважаючи на (381.2), є додатнім числом, то звідси зрозуміло, що зі зростанням m сума C_{2m} також зростає. З іншої сторони, якщо C_{2m} переписати так:

$$C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \dots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m},$$

то легко побачити, що C_{2m} залишається обмеженою зверху:

$$C_{2m} < c_1.$$

В такому разі, за теоремою про монотонну варіанту (теор. 34.1), при необмеженому зростанні m сума C_{2m} має скінченну границю

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m} = C.$$

Розглянемо суму **непарного** порядку C_{2m+1}. Очевидно, $C_{2m+1} = C_{2m} + c_{2m+1}$. Оскільки загальний член прямує до нуля, то і

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m+1} = C.$$

Як наслідок, C і буде сумою даного ряду. □

Зауваження. Ми бачили що часткові суми парного порядку C_{2m} наближаються до суми C **зростаючи**. Записавши C_{2m-1} у вигляді

$$C_{2m-1} = c_1 - (c_2 - c_3) - \dots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}),$$

легко показати, що суми непарного порядку наближаються до C **спадаючи**. Отже, завжди

$$C_{2m} < C < C_{2m-1}.$$

Зокрема, можна стверджувати, що

$$0 < C < c_1.$$

Це дає змогу дати дуже просту і зручну оцінку для **залишку** ряду (який і сам є знакозмінним рядом). А саме, для

$$\gamma_{2m} = c_{2m+1} - c_{2m+2} + \dots,$$

очевидно маємо

$$0 < \gamma_{2m} < c_{2m+1};$$

навпаки, для

$$\gamma_{2m-1} = -c_{2m} + c_{2m+1} - \ldots = -(c_{2m} - c_{2m+1} + \ldots)$$

буде:

$$\gamma_{2m-1} < 0, \quad |\gamma_{2m-1}| < c_{2m}.$$

Отже, у всіх випадках *залишок ряду задовольняє умови теореми Ляйбніца і його сума має знак свого першого члена і менше його за абсолютною величиною.*

Це зауваження часто використовується при наближеному обчисленні за допомогою рядів (розд. 409).

382. Приклади

1) Найпростішими прикладами рядів, що задовольняють ознаку Ляйбніца, є ряди

а) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

і

б) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \ldots .$$

Збіжність обох витікає з доведеної теореми.

Водночас, ряди, складені з абсолютних величин їх членів, розбіжні: для ряду а) це буде гармонічний ряд, для ряду б) вийде ряд

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \ldots,$$

розбіжність якого видна з того, що його часткова сума

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}H_n.$$

Отже, ми маємо перші приклади **неабсолютно збіжних** рядів. (Нижче ми побачимо, що сума першого з них є $\ln 2$ (388.6), а сума другого дорівнює $\frac{\pi}{4}$; розд. 405, розд. 404).

2) За теоремою Ляйбніца збіжні такі ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln^s n}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln n \cdot (\ln\ln n)^s} \quad (s > 0).$$

Якщо замінити всі члени їх абсолютними величинами, то як ми знаємо, при $s > 1$ матимемо збіжні ряди, а при $s \leqslant 1$ розбіжні. Отже, початкові ряди при $s > 1$ виявляються **абсолютно** збіжними, а при $s \leqslant 1$ — **неабсолютно** збіжними.

Зокрема, про степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}$, який ми розглядали в розд. 370 і розд. 378, тепер можна сказати, що на межі $x = -1$ свого проміжку збіжності при $s \leqslant 1$ він все ще збіжний, але **неабсолютно**.

3) Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n}$, при будь-яких $x \neq 0$. Теорема Ляйбніца може бути застосована, якщо не до цього ряду, так до його досить далекого (за номером) **залишку**. Справді, при досить великому n, $\sin \frac{x}{n}$ набуває знака x і за абсолютною величиною спадає, коли n зростає. Отже, ряд збіжний (очевидно, неабсолютно, дивіться пр. 367.8).

4) Для того щоб з'ясувати, що умова монотонного спадання чисел c_n в теоремі Ляйбніца не є зайвою, розглянемо знакозмінний ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \ldots,$$

загальний член якого прямує до нуля. Сума $2n$ його членів дорівнює

$$\sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1} \right) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k-1} = 2H_n$$

і нескінченно зростає разом з n: ряд розбіжний! Нескладно перевірити, що **монотонність** спадання порушується всякий раз при переході від $-\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ до члену $\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}$.

Теж саме і для **розбіжного** ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right],$$

в чому пропонуємо переконатися читачеві.

5) Останній ряд дає підставу до такого зауваження. Якщо його порівняти зі **збіжним** рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, то виявиться, що співвідношення їх загальних членів прямує до 1. Отже, теор. 366.2 не має аналога в теорії рядів з членами довільних знаків.

6) Використання в викладках **розбіжних** рядів і дій над їх **нескінченними** су-

мами може привести до парадоксів. Ось, наприклад, один з них:

$$\begin{aligned}\ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) = 0(!)\end{aligned}$$

Якщо те саме перетворення застосувати до збіжного ряду

$$p = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots \quad (s > 0),$$

то отримаємо, що

$$p = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) q,$$

де

$$q = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots .$$

При $s < 1$ (у цьому випадку останній ряд розбіжний!) знову приходимо до парадоксу: $p < 0$ (розд. 381, зауваження). При $s > 1$ ми маємо справу зі збіжними рядами, і виходить правильний результат.

383. Перетворення Абеля

Часто доводиться мати справу з сумами добутків вигляду

$$S = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_m\beta_m. \tag{383.1}$$

В багатьох випадках при цьому виявляється корисним наступне елементарне перетворення, вказане Абелєм.

Розглянемо суми

$$B_1 = \beta_1, \quad B_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad B_3 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \quad \dots, \quad B_m = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m.$$

Тоді, виражаючи множники β_i через ці суми,

$$\beta_1 = B_1, \quad \beta_2 = B_2 - B_1, \quad \beta_3 = B_3 - B_2, \quad \dots, \quad \beta_m = B_m - B_{m-1},$$

суму S можна записати у вигляді

$$S = \alpha_1 B_1 + \alpha_2(B_2 - B_1) + \alpha_3(B_3 - B_2) + \dots + \alpha_m(B_m - B_{m-1}).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо розкрити дужки і інакше перегрупувати члени, то отримаємо остаточну формулу (ми вже користувалися подібним перетворенням при доведенні другої теореми про середнє значення визначеного інтеграла (вл. 306.2).)

$$\begin{aligned} S = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \\ &= (\alpha_1 - \alpha_2) B_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) B_2 + \dots + (\alpha_{m-1} - \alpha_m) B_{m-1} + \alpha_m B_m = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) B_i + \alpha_m B_m \end{aligned} \tag{383.2}$$

Якщо переписати її у вигляді

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i = \alpha_m B_m - \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) B_i,$$

то стане зрозуміло, що ця формула для скінченних сум є аналогом формули інтегрування частинами для інтегралів: диференціал тут замінений різницею, а інтеграл — сумою.

Базуючись на формулі (383.2), виведемо тепер наступну оцінку для сум вказаного вигляду.

Лема 383.1. *Якщо множники α_i не зростають (або не спадають), а суми B_i всі обмежені за абсолютною величиною числом L:*

$$|B_i| \leqslant L \quad (i = 1, \ \dots, \ m),$$

то

$$|S| = \left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i \right| \leqslant L \cdot (|\alpha_1| + 2|\alpha_m|).$$

Доведення. Справді, оскільки всі різниці в (383.2) одного знака, то

$$|S| \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} |\alpha_i - \alpha_{i+1}| \cdot L + |\alpha_m| \cdot L = L \cdot (|\alpha_1 - \alpha_m| + |\alpha_m|) \leqslant L \cdot (|\alpha_1| + 2|\alpha_m|).$$

□

Нескладно побачити, що якщо множники α_i не зростають і додатні, то оцінку можна спростити:

$$|S| = \left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i \right| \leqslant L \cdot \alpha_1 \,. \tag{383.3}$$

Цими оцінками ми ще не раз будемо користуватися з різних приводів. Зараз ми використаємо їх для того, щоб отримати критерії збіжності, більш загальні, ніж наведений вище критерій Ляйбніца (теор. 381.1).

384. Ознаки Абеля та Діріхлє

Розглянемо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots , \tag{W}$$

де $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ — дві послідовності дійсних чисел.

Наступні припущення відносно кожної з них окремо забезпечують збіжність цього ряду.

Теорема 384.1 (Ознака Абеля). *Якщо ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \tag{B}$$

збіжний, а числа a_n є монотонною і обмеженою послідовністю, де

$$|a_n| \leqslant K \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots),$$

то ряд (W) збіжний.

Теорема 384.2 (Ознака Діріхлє). *Якщо часткові суми ряду (B) в сукупності обмежені (ця вимога ширша за припущення про збіжність ряду (B))*

$$|B_n| \leqslant M \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots),$$

а числа a_n є монотонною послідовністю, що прямує до нуля:

$$\lim a_n = 0,$$

то ряд (W) збіжний.

Доведення. В обох випадках для доведення збіжності ряду (W) ми використаємо принцип збіжності (теор. 376.1). Тому розглянемо суму

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k = \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} b_{n+i};$$

вона має вигляд (383.1), якщо покласти $\alpha_i = a_{n+i}$, $\beta_i = b_{n+i}$. Спробуємо оцінити цю суму за допомогою лем. 383.1.

За припущеннями Абеля, за заданим $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що при $n > N$ нерівність

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+p}| < \varepsilon$$

буде виконуватися, яким би не було p (**принцип збіжності**). Отже, за число L, що згадувалося в лемі, можна прийняти ε. Маємо тоді при $n > N$ і $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k\right| \leqslant \varepsilon(|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) \leqslant 3K \cdot \varepsilon,$$

що і доводить збіжність ряду (W). ☐

Доведення. За припущенням Діріхлє, за заданим $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що при $n > N$ буде

$$|a_n| < \varepsilon.$$

Окрім цього, очевидно,

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots + b_{n+p}| = |B_{n+p} - B_n| \leqslant 2M,$$

і можна в лемі покласти $L = 2M$. Тоді, при $n > N$ і $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k\right| \leqslant 2M \cdot (|a_{n+1}| + 2|a_{n+m}|) \leqslant 6M \cdot \varepsilon,$$

і збіжність ряду (W) доведена. ☐

Зауваження. Ознака Абеля витікає з ознаки Діріхлє. Бо з припущень Абеля витікає, що a_n мають скінченну границю a. Якщо переписати ряд (W) у вигляді суми рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n + a\sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

то другий з них збіжний за припущенням, а до першого можна застосувати ознаку Діріхлє.

385. Приклади

1) Якщо a_n, монотонно спадаючи, прямує до нуля, а $b_n = (-1)^{n-1}$, то умови теореми Діріхлє (теор. 384.2), очевидно, виконані. Отже, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots$$

збіжний. Отже, теорема Ляйбніца (теор. 381.1) отримується як частинний наслідок теореми Діріхлє.

2) При тих самих припущеннях щодо a_n, розглянемо ряди (x — будь-яке):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Покладаючи $a = 0$ і $h = x$ в тотожностях (307.1) і (307.2), які там були отримані з іншого приводу, ми знайдемо

$$\sum_{i=1}^{n} \sin ix = \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{1}{2}x},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \cos ix = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x - \sin \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x},$$

за умови, що $x \neq 2k\pi$ $2k\pi$ $(k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots)$. Отже, якщо тільки $x \neq 2k\pi$, то обидві суми при будь-якому n за абсолютною величиною обмежені числом $\frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$.

За ознакою Діріхлє, обидва ряди збіжні при будь-якому значенні x, відмінному від $2k\pi$, втім, перший ряд збіжний і при $x = 2k\pi$, оскільки всі члени його у такому разі дорівнюють нулю.

Зокрема, наприклад, збіжні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin nx}{n} \quad \text{тощо.}$$

3) Дуже цікаві ряди вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}, \tag{385.1}$$

де $\{a_n\}$ — довільна послідовність дійсних чисел; вони мають назву *рядів Діріхле.*

Для них може бути доведена лема, подібна до лем. 379.1, яка відноситься до степеневих рядів.

Лема 385.1. *Якщо ряд (385.1) збіжний при деякому значенні $x = \overline{x}$, то він збіжний і для будь-якого $x > \overline{x}$.*

Доведення. Це одразу випливає з теореми Абеля (теор. 384.1), оскільки при $x > \overline{x}$ ряд (385.1) можна отримати зі збіжного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\overline{x}}}$$

множенням його членів на монотонно спадні додатні множники $\frac{1}{n^{x-\overline{x}}}$ $(n = 1,\ 2,\ \dots)$.
□

nebayduzhi.math@gmail.com

Існують ряди (385.1) "всюди збіжні", як-то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n^x}$, і "всюди розбіжні", як-то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^x}$. Якщо не брати до уваги ці випадки, то за допомогою наведеної леми легко довести існування **межової абсциси збіжності** λ, такої, що ряд (385.1) збіжний при $x > \lambda$, і розбіжний при $x < \lambda$. Наприклад, для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$, очевидно, $\lambda = 1$, а для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ маємо $\lambda = 0$. Тобто, для "усюди збіжного" ряду можна вважати $\lambda = -\infty$, а для "усюди розбіжного" — $\lambda = +\infty$.

Читач легко побачить подібність з степеневими рядами: в обох випадках "область збіжності" є **суцільним** проміжком. Але є і суттєва різниця: область **абсолютної** збіжності тут може відрізнятися від області збіжності взагалі. Так, наведений тільки що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ збіжний для $x > 0$, а **абсолютно** збіжний лише при $x > 1$.

4) Порівняємо з рядом Діріхлє (385.1) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a_n}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+n)}, \tag{385.2}$$

при тих самих значеннях коефіцієнтів a_n. При цьому, звісно, будемо вважати x відмінним від $0,\ -1,\ -2,\ \ldots$ тощо.

З цим обмеженням має також місце така пропозиція, що належить Е. Ландау (нім. Едмунд Ландау, Е́дмунд Ланда́у).

Лема 385.2. *Ряди* (385.1) *і* (385.2) *збіжні при одних і тих самих значеннях x.*

Доведення. Ряд (385.2) отримується з ряду Діріхлє (385.1) множенням його членів, відповідно, на множники:

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{385.3}$$

При досить великих значеннях n ці множники мають певний знак. Окрім цього, починаючи з деякого місця, вони змінюються вже **монотонно**.

Справді, відношення $(n+1)$-го множника до n-того буде таким:

$$\frac{(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^x}{x+n+1} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}}{1+\frac{x+1}{n}}.$$

Але (пр. 125.4)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1} = 1 + \frac{x+1}{n} + \frac{(x+1)x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

nebayduzhi.math@gmail.com

і, аналогічно,

$$\frac{1}{1+\dfrac{x+1}{n}} = 1 - \frac{x+1}{n} + \frac{(x+1)^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

звідки

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x+1}}{1+\dfrac{x+1}{n}} = 1 + \frac{(x+1)x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

З останньої формули зрозуміло, що при $x(x+1) > 0$ наведене відношення починаючи з деякого номера стає більшим за одиницю, а при $x(x+1) < 0$ — менше за одиницю.

Для того щоб отримати обмеженість множників (385.3), ми зробимо посилання на те, що (як це буде доведено нижче, в пр. 402.10) для виразу (385.3) при $n \to \infty$ існує **скінченна** границя. Отже, за ознакою Абеля, збіжність ряду (385.1) означає збіжність ряду (385.2).

Оскільки названа границя (як ми побачимо) завжди відмінна від 0, то подібні висновки можна використовувати щодо множників, обернених до (385.3). В такому випадку, за тією ж теоремою, і збіжність ряду (385.2) означає збіжність ряду (385.1). Цим доведено все. ☐

5) Подібну взаємність можна довести для *ряду Ламберта* (швейц. Johann Lambert, Йóханн Ламбéрт):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \tag{385.4}$$

і степеневого ряду (розд. 379):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \tag{385.5}$$

з однаковими коефіцієнтами a_n (значення $x = \pm 1$, звісно, не розглядаються).

Лема 385.3. *Якщо ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{A}$$

збіжний, то ***ряд Ламберта*** *(385.4) збіжний при всіх значеннях x, в іншому випадку він збіжний як раз для тих значень x, для яких збіжний степеневий ряд (385.5).*

Доведення. а) Нехай спочатку ряд (A) буде **розбіжним**, так що радіус збіжності ряду (A) буде $R \leqslant 1$. Покажемо, що для $|x| < 1$ поведінка рядів (385.4) і (385.5) однакова.

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо збіжний ряд (385.4), то збіжний і ряд, отриманий множенням його членів на x^n, а отже, і ряд (385.5), який є різницею обох рядів (теор. 364.4):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \frac{x^n}{1-x^n} - a_n \cdot \frac{x^n}{1-x^n} \cdot x^n \right].$$

(Якщо якийсь ряд, скажімо, $\sum b_n$ збігається, то це означає, що степеневий ряд $\sum b_n x^n$ збігається при $x = 1$, а тоді, за лем. 379.1, цей ряд явно збігається при $|x| < 1$. Цим зауваженням ми ще двічі будемо користуватися.)

Нехай тепер збіжним є ряд (385.5); тоді, за ознакою Абеля збіжним є ряд, отриманий множенням його членів на монотонно спадні множники $\dfrac{1}{1-x^{2n}}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \cdot \frac{1}{1-x^{2n}}, \quad \text{так само як і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \cdot \frac{x^n}{1-x^{2n}}.$$

Отже, збіжний і ряд (385.4), який є сумою цих рядів (теор. 364.4):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n x^n \cdot \frac{1}{1-x^{2n}} + a_n x^n \cdot \frac{x^n}{1-x^{2n}} \right].$$

Для $|x| > 1$ ряд (385.5) розбіжний; ми стверджуємо, що при цьому значенні x розбіжний і ряд (385.4). Справді, в іншому випадку, зі збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \equiv -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

витікала б збіжність рядів (теор. 364.4):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

і

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} - a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \right],$$

всупереч припущенню.

б) Якщо ряд (A) збіжний (так що $R \geqslant 1$), то для $|x| < 1$ ряд (385.5) збіжний, і збіжність ряду (385.4) доводиться як і вище. Залишається показати, що ряд (385.4) збіжний і при $|x| > 1$.

Справді, тоді $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n},$$

як зазначено, збіжний, отже збіжний і ряд (теор. 364.4):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n} \equiv -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n} \equiv -\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + a_n \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}\right].$$

□

6) На закінчення, як приклад безпосереднього використання перетворення Абеля (383.2), наведемо тотожність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n,$$

де

$$A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots).$$

При цьому $|x|$ припускається не тільки меншим за радіус збіжності R першого ряду, але і менше за 1.

І справді, маємо:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} A_i (x^i - x^{i+1}) + A_n x^n.$$

Звідси при $n \to \infty$ і отримуємо потрібну рівність, якщо тільки отримати ще, що $A_n x^n \to 0$. З цією метою візьмемо число r таке, що

$$|x| < r < R, \quad r \neq 1.$$

Тоді $|a_i| r^i \leqslant L$ (для $i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$) і

$$|A_n x^n| \leqslant L \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^n}\right) |x|^n = \frac{L}{1-r} \left(\frac{|x|}{r}\right)^n - \frac{Lr}{1-r} |x|^n.$$

Останній вираз при зроблених припущеннях очевидно прямує до нуля.

11.4. Властивості збіжних рядів

386. Сполучна властивість

Поняття суми нескінченного ряду суттєво відрізняється від поняття суми скінченного числа доданків (розглядається в арифметиці та алгебрі) тим, що включає у себе **перехід до границі**. Хоча деякі властивості звичайних сум переносяться і на суми нескінченних рядів, але частіше за все лише при виконанні певних умов, які і потребують вивчення. У інших випадках звичні для нас властивості сум вражаючи порушуються, отже, взагалі, у цьому питанні слід дотримуватися обережності.

Розглянемо збіжний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \tag{A}$$

і почнемо об'єднувати його члени довільним чином у групи, при цьому не змінюючи їх розташування:

$$a_1 + \dots + a_{n_1}, \quad a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}, \quad \dots, \\ a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}, \quad \dots$$

Де $\{n_k\}$ є деяка обрана з натурального ряду часткова зростаюча послідовність номерів.

Теорема 386.1. *Отриманий з цих сум ряд*

$$(a_1 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + (a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}) + \dots, \tag{$\widetilde{\text{A}}$}$$

завжди збігається і має ***суму****, що дорівнює сумі ряду* (A)*. Іншими словами: збіжний ряд має* ***сполучну властивість****.*

Доведення. Справді, послідовність часткових сум нового ряду

$$\widetilde{A}_1, \ \widetilde{A}_2, \ \dots, \ \widetilde{A}_k, \ \dots$$

є не що інше, як часткова послідовність

$$A_{n_1}, \ A_{n_2}, \ \dots, \ A_{n_k}, \ \dots$$

сум ряду (A). Цим (розд. 40) і доводиться наше твердження. □

Поки ми бачимо повну аналогію зі звичайними сумами; але ця аналогія порушується, якщо ми спробуємо застосовувати сполучну властивість, так би мовити, у зворотному порядку. Якщо розглядати збіжний ряд ($\widetilde{\text{A}}$), члени якого кожен окремо являють собою суму скінченного числа доданків, то, опустивши дужки, ми отримаємо новий ряд (A), який може виявитись і **розбіжним**.

Ось прості **приклади**: ряди

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots \equiv 0+0+0+\dots = 0$$

та

$$1-(1-1)-(1-1)-\ldots \equiv 1-0-0-\ldots = 1,$$

очевидно, збіжні, тимчасом як отриманий з них ряд без дужок

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

буде розбіжним.

Звичайно, ***якщо*** *опустивши дужки ми отримаємо* ***збіжний*** *ряд* (A)*, то його сума буде така сама, як і сума ряду* $(\widetilde{\mathrm{A}})$. Це випливає з наведеного вище.

За деяких умов можна наперед гарантувати, що ряд (A) буде збіжний. Найпростішим випадком цього є той, коли **всі доданки в** $(\widetilde{\mathrm{A}})$ **всередині тих самих дужок будуть одного знака. (Цей знак в різних дужках може бути різним.)**

Справді, коли n змінюється від n_{k-1} ДО n_k, часткова сума A_n буде змінюватися монотонно, отже, буде між $A_{n_{k-1}} = \widetilde{A}_{k-1}$ і $A_{n_k} = \widetilde{A}_k$. При досить великому k ці останні суми довільно мало відрізняються від суми $\widetilde{A}$ ряду $(\widetilde{\mathrm{A}})$, отже, те саме справедливо і щодо суми A_n при досить великому n, тому $A_n \to \widetilde{A}$.

Цим зауваженням ми не раз користуватимемося далі,

Розглянемо такий приклад.

З'ясувати збіжність ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n},$$

де $E(x)$ позначає цілу частину дійсного числа (розд. 25).

Тут спочатку йдуть 3 від'ємні члени, за ними 5 додатних і так далі. Якщо об'єднати кожну таку групу членів одного знака і обчислити, то вийде знакозмінний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\dots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right). \tag{386.1}$$

Легко отримати нерівність

$$\frac{2}{k+1} < \underbrace{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\ldots}_{k} + \underbrace{\frac{1}{k^2+k}+\dots+\frac{1}{(k+1)^2-1}}_{k+1} < \frac{2}{k};$$

nebayduzhi.math@gmail.com

наприклад, оскільки сума перших k доданків менша ніж $k \cdot \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{k}$, а сума останніх $(k+1)$ доданків менше ніж $(k+1)\dfrac{1}{k^2+k} = \dfrac{1}{k}$, то вся сума, справді, буде менше ніж $\dfrac{2}{k}$. Звідси робимо висновок, що члени ряду (386.1) прямують до нуля, монотонно спадаючи за абсолютною величиною. Тоді, за теоремою Ляйбніца, ряд (386.1) є збіжним, отже, використовуючи зроблене вище зауваження, маємо, що запропонований ряд збіжний.

387. Комутативна властивість абсолютно збіжних рядів

Розглянемо збіжний ряд (A), що має суму A. Переставивши в ньому члени довільним чином, ми отримаємо **новий** ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_k + \dots \,. \tag{A$'$}$$

Кожен член a'_k цього ряду ототожнюється з деяким членом a_{n_k} ряду (A). (Причому послідовність номерів $\{n_k\}$ без пропусків і повторень відтворює, з точністю до порядку, натуральний ряд.)

Виникає питання, чи буде збіжним ряд (A′) і, якщо так, то чи буде його сума дорівнює сумі A ряду (A). При розгляді цього питання нам доведеться провести різку різницю між **абсолютно і неабсолютно** збіжними рядами.

Теорема 387.1. *Якщо ряд* (A) *абсолютно збіжний, то ряд* (A′)*, отриманий із нього перестановкою членів, також збіжний і має ту саму суму A. Іншими словами:* ***абсолютно*** *збіжний ряд має комутативну властивість.*

Доведення. Проведемо доведення у два кроки.

а) Припустимо спочатку, що ряд (A) — додатний.

Розглянемо довільну часткову суму A'_k ряду (A′). Оскільки

$$a'_1 = a_{n_1}, \quad a'_2 = a_{n_2}, \quad \dots, \quad a'_k = a_{n_k},$$

то, взявши n' більшим за всі номери $n_1, n_2, \dots, n_k$, очевидно, матимемо $A'_k \leqslant A_{n'}$, а отже, і

$$A'_k \leqslant A.$$

У такому разі (A′) буде збіжним (розд. 365) і його сума A' не перевищить A:

$$A' \leqslant A.$$

Але й ряд (A) можна вважати таким, що отриманий з (A′) за допомогою перестановки членів, тому, аналогічно:

$$A \leqslant A'.$$

Зіставляючи отримані співвідношення, прийдемо до необхідної рівності: $A' = A$.

б) Нехай тепер (A) буде довільним абсолютно збіжним рядом.

Оскільки збіжний **додатний** ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots\,, \tag{A*}$$

за доведеним, при будь-якій перестановці членів залишиться збіжним, то за теор. 377.1, ряд (A) теж буде (абсолютно) збіжним.

Далі, ми бачили в розд. 377, що у разі **абсолютної** збіжності ряду (A), його сума виражається так:

$$A = P - Q,$$

де P і Q — суми додатних рядів

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \tag{P}$$

та

$$\sum_{m=1}^{\infty} q_m\,, \tag{Q}$$

складених, відповідно, з додатних та абсолютних величин від'ємних членів ряду (A).

Перестановка членів у ряді (A) викликає перестановку членів у цих рядах, але не позначиться (за доведеним) на їх сумах P та Q. Отже, і сума ряду (A) залишиться незмінною, що й потрібно було довести. ☐

388. Випадок неабсолютно збіжних рядів

Звернемося тепер до розгляду **неабсолютно** збіжних рядів і покажемо, що вони *не мають комутативній властивості*: у кожному такому ряді належною перестановки членів можна змінити його суму або навіть зовсім порушити збіжність.

Твердження 388.1. *Припустимо, що ряд* (A) *збіжний, але* ***неабсолютно****. Зі збіжності випливає, що* $\lim a_n = 0$ *(теор. 364.5). Що ж до рядів* (P) *і* (Q)*, про які ми згадували в попередньому розділі, то, хоча, очевидно,*

$$\lim_{k\to\infty} p_k = 0 \quad \textit{та} \quad \lim_{m\to\infty} q_m = 0, \tag{388.1}$$

але в даному випадку вони ***обидва*** *є розбіжними.*

Доведення. Справді, виконуються рівності

$$A_n = P_k - Q_m, \quad A_n^* = P_k + Q_m, \tag{388.2}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

де k та m означають число додатних та від'ємних членів у складі перших n членів ряду (A). Підкреслимо, що з трьох номерів n, k, m один може бути взятий довільно, а два інші по ньому підбираються. Зі збіжності одного з рядів (P) або (Q), зважаючи на першу з рівностей (388.2), необхідно витекла б і збіжність іншого, а збіжність обох рядів, зважаючи на другу з цих рівностей, мала б наслідком збіжність ряду (A*) — всупереч припущенню! ☐

Доведемо тепер наступну чудову теорему, що належить Ріману.

Теорема 388.1 (Теорема Рімана)**.** *Якщо ряд* (A) ***неабсолютно*** *збіжний, то хоч би яке взяти наперед число B (скінченне або рівне $\pm\infty$), можна так переставити члени у цьому ряді, щоб сума перетвореного ряду дорівнювала саме B.*

Доведення. Зупинимося на випадку скінченного B. Зауважимо, передусім, що з розбіжності рядів (P) і (Q), використовуючи теор. 364.1, випливає, що і **всі їхні залишки** також будуть розбіжними, так що в кожному з цих рядів, **починаючи з будь-якого місця**, можна набрати стільки членів, щоб сума **перевищила будь-яке число.**

Користуючись цим зауваженням, ми зробимо перестановку членів ряду (A) так.

Спочатку візьмемо стільки **додатних** членів нашого ряду (у тому порядку, в якому вони розташовані), щоб їх сума була більше ніж число B:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > B.$$

Потім випишемо **від'ємні** члени (у тому порядку, в якому вони розташовані в цьому ряді), взявши їх стільки, щоб загальна сума стала менше ніж B:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \ldots - q_{m_1} < B.$$

Після цього знову візьмемо **додатні** члени (з тих, що залишалися) так, щоб було

$$p_1 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - \ldots - q_{m_1} + p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2} > B.$$

Після цього знову візьмемо стільки **від'ємних** членів (з тих, що залишалися), щоб було

$$p_1 + \ldots + p_{k_1} - q_1 - \ldots - q_{m_1} + p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2} - q_{m_1+1} - \ldots - q_{m_2} < B.$$

і так далі. Процес цей ми мислимо продовжимо до нескінченності. Зрозуміло, кожен член ряду (A), і до того ж зі своїм знаком, зустрінеться на деякому місці.

Якщо кожного разу, виписуючи члени p або q, набирати їх не більше, чим необхідно для виконання необхідної нерівності, то відхилення від числа B у той чи інший бік не перевищить за абсолютною величиною останнього написаного члена. Тоді з (388.1) ясно, що сума ряду

$$(p_1+\dots+p_{k_1})-(q_1+\dots+q_{m_1})+(p_{k_1+1}+\dots+p_{k_2})-(q_{m_1+1}+\dots+q_{m_2})+\dots$$

дорівнює B. Зважаючи на зауваження розд. 386, це залишиться вірним і після розкриття дужок.

Якщо $B=+\infty$, то взявши послідовність зростаючих до нескінченності чисел, можна було б набір додатних чисел брати з умовою, щоб суми послідовно ставали більше $B_1,\ B_2,\ B_3$ і так далі, а з від'ємних членів брати лише по одному після кожної групи додатних. Так, очевидно, можна скласти ряд, що має суму $+\infty$. Аналогічно можна отримати і ряд із сумою $-\infty$. (Читач легко зможе розмістити члени даного ряду так, щоб **найменша і найбільша** границі часткової суми перетвореного ряду дорівнювали двом наперед заданим числам B та $C>B$.) ☐

Отриманий результат підкреслює той факт, що **неабсолютна** збіжність виконується лише завдяки **взаємному погашенню додатних та від'ємних членів** і тому істотно залежить від порядку, в якому вони розташовані один за одним; тимчасом як **абсолютна** збіжність залежить від швидкості спадання цих членів — і від їхнього порядку не залежить.

Розглянемо приклади.

1) Розглянемо **неабсолютно** збіжний ряд:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}+\dots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}}+\dots, \tag{388.3}$$

сума якого, як легко показати (дивіться наступний приклад), дорівнює $\ln 2$. Перемістимо його члени так, щоб після одного додатного слідували два від'ємних:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}+\dots+\underbrace{\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}}+\dots, \tag{388.4}$$

ми стверджуємо, що сума ряду після такого переміщення зменшиться вдвічі.

Справді, якщо позначити часткові суми цих двох рядів відповідно через A_n та A'_n, то

$$A'_{3m}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}A_{2m},$$

тож $A'_{3m}\to\frac{1}{2}\ln 2$. Оскільки

$$A'_{3m-1}=A'_{3m}+\frac{1}{4m}\quad\text{та}\quad A'_{3m-2}=A'_{3m-1}+\frac{1}{4m-2}$$

прямує до тієї самої границі $\frac{1}{2}\ln 2$, то ряд (388.4) збіжний і його сума дорівнює саме цьому числу.

2) Більш загальний результат можна отримати, якщо виходити з формули часткової суми H_n гармонічного ряду (пр. 367.4)

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \mathbf{C} + \gamma_n\,,$$

де $\mathbf{C}$ є **сталою Ойлера**, а γ_n — нескінченно мала. Звідси передусім, маємо

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}H_m = \frac{1}{2}\ln m + \frac{1}{2}\mathbf{C} + \frac{1}{2}\gamma_m\,,$$

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1} = H_{2k} - \frac{1}{2}H_k = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln k + \frac{1}{2}\mathbf{C} + \gamma_{2k} - \frac{1}{2}\gamma_k\,.$$

Розташуємо тепер члени ряду (388.3) у такому порядку: спочатку помістимо p додатних і q від'ємних, потім знову p додатних і q від'ємних і так далі. Для того, щоб визначити суму ряду

$$1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \ldots - \frac{1}{2q} + \frac{1}{2p+1} + \ldots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} - \ldots\,, \tag{388.5}$$

нам зручніше поєднати послідовні групи з p або q членів. Часткова сума $\widetilde{A}_{2n}$ отриманого таким шляхом ряду дорівнює

$$\widetilde{A}_{2n} = \ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right) + \alpha_n \quad (\alpha \to 0)$$

і прямує до границі $\ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$; до тієї самої границі прямує і сума $\widetilde{A}_{2n-1}$. Нарешті, зважаючи на зауваження розд. 386, і сума ряду (388.5) буде дорівнювати тому самому числу $\ln\left(2\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$.

Зокрема, для ряду (388.3) виходить

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \dots = \ln 2 \qquad (p = q = 1). \tag{388.6}$$

Для ряду (388.4)

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \dots = \frac{1}{2}\ln 2 \qquad (p = 1,\ q = 2). \tag{388.7}$$

Аналогічно:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots=\frac{3}{2}\ln 2 \\ (p=2,\ q=1); \tag{388.8}$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}+\dots=0 \\ (p=1,\ q=4). \tag{388.9}$$

і так далі.

Зауважимо, що якщо кількість послідовних груп додатних і від'ємних членів ще змінювати від групи до групи, то легко закон цієї зміни підібрати так, щоб для перетвореного ряду справді отримати будь-яку наперед задану суму. Залишаємо читачеві переконатися в цьому.

389. Множення рядів

Про почленне додавання (або віднімання) двох збіжних рядів, так само як і про почленне множення збіжного ряду на сталий множник, вже йшлося в теор. 364.3, теор. 364.4. Тепер ми займемося питанням про **множення рядів.**

Нехай дані два збіжних ряди:

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\dots+a_n+\dots \tag{A}$$

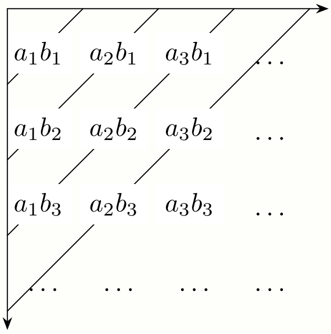
та

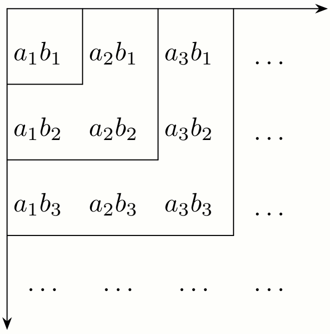
$$B=\sum_{m=1}^{\infty}b_m=b_1+b_2+\dots+b_m+\dots. \tag{B}$$

Спробуємо використати звичайне правило множення скінченних сум. Розглянемо і тут всілякі парні добутки членів цих рядів: a_ib_k; з них складеться нескінченна прямокутна матриця:

$$\begin{array}{l} \quad\xrightarrow{\hspace{8cm}} \\ \left|\begin{array}{cccccc} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots & a_ib_1 & \dots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots & a_ib_2 & \dots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_ib_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_1b_k & a_2b_k & a_3b_k & \dots & a_ib_k & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right. \\ \downarrow \end{array} \tag{389.1}$$

Ці добутки можна багатьма способами розташовувати у вигляді **простої послідовності**. Наприклад, можна виписувати добутки рухаючись **діагоналями** або **квадратами**:





що, відповідно, приводить до послідовностей:

$$a_1b_1; \quad a_1b_2,\ a_2b_1; \quad a_1b_3,\ a_2b_2,\ a_3b_1; \quad \dots \tag{389.2}$$

або

$$a_1b_1; \quad a_1b_2,\ a_2b_2,\ a_2b_1; \quad a_1b_3,\ a_2b_3,\ a_3b_3,\ a_3b_2,\ a_3b_1; \quad \dots \tag{389.3}$$

Складений із такої послідовності **ряд** називається ***добутком*** *рядів* (A) та (B).

Теорема 389.1 (Теорема Коші)**.** *Якщо обидва ряди* (A) *та* (B) ***абсолютно*** *збіжні, то їх добуток, складений із добутків* (389.1)*, взятих у* ***будь-якому*** *порядку, також збіжний і його сума дорівнює добутку сум AB.*

Доведення. За умовою, ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \tag{A*}$$

та

$$\sum_{m=1}^{\infty} |b_m| = |b_1| + |b_2| + \dots + |b_m| + \dots \tag{B*}$$

збіжні, тобто мають скінченні суми, скажімо, A^* та B^*.

Розташувавши добутки (389.1) довільним чином у вигляді послідовності, складемо з них ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s} = a_{i_1} b_{k_1} + a_{i_2} b_{k_2} + \dots + a_{i_s} b_{k_s} + \dots . \tag{389.4}$$

Щоб довести збіжність відповідного ряду з абсолютних величин:

$$\sum_{s=1}^{\infty} |a_{i_s} b_{k_s}| = |a_{i_1} b_{k_1}| + |a_{i_2} b_{k_2}| + \dots + |a_{i_s} b_{k_s}| + \dots , \tag{389.5}$$

розглянемо його s-ту часткову суму; якщо через ν позначити найбільший із значків $i_1,\ k_1,\ i_2,\ k_2,\ \dots,\ i_s,\ k_s$, то, очевидно,

$$|a_{i_1}b_{k_1}| + |a_{i_2}b_{k_2}| + \dots + |a_{i_s}b_{k_s}| \leqslant (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_\nu|)(|b_1| + |b_2| + \dots + |b_\nu|) \leqslant A^*B^*.$$

Звідси (розд. 365) випливає збіжність ряду (389.5), отже, і **абсолютна** збіжність ряду (389.4).

Залишається визначити його суму. Ми маємо право надати членам ряду (389.4) більш зручне для цього розташування, бо ряд цей **абсолютно** збіжний і має комутативну властивість (розд. 387). Розмістивши ці члени **по квадратах**, як у (389.3), ми об'єднаємо послідовні групи, які відрізняють один квадрат від іншого

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \dots\,. \tag{389.6}$$

Якщо через A_n та B_m, як завжди, позначити часткові суми рядів (A) та (B), то для ряду (389.6) часткові суми будуть

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ A_3B_3,\ \dots,\ A_kB_k,\ \dots;$$

вони прямують до добутку AB, який, отже, є не лише сумою ряду (389.6), а і ряду (389.4). □

При фактичному множенні рядів найчастіше видається зручним розміщувати добутки (389.1) **по діагоналях**, як у (389.2); зазвичай члени, що лежать на одній діагоналі, при цьому об'єднаються:

$$AB = a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \dots\,. \tag{389.7}$$

У цьому саме вигляді Коші вперше і представив добуток двох рядів. Так, написаний ряд ми надалі називатимемо *добутком рядів* (A) *та* (B) *у формі Коші.*

Нехай, наприклад, перемножуються два **степеневі** ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m + \dots$$

(причому x взято всередині відповідних **проміжків збіжності**, розд. 379). Тоді, як нескладно отримати, зазначений спосіб відповідає зведенню подібних членів у добутку:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots\,.$$

Отже, добуток двох степеневих рядів у формі Коші **безпосередньо** теж представляється у вигляді степеневого ряду.

nebayduzhi.math@gmail.com

390. Приклади

У всіх прикладах, крім останнього, добутки рядів беруться у формі Коші.

1) Помноживши ряд

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\dots+x^n+\dots\qquad(|x|<1)$$

на самого себе, отримаємо:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}+\dots.$$

2) Множення рядів

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n=1-x+x^2-\dots+(-1)^nx^n+\dots$$

і

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}+\dots \tag{390.1}$$

(де $|x|<1$) дає такий результат:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}H_kx^k=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\dots+(-1)^{k-1}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{k}\right)x^k+\dots.$$

Нижче ми побачимо (405.1), що сума ряду (390.1) є $\ln(1+x)$, тож останній розклад представляє функцію

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

3) Виконати піднесення до квадрата:

$$\left(1+\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\frac{z^{2\mu}}{2^{2\mu}\cdot(\mu!)^2}\right)^2$$

(z — будь-яке).

Вказівка. Скористатися формулою, яку елементарно довести (**тотожність Вондермонда**):

$$\sum_{\mu=0}^{\nu}\left(C_{\nu}^{\mu}\right)^2=C_{2\nu}^{\nu}=\frac{(2\nu)!}{(\nu!)^2}.$$

Відповідь:

$$1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(2\nu)!\,z^{2\nu}}{2^{2\nu}\cdot(\nu!)^4}\,.$$

4) Тотожність (дивіться пр. 385.6)

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n=\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$$

$$(\text{де}\quad A_n=a_0+a_1+\dots+a_n)$$

легко доводиться шляхом почленного множення. При цьому, якщо на проміжку $(-R,R)$ $(0<R\leqslant 1)$ збігається один з двох рядів, то звідси вже випливає збіжність на тому самому проміжку і іншого ряду.

5) Довести тотожність $(a>0)$:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a+2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^2}{a+4}+\dots\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot x^2+\dots\right)=$$
$$=\frac{1}{a}\left(1+\frac{a+1}{a+2}\cdot x+\frac{(a+1)(a+3)}{(a+2)(a+4)}\cdot x^2+\dots\right).$$

6) Як ми вже знаємо (пр. 378.1), ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

абсолютно збіжний при всіх значеннях x. Позначимо його суму через $E(x)$.

Замінивши тут x на y, отримаємо аналогічний ряд із сумою $E(y)$. Добуток обох рядів у формі Коші має спільний член:

$$1\cdot\frac{y^n}{n!}+\frac{x}{1!}\cdot\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y^{n-2}}{(n-2)!}+\dots+\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}+\dots+\frac{x^n}{n!}\cdot 1=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}x^ky^{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^ky^{n-k}=\frac{(x+y)^n}{n!}\,.$$

Отже, для невідомої нам поки функції $E(x)$ виходить співвідношення

$$E(x)\cdot E(y)=E(x+y)$$

— при будь-яких дійсних x та y. Згодом це дасть можливість отримати, що $E(x)$ є **показникова функція** (пр. 439.3; порівняйте з пр. 75.1).

7) За допомогою ознаки д'Аламбера легко показати, що ряди

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

$$S(x) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \ldots$$

абсолютно збіжні для будь-якого x. Множенням цих рядів можна довести такі співвідношення:

$$C(x+y) = C(x) \cdot C(y) - S(x) \cdot S(y),$$

$$S(x+y) = S(x) \cdot C(y) + C(x) \cdot S(y),$$

Оскільки насправді $S(x)$ та $C(x)$ є не що інше, як $\sin x$ та $\cos x$ (розд. 404), то ми бачимо тут відомі формули додавання цих функцій.

8) Розглянемо, нарешті, додатний ряд

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

який збігається, коли $x > 1$ (пр. 365.2), і є функцією Рімана. Обчислимо за допомогою множення рядів її квадрат.

Різні добутки

$$\frac{1}{n^x} \cdot \frac{1}{m^x} = \frac{1}{(n \cdot m)^x}$$

цього разу ми розмістимо так, щоб члени з одним і тим самим числом $k = n \cdot m$ у знаменнику стояли поряд, а потім — об'єднаємо їх. Кожному k буде відповідати стільки (рівних між собою) членів, скільки дільників має число k, тобто $\tau(k)$. Отже, остаточно,

$$\big[\zeta(x)\big]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau(k)}{k^x}.$$

391. Загальна теорема з теорії границь

Для спрощення викладу в найближчому розділі і надалі ми розглянемо тут одну теорему з теорії границь, що дає широке узагальнення відомих теорем Коші (теор. 33.2) та Штольца (теор. 33.1). Ця теорема належить Тьопліцу (нім. Otto Töplitz, О́тто Тьо́пліц). Ми доведемо її у два кроки.

nebayduzhi.math@gmail.com

Теорема 391.1. *Припустимо, що коефіцієнти t_{nm} $(1 \leqslant m \leqslant n)$ нескінченної “трикутної” матриці*

$$\begin{pmatrix} t_{11} & & & & \\ t_{21} & t_{22} & & & \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & & \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & \dots & t_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{391.1}$$

задовольняють двом умовам:

а) елементи, що стоять у будь-якому ***стовпці****, прямують до нуля:*

$$t_{nm} \to 0 \quad \textit{при } n \to \infty \quad (m \textit{ фіксовано});$$

б) суми абсолютних величин елементів, що стоять у будь-якому ***рядку****, обмежені всі однією сталою:*

$$|t_{n1}| + |t_{n2}| + \dots + |t_{nn}| \leqslant K \quad (K = \mathrm{const}).$$

Тоді, якщо варіанта $x_n \to 0$, то це справедливо і щодо варіанти

$$x'_n = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \dots + t_{nn}x_n,$$

складеної із значень варіанти x_n за допомогою коефіцієнтів матриці (391.1).

Доведення. Для $\varepsilon > 0$ знайдеться таке m, що при $n > m$ буде: $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$; для цих n маємо, використовуючи умову б):

$$|x'_n| < |t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \dots + t_{nm}x_m| + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Оскільки m тут вже зафіксоване, то, зважаючи на умову а), існує таке $N \geqslant m$, що при $n > N$ і перший доданок праворуч буде $< \frac{\varepsilon}{2}$, отже, $|x'_n| < \varepsilon$, що й потрібно було довести. □

Теорема 391.2. *Нехай коефіцієнти t_{nm}, крім умов а) та б), задовольняють ще умову:*

$$\textit{в)} \quad T_n = t_{n1} + t_{n1} + t_{n2} + \dots + t_{nn} \to 1 \quad \textit{при } n \to \infty.$$

Тоді, якщо варіанта $x_n \to a$ (a — скінченне), то також і

$$x'_n = t_{n1}x_1 + t_{n2}x_2 + \dots + t_{nn}x_n \to a.$$

(У застосунках зазвичай $T_n \equiv 1$.)

Доведення. Вираз для x'_n, очевидно, можна переписати так:

$$x'_n = t_{n1}(x_1 - a) + t_{n2}(x_2 - a) + \dots + t_{nn}(x_n - a) + T_n \cdot a.$$

Застосовуючи теор. 391.1 до варіанти $x_n - a \to 0$ і спираючись на умову в), безпосередньо приходимо до необхідного висновку. □

Наслідок 391.2.1. *Теорема Коші (теор. 33.2) звідси виходить, якщо покласти*

$$t_{n1} = t_{n2} = \dots = t_{nn} = \frac{1}{n}.$$

Доведення. Виконання умов а), б), в) очевидне. □

Наслідок 391.2.2. *Звернемося до теореми Штольца (теор. 33.1), зберігаючи колишні позначення. Отже, нехай маємо дві варіанти x_n та y_n, з яких друга монотонно прямує до $+\infty$. Припустимо, що варіанта*

$$z_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \to a \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots;\ x_0 = y_0 = 0).$$

Доведення. Застосуємо теор. 391.2 до z_n, взявши $t_{nm} = \dfrac{y_m - y_{m-1}}{y_n}$. Виконання умов а), б), в) легко перевіряється. Тоді отримаємо, що варіанта

$$\frac{x_n}{y_n} = \sum_{m=1}^{n} t_{nm} \frac{x_m - x_{m-1}}{y_m - y_{m-1}} \to a,$$

що й потрібно було довести. □

Наведемо низку інших корисних наслідків теореми Тьопліца.

Наслідок 391.2.3. *Нехай дані дві варіанти $x_n \to 0$ та $y_n \to 0$, причому друга з них задовольняє умову:*

$$|y_1| + |y_2| + \dots + |y_n| \leqslant K \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots;\ K = \mathrm{const}).$$

Тоді і варіанта

$$z_n = x_1 y_n + x_2 y_{n-1+\dots+x_n y_1 \to 0.}$$

Доведення. Треба застосувати теор. 391.1 до $t_{nm} = y_{n-m+1}$. □

Наслідок 391.2.4. *Якщо $x_n \to a$, $y_n \to b$, то*

$$z_n = \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \dots + x_n y_1}{n} \to ab.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Доведення. Нехай спочатку $a = 0$ і потрібно довести, що $z_n \to 0$. Це просто випливає зі насл. 391.2.3, якщо замінити у ньому y_n на $\frac{y_n}{n}$. Умова, накладена там на y_n, легко перевіряється, оскільки тут y_n обмежене: $|y_n| \leqslant K$.

Звертаючись до загального випадку, перепишемо z_n у вигляді

$$z_n = \frac{(x_1 - a)y_n + (x_2 - a)y_{n-1} + \cdots + (x_n - a)y_1}{n} + a \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

Перший доданок праворуч прямує до 0, оскільки $x_n - a \to 0$. Другий доданок прямує до ab, оскільки $\lim \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \lim y_n$ (теор. 33.2). □

Наслідок 391.2.5. *Якщо* $x_n \to a$, *то*

$$x_n' = \frac{1 \cdot x_0 + C_n^1 \cdot x_2 + C_n^2 \cdot x_2 + \cdots + C_n^n \cdot x_n}{2^n} \to a.$$

(Звичайно, несуттєво, що нумерацію значень варіанти ми починаємо з 0 замість 1.)

Доведення. Застосовуємо теор. 391.2, взявши

$$t_{nm} = \frac{C_n^m}{2^n}.$$

Оскільки $C_n^m < n^m$ та $\frac{n^m}{2^n} \to 0$, то умова а) виконана. Виконання умов б) та в) випливає безпосередньо з того, що

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$$

□

Наслідок 391.2.6. *Якщо* $x_n \to a$ *та* $z = \text{const}$ $(z > 0)$, *то*

$$x_n' = \frac{1 \cdot x_0 + C_n^1 \cdot z \cdot x_1 + C_n^2 \cdot z^2 \cdot x_2 + \cdots + C_n^n \cdot z^n \cdot x_n}{(1+z)^n} \to a.$$

Це просте узагальнення попереднього твердження, і доводиться воно аналогічно.

Можна коефіцієнти розташувати й у зворотному порядку, тож

$$x_n'' = \frac{z^n \cdot x_0 + C_n^1 \cdot z^{n-1} \cdot x_1 + C_n^2 \cdot z^{n-2} \cdot x_2 + \cdots + C_n^n \cdot x_n}{(1+z)^n} \to a.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

392. Подальші теореми про множення рядів

Як вказав Мертенс (пол. Franz Mertens, Фра́нц Ме́ртенс), результат Коші може бути поширений на більш загальний випадок.

Теорема 392.1 (Теорема Мертенса)**.** *Якщо ряди* (A) *та* (B) *збіжні, причому хоч один з них абсолютно збіжний, то розклад* (389.7) *справедливий.*

Доведення. Нехай, скажімо, ряд (A) абсолютно збіжний, тобто ряд (A*) збіжний.

Об'єднуючи члени на n-ій діагоналі, позначимо

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1$$

та

$$C_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n.$$

Отже, треба довести, що $C_n \to AB$.

Насамперед, нескладно побачити, що

$$C_n = a_1 B_n + a_2 B_{n-1} + \cdots + a_{n-1} B_2 + a_n B_1. \tag{392.1}$$

Якщо покласти $B_m = B - \beta_m$ (де **залишок** $\beta_m \to 0$ при $m \to \infty$), то сума C_n перепишеться так:

$$C_n = A_n B - \gamma_n, \quad \text{де} \quad \gamma_n = a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + + \cdots + a_{n-1}\beta_2 + a_n\beta_1.1$$

Оскільки $A_n \to A$, то питання зводиться до доведення співвідношення: $\lim \gamma_n = 0$.

А це твердження відразу випливає з насл. 391.2.3 (при $x_n = \beta_n$ та $y_n = a_n$), якщо врахувати, що

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leqslant A^*,$$

де A^* — сума збіжного, за припущенням, ряду (A*). □

Як приклад застосування теореми, повернемося до задачі пр. 390.4. Згадане там рівність, як ми бачимо тепер, виконуються і на кінцях $x = \pm R$ проміжку збіжності ряду $\sum a_n x^n$, якщо $R < 1$ і ряд на цих кінцях взагалі збігається (хоча б і **неабсолютно**).

Зауважимо, що **якби обидва ряди** (A) **і** (B) **збігалися лише не абсолютно, то вже неможливо було б ручатися за збіжність ряду** (389.7)**.**

Наприклад спробуємо помножити ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

на самого себе. Як ми знаємо, пр. 382.2, він неабсолютно збіжний. В цьому випадку

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{i}\cdot\sqrt{n-i+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}\cdot 1} + \right);$$

оскільки кожний доданок у дужках більше $\frac{1}{n}$, то $|c_n| > 1$ (при $n > 1$) і ряд $\sum c_n$ **розбіжний** (теор. 364.5).

Однак, якщо аналогічно вчинити з також **неабсолютно** збіжним (пр. 382.1) рядом

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}} + \dots,$$

то виявиться, що

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1\cdot n} + \frac{1}{2\cdot(n-1)} + \dots + \frac{1}{i\cdot(n-i+1)} + \dots + \frac{1}{n\cdot 1}\right) =$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

Тут, в міру зростання n, $|c_n|$ прямує до 0, монотонно спадаючи, тому (за теоремою Ляйбніца, теор. 381.1) ряд $\sum c_n$ все ж таки буде **збіжним**. Яка ж його сума, чи дорівнюватиме вона $(\ln 2)^2$? На це запитання відповідає теорема Абеля.

Теорема 392.2 (Теорема Абеля)**.** *Якщо* (A) *та* (B) *збіжні та їх добуток, взятий у формі Коші, теж* ***збіжний****, тоді його сума* C *необхідно дорівнює* $A\cdot B$*.*

Доведення. Зберігаючи колишні позначення, (390.1) легко отримуємо:

$$C_1 + C_2 + \dots + C_n = A_1B_n + A_2B_{n-1} + \dots + A_nB_1\,.$$

Поділимо цю рівність почленно на n і перейдемо до границі при $n \to \infty$. Оскільки $C_n \to C$, то за теоремою Коші (теор. 33.2) і середнє арифметичне

$$\frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} \to C.$$

З іншого боку, застосовуючи насл. 391.2.3 (якщо покласти там $x_n = A_n$ та $y_n = B_n$),

$$\frac{A_1B_n + A_2B_{n-1} + \dots + A_nB_1}{n} \to AB.$$

Звідси $C = A\cdot B$, що й потрібно було довести. ☐

11.5. Повторні і подвійні ряди

393. Повторні ряди

Нехай задана нескінченна множина чисел

$$a_i^{(k)} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots;\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots),$$

яка залежить від **двох** натуральних індексів. Уявимо їх розташованими у вигляді нескінченної прямокутної матриці:

$$\begin{array}{|cccccc}
\multicolumn{6}{l}{\xrightarrow{\hspace{6cm}}} \\
a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \dots & a_i^{(1)} & \dots \\
a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \dots & a_i^{(2)} & \dots \\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & \dots & a_i^{(3)} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\
a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} & \dots & a_i^{(k)} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\downarrow & & & & &
\end{array} \tag{393.1}$$

Матриця такого роду має назву нескінченної прямокутної матриці із **двома входами**.

Тепер зупинимося на одному понятті, пов'язаному з розглядом матриць вигляду (393.1) — понятті **повторного ряду**.

Якщо в нескінченній прямокутній матриці просумувати кожен рядок окремо, то отримаємо нескінченну послідовність рядів вигляду

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}. \tag{393.2}$$

Просумувавши тепер цю послідовність вдруге, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}. \tag{393.3}$$

Отриманий символ і називається **повторним рядом**.

Якщо замінити рядки стовпцями, тобто якщо спочатку просумувати члени нашої нескінченної матриці по стовпцях, то ми отримаємо другий повторний ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}. \tag{393.4}$$

Повторний ряд (393.3) *називається* ***збіжним****, якщо, по-перше, збігаються всі ряди по рядкам* (393.2) *(їх суми, відповідно, позначимо через $A^{(k)}$) і, по-друге, збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)};$$

його сума і буде сумою повторного ряду (393.3). Це все легко перефразувати й для ряду (393.4).

Елементи матриці (393.1) можна багатьма способами представити у вигляді звичайної послідовності

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_r,\ \ldots \tag{393.5}$$

і по ній скласти **простий** ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} u_r \tag{393.6}$$

(Про це ми вже говорили у зв'язку з частковим типом матриці (389.1)). Навпаки, якщо маємо звичайну послідовність (393.5), то розбивши всі її члени (не зважаючи на їх розташування) на нескінченно багато нескінченних груп, можна представити її багатьма способами у вигляді матриці з двома входами (393.1), і по цій матриці скласти повторний ряд (393.3). Природно постає питання про зв'язок між рядами (393.6) і (393.3), що складаються з одних і тих самих членів.

Теорема 393.1. *Якщо ряд* (393.6) *збігається* ***абсолютно*** *до суми U, то, як би його члени не розташовувались у вигляді матриці* (393.1)*, збігається і повторний ряд* (393.3)*, причому має ту ж суму.*

Доведення. Ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} |u_r| \tag{393.7}$$

за припущенням збігається; позначимо його суму через U^*.

Тоді, передусім, при будь-яких n і k

$$\sum_{i=1}^{n} \left|a_i^{(k)}\right| \leqslant U^*,$$

звідси випливає збіжність ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left|a_i^{(k)}\right|$ (розд. 365), а значить і збіжність ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ (розд. 377) (при будь-якому k).

Далі, для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке r_0, що

$$\sum_{r=r_0+1}^{\infty} |u_r| < \varepsilon, \tag{393.8}$$

і отже

$$\left|\sum_{r=r_0+1}^{\infty} u_r\right| = \left|U - \sum_{r=1}^{r_0} u_r\right| < \varepsilon. \tag{393.9}$$

Члени u_1, u_2, …, u_r ряду (393.6) містяться у перших n рядках і перших m стовпцях матриці (393.1), якщо n і m досить великі, скажімо, при $n > n_0$ і $m > m_0$. Тоді для вказаних n і m вираз

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i^{(k)} - \sum_{r=1}^{r_0} u_r$$

є сумою групи членів u_r з номерами, більшими r_0, і зважаючи на (393.8) за абсолютною величиною є $< \varepsilon$. Переходячи до границі при $m \to \infty$, отримаємо (для $n > n_0$)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} A^{(k)} - \sum_{r=1}^{r_0} u_r\right| \leqslant \varepsilon,$$

тож — зважаючи на (393.9) —

$$\left|\sum_{k=1}^{n} A^{(k)} - U\right| < 2\varepsilon,$$

звідки випливає збіжність повторного ряду (393.3), причому саме до суми U. □

Зауваження. Деякі рядки матриці (393.1) можуть складатися і з скінченної кількості членів; нескладно розповсюдити результат і на цей випадок.

Якщо згадати, що в розд. 386 ми розбивали члени простого ряду лише на **скінченні** групи, **не порушуючи при цьому їх розташування**, то стане зрозумілим, що теор. 393.1 формулює далекосяжне розповсюдження (сумісно) сполучної та переставної властивості абсолютно збіжного ряду.

Обернена теорема справедлива лише при підсиленні припущень про повторний ряд.

Теорема 393.2. *Нехай маємо повторний ряд (393.3). Якщо після заміни його членів їх абсолютними значеннями виходить збіжний ряд, то збігається не тільки ряд (393.3), а і простий ряд (393.6), який складається з тих самих членів, що і ряд (393.3), розміщених у будь-якому порядку, і причому — до тієї ж суми.*

Доведення. За припущенням ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \left|a_i^{(k)}\right|$$

збігається; нехай A^* — його сума. При будь-яких n і m, маємо

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left|a_i^{(k)}\right| < A^*. \tag{393.10}$$

Візьмемо тепер довільну часткову суму ряду (393.7):

$$U_r^* = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_r|.$$

При досить великих n і m, члени u_1, u_2, …, u_r будуть міститися в перших n рядках і перших m стовпцях матриці (393.1). Тоді з (393.10) випливає, що

$$U_r^* < A^*$$

і ряд (393.7) збігається, тобто ряд (393.6) збігається **абсолютно**.

Залишається застосувати теор. 393.1. □

Оскільки, очевидно, все сказане про повторний ряд (393.3) справедливо і для повторного ряду (393.4), то як наслідок з доведених теорем отримаємо наступну важливу теорему, яка часто буває корисною. (У німецькій літературі ця пропозиція має назву “grosser Umordnungssatz”.)

Теорема 393.3. *Нехай дана матриця (393.1). Якщо після заміни членів ряду (393.3) їх абсолютними величинами виходить збіжний ряд, то обидва повторні ряди (393.3), (393.4) збіжні і вони мають ту саму суму:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

394. Подвійні ряди

З нескінченною прямокутною матрицею (393.1) пов’язано і поняття **подвійного ряду**. Так називається символ

$$\begin{array}{l} \quad a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} + \dots + a_i^{(1)} + \dots \\ + a_1^{(2)} + a_2^{(2)} + a_3^{(2)} + \dots + a_i^{(2)} + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + a_3^{(k)} + \dots + a_i^{(k)} + \dots \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \equiv \sum_{i,\,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}. \end{array} \tag{394.1}$$

Обмежившись першими m стовпцями і першими n рядками, розглянемо скінченну суму

$$A_m^{(n)} = \sum_{i,\,k=1}^{i=m,\,k=n} a_i^{(k)},$$

яка називається **частковою сумою** даного подвійного ряду. Почнемо збільшувати числа m і n одночасно, але незалежно одне від одного, спрямовуючи їх до нескінченності. *Границю (скінченну або нескінченну)*

$$A = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} A_m^{(n)}$$

називають ***сумою*** *подвійного ряду*, і пишуть

$$A = \sum_{i,\,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

Якщо ряд (394.1) *має* ***скінченну суму****, його називають* ***збіжним****, в іншому випадку —* ***розбіжним****.*

Повернемося для прикладу до матриці (389.1) з загальним членом

$$c_i^{(k)} = a_i b_k,$$

В цьому випадку часткова сума, очевидно, дорівнює (якщо зберегти колишню нотацію)

$$C_m^{(n)} = A_m B_n,$$

тому подвійний ряд, який відповідає згаданій матриці, завжди збігається і має суму

$$C = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} A_m B_n = AB$$

(Отже, якщо добуток двох збіжних простих рядів представити у вигляді **подвійного ряду**, то сумою останнього завжди буде добуток AB. Складність була у доведенні цього самого по відношенню до добутку рядів, який представлений простим рядом.)

На подвійні ряди легко перенести теореми (теор. 364.3, теор. 364.4) про множення членів збіжного ряду на стале число і про почленне додавання і віднімання двох збіжних рядів; пропонуємо зробити це читачеві.

Так само для збіжності подвійного ряду **необхідне** прямування до 0 **загального члена**:

$$\lim_{\substack{i\to\infty \\ k\to\infty}} a_i^{(k)} = 0$$

(порівняйте з теор. 364.5). Це відразу видно з формули

$$a_i^{(k)} = A_i^{(k)} - A_{i-1}^{(k)} - A_i^{(k-1)} + A_{i-1}^{(k-1)}.$$

Природно зіставити **подвійний ряд** (394.1) з **повторними** рядами (393.3) та (393.4), розглянутими вище. Оскільки

$$A_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i^{(k)} \right\},$$

то, переходячи тут при фіксованому n до границі при $m \to \infty$ (за умови, що ряди по рядкам збігаються), отримаємо

$$\lim_{m\to\infty} A_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} A^{(k)}.$$

Тепер зрозуміло, що сума повторного ряду (393.3) є не чим іншим, як **повторною границею**

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} A_m^{(n)}.$$

Питання про рівність сум двох повторних рядів (393.3) і (393.4) є частковим випадком питання про рівність двох повторних границь.

Застосовуючи до даного випадку загальну теорему (теор. 168.1) про подвійну та повторну границі, прийдемо до такого результату. (Тут m і n відіграють роль незалежних змінних, а часткова сума $A_m^{(n)}$ — роль функції від них.)

Теорема 394.1. *Якщо*
1) збігається подвійний ряд (394.1) *і*
2) збігаються всі ряди по рядкам,

то повторний ряд (393.3) *збіжний і має таку ж суму, що і подвійний ряд:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

Аналогічна теорема справедлива і для другого повторного ряду (393.4).

Питання про збіжність подвійного ряду (394.1) розв'язується просто у випадку **додатного** ряду, тобто ряду з невід'ємними членами: $a_i^{(k)} \geqslant 0$.

Теорема 394.2. *Для збіжності ряду* (394.1), *де* $a_i^{(k)} \geqslant 0$, *необхідно і достатньо, щоб його часткові суми були обмежені.*

Доведення. **Необхідність** цього твердження зрозуміла. Доведемо **достатність**. Нехай $A_m^{(n)} \leqslant L$. Візьмемо точну верхню границю множини сум $A_m^{(n)}$:

$$A = \sup \left\{ A_m^{(n)} \right\}$$

і покажемо, що вона і буде сумою нашого ряду.

Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. За означенням **точної** верхньої границі можна знайти таку часткову суму $A_{m_0}^{(n_0)}$, що

$$A_{m_0}^{(n_0)} > A - \varepsilon.$$

Якщо взяти $m > m_0$, $n > n_0$, то і

$$A_m^{(n)} > A - \varepsilon,$$

бо $A_m^{(n)}$ зі зростанням **обох** індексів n і m, очевидно, зростає.

Оскільки довільна часткова сума не перевищує A, то можна написати, що

$$\left| A_m^{(n)} - A \right| < \varepsilon \quad (\text{при } m > m_0,\ n > n_0),$$

а це і означає, що

$$A = \lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} A_m^{(n)},$$

тобто ряд (394.1) збіжний. □

На основі цієї теореми можна довести теорему про порівняння додатних подвійних рядів, аналогічну теоремі теор. 366.1; пропонуємо це читачеві.

Розглянемо тепер подвійний ряд, складений з матриці, в якій не всі елементи додатні. Очевидно, що, як для простих рядів, ми можемо не брати до уваги ті випадки, коли всі елементи матриці від'ємні або коли є тільки скінченна кількість додатних або від'ємних елементів, оскільки всі ці випадки зводяться безпосередньо до тільки що розглянутого. Тому ми припустимо, що в матриці (393.1), а значить і в ряді (394.1), міститься нескінченна кількість як додатних, так і від'ємних елементів.

Крім матриці (393.1), складемо ще матрицю абсолютних значень елементів.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \multicolumn{5}{l}{\xrightarrow{\hspace{6cm}}} \\
 & \left|a_1^{(1)}\right| & \left|a_2^{(1)}\right| & \ldots & \left|a_i^{(1)}\right| & \ldots \\
 & \left|a_1^{(2)}\right| & \left|a_2^{(2)}\right| & \ldots & \left|a_i^{(2)}\right| & \ldots \\
 & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\
 & \left|a_1^{(k)}\right| & \left|a_2^{(k)}\right| & \ldots & \left|a_i^{(k)}\right| & \ldots \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\downarrow & & & & &
\end{array}$$

і по цій матриці складемо подвійний ряд

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \left| a_i^{(k)} \right| . \tag{394.2}$$

Подібно до теор. 377.1 про прості ряди, і тут можна сформулювати таку теорему.

Теорема 394.3. *Якщо збігається ряд* (394.2)*, складений з абсолютних значень членів ряду* (394.1)*, то і ряд* (394.1) *збігається.*

Доведення. Представимо $a_i^{(k)}$ у вигляді:

$$a_i^{(k)} = p_i^{(k)} - q_i^{(k)},$$

де

$$p_i^{(k)} = \frac{\left|a_i^{(k)}\right| + a_i^{(k)}}{2}, \quad q_i^{(k)} = \frac{\left|a_i^{(k)}\right| - a_i^{(k)}}{2}.$$

Оскільки $0 \leqslant p_i^{(k)} \leqslant \left|a_i^{(k)}\right|$, $0 \leqslant q_i^{(k)} \leqslant \left|a_i^{(k)}\right|$, то зі збіжності подвійного ряду (394.2) випливає збіжність подвійних рядів

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} p_i^{(k)} = P, \quad \sum_{i,k=1}^{\infty} q_i^{(k)} = Q.$$

Але тоді збігається і ряд

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)} \equiv \sum_{i,k=1}^{\infty} \left(p_i^{(k)} - q_i^{(k)}\right),$$

власне має суму

$$A = P - Q.$$

□

Якщо одночасно з рядом (394.1) *збігається і ряд* (394.2)*, то ряд* (394.1) *називається* ***абсолютно*** *збіжним. Якщо ж ряд* (394.1) *збігається, а ряд* (394.2) *розбігається, то ряд* (394.1) *називається* ***неабсолютно*** *збіжним.*

Доведемо тепер теорему про зв'язок між подвійним рядом (394.1) і простим рядом (393.6), які складаються з одних і тих самих членів. Вона аналогічна до теор. 393.1 і теор. 393.2.

Теорема 394.4. *Нехай задані подвійний ряд* (394.1) *і простий ряд* (393.6)*, які складаються з одних і тих самих членів. Тоді з* ***абсолютної*** *збіжності одного з них випливає* ***абсолютна*** *збіжність другого і рівність їх сум.*

nebayduzhi.math@gmail.com

Доведення. Нехай спочатку збігається абсолютно подвійний ряд (394.1), тобто збігається ряд (394.2); суму останнього позначимо через A^*. Беручи будь-яке натуральне число r, складемо часткову суму ряду (393.7):

$$U_r^* = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_r|.$$

Як і при доведенні теор. 393.2, легко доводиться нерівність $U_r^* < A^*$, а з нею і абсолютна збіжність ряду (393.6).

Тепер нехай дано, що збігається абсолютно простий ряд (393.6), тобто збігається ряд (393.7); його суму позначимо через U^*. Яку б часткову суму

$$A_m^{*(n)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \left|a_i^{(k)}\right|$$

ряду (394.2) не взяти, знайдеться настільки велике r, що всі доданки цієї суми будуть міститися серед перших r членів ряду (393.7), тому

$$A_m^{*(n)} < U^*.$$

У такому випадку, за теор. 394.2, подвійний ряд (394.2) збігається, а значить ряд (394.1) збігається абсолютно.

Нарешті, для обчислення суми U ряду (393.6), зважаючи на його абсолютну збіжність, можна його члени розташувати в будь-якому зручному для цієї цілі порядку (розд. 387). Ми розташуємо їх по **квадратам** схеми (393.1); тоді, якщо ще об'єднати члени, які відрізняють один квадрат від наступного за ним, вийде:

$$U = \lim_{n\to\infty} A_n^{(n)} = A,$$

що і завершує доведення. □

Зіставляючи теор. 393.1, теор. 393.2 і теор. 394.4, сформулюємо, в підсумку, такий наслідок.

Наслідок 394.4.1. *Нехай матриця (393.1) і послідовність (393.5) складаються з одних і тих самих членів. Тоді подвійний ряд (394.1), повторні ряди (393.3), (393.4) і, нарешті, простий ряд (393.6),* ***якщо хоч один із них виявляється збіжним після заміни його членів на їх абсолютні значення****, всі чотири збігаються та мають одну і ту ж суму.*

У випадку додатних рядів (тобто при $a_i^{(k)} \geqslant 0$), очевидно, достатньо збіжності одного з вказаних рядів, щоб збігались всі чотири і при цьому до однієї і тієї ж суми.

395. Приклади

1) Цікавий приклад дає матриця ($0 < x < 1$):

$$\begin{array}{c|llllll}
 & \multicolumn{6}{l}{\xrightarrow{\hspace{12cm}}} \\
 & x & -x^2 & x^2 & -x^3 & x^3 & \dots \\
 & x(1-x) & -x^2(1-x^2) & x^2(1-x^2) & -x^3(1-x^3) & x^3(1-x^3) & \dots \\
 & x(1-x)^2 & -x^2(1-x^2)^2 & x^2(1-x^2)^2 & -x^3(1-x^3)^2 & x^3(1-x^3)^2 & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\downarrow & & & & & &
\end{array}$$

Тут ряди за рядками **абсолютно** збігаються і мають, відповідно, суми x, $x(1-x)$, $x(1-x)^2$, … . Ряд, складений з цих сум, також **абсолютно** збігається; його сума дорівнює 1. Тимчасом другий повторний ряд не збігається, оскільки ряди за стовпцями мають суми, які поперемінно рівні $+1$ або -1.

Цей факт ніяк не суперечить теор. 393.2, тому що для матриці **із абсолютних значень** жоден повторний ряд не збігається. Ми бачимо тільки, що припущення **про абсолютну** збіжність рядів за рядками (за стовпцями) і **про абсолютну** же збіжність ряду, складеного із їх сум, не може замінити вимоги, щоб збігався повторний ряд для матриці абсолютних значень.

2) Наведемо знаменитий "парадокс Й. Бернуллі". Розглянемо додатну матрицю (пропущені члени можна замінити нулями):

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \multicolumn{5}{l}{\xrightarrow{\hspace{6cm}}} \\
 & \frac{1}{1\cdot 2} & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} & \dots \\
 & & \frac{1}{2\cdot 3} & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} & \dots \\
 & & & \frac{1}{3\cdot 4} & \frac{1}{4\cdot 5} & \dots \\
 & & & & \frac{1}{4\cdot 5} & \dots \\
 & & & & & \dots \\
\downarrow & & & & &
\end{array}$$

і прирівняємо суму двох відповідних їй повторних рядів. Якщо спочатку підсумовувати за рядками, то отримаємо суми (порівняйте з пр. 25.9): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, з яких складеться гармонічний ряд. Його суму позначимо через s. Підсумовуючи ж за стовпцями (всі вони містять скінченну кількість членів!), прийдемо до результатів $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$. З них складеться гармонічний ряд без першого члена, що в сумі дасть $s-1$. Отже, $s = s-1$!

Насправді, звісно, цей “парадокс” є лише доведенням від протилежного того факту, що **сума** s **не може бути скінченною**, тобто що гармонічний ряд розбігається.

3) Нехай q пробігає всі можливі степені з натуральними основами і показниками (більшими за одиницю), і при цьому — **кожну лише один раз**. Довести, що

$$G = \sum_q \frac{1}{q-1} = 1$$

(Ґольдбах (нім. Christian Goldbach, Хрístіан Ґóльдбах)).

Якщо m набуває всіх можливих натуральних значень (> 1), **які не є степенями**, то

$$\begin{aligned}
G &= \sum_m \frac{1}{m^2-1} + \sum_m \frac{1}{m^3-1} + \dots = \sum_m \left\{ \frac{1}{m^2-1} + \frac{1}{m^3-1} + \dots \right\} = \\
&= \sum_m \left\{ \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^6} + \dots \right) + \left(\frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^6} + \frac{1}{m^9} + \dots \right) + \dots \right\} = \\
&= \sum_m \left\{ \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \dots \right) + \left(\frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^6} + \dots \right) + \left(\frac{1}{m^6} + \frac{1}{m^9} + \dots \right) + \dots \right\} = \\
&= \sum_m \left\{ \frac{1}{m(m-1)} + \frac{1}{m^2(m^2-1)} + \frac{1}{m^3(m^3-1)} + \dots \right\}.
\end{aligned}$$

Звідси

$$G = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)},$$

де n пробігає цього разу вже всі натуральні значення, починаючи з 2, тому, справді, $G = 1$ (пр. 25.9).

(Обґрунтування, з посиланням на доведені теореми, залишаємо читачеві.)

Цікаво порівняти цей результат з результатом Штайнера (швейц. Jakob Steiner, Я́коб Штáйнер):

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = 1.$$

Тут степені можуть з’являтися і не один раз!

4) Розглянемо матрицю з загальним членом

$$a_i^{(k)} = \frac{(k-1)!}{i(i+1)\cdot\ldots\cdot(i+k)} = \frac{(i-1)!}{k(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+i)}.$$

Скориставшись отриманим в пр. 363.4 співвідношенням

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n+p)} = \frac{1}{p(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+p)} \tag{395.1}$$

(при $\alpha = 0,\ p = k$), легко підсумувати члени k-го рядка:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \frac{(k-1)!}{k \cdot k!} = \frac{1}{k^2};$$

звідси сума повторного ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \tag{395.2}$$

Зважаючи на симетрію виразу $a_i^{(k)}$ відносно i і k, другий повторний ряд тотожний першому, і прирівнювання їх сум нічого нового не дасть.

Видозмінимо тепер матрицю так: зберігши в m-му рядку перші $m-1$ членів незмінними, замість m-го члена підставимо суму r_m всіх членів m-го рядка, починаючи з m-го, а решту членів відкинемо. Для нової матриці

$$\begin{array}{ccccccc}
r_1 & & & & & & \\
a_1^{(2)} & r_2 & & & & & \\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & r_3 & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & & \\
a_1^{(m)} & a_2^{(m)} & a_3^{(m)} & \dots & a_{m-1}^{(m)} & r_m & \\
a_1^{(m+1)} & a_2^{(m+1)} & a_3^{(m+1)} & \dots & a_{m-1}^{(m+1)} & a_m^{(m+1)} & r_{m+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

суми рядів за рядками, а з ними і сума першого повторного ряду залишаться незмінними (дивіться (395.2)). Для підсумовування рядів за стовпцями обчислимо спочатку

$$r_m = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)\cdot \ldots \cdot (i+m)} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m-1+n)\cdot \ldots \cdot (2m-1+n)} = \frac{(m-1)!}{m^2(m+1)\cdot \ldots \cdot (2m-1)};$$

тут ми знову скористались співвідношенням (395.1), при $\alpha = m-1$, $p = m$. Сума ж решти членів m-го стовпця дорівнює

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)\cdot \ldots \cdot (i+m)} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m+n)(m+n+1)\cdot \ldots \cdot (2m+n)} = \frac{(m-1)!}{m(m+1)\cdot \ldots \cdot 2m}$$

(в (395.1) ми поклали $\alpha = p = m$). Остаточно ж, сума членів m-го стовпця виявляється рівною

$$3 \cdot \frac{(m-1)!}{m(m+1)\cdot \ldots \cdot (2m-1)\cdot 2m} = 3 \cdot \frac{[(m-1)!]^2}{2m!}\,.$$

Прирівнюючи, за теор. 393.3, суми обох повторних рядів, ми приходимо до цікавого співвідношення:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{2m!} \tag{395.3}$$

Оскільки ряд справа збігається дуже швидко, то він спрощує наближене обчислення суми важливого ряду, який стоїть зліва. Більше того, нижче (пр. 440.7) ми побачимо, що виведене співвідношення дає змогу виразити суму першого ряду "в скінченному вигляді": вона дорівнює $\frac{\pi^2}{6}$ (цей результат належить Ойлеру).

5) Зупинимось на ряді Ламберта:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{1-x^k},$$

обмежуючись припущенням, що $|x| < 1$. Ми бачили (пр. 385.5), що при цьому припущенні ряд Ламберта збігається при тих самих значення x, що і степеневий ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k.$$

Припустимо також, що радіус збіжності R цього ряду > 0 (розд. 379), і будемо вважати $|x| < R$.

Очевидно:

$$\frac{x^k}{1-x^k} = x^k + x^{2k} + \cdots + x^{ik} + \ldots$$

Складемо тепер матрицю з цих членів, помножених ще на a_k, розміщуючи однакові степені x в один стовпець (порожні місця можна заповнити нулями):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_1x & a_1x^2 & a_1x^3 & a_1x^4 & a_1x^5 & a_1x^6 & a_1x^7 & a_1x^8 & a_1x^9 & a_1x^{10} & \cdots \\
 & a_2x^2 & & a_2x^4 & & a_2x^6 & & a_2x^8 & & a_2x^{10} & \cdots \\
 & & a_3x^3 & & & a_3x^6 & & & a_3x^9 & & \cdots \\
 & & & a_4x^4 & & & & a_4x^8 & & & \cdots \\
 & & & & a_5x^5 & & & & & a_5x^{10} & \cdots \\
 & & & & & a_6x^6 & & & & & \cdots \\
 & & & & & & a_7x^7 & & & & \cdots \\
 & & & & & & & a_8x^8 & & & \cdots \\
 & & & & & & & & a_9x^9 & & \cdots \\
 & & & & & & & & & a_{10}x^{10} & \cdots \\
 & & & & & & & & & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & & & & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Повторний ряд **за рядками** як раз має суму $\varphi(x)$. Оскільки степеневий ряд, а з ним і ряд Ламберта, збігається при заміні x на $|x|$ і a_k на $|a_k|$, то можна застосувати теор. 393.3 і підсумувати **за стовпцями**. Ми отримаємо розклад $\varphi(x)$ в степеневий ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n, \quad \text{причому} \quad \alpha_n = \sum_{k/n} a_k;$$

значок k/n умовно означає, що сума розповсюджується лише на дільники k числа n.

Наприклад, поклавши $a_k = 1$ або $a_k = k$, будемо мати відповідно

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{1-x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)x^n,$$

де $\tau(n)$ означає **кількість**, а $\sigma(n)$ — **суму** дільників n.

(В обох випадках, як легко перевірити, $R = 1$, тож достатньо вважати просто $|x| < 1$).

6) Розмістивши ті самі члени інакше, без пропусків:

$$\begin{array}{ccccc}
a_1x & a_1x^2 & a_1x^3 & a_1x^4 & \cdots \\
a_2x^2 & a_2x^4 & a_2x^6 & a_2x^8 & \cdots \\
a_3x^3 & a_3x^6 & a_3x^9 & a_3x^{12} & \cdots \\
a_4x^4 & a_4x^8 & a_4x^{12} & a_4x^{16} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

ми збережемо ті самі суми за рядками, за стовпцями же отримаємо, по порядку: $f(x)$, $f(x^2)$, $f(x^3)$, $f(x^4)$, $\ldots$. Отже, ми приходимо до тотожності, яка пов'язує функції φ і

f:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x^n).$$

Наприклад, взявши $a_k = a^k$, де $|a| \leqslant 1$, будемо мати

$$f(x) = \frac{ax}{1 - ax}$$

тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax)^k}{1 - x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cdot x^n}{1 - a \cdot x^n} \quad (|a| \leqslant 1, \ |x| < 1).$$

7) Отриманий результат можна узагальнити. Нехай дані два степеневих ряди

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{та} \quad g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m.$$

Обмежимося значеннями x, для яких $|x| < 1$, і обидва ряди абсолютно збіжні.

Складемо матрицю з елементів $a_n b_m x^{nm}$. Оскільки (для $m > 1$ та $n > 1$) $mn \geqslant m + n$, то

$$|a_n b_m x^{nm}| \leqslant |a_n x^n| \cdot |b_m x^m|.$$

Звідси легко побачити, що подвійний ряд, що відповідає побудованій матриці, є абсолютно збіжним. Прирівнюючи, на підставі насл. 394.4.1, суми повторних рядів, отримуємо тотожність:

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m f(x^m) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(x^n).$$

Звідси тотожність попереднього прикладу виходить при $b_m = 1$, тож

$$g(x) = \frac{x}{1 - x}.$$

8) Ряд

$$\sum_{i,\,k=0}^{\infty} x^i y^k$$

виходить множенням рядів $\sum x^i$ та $\sum y^k$, які є (абсолютно) збіжними при $|x| < 1$ та $|y| < 1$; для цих значень (абсолютно) збіжним є і подвійний ряд.

Якщо $|x| > 1$ або $|y| > 1$, то порушується необхідна умова збіжності: загальний член не прямує до 0, і ряд буде розбіжним. Легко перевірити безпосередньо, що ряд буде розбіжним і разі $|x| = 1$ або $|y| = 1$.

9) Розглянемо ряд

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\alpha} k^{\beta}} \quad (\alpha > 0, \ \beta > 0).$$

Він також виходить множенням рядів $\sum \frac{1}{i^\alpha}$ та $\sum \frac{1}{k^\beta}$, які є збіжними при $\alpha > 1$ та $\beta > 1$, отже і подвійний ряд за цих припущень буде збіжним.

Навпаки, якщо $\alpha \leqslant 1$ або $\beta \leqslant 1$, то подвійний ряд буде розбіжним, бо тоді розбіжними будуть всі ряди за рядками (за стовпцями) (порівняйте з наслідком попереднього розділу).

10) Спробуємо дослідити збіжність ряду

$$\sum_{i,\,k=1} \frac{1}{(i+k)^\sigma} \qquad (\sigma > 0).$$

Для цього представимо його у вигляді простого ряду, розташувавши його члени по **діагоналях**. Оскільки члени, що лежать на одній діагоналі, рівні, то, об'єднавши їх для зручності підрахунку, отримаємо ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{1}{n^\sigma}\,.$$

Зважаючи на очевидні нерівності

$$\frac{1}{2}n \leqslant n-1 \leqslant n,$$

ділячи на n^σ, будемо мати

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\sigma-1}} \leqslant (n-1)\cdot\frac{1}{n^\sigma} \leqslant \frac{1}{n^{\sigma-1}}\,.$$

Звідси ясно, що отриманий нами простий ряд збігається при $\sigma > 2$ і розбігається при $\sigma \leqslant 2$. За теор. 394.4, те саме справедливо і для подвійного ряду.

11) Розглянемо тепер складніший ряд

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} a_i^{(k)} \equiv \sum_{i,\,k=1}^{\infty} \frac{1}{(Ai^2+2Bik+Ck^2)^r} \qquad (r > 0),$$

де форма $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ передбачається додатно визначеною,
тож $\Delta = AC - B^2 > 0$, а також $A > 0$ і $C > 0$.

Якщо через L позначити найбільше з чисел $|A|,\ |B|,\ |C|$, то, очевидно,

$$Ai^2+2Bik+Ck^2 \leqslant L(i+k)^2, \quad a_i^{(k)} \geqslant \frac{1}{L^r}\cdot\frac{1}{(i+k)^{2r}}\,.$$

У такому разі з пр. 395.10 ясно, що при $r \leqslant 1$ наш ряд розбіжний.

nebayduzhi.math@gmail.com

З іншого боку, маємо

$$Ai^2 + 2Bik + Ck^2 = \frac{1}{C}\left[(AC - B^2)i^2 + (Bi + Ck)^2\right] \geqslant \frac{\Delta}{C}i^2,$$

тому

$$a_i^{(k)} \leqslant \frac{C^r}{\Delta^r} \cdot \frac{1}{i^{2r}} \quad \text{і, аналогічно,} \quad a_i^{(k)} \leqslant \frac{A^r}{\Delta^r} \cdot \frac{1}{k^{2r}}.$$

Звідси легко отримати, що

$$a_i^{(k)} \leqslant \left(\frac{\sqrt{AC}}{\Delta}\right)^r \cdot \frac{1}{i^r \cdot k^r}\,.$$

Зіставляючи це з пр. 395.9, бачимо, що при $r > 1$ аналізований ряд збіжний.

12) У теоремі теор. 394.1, разом із припущенням про збіжність подвійного ряду, робиться особливо припущення про збіжність всіх рядів по рядках. Наступний простий приклад показує, що без другого припущення обійтися неможливо — воно не випливає з першого.

Подвійний ряд за схемою

$$\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 1 & -1 & \ldots \\
-1 & 1 & -1 & 1 & \ldots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \ldots \\
-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ldots \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \ldots \\
-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

збігається, його сума дорівнює 0. Тимчасом усі ряди за рядками розбігаються.

13) Перевірити суми наступних подвійних рядів:

$$\text{а)}\quad \sum_{m,\,n=2}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^m} = \frac{1}{p+1} \qquad (p > -1);$$

$$\text{б)}\quad \sum_{m=2,\,n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^m} = \ln 2;$$

$$\text{в)}\quad \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m+1}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2;$$

$$\text{г)}\quad \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^{2m}} = \frac{1}{4}\ln 2;$$

$$\text{ґ)}\quad \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-2)^{2m}} = \frac{\pi}{8}.$$

Вказівка. Перейти до повторного ряду, почавши з підсумовування за m. Використовувати відомі розклади:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2,$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}\,.$$

14) Розглянемо функцію двох змінних

$$\varphi(x, z) = e^{\frac{x}{2}(z - z^{-1})} \qquad (z \neq 0).$$

Помноживши такі абсолютно збіжні ряди:

$$e^{\frac{x}{2}\cdot z} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{i} \cdot \frac{z^i}{i!}\,, \qquad e^{-\frac{x}{2}\cdot z^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{k} \cdot \frac{(-1)^k}{k!} \cdot z^{-k}\,,$$

отримаємо для цієї функції (також абсолютно збіжний) подвійний ряд

$$\varphi(x, z) = \sum_{i,\,k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{i+k} \frac{(-1)^k}{i!k!} z^{i-k}\,.$$

Далі ми використаємо такий запис: $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$. **За означенням** — це сума двох рядів:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}\,.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Збираючи (дивіться наслідок) члени з однаковими степенями z, можна перетворити його в повторний ряд

$$\varphi(x, z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) \cdot z^n,$$

де для $n \geqslant 0$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},$$

а для $n < 0$

$$J_n(x) = \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},$$

Втім, легко бачити, що

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Функція $J_n(x)$ ($n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$) називається функцією Бесселя (нім. Friedrich Bessel, Фрі́дріх Бе́ссель) зі значком n; ці функції відіграють важливу роль у математичній фізиці, небесній механіці і так далі. Функція $\varphi(x, z)$, з розкладу якої вони виходять, зветься “твірною функцією” для функцій Бесселя.

396. Степеневий ряд із двома змінними; область збіжності

Степеневим рядом із двома змінними x, y називається подвійний ряд виду

$$\sum_{i,\,k=0}^{\infty} a_{i,\,k} x^i y^k, \tag{396.1}$$

з цілими додатними степенями змінних x, y.

Як і раніше (розд. 379) для простих степеневих рядів, ми і тут спробуємо з'ясувати вид “області збіжності” ряду (396.1), тобто множини $\mathcal{M} = \{M(x, y)\}$ тих точок площини, для яких ряд буде збіжним.

Лема 396.1. *Якщо ряд* (396.1) *збіжний в деякій точці* $\overline{M}(\overline{x},\ \overline{y})$, *координати якої обидві відмінні від* 0, *то він* ***абсолютно*** *збіжний у всіх точках* $M(x, y)$, *що задовольняють нерівності:* $|x| < |\overline{x}|,\ \ |y| < |\overline{y}|$ *(тобто у всьому відкритому прямокутнику з центром в початку координат і з вершиною в точці* $\overline{M}$*).*

Доведення. Доведення цілком аналогічне до доведення лем. 379.1. З обмеженості членів ряду (396.1) при $x = \overline{x},\ y = \overline{y}$

$$\left|a_{i,k} \cdot \overline{x}^i \cdot \overline{y}^k\right| \leqslant L \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots)$$

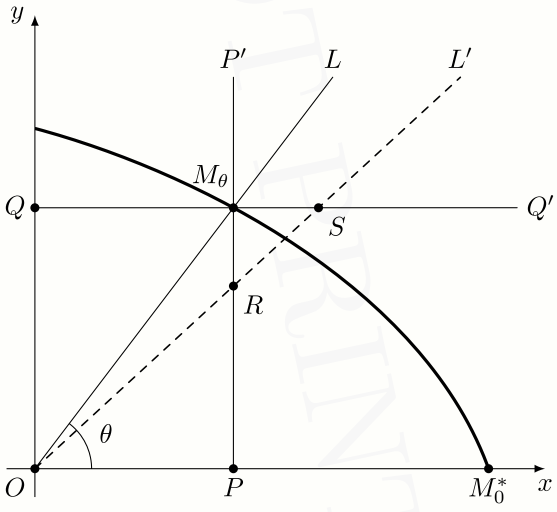


Рис. 396.1

маємо

$$\left|a_{i,\,k}x^i y^k\right| \leqslant L \cdot \left|\frac{x}{\overline{x}}\right|^i \left|\frac{y}{\overline{y}}\right|^k,$$

тож якщо тільки $|x| < |\overline{x}|$, $|y| < |\overline{y}|$, То праворуч ми маємо спільний член збіжного ряду (пр. 395.8); звідси і випливає абсолютна збіжність ряду (396.1). □

Ми вивчатимемо лише такі ряди, для яких подібні точки $\overline{M}$ існують; інші ряди нас не цікавлять. Доведена лема дає змогу нам обмежитися розглядом лише першого координатного кута; за допомогою симетрії отримані результати легко можна буде поширити і інші кути.

Візьмемо ж у першому куті промінь OL, що виходить із початку, під кутом θ до осі x (рис. 396.1). Як і в розд. 379, користуючись лемою, можна показати, що знайдеться таке додатне число $R(\theta)$ (яке може виявитися і нескінченним), що у всіх точках M на цьому промені, для яких

$$\overline{OM} < R(\theta),$$

ряд (396.1) абсолютно збіжний, тоді як за умови

$$\overline{OM} > R(\theta)$$

він розбіжний.

Якщо хоч для одного променя $R(\theta) = +\infty$, то, за лемою, *ряд виявляється збіжним (і до того ж — абсолютно) на всій площині*, яка відіграє роль “області збіжності” $\mathcal{M}$.

Нехай тепер ряд не **всюди збіжний**. Тоді $R(\theta)$ буде скінченною функцією від θ, і на кожному промені OL знайдеться **межова точка** M_θ, для якої

$$\overline{OM_\theta} = R(\theta).$$

Вона відокремлює точки M променя, в яких ряд (абсолютно) збіжний, від точок, де ряд розбіжний; в самій точці M_θ може бути і збіжність, і розбіжність.

Якщо провести через M_θ вертикаль PP' і горизонталь QQ' (дивіться рисунок), то **всередині** прямокутника $OPM_\theta Q$ ряд збіжний, а всередині кута $Q'M_\theta P'$ — розбіжний (за лемою!). Тому на новому промені OL', що відповідає якомусь іншому куту θ', вздовж OR буде збіжність, а вздовж SL' — розбіжність. Отже, межова точка на цьому промені має лежати між R та S. Звідси легко побачити, що при зміні θ від 0 до $\frac{\pi}{2}$, $R(\theta)$ змінюється **неперервно**, тому точка M_θ описує у першому координатному куті неперервну **межову криву**.

Оскільки при спаданні θ абсциса x_θ точки M_θ не спадає, а її ордината y_θ не зростає, то обидві мають граничні значення, коли $\theta \to 0$. Тоді, очевидно, має граничне значення і $R(\theta)$. Якщо ця границя

$$\lim_{\theta\to 0} R(\theta) = R_0$$

скінченна, то точка M_θ прямує до деякої граничної точки $M_0^*(R_0,\ 0)$ на осі x, інакше межова крива має асимптоту, паралельну осі x (яка може збігатися з віссю x). Все сказане легко перенести і на випадку, коли $\theta \to \frac{\pi}{2}$, треба лише поміняти ролями осі x та y.

Зауваження. Не слід, проте, думати, що гранична точка M_0^*, про яку щойно йшлося, необхідно збігається з **межовою точкою** M_0 на осі x. Точка M_0 може виявитися і праворуч від M_0^* (і навіть лежати в нескінченності). Ця можливість не повинна дивувати читача, бо лема та побудові на ній міркування стосуються лише до точок **поза** координатних осей.

Доповнимо тепер криву, побудовану в першому координатному куті, симетричними їй (відносно обох осей і початку координат) кривими в інших кутах. Таким шляхом ми отримаємо повну **межову криву**, яка визначає для нас "область збіжності" $\mathcal{M}$: *в тій частині площини, яка ззовні обмежена цією кривою, ряд* (396.1) *збіжний (і до того ж абсолютно); у зовнішній частині площині ряд розбіжний; у точках самої межової кривої може бути як збіжність, так і розбіжність.* (Вздовж координатних осей, як вказувалося, ряд може бути збіжним і поза цієї кривої.)

Розглянемо приклади.

nebayduzhi.math@gmail.com

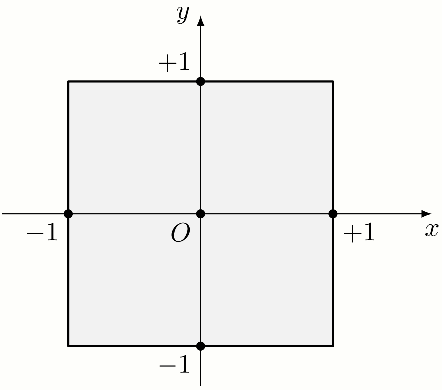


Рис. 397.1

397. Приклади

1) Для ряду

$$\sum_{i,\,k=0}^{\infty} x^i y^k,$$

як ми бачили в пр. 395.8, "область збіжності" $\mathcal{M}$ зводиться до відкритого прямокутника $(-1, 1;\ 1, -1)$ (рис. 397.1), в середині якого його сума дорівнює

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-y}\,.$$

2) Для аналогічно ряду

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} x^i y^k$$

(де i, k змінюються, **починаючи від** 1) "область збіжності" буде складатися з цього ж прямокутника, **але з приєднанням обох координатних осей**. У цьому випадку, хоча межова точка M_0, про яку йшлося вище, і прямує до граничної точці $M_0^*(1, 0)$ на осі x, але збіжність буде на всій цій осі (дивіться зауваження).

3) Ряд

$$\sum_{i,\,k=0}^{\infty} \frac{x^i y^k}{i!k!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\,,$$

очевидно, абсолютно збіжний на всій площині.

4) Для того, щоб ряд

$$\sum_{i,\,k=0}^{\infty} \frac{(i+k)!}{i!k!} x^i y^k$$

nebayduzhi.math@gmail.com

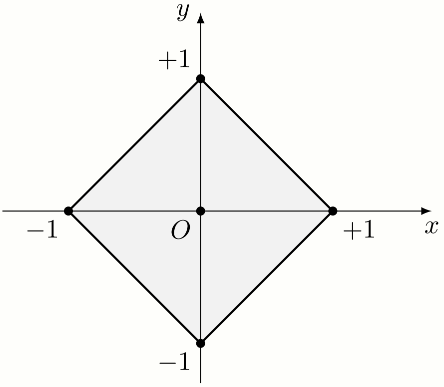


Рис. 397.2

був абсолютно збіжним, тобто був збіжним ряд

$$\sum_{i,\,k=0}^{\infty}\frac{(i+k)!}{i!k!}|x|^i|y|^k,$$

необхідно і достатньо, щоб збіжним був ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}(|x|+|y|)^n=\frac{1}{1-(|x|+|y|)}\,,$$

який отриманий з попереднього ряду підсумовуванням діагоналями. Це приводить нас до умови $|x|+|y|<1$. Отже, тут "областю збіжності" є повернутий квадрат з вершинами в точках $(\pm1,0)$, $(0,\pm1)$ (рис. 397.2).

5) На закінчення, розглянемо такий подвійний ряд:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,\,k=0\\ i\geqslant k}}^{\infty}x^iy^k = 1+x+x^2+\dots+x^m+\dots+ \\ +xy+x^2y+\dots+x^my+\dots+ \\ +x^2y^2+\dots+x^my^2+\dots+ \\ \dots \\ +x^my^m+\dots\,.\end{aligned}$$

Якщо, **припустивши** його абсолютну збіжність, підсумувати його за рядкам, то отримаємо:

$$(1+x+x^2+\dots)[1+xy+(xy)^2+\dots]=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-xy}\,.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

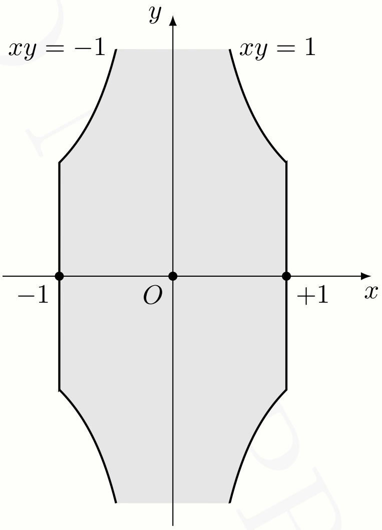


Рис. 397.3

Звідси ясно, що з абсолютної збіжності **необхідно**: $|x|<1$, $|xy|<1$; водночас, ці нерівності й **достатні**. "Область збіжності" зображена на рис. 397.3; криві на ній — рівнобічні гіперболи.

398. Кратні ряди

Подальше розширення поняття нескінченного ряду відбувається цілком природним чином. Нехай задана нескінченна **система чисел**

$$u_{i,k,\dots,l}\,,$$

занумерованих s ($s\geqslant 2$) значками i, k, $\dots$, l, кожен з яких незалежно від інших набуває всіляких натуральних значень. Тоді символ

$$\sum_{i,k,\dots,l=1}^{\infty} u_{i,k,\dots,l}$$

називається **кратним** (точніше: s-**кратним**) рядом.

Границя часткової суми ряду

$$U_{n,m,\dots,p}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\dots\sum_{l=1}^{p}u_{i,k,\dots,l}$$

при $n\to\infty$, $m\to\infty$, $\dots$, $p\to\infty$ (скінченна чи нескінченна) є **сума ряду**. Ряд називають збіжним, якщо він має скінченну суму.

nebayduzhi.math@gmail.com

Найважливішим класом кратних рядів є **степеневі ряди з декількома змінними**:

$$\sum_{i,k,\ldots,l=1}^{\infty} a_{i,k,\ldots,l} \cdot x^i y^k \ldots z^l.$$

На кратні ряди також поширюються основні поняття та пропозиції викладеної вище теорії.

nebayduzhi.math@gmail.com

11.6. Нескінченні добутки

399. Основні поняття

Якщо

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \dots,\ p_n,\ \dots \tag{399.1}$$

є деяка задана послідовність чисел, то їх добуток

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \tag{399.2}$$

називають **нескінченним добутком**. (Ми вже бачили таке позначення для добутку, але лише для скінченного числа множників (пр. 144.2).)

Станемо послідовно перемножувати числа (399.1), складаючи часткові добутки

$$P_1 = p_1, \quad P_2 = p_1 \cdot p_2, \quad P_3 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, \quad \dots, \quad P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n, \quad \dots \tag{399.3}$$

Цю послідовність часткових добутків $\{P_n\}$ ми завжди будемо зіставляти з записом (399.2).

Границю P часткового добутку P_n при $n \to \infty$ (скінченну або нескінченну)

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P$$

називають значенням добутку (399.2) та пишуть:

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n.$$

Якщо нескінченний добуток має ***скінченне*** *значення P* ***та ще й відмінне від*** *0, то сам добуток називають* ***збіжним****, в іншому випадку —* ***розбіжним****.*

(Отже (підкреслимо це), якщо $P = 0$, то добуток для нас буде **розбіжним**. Хоча ця термінологія йде в розріз з термінологією, прийнятою для нескінченних рядів, але вона загальноприйнята, бо полегшує формулювання багатьох теорем.)

Достатньо одному з множників добутку бути нулем, щоб і значення всього добутку також дорівнювало нулю. Далі ми цей випадок не розглядатимемо, тож **для нас завжди $p_n \neq 0$.**

Читач легко може побачити аналогію з нескінченними рядами (розд. 362) і усвідомить собі, що подібно до рядів, розгляд нескінченного добутку також є лише своєрідною формою вивчення **варіанти (або послідовності)** та її границі. З цією формою корисно познайомитися, тому що в інших випадках вона буває зручнішою, ніж інші.

400. Приклади

1)

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Оскільки частковий добуток

$$P_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2},$$

то нескінченний добуток збігається, та його значення буде $\frac{1}{2}$.

2) Формула Волліса (317.2)

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)},$$

очевидно, рівносильна розкладу числа $\frac{\pi}{2}$ у нескінченний добуток

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\ldots$$

Вона ж приводить до формул

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2m+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}\quad\text{або}\quad\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4m^2}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

3) Доведемо, що (при $|x|<1$)

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\ldots\cdot\left(1+x^{2^{n-1}}\right)\cdot\ldots=\frac{1}{1-x}.$$

Справді, як легко переконатися послідовним множенням,

$$(1-x)\cdot P_n=(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\ldots\cdot\left(1+x^{2^{n-1}}\right)=1-x^{2^n},$$

$$P_n=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}.$$

Звідси і випливає необхідна рівність при $n\to\infty$.

4) Ми мали в пр. 54.7 границю

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\varphi}{2^n}=\frac{\sin\varphi}{\varphi}\qquad(\varphi\neq 0).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Тепер ми можемо записати це так:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

Зокрема, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ прийдемо до розкладу:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \ldots \cdot \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \ldots$$

Якщо згадати, що

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{та} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha}\,,$$

то цей розклад можна переписати у вигляді

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

(формула В'єта). Ця формула разом із формулою Волліса дає перші приклади нескінченних добутків в історії аналізу.

5) Для повного еліптичного інтеграла 1-го роду ми мали формулу (315.3)

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \lim_{n\to\infty} (1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n),$$

де варіанта k_n визначається рекурентним співвідношенням:

$$k_n = \frac{1-\sqrt{1-k_{n-1}^2}}{1+\sqrt{1-k_{n-1}^2}} \quad (k_0 = k).$$

Ця формула дає розклад $\mathbf{K}(k)$ в нескінченний добуток

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1+k_n).$$

6) Розглянемо ще такий нескінченний добуток:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}\,.$$

У цьому випадку частковий добуток має вигляд

$$P_n = \frac{e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}}{n+1} = \frac{e^{\ln n + \mathbf{C} + \gamma_n}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot e^{\mathbf{C}} \cdot e^{\gamma_n}\,,$$

де $\mathbf{C}$ — стала Ойлера, а γ_n — нескінченно мала (пр. 367.10). Отже, добуток збігається, та його значення

$$P = e^{\mathbf{C}}\,.$$

401. Основні теореми. Зв'язок із рядами

Відкинувши у нескінченному добутку (399.2) m перших членів, ми отримаємо **залишок** добутку:

$$\pi_m = p_{m+1} \cdot p_{m+2} \cdot \ldots \cdot p_{m+k} \cdot \ldots = \prod_{n=m+1}^{\infty} p_n, \tag{401.1}$$

яке цілком аналогічне до **залишку** нескінченного ряду.

Теорема 401.1. *Якщо збігається добуток* (399.2)*, то збігається і добуток* (401.1) *для будь-якого m; навпаки, зі збіжності добутку* (401.1) *витікає збіжність вихідного добутку* (399.2) *(нагадаємо, що ми раз і назавжди припустили, що $p_n \neq 0$).*

Доведення залишаємо читачеві (порівняйте з теор. 364.1).

Отже, і у випадку нескінченного добутку *відкидання скінченної кількості початкових множників або приєднання на початку кількох нових множників не впливає на його поведінку.*

Теорема 401.2. *Якщо нескінченний добуток* (399.2) *збігається, то*

$$\lim_{m\to\infty} \pi_m = 1$$

(дивіться (401.1)*).*

Доведення. Це випливає з рівності

$$\pi_m = \frac{P}{P_m}$$

і з того, що P_m прямує до $P \neq 0$. ☐

Теорема 401.3. *Якщо нескінченний добуток* (399.2) *збігається, то*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

Доведення. Справді, разом з P_n і P_{n-1} прямує до P,

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{\lim P_n}{\lim P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1$$

(порівняйте з теор. 364.5). ☐

Не наводячи інших властивостей нескінченних добутків, які аналогічні до властивостей нескінченних рядів, ми покажемо зв'язок між збіжністю нескінченних добутків і рядів, що дасть змогу нам безпосередньо використовувати для добутків докладно розвинену теорію рядів.

У випадку збіжного добутку, множники p_n, починаючи з деякого місця, будуть додатними (теор. 401.3). Втім, зважаючи на теор. 401.1, ми не втратимо загальності, якщо **будемо надалі припускати, що всі** $p_n > 0$.

Теорема 401.4. *Для того, щоб нескінченний добуток* (399.2) *збігався, необхідно і достатньо, щоб збігався ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n. \tag{401.2}$$

При виконанні цієї умови, якщо L є сумою ряду, то

$$P = e^L.$$

Доведення. Позначивши через L_n часткову суму ряду (401.2), ми маємо:

$$L_n = \ln P_n, \quad P_n = e^{L_n}.$$

З неперервності логарифмічної та показникової функцій тепер випливає, що якщо P_n збігається до скінченної додатної границі P, то L_n збігається до $\ln P$, і навпаки, якщо L_n має скінченну границю L, то для P_n прямує до e^L. □

При дослідженні збіжності нескінченного добутку (399.2) часто видається зручним, вважаючи

$$p_n = 1 + a_n,$$

записувати його у вигляді

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n), \tag{401.3}$$

а ряд (401.2) — у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n). \tag{401.4}$$

В цих позначеннях маємо таку просту теорему.

Теорема 401.5. *Якщо, принаймні для досить великих n,*

$$a_n > 0 \quad (\textit{або } a_n < 0),$$

то для збіжності добутку (401.3) *необхідно і достатньо збіжність ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{401.5}$$

Доведення. Оскільки для збіжності як добутку (399.2), так і ряду (401.5) в будь-якому разі необхідно, щоб
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{401.6}$$
(дивіться теор. 401.3), то припустимо, що ця умова виконана. Тоді виконується співвідношення
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$
(77.1). В такому випадку, через те, що члени обох рядів (401.4) і (401.5), починаючи з деякого місця, **зберігають визначений знак**, за теор. 366.2, ці ряди збігаються або розбігаються одночасно. Звідси, використовуючи теор. 401.4, і випливає наше твердження. ☐

Повертаючись до загального випадку $a_n \gtrless 0$, доведемо ще таке твердження.

Теорема 401.6. *Якщо, разом з рядом (401.5), збігається і ряд*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \tag{401.7}$$
то нескінченний добуток (401.3) збігається.

Доведення. Справді, з (401.7) насамперед випливає (401.6). Згадуючи розклад функції $\ln(1+x)$ за формулою Тейлора (пр. 125.5), маємо:
$$\ln(1+a_n) = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2),$$
так що
$$\lim \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2}. \tag{401.8}$$
За теор. 366.2 збіжність ряду (401.7) тягне за собою збіжність ряду
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \ln(1+a_n)\right). \tag{401.9}$$
Оскільки за припущенням ряд (401.5) збігається, то звідси випливає і збіжність ряду (401.4), як різниці двох збіжних рядів. Залишається застосувати теор. 401.4. ☐

Зупинимося швидко на випадку, коли нескінченний добуток “розбігається” до 0.

Теорема 401.7. *Для того щоб нескінченний добуток ((399.2) або (401.3)) мав **нульове** значення, необхідно і достатньо, щоб ряд (401.2) (або (401.4)) мав суму $-\infty$.*

Зокрема, це буде так, якщо $a_n < 0$ і ряд (401.5) розбігається, або якщо ряд (401.5) збігається, але розбігається ряд (401.7).

Залишаємо доведення читачеві. Лише з приводу останнього припущення зауважимо, що із розбіжності ряду (401.7), зважаючи на (401.8), випливає розбіжність ряду (401.9), сума якого $+\infty$. А тоді, оскільки ряд (401.5) збігається, то, зрозуміло, що сума ряду (401.4) буде $-\infty$.

На закінчення використаємо зв'язок між добутком (399.2) (або (401.3)) і рядом (401.2) (або (401.4)), щоб розглянути поняття **абсолютної** збіжності нескінченного добутку. *Добуток називається* ***абсолютно*** *збіжним саме в тому випадку, якщо* ***абсолютно*** *збігається відповідний ряд із логарифмів його множників.*

Дослідження розд. 387 і розд. 388 відразу ж дають змогу зробити висновок, що **абсолютно** збіжні добутки володіють комутативною властивістю, в той час як **неабсолютно** збіжні нею не володіють.

Дуже просто довести за зразком теор. 401.5 таку теорему.

Теорема 401.8. *Для* ***абсолютної*** *збіжності добутку* (401.3) *необхідно і достатньо* ***абсолютна*** *збіжність ряду* (401.5).

402. Приклади

1) Застосуємо доведені теореми до нескінченних добутків.

а) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^x}\right)$ $(x>0)$ збігається при $x>1$ і розбігається при $x\leqslant 1$, як і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ (теор. 401.5); аналогічно, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^x}\right)$ при $x>1$ збігається (теор. 401.5), а при $0<x\leqslant 1$ розбігається до нуля (теор. 401.7).

б) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$ при $x>\frac{1}{2}$ збігається; саме, при $x>1$ добуток збігається **абсолютно**, тому що збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ (теор. 401.8), а при $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$ добуток збігається **неабсолютно**, оскільки збігаються ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2x}}$ (теор. 401.6); нарешті, при $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ значення добутку 0, бо перший з цих рядів збігається, а другий вже ні (теор. 401.7).

2) Нехай x_n — довільна варіанта, що міститься в проміжку $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Тоді добутки

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos x_n \quad \text{і} \quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}$$

збігаються або ні, зважаючи на те, чи збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ чи ні. Допустимо спочатку, що варіанта $x_n\to 0$; тоді ці висновки випливають з теор. 401.5 і теор. 401.7, якщо скористатися розкладами (пр. 125.2) і (пр. 125.3)

$$\cos x_n = 1 - \frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2), \quad \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 - \frac{x_n^2}{6} + o(x_n^2).$$

Якщо ж x_n не збігається до 0, то одночасно і ряд розбігається, і обидва добутки мають **нульове** значення. (те, що добутки мають скінченні значення, випливає з того, що всі їхні множники — правильні дроби; проте їхні значення не можуть бути відмінними від 0, оскільки порушено необхідну для цього умову теор. 401.3.)

3) З теорії нескінченних добутків просто отримати теорему Абеля: *якщо* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *— додатний ряд, і* A_n *позначає його часткову суму, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n}$ *збігається або розбігається одночасно з даним (порівняйте з пр. 375.4).* Доведення потребує лише випадок розбіжності. Якщо $A_n \to \infty$, то нескінченний добуток $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{A_n}\right) \equiv \prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{A_{n-1}}{A_n}$ розбігається до 0, а тоді (через теор. 401.5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{A_n}$ ряд розбігається.

4) Розглянемо важливий добуток

$$x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

(нижче, в розд. 408 ми побачимо, що він є не чим іншим, як функцією $\sin x$). Нехай $x \neq k\pi$, $k = 0, \ \pm1, \ \pm2, \ \dots$.

Його збіжність (звісно — **абсолютна**) зразу випливає зі збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{n^2\pi^2}$. Якщо кожний множник розкласти на два і написати добуток у вигляді:

$$x\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) \cdot \ldots,$$

і оскільки $1 - \frac{x}{n\pi} \to 1$, то збіжність **при зазначеному розташуванні множників** збережеться, і збережеться значення добутку. Але на цей раз збіжність стане **неабсолютною**, через неабсолютну збіжність ряду

$$-\frac{x}{\pi} + \frac{x}{\pi} - \frac{x}{2\pi} + \frac{x}{2\pi} - \ldots - \frac{x}{n\pi} + \frac{x}{n\pi} - \ldots,$$

так що ці множники переміщати довільно не можна.

Замінимо тепер кожний множник $1 \mp \frac{x}{n\pi}$ множником $(1 \mp \frac{x}{n\pi})\, e^{\pm\frac{x}{n\pi}}$; легко бачити, що це не позначиться ні на збіжності, ні на значенні нескінченного добутку. Водночас новий добуток буде вже абсолютно збіжним, оскільки (пр. 125.1)

$$e^{\pm\frac{x}{n\pi}} = 1 \pm \frac{x}{n\pi} + \frac{x^2}{2n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \left(1 \mp \frac{x}{n\pi}\right) e^{\pm\frac{x}{n\pi}} = 1 - \frac{x^2}{2n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

і множники, починаючи з деякого місця, стають додатними правильними дробами.

5) Довести тотожність (при $0 < q < 1$)

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdot\ldots = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdot\ldots}$$

(формула Ойлер).

Вказівка. Збіжність обох добутків можна отримати за допомогою теор. 401.5. Представити перший з них в виді

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdot\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdot\ldots}.$$

6) Довести, що (при $\alpha > \beta$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)} = 0.$$

Для цього достатньо показати розбіжність нескінченного добутку

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\beta+n}{\alpha+n} \equiv \prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}\right)$$

або (дивіться теор. 401.7) розбіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha-\beta}{\alpha+n}.$$

А це легко випливає з порівняння написаного ряду з гармонічним.

Зауваження. Цей приклад, так само як і наступні, повчальні щодо того, що показують, як іноді справді вигідно зводити пошук границі варіанти (або послідовності) до дослідження нескінченного добутку, з використанням розвиненої теорії нескінченних добутків.

7) Повернемось до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{n!}$, який ми вже розглядали в пр. 378.1 (також дивіться пр. 370.2 та пр. 370.5). Ми залишили відкритим питання про його поведінку на кінці $x = -\frac{1}{e}$ його проміжку збіжності.

В цьому випадку виходить **знакозмінний** ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{1}{e^n},$$

члени якого за абсолютною величиною монотонно спадають. Згадуючи теорему Ляйбніца (теор. 381.1), бачимо, що висновок про збіжність ряду залежить від наявності рівності

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{1}{e^n}=0.$$

Оскільки відношення $(n+1)$-го значення цієї варіанти до n-го є

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e},$$

то задачу можна представити в рівносильній формі — пошук значення нескінченного добутку

$$\frac{1}{e}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}.$$

Логарифмуючи, отримаємо (пр. 125.5)

$$\ln\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1=-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

так що ряд логарифмів типу (401.2) розбігається і має суму $-\infty$. В такому випадку (теор. 401.7) значення нескінченного добутку (а з ним — і шукана границя), справді, 0. **Ряд збігається.**

8) Розглянемо поведінку гіпергеометричного ряду

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+n-1)}{n!\,\gamma\cdot(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+n-1)}x^n$$

(дивіться пр. 372.1 та пр. 378.4) при $x=-1$, за припущенням, що $-1\leqslant\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ (саме цей випадок залишився без розгляду).

Відношення $(n+1)$-го **коефіцієнта** до n-го тут дорівнює:

$$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}=1-\frac{\gamma-\beta-\alpha+1}{n}+\frac{\lambda_n}{n^2}\quad(|\lambda_n|\leqslant L).\tag{402.1}$$

Для досить великих значень n це відношення додатне; нехай $\gamma-\alpha-\beta>-1$, тоді воно остаточно стає менше одиниці. Отже, ряд

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+n-1)}{n!\,\gamma\cdot(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+n-1)},\tag{402.2}$$

якщо відволіктись від деякого числа його початкових членів, виявляється знакозмінним, з монотонно спадними за абсолютною величиною членами. І тут знаходження границі (абсолютної величини) загального члена зручніше звести до визначення значення нескінченного добутку:

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}.$$

(початкове значення $n = n_0$ вважається настільки великим, щоб всі множники були додатними.)

Якщо $\gamma - \alpha - \beta > -1$ (як ми припускали), то з (402.1) та за теор. 401.7 випливає, що цей добуток має значення 0: **ряд збігається**.

В випадку, коли $\gamma - \alpha - \beta = -1$, формула (402.1) отримає вигляд

$$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} = 1 + \frac{\lambda_n}{n^2} \quad (|\lambda_n| \leqslant L);$$

за теор. 401.5, значення нескінченного добутку відмінне від 0, для ряду (402.2) порушується необхідна умова збіжності, **ряд розбігається**.

Ми, нарешті, закінчили дослідження поведінки **гіпергеометричного ряду**. Результати можуть бути зібрані в таблицю

$\lvert x\rvert < 1$		абсолютно збігається
$\lvert x\rvert > 1$		розбігається
$x = 1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	абсолютно збігається
	$\gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$	розбігається
$x = -1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	абсолютно збігається
	$0 \geqslant \gamma - \alpha - \beta > -1$	неабсолютно збігається
	$\gamma - \alpha - \beta \leqslant -1$	розбігається

9) Довести, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x^2-1)(x^2-2^2)\dots(x^2-n^2)$$

збігається для **всіх** значень x, якщо збігається хоча б для одного **нецілого** значення $x = x_0$ (Стьорлін (шот. James Stirling, Джéймс Стьóрлін)).

Члени цього ряду відрізняються від членів збіжного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0^2-1)(x_0^2-2^2)\dots(x_0^2-n^2)$$

множниками

$$\frac{(x^2-1)(x^2-2^2)\dots(x^2-n^2)}{(x_0^2-1)(x_0^2-2^2)\dots(x_0^2-n^2)},$$

які для досить великих значень n змінюються монотонно.

Залишається ще показати їхню **обмеженість** (оскільки тоді можна використати ознаку Абеля), а для цієї цілі простіше всього переконатися в збіжності нескінченного добутку

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{x^2-n^2}{x_0^2-n^2};$$

ми залишаємо це читачеві.

10) Розглянемо (разом з Ойлером) нескінченний добуток

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}, \tag{402.3}$$

вважаючи x відмінним від нуля і від всіх цілих від'ємних чисел.

Легко виразити його загальний множник так:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = 1 + \frac{x(x-1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

звідси (теор. 401.8) випливає, що наш добуток (абсолютно) збігається. Цей добуток — це одне із означень функції $\Gamma(x)$ (**Гама-функції**), однією із найважливіших функцій (після елементарних функцій), що розглядаються в аналізі. Нижче в 14.5 ми дамо інше означення цієї функції і глибше дослідимо її властивості.

Оскільки n-тий частковий добуток має вигляд

$$\frac{(n+1)^x}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \cdot \frac{n!\,n^x}{x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)},$$

то можна покласти

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+n)}. \tag{402.4}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Написавши аналогічну формулу для $\Gamma(x+1)$, легко бачити, що

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{x+1+n} = x,$$

і ми приходимо до простого і важливого співвідношення:

$$\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x). \tag{402.5}$$

Якщо x дорівнює **натуральному** числу m, то отримаємо рекурентну формулу

$$\Gamma(m+1) = m\cdot\Gamma(m).$$

Оскільки $\Gamma(1) = 1$ (що легко перевірити), то звідси

$$\Gamma(m+1) = m!\,.$$

Ще одну важливу формулу для функції Γ ми отримаємо, якщо перемножимо почленно рівності

$$\Gamma(x+1) = \Gamma(x)\cdot x = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} \quad \text{i} \quad e^{\mathbf{C}x} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x},$$

з яких перша випливає з (402.3) і (402.5), а другу легко отримати з пр. 400.6. Ми знайдемо:

$$e^{\mathbf{C}x}\cdot\Gamma(x+1) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}$$

або

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{\mathbf{C}x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdot e^{-\frac{x}{n}}. \tag{402.6}$$

Це — *формула Ваярштрасса.*

11) Наведемо чудовий приклад перетворення нескінченного добутку в ряд, який також належить Ойлеру. Якщо перенумерувати **прості** числа в порядку зростання:

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ \dots,\ p_k,\ \dots,$$

то при $x > 1$ маємо тотожність

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\left(1-\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k^x}\right)\cdot\ldots} = 1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots$$

або

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

так що цей добуток є $\zeta(x)$-функцією Рімана (пр. 365.2).

Маємо, за формулою для суми геометричної прогресії:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}} = \frac{1}{p_k^x} + \frac{1}{(p_k^2)^x} + \ldots + \frac{1}{(p_k^m)^x} + \ldots .$$

Якщо перемножити **скінченне** число таких рядів, що відповідають всім простим числам, які не перевищують натуральне число N, то частковий добуток виявиться рівним

$$P_x^{(N)} = \prod_{p_k \leqslant N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}} = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^x}, \tag{402.7}$$

де штрих означає, що підсумовування поширюється не на всі натуральні числа, а лише (не враховуючи одиницю) на ті з них, які в своєму розкладі на прості множники містять тільки вже введені прості числа (перші N натуральних чисел цією властивістю, звісно, володіють). Звідси маємо

$$0 < P_x^{(N)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Через збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, вираз справа, що становить його **залишок** після N-того члена, збігається до 0 при $N \to \infty$; переходячи до границі, і отримуємо потрібний результат.

12) При $x = 1$ співвідношення (402.7) ще зберігає силу, звідси

$$P_1^{(N)} = \prod_{p_k \leqslant N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = H_n\,,$$

так що при $N \to \infty$ на цей раз $P_1^{(N)} \to +\infty$, тобто добуток

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot\ldots} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

розбігається і має значення $+\infty$.

У цьому полягає дане Ойлером нове доведення того, що множина простих чисел нескінченна (чим, по суті, у проведеному аргументі ми не користувались); адже при скінченності цієї множини і добуток мав би скінченне значення. Якщо отриманий результат переписати так:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\cdot\ldots=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=0,$$

то, використовуючи теор. 401.5, можна зробити висновок про розбіжність ряду

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{p_k}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_k}\,.$$

Це важливе твердження дає ще і деяку характеристику росту простих чисел. (Підкреслимо, що воно набагато сильніше ніж твердження про розбіжність гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, адже тут ідеться лише про **частину** його членів.)

13) Аналогічно може бути отримана (при $x>1$) тотожність:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3^x}\right)\left(1-\frac{1}{5^x}\right)\left(1+\frac{1}{7^x}\right)\left(1+\frac{1}{11^x}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1\pm\frac{1}{p_{k+1}^x}\right)\cdot\ldots}=1-\frac{1}{3^x}+\frac{1}{5^x}-\frac{1}{7^x}+\frac{1}{9^x}-\ldots,$$

де знак плюс чи мінус в знаменнику лівої частини береться залежно від того, чи буде (непарне) просте число вигляду $4n-1$ чи $4n+1$.

nebayduzhi.math@gmail.com

11.7. Розкладання елементарних функцій

403. Розкладання функції в степеневий ряд; ряд Тейлора

Ми вже розглядали в розд. 379 степеневі ряди виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots\,, \tag{403.1}$$

упорядковані за степенями x. Якщо не брати до уваги “всюди розбіжні” ряди, то для кожного такого ряду існує **проміжок збіжності** з центром в точці $x = 0$, від $-R$ до R, де **радіус збіжності** $R > 0$, але може бути і нескінченним. Кінці цього проміжку включаються або ні, залежно від випадку.

Розглядають і степеневі ряди більш загального виду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots\,, \tag{403.2}$$

упорядковані за степенями двочлена $x - x_0$ (замість x). Такий ряд не відрізняється суттєво від ряду виду (403.1), оскільки зводиться до нього простою заміною змінної: $x - x_0 = y$ (з точністю до **позначення** змінної). Для ряду (403.2) — якщо він не буде “всюди розбіжним” — також існує **проміжок збіжності**, але на цей раз з центром в точці x_0, від $x_0 - R$ до $x_0 + R$. Його кінці, як і в випадку ряду (403.1), можуть належати, але можуть і не належати до проміжку.

Далі ми детально вивчимо властивості степеневих рядів, які багато в чому уподібнюються многочленам. Відрізками степеневого ряду є многочлени, що робить степеневі ряди зручним засобом для наближених обчислень. У зв’язку з всім цим набуває великої важливості питання про можливість розкласти наперед задану функцію за степенями $x - x_0$ (зокрема, за степенями x), тобто подати її у вигляді суми ряду типу (403.2) або (403.1).

Ми займемося тут подібним розкладанням елементарних функцій, причому шлях до вирішення поставленого питання нам відкриває формула Тейлором, детально вивчена у розд. 124 – розд. 126. Справді, припустимо, що функція $f(x)$, яка розглядається на проміжку $[x_0,\ x_0 + H]$ або $[x_0 - H,\ x_0]$ $(H > 0)$ має похідні всіх порядків (тим самим — неперервні). Тоді, як ми бачили в розд. 126, для всіх значень x на цьому проміжку справедлива формула:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x), \tag{403.3}$$

де **додатковий член** $r_n(x)$ може бути представлений в одній із зазначених в розд. 126 форм. **При цьому** n **ми можемо брати як завгодно великим**, тобто доводити це розкладання до як завгодно високих степенів $x - x_0$.

Це природно наводить на думку про нескінчене розкладання:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots . \quad (403.4)$$

Такий ряд, незалежно від того, збігається він і чи, насправді, його сума дорівнює $f(x)$, називається *рядом Тейлора* для функції $f(x)$. Він має вигляд (403.2), причому його коефіцієнти:

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ \dots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \dots$$

називаються **коефіцієнтами Тейлора**.

Оскільки різниця між $f(x)$ і сумою $n+1$ членів ряду Тейлора, зважаючи на (403.3), як раз і є $r_n(x)$, то, очевидно: *для того, щоб при деякому значенні x справді виконувався розклад* (403.4), *необхідно і достатньо, щоб додатковий член $r_n(x)$ формули Тейлора — при цьому значенні x — прямував до 0 зі зростанням n:*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \quad (403.5)$$

При дослідженні питання, чи виконується ця рівність і при яких саме значеннях x, нам будуть корисні різні форми додаткового члена $r_n(x)$, **які виявляють його залежність від n.**

Найчастіше доводиться мати справу з випадком, коли $x_0 = 0$ і функція $f(x)$ розкладається в ряд безпосередньо за степенями x:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (403.6)$$

(цей ряд зазвичай називається рядом Маклорена; дивіться розд. 123); цей ряд має вигляд (403.1), з коефіцієнтами:

$$a_0 = f(0),\ a_1 = \frac{f'(0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(0)}{2!},\ \dots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \dots . \quad (403.7)$$

Випишемо тепер детальніше додатковий член $r_n(x)$ відповідно саме до цього окремого припущення: $x_0 = 0$ (розд. 126)

$$\text{у формі Лаґранжа:}\quad r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (403.8)$$

$$\text{у формі Коші:}\quad r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}. \quad (403.9)$$

При цьому про множник θ відомо тільки те, що він міститься між 0 та 1, але він також може змінюватись при зміні x або n (і навіть — при переході від однієї форми до іншої).

Перейдемо до конкретних розкладань.

404. Розкладання в ряд показникової, основних тригонометричних функцій та ін.

Доведемо спочатку наступне просте твердження, що відразу охоплює ряд важливих випадків.

Твердження 404.1. *Якщо функція $f(x)$ на проміжку $[0, H]$ або $[-H, 0]$ $(H > 0)$ має похідні* ***всіх*** *порядків, і абсолютні значення всіх цих похідних виявляються обмеженими* ***одним і тим самим*** *числом, коли x змінюється на вказаному проміжку:*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant L \tag{404.1}$$

(де L ***не залежить*** *від n), то на всьому проміжку виконується розклад (403.6).*

Доведення. Справді, взявши додатковий член $r_n(x)$ у формі Лаґранжа (дивіться (403.8)) і зважаючи на (404.1), маємо:

$$|r_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leqslant L \cdot \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}\,. \tag{404.2}$$

При нескінченному зростанні n вираз $\frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$ прямує до 0, як ми бачили в пр. 35.1; втім, те саме (зважаючи на теор. 364.5) витікає і зі збіжності ряду

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$$

(пр. 370.2). Але в такому випадку і $r_n(x)$ збігається до 0, що і доводить наше твердження. $\square$

а) Це твердження можна застосувати до функцій

$$f(x) = e^x, \quad \sin x, \quad \cos x$$

на **будь-якому** проміжку $[-H, H]$, тому що абсолютні значення похідних, які відповідно дорівнюють

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

будуть обмежені числом e^H — для функції e^x, та одиницею — для $\sin x$ і $\cos x$.

Оскільки коефіцієнти Тейлора ми вже обчислювали для цих функцій в пр. 125.1 – пр. 125.3, то можемо відразу написати розклади:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{404.3}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots, \tag{404.4}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + \ldots. \tag{404.5}$$

Всі вони вірні для **будь-якого** значення x.

б) Нескладно схожим чином отримати розклади і для основних **гіперболічних** функцій, але простіше, згадавши їх визначення:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

отримати ці розклади шляхом почленного віднімання і додавання ряду (404.3) і наступного ряду, що можна з нього отримати замінивши x на $-x$:

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Отже:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots,$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{2k!} + \ldots.$$

в) Для функції $y = \operatorname{arctg} x$ доведене на початку твердження вже не є вірним. Справді, загальний вираз для її n-ої похідної знайдений в пр. 116.8:

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin n \left(y + \frac{\pi}{2}\right) \tag{404.6}$$

не гарантує існування **спільної** границі для всіх $y^{(n)}$.

Оскільки відповідний ряд Тейлора (дивіться пр. 125.6):

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \ldots$$

збігається лише на проміжку $[-1, 1]$, то поза межами цього проміжку не доводиться вже говорити про представлення функції $\operatorname{arctg} x$ цим рядом. (За ознакою д'Аламбера (теор. 377.2) легко впевнитись, що ряд (абсолютно) збігається, якщо $|x| < 1$, і розбігається, якщо $|x| > 1$. Збіжність (неабсолютна) за умови $x = \pm 1$ витікає із теореми Ляйбніца, теор. 381.1.) Навпаки, для $|x| \leqslant 1$ маємо залишок у формі Лаґранжа (403.8) і, враховуючи (404.6):

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{\left|\cos^{n+1} y_\theta \cdot \sin(n+1)\left(y_\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right|}{n+1} \cdot |x|^{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

де $y_\theta = \operatorname{arctg} \theta x$. Звідси зрозуміло, що $r_n(x) \to 0$, тож для всіх значень x на проміжку $[-1, 1]$ є вірним розклад

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots . \qquad (404.7)$$

Ми ще раз підкреслюємо, що хоча $\operatorname{arctg} x$ і за межами цього проміжку має певний сенс, але розклад (404.7) там вже не виконується, оскільки ряд **не має суми**.

З ряду (404.7) при $x = 1$, зокрема, виходить відомий ряд Ляйбніца

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} + \ldots \qquad (404.8)$$

— перший ряд, що дає розклад числа π.

405. Логарифмічний ряд

Якщо розглянути функцію $f(x) = ln(1 + x)$ $(x > -1)$, то відповідний ряд Тейлора буде виглядати так (пр. 125.5):

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots .$$

Він збігається лише для значень x на проміжку $(-1, 1]$; отже, тільки для цих значень має сенс досліджувати поведінку додаткового члена $r_n(x)$ (при $x = -1$ отримаємо, з точністю до знака, розбіжний гармонічний ряд).

Для початку розглянемо додатковий член у формі Лаґранжа (403.8). Оскільки

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

(пр. 116.2), то

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1).$$

Якщо $0 \leqslant x \leqslant 1$, то останній множник не перевищує одиниці, і звідси

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}, \quad \text{тож} \quad r_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Але при $x < 0$ поведінка цього множника стає неясною, і доводиться звернутися до додаткового члена у формі Коші (дивіться (403.9)).

Маємо

$$r_n(x) = (-1)^n x^{n+1} \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1),$$

тому

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n .$$

Оскільки при $x > -1$ виконується $1+\theta x > 1-\theta$, то останній множник буде менше за одиницю; отже, $r_n(x) \to 0$, коли $|x| < 1$.

Цікаво, що хоча форма Коші дає чітку відповідь для всіх значень x на проміжку $(-1, 1)$, вона нічого не дає у випадку $x = 1$; в цьому випадку ми отримуємо

$$|r_n(1)| < (1-\theta)^n,$$

але зважаючи на те, що θ може змінюватись разом з n, не можна стверджувати, що $(1-\theta)^n \to 0$.

Отже, для всіх значень x на проміжку $(-1, 1]$ маємо розклад:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots . \tag{405.1}$$

Зокрема, при $x = 1$ отримаємо вже знайомий нам ряд

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots . \tag{405.2}$$

З ряду (405.1) можна вивести і інші корисні розклади. Наприклад, виконуючи заміну x на $-x$ і віднімаючи отриманий ряд з ряду (405.1) (при цьому ми вважаємо $|x| < 1$), отримаємо наступний ряд:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \ldots + \frac{1}{2m+1}x^{2m} + \ldots\right). \tag{405.3}$$

406. Формула Стьорліна

Покажемо, як за допомогою цього ряду (405.3) може бути виведена одна важлива формула аналізу — формула Стьорліна (шот. James Stirling, Джéймс Стьóрлін).

Візьмемо в (405.3)

$$x = \frac{1}{2n+1},$$

де n — довільне натуральне число. Оскільки тоді

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{1}{2n+1}} = \frac{n+1}{n},$$

то отримаємо розклад

$$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right), \tag{406.1}$$

яке можна переписати у вигляді:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots .$$

Цей вираз, очевидно, більше за одиницю, але менше ніж

$$1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right)=1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

Отже, маємо:

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)},$$

звідки, потенціюючи, знайдемо

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Введемо тепер варіанту

$$a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Тоді

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}$$

і з попередніх нерівностей виходить, що

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}=\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}},$$

тому, з одного боку, $a_n>a_{n+1}$, а з іншого

$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a_{n+1}\cdot e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

Отже, зі зростанням n варіанта a_n спадає (залишаючись обмеженою знизу, наприклад, нулем) і наближається до скінченної границі a, а варіанта $a^n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}$ зростає, наближаючись, очевидно, до тієї ж границі a (адже $e^{-\frac{1}{12n}}\to 1$). Оскільки для будь-якого n виконуються нерівності

$$a_n\cdot e^{-\frac{1}{12n}}<a<a_n,$$

то знайдеться таке число θ, яке міститься між 0 та 1, що

$$a = a_n \cdot e^{-\frac{\theta}{12n}} \quad \text{або} \quad a_n = a \cdot e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

(Помітимо, що число θ в загальному випадку залежить від n). Згадуючи означення змінної a_n, знаходимо:

$$n! = a\sqrt{n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1). \tag{406.2}$$

Залишається тепер визначити значення сталої a. Для цього згадаємо формулу Волліса (317.1):

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2.$$

Вираз в дужках перетворимо так:

$$\frac{2n!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n!!)^2}{2n!} = \frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{2n!};$$

підставивши сюди замість $n!$ його вираз за формулою (406.2), а замість $2n!$ аналогічний вираз

$$2n! = a\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot e^{\frac{\theta'}{24n}} \quad (0 < \theta' < 1),$$

після елементарних спрощень отримаємо

$$\frac{2n!!}{(2n-1)!!} = a\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}},$$

тому

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} a^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot e^{\frac{4\theta-\theta'}{12n}} = \frac{a^2}{4}.$$

Звідси:

$$a^2 = 2\pi \quad \text{та} \quad a = \sqrt{2\pi}.$$

Підставляючи це значення a у формулу (406.2), ми отримаємо *формулу Стьорлінa*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1),$$

яка дає змогу просто оцінити величину факторіала $n!$ для великих значень n.

Як вправу, пропонуємо читачеві знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n \ln\frac{2n+1}{2n-1} - 1\right),$$

збіжність якого була доведена в пр. 367.9.

Вказівка. Обчислити n-ну часткову суму, і перетворивши її за допомогою формули Стьорліна, перейти до границі.

Відповідь:

$$\frac{1}{2}(1 - \ln 2).$$

407. Біноміальний ряд

Візьмемо, нарешті,

$$f(x) = (1+x)^m,$$

де m — будь-яке дійсне число, відмінне від 0 і від усіх натуральних чисел (при натуральному m виходить відомий скінченний розклад за формулою Ньютена). У цьому випадку ряд Тейлора має вигляд (пр. 125.4):

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}x^n + \ldots;$$

його називають **біноміальним рядом**, а його коефіцієнти — **біноміальними коефіцієнтами**. При зроблених припущеннях щодо m жоден з цих коефіцієнтів не буде нулем (навпаки, якби m було натуральним числом, то коефіцієнт при x^{m+1} і всі наступні дорівнювали би нулю). За допомогою ознаки д'Аламбера (теор. 377.2) легко показати, що при $|x| < 1$ біноміальний ряд (абсолютно) збіжний, а при $|x| > 1$ — розбіжний. Дослідження додаткового члена $r_n(x)$ ми будемо робити припускаючи, що $|x| < 1$, причому відразу візьмемо його у формі Коші (403.9) (форма Лаґранжа і тут дає відповідь не для всіх значень x).

Оскільки

$$f^{(n+1)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n) \cdot (1+x)^{m-n-1},$$

то матимемо:

$$r_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}.$$

Представимо його, перегрупувавши множники, у вигляді:

$$r_n(x) = \frac{(m-1)\ldots((m-1)-n+1)}{n!}x^n \cdot mx(1+\theta x)^{m-1} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Перше з цих трьох виразів є загальним членом біноміального ряду, що відповідає показнику $m-1$. Оскільки при $|x| < 1$ біноміальний ряд збіжний, який би не був показник, то цей вираз при $n \to \infty$ прямує до нуля. Що ж до двох інших виразів, то абсолютне значення другого міститься між

$$|mx| \cdot (1 - |x|)^{m-1} \quad \text{та} \quad |mx| \cdot (1 + |x|)^{m-1},$$

які не залежать від n, а третій вираз, як і в розд. 405, менше за одиницю. Отже, $r_n(x) \to 0$, тобто для $|x| < 1$ маємо розклад

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}x^n + \dots, \tag{407.1}$$

який також пов'язаний з ім'ям Ньютена.

Ми не розглядали питання про його застосування при значеннях $x = \pm 1$. Легко побачити, що біноміальний ряд є окремим випадком гіпергеометричного ряду і виходить з останнього при $\alpha = -m$, $\beta = \gamma$ і заміні x на $-x$. Внаслідок чого, виконуючи таблицю з пр. 402.8, легко скласти таку таблицю, що характеризує поведінку біноміального ряду на кінцях $x = \pm 1$ його проміжку збіжності:

$x = 1$	$m > 0$	абсолютно збіжний
	$0 > m > -1$	неабсолютно збіжний
	$m \leqslant -1$	розбіжний
$x = -1$	$m > 0$	абсолютно збіжний
	$m < 0$	розбіжний

Можна показати, що кожного разу, коли біноміальний ряд збігається, його сума дорівнює $(1+x)^m$. Тут ми на цьому не зупиняємось, бажаючи уникнути ретельного дослідження додаткового члена, оскільки цей результат просто випливає з однієї загальної теореми, яка буде доведена нижче (дивіться теор. 437.6).

Вкажемо деякі окремі випадки біноміального ряду, що відповідають, наприклад, $m = -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n-1}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

(звичайна геометрична прогресія); потім,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}x^n + \dots \tag{407.2}$$
$$(-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

та

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \dots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2n!!}x^n + \dots \tag{407.3}$$
$$(-1 < x \leqslant 1).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Важливо підкреслити, що у разі раціонального m сума сума біноміального ряду завжди дає **арифметичне** значення радикала.

Зауваження 1. На цьому побудований, наприклад, такий цікавий розклад, що належить Шльомільху. Передусім, вважаючи в (407.2) $x = -y^2$, де $-1 \leqslant y \leqslant 1$, отримаємо, що

$$\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} y^{2n-1}.$$

А потім, замість y підставимо сюди вираз $\dfrac{2z}{1+z^2}$, де z змінюється вже між $-\infty$ та $+\infty$. Виявиться, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2n!!} \left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^{2n-1} = \begin{cases} z, & \text{якщо } |z| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{z}, & \text{якщо } |z| \geqslant 1. \end{cases}$$

Цей приклад цікавий тим, що для функції, що визначається на різних проміжках **різними** аналітичними виразами z і $\frac{1}{z}$, дається **єдиний** аналітичний вираз у вигляді суми ряду (порівняйте з розд. 46; пр. 363.5).

Зауваження 2. У всіх розглянутих вище прикладах розкладання функцій в ряд Тейлора виходило так, що для всіх значень x, для яких ряд був збіжний, його сума дорівнювала тієї функції, для якої цій ряд був побудований. Тому у читача могла виникнути підозра, що взагалі достатньо встановити збіжність ряду, навіть не перевіряючи співвідношення (403.5), щоб було забезпечено розкладання (403.4) або (403.6).

Насправді це не так. Якщо, наприклад, повернутися до функції, розглянутої у пр. 138.2:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad (x \neq 0), \quad f(0) = 0,$$

то для неї, як ми бачили, існують навіть при $x = 0$ похідні всіх порядків, але всі вони в цій точці дорівнюють нулю. Ряд Тейлора виду (403.6) з усіма нульовими коефіцієнтами, звичайно, збіжний скрізь, але за жодного значення x (крім $x = 0$) не дає значення початкової функції.

408. Розкладання синуса та косинуса у нескінченні добутки

Ми познайомились вище з розкладами важливих елементарних функцій в нескінченні ряди, упорядковані за степенями x, тобто з зображенням цих функцій у вигляді "нескінченних многочленів". На завершення ми розкладемо функції $\sin x$ та $\cos x$ у нескінченні добутки, що немов здійснюють розкладання на множники відповідних "нескінченних многочленів".

nebayduzhi.math@gmail.com

Почнемо з виведення однієї допоміжної формули. Відома з алгебри формула Муавра (фр. Abraham de Moivre, Абрахáм де Муáвр) (453.1):

$$(\cos z + i\sin z)^m = \cos mz + i\cdot\sin mz,$$

де m будемо вважати натуральним числом. Розкривши зліва дужки за звичайним правилом і прирівнявши зліва і справа коефіцієнти біля "уявної одиниці" $i=\sqrt{-1}$, отримаємо

$$\sin mz = m\cos^{m-1} z\cdot\sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{m-3} z\cdot\sin^3 z + \ldots\,.$$

Якщо $m=2n+1$ є **непарним**, то, виконуючи заміну парних степенів косинуса за формулою $\cos^{2k} z = (1-\sin^2 z)^k$, ми зобразимо результат у вигляді:

$$\sin(2n+1)z = \sin z\cdot P(\sin^2 z), \tag{408.1}$$

де $P(u)$ є цілий многочлен степеня n.

Цей многочлен, якщо через $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$ позначити його корені, можна розкласти на множники так:

$$P(u) = a(u-u_1)\ldots(u-u_n) = A\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\ldots\left(1-\frac{u}{u_n}\right).$$

Корені $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$ легко визначити з (408.1), помітивши, що якщо значення z таке, що $\sin(2n+1)z=0$, але $\sin z\neq 0$, то $\sin^2 z$ необхідно буде коренем многочлена $P(u)$. Очевидно, значенням $z=\frac{\pi}{2n+1},\ 2\frac{\pi}{2n+1},\ \ldots,\ n\frac{\pi}{2n+1}$, що містяться між 0 та $\frac{\pi}{2}$ і йдуть в порядку зростання, відповідають зростаючі (а отже, різні) корені:

$$u_1=\sin^2\frac{\pi}{2n+1},\quad u_2=\sin^2 2\frac{\pi}{2n+1},\quad \ldots,\quad u_n=\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}\,.$$

Нарешті, коефіцієнт $A=P(0)$ визначається, як границя дробу $\dfrac{\sin(2n+1)z}{\sin z}$ при $z\to 0$; звідси $A=2n+1$.

Отже, приходимо до формули

$$\sin\,(2n+1)z = (2n+1)\sin z\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right).$$

Припускаючи $z=\frac{x}{2n+1}$, перепишемо її так:

$$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right). \tag{408.2}$$

Будемо вважати, що x є відмінним від 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, …, так що $\sin x \neq 0$. Візьмемо натуральне число k з умовою: $(k+1)\pi > |x|$, і нехай n буде $> k$. Зобразимо тепер $\sin x$ у вигляді добутку:

$$\sin x = U_k^{(n)} \cdot V_k^{(n)}, \tag{408.3}$$

де

$$U_k^{(n)} = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 k\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)$$

містить лише k множників у дужках, а

$$V_k^{(n)} = \left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 (k+1)\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\dfrac{\pi}{2n+1}}\right)$$

містить всі інші.

Нехай k поки що фіксоване; нескладно знайти границю $U_k^{(n)}$ при $n\to\infty$, оскільки цей вираз складається з певного скінченного числа множників. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1} = x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2 h\dfrac{\pi}{2n+1}} = \frac{x^2}{h^2\pi^2} \quad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

то

$$U_k = \lim_{n\to\infty} U_k^{(n)} = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Зважаючи на (408.3), існує границя

$$V_k = \lim_{n\to\infty} V_k^{(n)}, \qquad \text{причому } \sin x = U_k\cdot V_k\,.$$

Перейдемо до **оцінки** границі V_k.

Відомо, що для $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ виконуються нерівності

$$\frac{2}{\pi}\varphi < \sin\varphi < \varphi$$

((54.2), пр. 133.1). Тому

$$\sin^2\frac{x}{2n+1} < \frac{x^2}{(2n+1)^2}$$

та

$$\sin^2 h\frac{\pi}{2n+1} > \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{h^2\pi^2}{(2n+1)^2} \quad (h = k+1,\ \ldots,\ n);$$

тож

$$1 > V_k^{(n)} > \left(1 - \frac{x^2}{4(k+1)^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4n^2}\right). \tag{408.4}$$

Нескінченний добуток

$$\prod_{h=h_0}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4h^2}\right)$$

(де h_0 обрано так, щоб виконувалося $4h_0^2 > x^2$) збігається, оскільки збігається ряд $\sum\limits_{h=h_0}^{\infty} \frac{x^2}{4h^2}$ (теор. 401.5). Тому **залишковий добуток**

$$\overline{V}_k = \prod_{h=k+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4h^2}\right)$$

при $k \to \infty$ має прямувати до 1 (теор. 401.2). Очевидно, ми лише посилимо другу нерівність (408.4), якщо напишемо

$$1 > V_k^{(n)} > \overline{V}_k;$$

перейшовши (при фіксованому k) до границі при $n \to \infty$, отримаємо

$$1 > V_k \geqslant \overline{V}_k.$$

Звідси виходить, що

$$\lim_{k\to\infty} V_k = 1, \quad \text{тому} \quad \lim_{k\to\infty} U_k = \sin x,$$

і ми остаточно приходимо до чудового розкладу:

$$\sin x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \cdot \ldots, \tag{408.5}$$

що вперше був виведений Ойлером.

Цей розклад є вірним і для відкинутих раніше значень $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, оскільки для них обидві частини цієї рівності є нулями. Нескладно побачити, що окремі множники якраз і відповідають окремим кореням $\sin x$. (Відносно можливості переставляти множники — дивіться пр. 402.4.)

Якщо в отриманому розкладі підставити $x = \frac{\pi}{2}$, то знайдемо:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right),$$

звідки знову виходить формула Волліса (317.1) (порівняйте з пр. 400.2).

Вкажемо ще одне цікаве застосування цього розкладу, який, замінюючи x на πx, можна зобразити у вигляді:

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

Згадаємо означення функції $\Gamma(x)$ (402.3):

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}},$$

і співвідношення $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ (402.5). Тоді

$$\Gamma(1-x) = -x \cdot \Gamma(-x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x}}{1 - \frac{x}{n}}.$$

Помножуючи, приходимо до так званої *формули доповнення*

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \tag{408.6}$$

також винайденої Ойлером; вона виконується при будь-яких **нецілих** значеннях x. Взявши тут $x = \frac{1}{2}$, зокрема, знайдемо, що $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi$; оскільки при $x > 0$ і $\Gamma(x) > 0$, то

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{408.7}$$

Аналогічно до розкладу $\sin x$ виводиться розклад

$$\cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right),$$

що виявляє корені $\cos x : \pm\frac{2n-1}{2}\pi$. Втім, він може буде отриманий і з розкладу $\sin x$, за формулою

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{або} \quad \cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}.$$

Нарешті, згадаємо про розклади

$$\operatorname{sh} x = x \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right), \quad \operatorname{ch} x = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2}\right), \tag{408.8}$$

які також можуть бути отримані за допомогою схожих міркувань.

11.8. Наближені обчислення за допомогою рядів. Перетворення рядів

409. Загальні зауваження

На прикладі вже отриманих нами конкретних розкладів ми пояснимо, як нескінченні ряди можуть бути використані з метою **наближених обчислень**. Насамперед, дамо низку загальних зауважень.

Якщо невідоме нам число A розкладене у ряд:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots,$$

де a_1, a_2, a_3, ... — деякі числа (зазвичай раціональні), які легко обчислити, і ми припустимо наближено:

$$A \doteq A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n,$$

тоді **поправка** на відкидання решти членів буде виражена залишком

$$\alpha_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

При досить великому n ця похибка стане як завгодно малою, тож A_n наблизиться до A з будь-якою наперед заданою точністю.

Ми зацікавлені у можливості просто здійснювати **оцінку** залишку α_n; це дало змогу б нам вчасно зупинитися при обчисленні послідовних часткових сум, коли вже буде отримане наближення бажаної точності.

Якщо ряд видається знакозмінним та ще й з монотонно спадними за абсолютною величиною членами (які задовольняють умови теореми Ляйбніца), то як ми бачили (розд. 381, зауваження), залишок має знак свого першого члена і за абсолютною величиною менший за нього. Ця оцінка у плані простоти не залишає бажати кращого.

Дещо складніша ситуація у випадку додатного ряду.

Тоді зазвичай намагаються знайти інший додатній ряд, який **легше підсумувати** і члени якого були б **більші** за члени залишку, що нас цікавить; і оцінити залишок сумою цього ряду.

Наприклад для ряду

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

можна отримати:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{n}$$

(ця оцінка співпадає з оцінкою зверху, що отримана в пр. 373.11 за допомогою інтегрування).

А для ряду

$$1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}$$

можна отримати:

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m!}=\frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ldots\cdot m}<\frac{1}{n!}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{m-n}}=\frac{1}{n!n}$$

(цією оцінкою ми фактично і користувалися при обчисленні числа e у розд. 37).

Зазвичай шукають **десяткове** наближення числа A, тоді як члени ряду можуть і не бути виражені десятковими дробами. При їх перетворенні у десятковий дріб, їх округлення служить джерелом нової похибки, яку також слід брати до уваги.

Насамкінець, зазначимо, що далеко не кожний ряд, сума якого є число A, придатний для **фактичного** обчислення цього числа (навіть якщо його члени є простими, і оцінка залишку обчислюється досить легко). Питання — у швидкості збіжності, тобто у швидкості наближення часткової суми до числа A.

Візьмемо для прикладу ряди (дивіться (404.8) та (405.2)):

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\quad\text{та}\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots,$$

що дають відповідно розклади чисел $\frac{\pi}{4}$ та $\ln 2$. Для того, щоб за їх допомогою обчислити ці числа, скажімо, з точністю до $1/10^5$, треба було б додати **п'ятдесят тисяч** членів у першому випадку та **сто тисяч** — у другому; це, звичайно, може бути здійснене лише за допомогою швидкісних обчислювальних машин.

Нижче ми без зайвого клопоту обчислимо вищезгадані числа навіть з більшою точністю, але використавши більш доречні ряди.

410. Обчислення числа π

Скористаємося відомим рядом для арктангенса (404.7):

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\quad(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

Якщо взяти $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, то $\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{6}$, і ми отримаємо ряд

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots\right),$$

nebayduzhi.math@gmail.com

вже придатний для обчислення.

Згадуючи формулу додавання для арктангенса (яка у цьому вигляді є вірною лише за умови, що сума кутів за абсолютною величиною $< \frac{\pi}{2}$ (розд. 50).)

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$$

та обираючи для x та y дві довільні правильні дроби, такі що

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1 \quad \text{або} \quad (x+1)(y+1) = 2,$$

матимемо

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \left(x - \frac{x^3}{3} + \ldots\right) + \left(y - \frac{y^3}{3} + \ldots\right).$$

Наприклад, взявши $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, отримаємо

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} - \ldots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} - \ldots\right).$$

Однак, існують ряди ще більш зручні для обчислення числа π. Нехай

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{5},$$

тоді

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Зважаючи на близькість цього числа до 1, зрозуміло, що кут 4α близький до $\frac{\pi}{4}$; прийнявши $\beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}$, матимемо:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239} \quad \text{і} \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Звідси

$$\pi = 16\alpha - 4\beta = 16\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^9} - \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{5^{11}} + \ldots\right] - \\ -4\left[\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{239^3} + \ldots\right].$$

Це — формула Мечіна (англ. John Machin, Джóн Мéчін).

Обчислимо по ній число π до 7 знаків після коми. Для цього достатньо тих членів формули, що фактично виписані. Оскільки обидва ряди — типу Ляйбніца, то поправки на відкидання не виписаних членів у зменшуваному та від'ємнику, відповідно, будуть

$$0 < \Delta_1 < \frac{16}{13\cdot 5^{13}} < \frac{1}{10^8} \quad \text{та} \quad 0 < \Delta_2 < \frac{4}{5\cdot 239^5} < \frac{1}{10^8}.$$

Збережені члени перетворимо у десяткові дроби, округляючи їх (згідно з правилом доповнення) на 8-му знаку. Обчислення зведені у таблицю ($\pm$ в дужках вказує на **знак** поправки):

$$\begin{array}{rl} \dfrac{16}{5} & =3{,}200\,000\,00 \\ +\dfrac{16}{5\cdot 5^5} & =0{,}001\,024\,00 \\ \dfrac{16}{9\cdot 5^9} & =0{,}000\,000\,91\ (+) \\ \hline & 3{,}201\,024\,91 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \dfrac{16}{3\cdot 5^3} & =0{,}042\,666\,67\ (-) \\ +\dfrac{16}{7\cdot 5^7} & =0{,}000\,029\,26\ (-) \\ \dfrac{16}{11\cdot 5^{11}} & =0{,}000\,000\,03\ (-) \\ \hline & 0{,}042\,695\,96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3{,}201\,024\,91 \\ -0{,}042\,695\,96 \\ \hline 3{,}158\,328\,95 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \dfrac{4}{239} & =0{,}016\,736\,40\ (+) \\ -\dfrac{4}{3\cdot 239^3} & =0{,}000\,000\,10\ (-) \\ \hline & 0{,}016\,736\,30 \end{array}$$

Враховуючи усі поправки, маємо

$$3{,}158\,328\,95 < 16\alpha < 3{,}158\,328\,98$$
$$-0{,}016\,736\,32 < -4\beta < -0{,}016\,736\,30,$$

отже

$$3{,}141\,592\,63 < \pi < 3{,}141\,592\,68.$$

Отже, остаточно, $\pi = 3{,}141\,592\,6\ldots$, причому усі виписані знаки є вірними.

411. Обчислення логарифмів

В основі обчислень лежить ряд

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n = \frac{2}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right), \quad (411.1)$$

nebayduzhi.math@gmail.com

яким ми вже користувалися (406.1) при виведенні формули Стьорліна.

При $n = 1$, отримаємо розклад для $\ln 2$:

$$\ln 2 =$$
$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^2} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9^4} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{9^5} + \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{9^6} + \frac{1}{15}\cdot\frac{1}{9^7} + \frac{1}{17}\cdot\frac{1}{9^8} + \ldots\right).$$

Цей ряд є цілком придатним для обчислень. Покажемо, наприклад, що, обмежившись лише виписаними членами, можна знайти $\ln 2$ з 9-ма правильними десятковими знаками.

Справді, якщо відкинути члени цього ряду, починаючи з десятого, то відповідна поправка буде:

$$\Delta = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{19}\cdot\frac{1}{9^9} + \frac{1}{21}\cdot\frac{1}{9^{10}} + \ldots\right) < \frac{2}{3\cdot 19\cdot 9^9}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \ldots\right) = \frac{1}{12\cdot 19\cdot 9^8} < \frac{2}{10^{10}}.$$

Обчислення, до 10 знаків, зведені в таблицю:

$$\begin{array}{rl}
\frac{2}{3} & = 0{,}666\,666\,666\,7\ (-) \\
\frac{2}{3\cdot 3\cdot 9} & = 0{,}024\,691\,358\,0\ (+) \\
\frac{2}{3\cdot 5\cdot 9^2} & = 0{,}001\,646\,090\,5\ (+) \\
\frac{2}{3\cdot 7\cdot 9^3} & = 0{,}000\,130\,642\,1\ (+) \\
\frac{2}{3\cdot 9\cdot 9^4} & = 0{,}000\,011\,290\,1\ (-) \\
\frac{2}{3\cdot 11\cdot 9^5} & = 0{,}000\,001\,026\,4\ (-) \\
\frac{2}{3\cdot 13\cdot 9^6} & = 0{,}000\,000\,096\,5\ (-) \\
\frac{2}{3\cdot 15\cdot 9^7} & = 0{,}000\,000\,009\,3\ (-) \\
\frac{2}{3\cdot 17\cdot 9^8} & = 0{,}000\,000\,000\,9\ (+) \\
\hline
 & \ \ 0{,}693\,147\,180\,5
\end{array}$$

Враховуючи всі поправки, маємо

$$0{,}693\,147\,180\,2 < \ln 2 < 0{,}693\,147\,180\,9,$$

отже

$$\ln 2 = 0{,}693\,147\,180\ldots,$$

і всі 9 знаків вірні.

Приймаючи тепер у (411.1) $n = 4$, знайдемо:

$$\ln 5 = 2\ln 2 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{81} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{81^2} + \ldots\right).$$

Користуючись вже обчисленим значенням $\ln 2$, згідно з цією формулою, легко обчислити $\ln 5$, а потім і $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$. Після цього, з довільним рівнем точності, може бути обчислений модуль

$$M = \frac{1}{\ln 10}$$

для переходу від натуральних логарифмів до десяткових; він дорівнюватиме $M = 0{,}434\,294\,481\ldots$. Домноживши на модуль, знайдемо десяткові логарифми $\lg 2$ та $\lg 5$.

Перейдемо до десяткових логарифмів і в основній формулі (411.1):

$$\lg(n+1) - \lg n = \frac{2M}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots\right). \qquad (411.2)$$

Взявши тут $n = 80 = 2^3 \cdot 10$ і приймаючи до уваги, що $n + 1 = 81 = 3^4$, знайдемо

$$4\lg 3 - 3\lg 2 - 1 = \frac{2M}{161}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{25\,921} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{25\,921^2} + \ldots\right),$$

звідки легко знайти $\lg 3$.

Приймаючи, надалі, у формулі (411.2) $n = 2400 = 3 \cdot 2^3 \cdot 10^2$, матимемо $n + 1 = 2401 = 7^4$ та

$$4\lg 7 - 3\lg 2 - \lg 3 - 2 = \frac{2M}{4801}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{23\,049\,601} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{23\,049\,601^2} + \ldots\right),$$

отже, знайдемо і логарифм $\lg 7$. Підбираючи схожі числові комбінації, можна з довільним рівнем точності знайти логарифми простих чисел, а з їх допомогою, шляхом домноження на натуральні множники та додавання знайдуться і логарифми складених чисел.

Можна було б вчинити і інакше, безпосередньо обчислюючи логарифми послідовних натуральних чисел та переходячи від $\lg n$ до $\lg(n+1)$ за допомогою формули (411.2). Так, для обчислення логарифмів чисел від 1000 до 10 000 візьмемо у формулі (411.2) всього **один** член, тобто наближено припустимо, що

$$\lg(n+1) - \lg n = \frac{2M}{2n+1} \quad (10^3 \leqslant n \leqslant 10^4).$$

Поправка при цьому буде

$$\Delta = \frac{2M}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots \right) <$$
$$< \frac{2M}{3(2n+1)^3} \left(1 + \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \ldots \right) = \frac{2M}{3(2n+1) \cdot 2n \cdot (2n+2)} < \frac{2M}{24n^3}.$$

Оскільки у нас $n \geqslant 10^3$, а $2M < 1$, то

$$\Delta < \frac{1}{24 \cdot 10^9} < \frac{1}{2 \cdot 10^{10}}\,.$$

Навіть якби **усі** помилки додавались, то сукупно все ж похибка була б меншою за $\frac{10^4}{2 \cdot 10^{10}} = \frac{1}{2 \cdot 10^6}$. Але такого накопичення похибок легко уникнути, обчисливши цілу низку **контрольних** логарифмів користуючись першим методом. Отже, можна досягнути значно вищої точності, зберігши водночас **автоматизм** обчислень, що притаманний другому методу (який є особливо цінним при складанні великих таблиць).

412. Обчислення коренів

Простіше за все корені обчислюються за допомогою таблиці логарифмів. Однак, якщо окремі корені потрібні з високою точністю, то доцільніше скористатися біноміальним рядом (407.1):

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \ldots$$

Припустимо, що треба обчислити $\sqrt[k]{A}$, причому уже відомо наближене значення a цього кореня (за недостачею або за надлишком), але потрібно його покращити. Якщо, скажімо,

$$\frac{A}{a^k} = 1 + x,$$

де $|x|$ є невеликий правильний дріб, то можна перетворити корінь так:

$$\sqrt[k]{A} = a \cdot \sqrt[k]{\frac{A}{a^k}} = a \cdot (1+x)^{\frac{1}{k}}$$

і використати біноміальний ряд при $m = \frac{1}{k}$. Деколи зручніше виходити із рівності

$$\frac{a^k}{A} = 1 + x',$$

nebayduzhi.math@gmail.com

де $|x'|$ знову — невеликий правильний дріб. і застосувати інше перетворення:

$$\sqrt[k]{A} = \frac{a}{\sqrt[k]{\dfrac{a^k}{A}}} = a \cdot (1 + x')^{-\frac{1}{k}},$$

після чого застосувати біноміальний ряд, прийнявши $m = -\dfrac{1}{k}$.

Для прикладу, обчислимо з великою точністю $\sqrt{2}$, виходячи з його наближеного значення 1,4. З цією метою перетворимо корінь використовуючи один із вказаних двох зразків:

$$\sqrt{2} = 1{,}4 \cdot \sqrt{\frac{1}{1{,}96}} = 1{,}4 \cdot \sqrt{1 + \frac{0{,}04}{1{,}96}} = 1{,}4 \cdot \left(1 + \frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$$

або

$$\sqrt{2} = \frac{1{,}4}{\sqrt{\dfrac{1{,}96}{2}}} = \frac{1{,}4}{\sqrt{1 - \dfrac{0{,}04}{2}}} = 1{,}4 \cdot \left(1 - \frac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Для спрощення обчислень природнім буде обрати другий шлях. Отже, маємо:

$$\sqrt{2} = 1{,}4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{50} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{50^2} + \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{50^3} + \frac{35}{128} \cdot \frac{1}{50^4} + \frac{63}{256} \cdot \frac{1}{50^5} + \ldots\right).$$

Обмежимося виписаними членами; усі вони можуть бути представлені у вигляді скінченних десяткових дробів:

$$\begin{array}{r l}
1 + \cdots + \dfrac{5}{16} \cdot \dfrac{1}{50^3} & = 1{,}010\,152\,5 \\
\dfrac{35}{128} \cdot \dfrac{1}{50^4} & = 0{,}000\,000\,043\,75 \\
\dfrac{63}{256} \cdot \dfrac{1}{50^5} & = 0{,}000\,000\,000\,787\,5 \\
\hline
\end{array}$$

$$1{,}010\,152\,544\,537\,5 \times 1{,}4 = 1{,}414\,213\,562\,352\,50.$$

Оскільки коефіцієнти при степенях $\dfrac{1}{50}$ спадають, то поправка може бути оцінена, як зазвичай:

$$\Delta < 1{,}4 \cdot \frac{231}{1024 \cdot 50^6} \cdot \left(1 + \frac{1}{50} + \frac{1}{50^2} + \ldots\right) = \frac{1{,}4 \cdot 231}{1024 \cdot 50^5 \cdot 49} < \frac{2{,}1}{10^{11}}.$$

Тому

$$1{,}414\,213\,562\,352 < \sqrt{2} < 1{,}414\,213\,562\,373,$$

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562\,3\ldots;$$

усі десять знаків після коми — вірні.

Скориставшись перетворенням

$$\sqrt{2} = 1{,}41\left(1 - \frac{119}{20\,000}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

легко отримати значно більшу кількість знаків.

Наведемо ще декілька прикладів схожих перетворень (надаючи змогу читачеві провести обчислення за допомогою біноміального ряду самостійно):

$$\sqrt{3} = 1{,}73\cdot\left(1 - \frac{71}{30\,000}\right)^{-\frac{1}{2}}; \quad \sqrt{11} = \frac{10}{3}\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}\left(1 + \frac{3}{125}\right)^{\frac{1}{3}}; \quad \sqrt[3]{3} = \frac{10}{7}\left(1 + \frac{29}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

413. Перетворення Ойлера

Використовуючи ряд для наближених обчислень, часом виявляється зручно попередньо застосувати до нього *перетворення*. Так називається заміна даного збіжного ряду — згідно з тим чи іншим правилом — іншим рядом з тією ж сумою. Звичайно, застосовувати таке перетворення доречно лише у тому випадку, якщо новий ряд швидше збігається і є зручнішим для обчислень.

Виведемо формулу для класичного перетворення, що названа на честь Ойлера. Нехай дано збіжний ряд

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k x^k = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \ldots + (-1)^k a_k x^k + \ldots, \tag{413.1}$$

де $x > 0$. Ми лише для зручності зображаємо k-й коефіцієнт у вигляді $(-1)^k a_k$, зовсім не припускаючи що усі $a_k > 0$. Для варіанти a_k $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ ми введемо до розгляду послідовні *різниці* (на зразок того, як ми робили це у розд. 122 по відношенню до функції $f(x)$ від аргументу x, що неперервно змінюється):

$$\Delta a_k = a_{k+1} - a_k, \quad \Delta^2 a_k = \Delta a_{k+1} - \Delta a_k = a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k$$

і, взагалі,

$$\Delta^p a_k = \Delta^{p-1} a_{k+1} - \Delta^{p-1} a_k = a_{k+p} - C_p^1 a_{k+p-1} + C_p^2 a_{k+p-2} - \ldots + (-1)^p a_k. \tag{413.2}$$

Перепишемо даний ряд так:

$$S(x) = \frac{a_0}{1+x} - \frac{a_1 x - a_0 x}{1+x} + \frac{a_2 x^2 - a_1 x^2}{1+x} - \frac{a_3 x^3 - a_2 x^3}{1+x} + \ldots$$

Це можна зробити, оскільки k-та часткова сума нового ряду відрізняється від аналогічної суми ряду (413.1) лише доданком $\frac{1}{1+x}\cdot(-1)^{k+1}\cdot a_{k+1}\cdot x^{k+1}$, що прямує до 0 при $k\to\infty$, оскільки ряд (413.1) збіжний (теор. 364.5). Введемо тепер різниці для спрощення запису:

$$S(x)=\frac{1}{1+x}(a_0-\Delta a_0\cdot x+\Delta a_1\cdot x^2-\Delta a_2\cdot x^3+\dots).$$

Зберігаючи перший член $\frac{a_0}{1+x}$, решту ряду

$$-\frac{x}{1+x}(\Delta a_0-\Delta a_1\cdot x+\Delta a_2\cdot x^2-\dots)$$

перепишемо, як і $S(x)$ у формі

$$-\frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{1+x}(\Delta a_0-\Delta^2 a_0\cdot x+\Delta^2 a_1\cdot x^2-\dots),$$

так, що якщо знову виділити перший член, матимемо:

$$S(x)=\frac{a_0}{1+x}-\frac{\Delta a_0}{(1+x)^2}\cdot x+\frac{x^2}{(1+x)^2}(\Delta^2 a_0-\Delta^2 a_1\cdot x+\dots).$$

Продовжуючи далі, після p кроків отримаємо:

$$S(x)=\frac{a_0}{1+x}-\frac{\Delta a_0}{(1+x)^2}\cdot x+\frac{\Delta^2 a_0}{(1+x)^3}\cdot x^2-\dots+(-1)^{p-1}\frac{\Delta^{p-1}a_0}{(1+x)^p}\cdot x^{p-1}+R_p(x), \quad (413.3)$$

де

$$R_p(x)=(-1)^p\frac{x^p}{(1+x)^p}(\Delta^p a_0-\Delta^p a_1 x+\Delta^p a_2 x^2-\dots)=(-1)^p\frac{x^p}{(1+x)^p}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\Delta^p a_k x^k.$$

Звернемося до доведення того, що $R_p(x)$ при $p\to\infty$ прямує до 0.

Замінивши p-ту різницю $\Delta^p a_k$ її розкладом (413.2) та переставивши знаки суми отримаємо

$$R_p(x)=\frac{1}{(1+x)^p}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+p}x^{k+p}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i C_p^i a_{k+p-i}=$$
$$=\frac{1}{(1+x)^p}\sum_{i=0}^{p}C_p^i x^i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+p-i}\cdot a_{k+p-i}\cdot x^{k+p-i}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо ввести позначення для **залишку** початкового ряду (413.1), прийнявши

$$r_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+n}\cdot a_{k+n}\cdot x^{k+n}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \dots),$$

тоді вираз для $R_p(x)$ остаточно можна записати у вигляді

$$R_p(x)=\frac{\sum\limits_{i=0}^{p}C_p^i x^i\cdot r_{p-i}(x)}{(1+x)^p}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{p}C_p^i x^{p-i}\cdot r_i(x)}{(1+x)^p},$$

і, оскільки $r_n(x)\to 0$, то і $R_p(x)\to 0$ (насл. 391.2.6).

Переходячи у (413.3) до границі при $p\to\infty$, знайдемо, що

$$S(x)=\frac{1}{1+x}\left[a_0-\Delta a_0\cdot\frac{x}{1+x}+\Delta^2 a_0\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^2-\dots+(-1)^p\Delta^p a_0\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^p+\dots\right].$$

Підставляючи замість $S(x)$ його вираз (413.1), ми і прийдемо до *перетворення Ойлера*:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k x^k=\frac{1}{1+x}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\cdot\Delta^p a_0\cdot\left(\frac{x}{1+x}\right)^p. \tag{413.4}$$

Найчастіше його застосовують при $x=1$; тоді воно перетворює числовий ряд знову ж таки у числовий:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\Delta^p a_0}{2^{p+1}}. \tag{413.5}$$

414. Приклади

1) Нехай $a_k=\dfrac{1}{z+k}$, де z — будь-яке постійне число, відмінне від $0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \dots$. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z+k},$$

якщо відкинути у ньому достатню кількість перших членів, задовольняє теорему Ляйбніца, а отже, збігається.

Легко обчислюються послідовні різниці $\Delta a_k,\ \Delta^2 a_k,\ \dots$, і за допомогою математичної індукції знаходимо:

$$\Delta^p a_k=(-1)^p\frac{p!}{(z+k)(z+k+1)\cdot\dots\cdot(z+k+p)};$$

зокрема,

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \frac{p!}{z(z+1)\cdot \ldots \cdot (z+p)}.$$

Отже, згідно з формулою (413.5),

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z+k} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{p!}{z(z+1)\cdot \ldots \cdot (z+p)}.$$

Якщо прийняти тут $z = 1$, то вийде перетворення відомого ряду для $\ln 2$:

$$\ln 2 = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Читачеві зрозуміло, що другим рядом для наближеного обчислення $\ln 2$ користуватися значно вигідніше; щоб отримати точність 0,01, у першому ряді потрібно було б 99 членів, тоді як у другому достатньо було б взяти 5 членів!

2) Нехай $a_k = \dfrac{1}{z+2k}$ (z не дорівнює $0,\ -2,\ -4,\ \ldots$). Виразивши a_k у вигляді

$$a_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{z}{2}+k},$$

для обчислення $\Delta^p a_0$ ми можемо скористатися вже відомою формулою:

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{p!}{\frac{z}{a}\left(\frac{z}{2}+1\right)\cdot \ldots \cdot \left(\frac{z}{2}+p\right)} = (-1)^p \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{p+1}\cdot p!}{z(z+2)\cdot \ldots \cdot (z+2p)}.$$

У цьому випадку перетворення Ойлера матиме вигляд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{z+2k} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!}{z(z+2)\cdot \ldots \cdot (z+2p)}.$$

Зокрема, при $z = 1$ звідси виходить перетворення ряду Ляйбніца, що виражає $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!}{(2p+1)!!}.$$

3) Для $0 \leqslant x \leqslant 1$ ми мали розклад (404.7)

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Бажаючи застосувати до цього загального ряду перетворення Ойлера, підставимо у (413.4) $a_k = \dfrac{1}{2k+1}$; тоді для $\Delta^p a_0$ можна застосувати формулу з попереднього прикладу (при $z = 1$):

$$\Delta^p a_0 = (-1)^p \frac{2p!!}{(2p+1)!!}.$$

Окрім того, замінимо у (413.4) x на x^2 і обидві частини рівності домножимо на x. В результаті отримаємо

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} = \frac{x}{1+x^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2p!!}{(2p+1)!!} \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right)^p. \tag{414.1}$$

4) Не слід думати, що перетворення Ойлера збіжного ряду **завжди** приводить до покращення збіжності. (При цьому, порівнюючи швидкість збіжності двох рядів $\sum c_k$ та $\sum c'_k$ з членами довільних знаків, ми, як і в пр. 375.7, виходимо з поведінки відношення їх відповідних залишків γ_n та γ'_n: якщо $\left| \dfrac{\gamma_n}{\gamma'_n} \right| \to 0$, то перший ряд збігається **швидше**, а другий — **повільніше**.)

Ось приклади:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k} \text{ переходить у ряд, що збігається } \textbf{швидше}\text{: } \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^p},$$

а

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \text{ переходить у ряд, що збігається } \textbf{повільніше}\text{: } \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^p.$$

5) Використовуючи перетворення ряду з метою обчислень, часто буває вигідно перші декілька членів ряду обчислити **безпосередньо** і перетворення застосувати лише для **залишку** ряду. Проілюструємо це на прикладі обчислення числа π за допомогою ряду, виведеного в пр. 414.2:

$$\pi = 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2p+1)} + \ldots \right).$$

Оскільки відношення наступного члена ряду до попереднього $\dfrac{p}{2p+1} < \dfrac{1}{2}$, то *залишок, що відкидається, завжди буде меншим за останній* ***обчислений*** *член.* Наприклад, ми отримаємо шість вірних знаків після коми для числа π, обчисливши 21 член написаного ряду, бо 21-й член

$$2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 20}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 41} = 0{,}000\,000\,37\ldots < 0{,}000\,000\,5.$$

Якщо ж, скажімо, перші сім членів оригінального ряду обчислити безпосередньо, і лише залишок після 7-го члена перетворити, ми отримаємо

$$\begin{aligned}\pi =&4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)-\\&-2\left(\frac{1}{15}+\frac{1\cdot 2}{15\cdot 17}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{15\cdot 17\cdot 19}+\ldots+\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot p}{15\cdot 17\cdot\ldots\cdot(15+2p)}+\ldots\right).\end{aligned}$$

Тут уже восьмий член ряду у дужках менший за порогове значення:

$$2\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{15\cdot 17\cdot\ldots\cdot 29}=0{,}000\,000\,2\ldots$$

і для досягнення тієї ж точності достатньо, окрім 7 збережених членів, обчислити ще 8, тобто всього 15 замість 21 у попередньому випадку!

415. Перетворення Куммара

Ми бачили, що перетворення Ойлера, що базується на точно сформульованому правилі, приводить до однозначного результату, щоправда, не завжди вигідному (пр. 414.4). Метод перетворення рядів, що був запропонований Куммаром (нім. Ernst Kummer, Е́рнст Ку́ммар), допускає більше свободи для творчого підходу обчислювача, але зате він є більш цілеспрямованим, у плані спрощення наближеного обчислення. Ми обмежимося викладанням ідеї, що лежить в основі методу, і проілюструємо його деякими прикладами.

Нехай дано **збіжний** ряд

$$A^{(1)}+A^{(2)}+\ldots+A^{(k)}+\ldots \tag{415.1}$$

і потрібно обчислити його суму із заданим наближенням. Очевидно, що $A^{(k)}\to 0$ при $k\to\infty$. Виберемо іншу нескінченно малу $a_1^{(k)}$, еквівалентну до $A^{(k)}$ (розд. 62), так щоб ряд

$$a_1^{(1)}+a_1^{(2)}+\ldots+a_1^{(k)}+\ldots$$

не тільки збігався до скінченної суми A_1, але й щоб ця сума легко обчислювалась. Якщо прийняти

$$A^{(k)}-a_1^{(k)}=\alpha_1^{(k)},$$

то

$$\alpha_1^{(k)}=o\left(A^{(k)}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}A^{(k)}=\sum_{k=1}^{\infty}a_1^{(k)}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_1^{(k)}=A_1+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_1^{(k)},$$

і обчислення суми початкового ряду зводиться до обчислення суми **перетвореного** ряду, члени якого заздалегідь швидше прямують до нуля.

Наприклад, бажаючи обчислити суму ряду $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{k^2}$, ми згадуємо про ряд $\sum\limits_1^\infty \frac{1}{k(k+1)}$ із сумою 1 (пр. 25.9) і зазначимо, що (при $k \to \infty$)

$$\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}.$$

Оскільки різниця

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k^2(k+1)},$$

то

$$\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_1^\infty \frac{1}{k^2(k+1)},$$

і перетворений ряд виявляється більш вигідним для обчислення.

Вказаний процес можна повторити, взявши нову нескінченно малу $a_2^{(k)}$, еквівалентну до $\alpha_1^{(k)}$, так щоб ряд

$$a_2^{(1)} + a_2^{(2)} + \ldots + a_2^{(k)} + \ldots$$

збігався до скінченної та легко обчислюваної суми A_2. Ми зведемо обчислення суми початкового ряду, згідно з формулою

$$\sum_{k=1}^\infty A^{(k)} = A_1 + A_2 + \sum_{k=1}^\infty \alpha_2^{(k)},$$

до обчислення суми останнього ряду, члени якого

$$\alpha_2^{(k)} = \alpha_1^{(k)} - a_2^{(k)} = o\left(\alpha_1^{(k)}\right)$$

прямують до нуля швидше, ніж $\alpha_1^{(k)}$.

Повторивши процес p разів, прийдемо до формули

$$\sum_{k=1}^\infty A^{(k)} = A_1 + A_2 + \cdots + A_p + \sum_{k=1}^\infty \alpha_p^{(k)}, \tag{415.2}$$

де

$$A_i = \sum_{k=1}^\infty a_i^{(k)} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

по суті, є відомими сумами послідовно виділених рядів, і зведемо справу до обчислення суми ряду $\sum\limits_{1}^{\infty} \alpha_p^{(k)}$.

Так, у наведеному вище прикладі обчислення суми ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ можна піти далі:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + 2! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)},$$

отже

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + 2! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)};$$

потім

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + 3! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

тощо.

Після p кроків отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{p^2} + p! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1) \cdot \ldots \cdot (k+p)}. \tag{415.3}$$

При цьому ми постійно користуємося вже відомою нам формулою

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1) \cdot \ldots \cdot (k+p-1)(k+p)} = \frac{1}{p \cdot p!}$$

(що виходить із виведеного в пр. 363.4 співвідношення при $\alpha = 0$).

Отже, обчислення суми повільно збіжного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ зводиться до обчислення суми перших p його членів та суми **швидко збіжного** — вже при помірних значеннях p — перетвореного ряду.

Наведемо ще один більш складний приклад.

Позначимо через S_p (p — натуральне) суму ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2 \cdot \ldots \cdot (k+p-1)^2}.$$

При невизначеному **поки що** y матимемо

$$\frac{k+y}{k^2(k+1)^2 \cdot \ldots \cdot (k+p-1)^2} - \frac{k+1+y}{(k+1)^2(k+2)^2 \cdot \ldots \cdot (k+p)^2} =$$
$$= \frac{(2p-1)k^2 + p(p+2y)k + yp^2}{k^2(k+1)^2 \cdot \ldots \cdot (k+p-1)^2(k+p)^2}.$$

Звідси видно, що (при $k \to \infty$)

$$\frac{1}{2p-1}\left(\frac{k+y}{k^2(k+1)^2\cdot \ldots \cdot (k+p-1)^2} - \frac{k+1+y}{(k+1)^2(k+2)^2\cdot \ldots \cdot (k+p)^2}\right) \sim$$
$$\sim \frac{1}{k^2(k+1)^2\cdot \ldots \cdot (k+p-1)^2}.$$

Якщо замінити члени ряду S_p цими еквівалентними їм **різницями**, то вийде ряд з сумою, що легко обчислити

$$\frac{1}{2p-1}\cdot\frac{1+y}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot p)^2}.$$

Додатковий (“перетворений”) ряд буде мати загальний член

$$\frac{\left(2p - \frac{p}{2p-1}(p+2y)\right)k + \left(p^2 - \frac{yp^2}{2p-1}\right)}{k^2(k+1^2)\cdot \ldots \cdot (k+p)^2}.$$

От тепер ми скористаємося довільним характером y і виберемо його так, щоб у чисельнику тут зник член, що містить k:

$$y = \frac{3p}{2} - 1.$$

Враховуючи все сказане, отримаємо для ряду S_p таку формулу перетворення

$$S_p = \frac{3p}{2(2p-1)(p!)^2} + \frac{p^3}{2(2p-1)}\cdot S_{p+1}. \tag{415.4}$$

Звідси, послідовно підставляючи замість p значення $1,\ 2,\ \ldots,\ p$, матимемо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = S_1 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}S_2,\\ \frac{1}{2}S_2 &= \frac{3}{2\cdot 2^2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{(2!)^3}{2^2\cdot 3!!}S_3,\\ &\ldots\\ \frac{[(p-1)!]^3}{2^{p-1}(2p-3)!!}S_p &= \frac{3}{p\cdot 2^p}\cdot\frac{(p-1)!}{(2p-1)!!} + \frac{(p!)^3}{2^p\cdot(2p-1)!!}\cdot S_{p+1}, \end{aligned} \tag{415.5}$$

Нарешті, додаючи почленно усі ці рівності, прийдемо до результату

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 2^3}\cdot\frac{2!}{5!!} + \ldots + \frac{1}{p\cdot 2^p}\cdot\frac{(p-1)!}{(2p-1)!!}\right) + \\ + \frac{(p!)^3}{2^p\cdot(2p-1)!!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)^2\cdot \ldots \cdot (k+p)^2}. \end{aligned} \tag{415.6}$$

Взявши, наприклад. $p = 5$ і зберігши у перетвореному ряді також 5 членів, можна обчислити суму початкового ряду з точністю до 10^{-7}.

416. Перетворення Маркова

Перетворення даного **збіжного** ряду (415.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = A,$$

вказаний Марковим (рос. Andrey Markov, Андрі́й Ма́рков), також залишає багато свободи обчислювачу. Розкладаючи кожний член $A^{(k)}$ тим чи іншим чином у **збіжний** ряд:

$$A^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}.$$

Із членів усіх цих рядів складається нескінченна прямокутна матриця з двома входами (порівняйте з (393.1))

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & \multicolumn{7}{l}{\xrightarrow{\hspace{6cm}}} \\
A^{(1)} & a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \ldots & a_i^{(1)} & \ldots \\
A^{(2)} & a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \ldots & a_i^{(2)} & \ldots \\
A^{(3)} & a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & \ldots & a_i^{(3)} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\
A^{(k)} & a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} & \ldots & a_i^{(k)} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & \downarrow
\end{array} \tag{416.1}$$

так, що шукане число A виявляється сумою **повторного ряду**

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)},$$

що відповідає цій матриці. Припускаючи, далі, ще збіжність усіх рядів по стовпцям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A_i,$$

Марков встановлює умову, що є необхідною та достатньою для того, щоб ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ збігався до тієї ж суми A. *Перетворення Маркова* і полягає в заміні одного повторного ряду іншим:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Достатні умови для застосування перетворення Маркова даються, наприклад у теор. 393.3. (Сама теорема Маркова, втім, значно ширше, бо не припускає, що згадані у ній ряди є **абсолютно** збіжними.)

Прикладом застосування перетворення Маркова може бути ряд з пр. 395.13. Ідеться про ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$; його k-й член виражається у вигляді суми, на цей раз, **скінченної** кількості членів

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2} &= a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + \ldots + a_{k-1}^{(k)} + r_k = \\ &= (k-1)!\left[\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k+1)} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k+2)} + \ldots + \frac{1}{(k-1)k\cdot\ldots\cdot(2k-1)}\right] + \\ &+ \frac{(k-1)!}{k^2(k+1)\cdot\ldots\cdot(2k-1)}.\end{aligned}$$

Потім підраховується сума по стовпцям, яка і приводить до згаданого співвідношення (дивіться пр. 395.4).

Цікаво зазначити, що, якщо скористатися розкладом

$$\frac{1}{k^2} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(k-1)!}{i(i+1)\cdot\ldots\cdot(i+k)}$$

то перетворення Маркова, як вже підкреслювалося в пр. 395.4, нічого нового не дасть, бо просто поверне нас до початкового ряду.

Побудову матриці (416.1) можна зв'язати з повторним застосуванням перетворення Куммара. Про це вже йшлося раніше (дивіться (415.2)), але там процес Куммара повторювався лише скінченне число разів, а тут ми уявно продовжуємо його до нескінченності. При цьому, кожного разу слід лише перевірити, що “додатковий член” формули (415.2) прямує до нуля при $p\to\infty$:

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_p^{(k)} = 0.$$

Для того, щоб переконатися у цьому, наприклад по відношенню до (415.6), зазначимо, що сума, що фігурує у додатковому члені не перевищує вираз

$$\frac{1}{(p!)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

отже і весь додатковий член не перевищує величину

$$\frac{p!}{2^p(2p-1)!!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

і, очевидно, прямує до нуля при $p \to \infty$. Переходячи до границі у (415.6), прийдемо до рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 2^3}\cdot\frac{2!}{5!!} + \ldots + \frac{1}{p\cdot 2^p}\cdot\frac{(p-1)!}{(2p-1)!!} + \ldots\right] = \\ = 3\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p\cdot 2^p}\cdot\frac{(p-1)!}{(2p-1)!!},$$

яка, як нескладно побачити, є тотожною з рівністю (395.3).

Однак, схожий граничний перехід зовсім не завжди приводить до корисного результату: якщо, наприклад, здійснити його у рівності (415.3), то просто отримаємо тотожність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}.$$

Отже, перетворення, запропоноване Марковим, дає дуже загальну схему, пропонуючи обчислювачу широкі можливості, але й вимагаючи від нього майстерності.

11.9. Підсумовування розбіжних рядів

417. Вступ

Досі на протязі цієї глави *сумою* заданого числового ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \tag{A}$$

ми називали *границю його часткової суми*

$$A = \lim A_n,$$

припускаючи, що ця границя існує і є скінченною (або ж дорівнює нескінченності певного знака). Розбіжний ряд з "коливаннями" для нас завжди виявлявся позбавленим суми, і такі ряди ми систематично не брали до розгляду.

Різноманітні факти з області математичного аналізу, як, наприклад, розбіжність добутку двох збіжних рядів (розд. 392), природним чином у другій половині XIX століття підняли питання можливості *підсумовування розбіжних рядів* у деякому **новому** розумінні, що, звісно, відрізняється від звичного. Деякі методи такого "підсумовування" виявилися особливо плідними; їх ми розглянемо детальніше.

Варто зазначити, що до створення Коші строгої теорії границь (і пов'язаної із нею теорії рядів) розбіжні ряди нерідко зустрічалися у математичній практиці. Хоча їх застосування на практиці і піддавалось критиці, але подекуди робились спроби надати їм навіть числовий зміст. Так, "сумі" ряду, що коливається

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

ще з часів Ляйбніца приписувалось число $\frac{1}{2}$. Ойлер, наприклад, мотивував це тим, що із розкладу

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

(який насправді справедливий лише для $|x| < 1$) при підстановці одиниці замість x якраз і виходить

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots.$$

У цьому вже містилось зерно істини, але постановці питання не вистачало точності; сама свобода у виборі розкладу залишала можливість, скажімо, із іншого розкладу (де n та m — довільні, але $m < n$)

$$\frac{1 + x + \dots + x^{m-1}}{1 + x + \dots + x^{n-1}} = \frac{1 - x^m}{1 - x^n} = 1 - x^m + x^n - x^{n+m} + x^{2n} - \dots$$

отримати водночас

$$\frac{m}{n} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots .$$

Сучасний аналіз ставить питання по-іншому. В основу закладається те чи інше точно сформульоване означення "узагальненої суми" ряду, не вигадане лише для одного конкретного числового ряду, але таке, що можна застосувати до цілого класу таких рядів. Законність цього не може викликати сумніви: читач повинен пам'ятати, що навіть звичайне поняття "суми ряду", наскільки простим та природним воно здається, також було введене на основі умовно прийнятого визначення, що виправдовувалось лише доцільністю! Означення "узагальненої суми" зазвичай підпорядковується двом вимогам.

По-перше, *якщо ряду* $\sum a_n$ *приписується "узагальнена сума"* A*, а ряду* $\sum b_n$ *— "узагальнена сума"* B*, то ряд* $\sum pa_n + qb_n$*, де* p*,* q *— дві довільні сталі, повинен мати "узагальнену суму", що дорівнює числу* $pA + qB$. Метод підсумовування, що задовольняє цю вимогу, називається *лінійним*.

По-друге, нове означення повинне вміщувати звичайне означення як окремий випадок. Точніше кажучи, *ряд, що збігається у звичайному розумінні до суми* A*, повинен мати "узагальнену суму", яка також дорівнює* A. Метод підсумовування, що має цю властивість, називають *регулярним*. Звісно, нас цікавлять лише такі регулярні методи, які дають змогу визначати "суму" в більш широкому класі випадків, ніж звичайний метод підсумовування: лише тоді з повним правом можна говорити про "узагальнене підсумовування".

Ми переходимо тепер безпосередньо до розглядання двох особливо важливих з точки зору застосування методів "узагальненого підсумовування".

418. Метод степеневих рядів

Цей метод належить Пуассону (фр. Siméon Denis Poisson, Сімео́н Пуассо́н). Він зробив першу спробу застосувати його до тригонометричних рядів. Цей метод полягає у наступному.

По даному числовому ряду (A) *будується степеневий ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots ; \tag{418.1}$$

якщо цей ряд для $0 < x < 1$ *збігається і його сума* $f(x)$ *при* $x \to 1 - 0$ *має границю* A*:*

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = A,$$

то число A *і називають "узагальненою сумою (Пуассона)" даного ряду.*

Приклади.

1) Ряд, розглянутий Ойлером:

$$1-1+1-1+1-1+\dots,$$

тут вже **за самим означенням** приводить до степеневого ряду, сума якого $\dfrac{1}{1+x}$ при $x \to 1{-}0$ прямує до границі $\frac{1}{2}$. Отже, число $\frac{1}{2}$, справді виявляється “узагальненою сумою” вказаного ряду у даному тут сенсі.

2) Візьмемо більш загальний приклад: тригонометричний ряд

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\theta \tag{418.2}$$

є розбіжним при усіх значеннях θ, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Справді, якщо θ має вигляд $\frac{p}{q}\pi$, де p та q — натуральні числа, то для значень n, що є кратними q, буде

$$\cos n\theta = \pm 1,$$

отже порушена необхідна умова збіжності ряду. Якщо ж відношення $\dfrac{\theta}{\pi}$ є ірраціональним, то, розкладаючи його у нескінченний **неперервний** дріб і **підбираючи** дроби $\dfrac{m}{n}$, матимемо, як відомо,

$$\left|\frac{\theta}{\pi}-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{n^2},$$

звідки

$$|n\theta - m\pi| < \frac{\pi}{n}.$$

Тож, для нескінченної множини значень n

$$|\cos n\theta \pm 1| < \frac{\pi}{n}$$

і

$$|\cos n\theta| > 1-\frac{\pi}{n}.$$

Це також свідчить про порушення необхідної умови збіжності.

Якщо сформувати степеневий ряд

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\theta \quad (0<r<1)$$

(тут літера r заміняє попередню літеру x), то його сума при значенні θ, відмінному від 0, буде

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \tag{418.3}$$

(дивіться (440.2)) і при $r \to 1-0$ прямує до 0. Отже, для $\theta \neq 0$ “узагальненою сумою” ряду буде 0. Якщо $\theta = 0$, то ряд (418.2), очевидно, має суму, що дорівнює $+\infty$; втім, і вираз (418.3), який у цьому випадку зводиться до $\frac{1}{2} \cdot \frac{1+r}{1-r}$, також прямує до $+\infty$.

3) Аналогічно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \quad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi),$$

який збігається лише при $\theta = 0$ або $\pm\pi$, приводить до степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

(пр. 461.6), отже “узагальнена сума” цього разу дорівнюватиме $\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\theta$ при $\theta \neq 0$ і нулю при $\theta = 0$.

Безпосередньо видно, що розгляданий метод “узагальненого підсумовування” є **лінійним**. Стосовно ж **регулярності** цього методу, то вона доводиться за допомогою наступної теореми, що належить Абелю.

Теорема 418.1 (Теорема Абеля). *Якщо ряд* (A) *збігається та має суму* A *(у звичайному розумінні), то для* $0 < x < 1$ *збігається і степеневий ряд* (418.1)*, і його сума прямує до границі* A*, коли* $x \to 1-0$

(Ця теорема була доведена Абелєм у його дослідженнях теорії біноміального ряду. Ми повернемося до неї у теор. 437.6. Немає сумнівів, що саме вона привела до загального формулювання методу “узагальненого підсумовування”, який Пуассоном був застосований лише у окремому випадку. У зв’язку з цим і сам метод часто називають **методом Абеля**, хоча самому Абелю ідея “підсумовування” рядів була у вищій мірі неприйнятною. Ми будемо надалі говорити про цей метод, як *метод Пуассона – Абеля.*)

Доведення. Передусім, зрозуміло (розд. 379), що радіус збіжності ряду (418.1) не менший за 1, отже для $0 < x < 1$ ряд (418.1) справді збігається. Ми мали вже тотожність

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

(де $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$) (дивіться пр. 385.6 або пр. 390.4); віднімемо її почленно із очевидної тотожності

$$A = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} A x^n.$$

Підставляючи $A - A_n = \alpha_n$, прийдемо до тотожності

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n. \tag{418.4}$$

Оскільки $\alpha_n \to 0$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що $|\alpha_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$, як тільки $n > N$.

Розіб'ємо суму ряду у правій частині (418.4) на дві суми

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N} \alpha_n x^n \quad \text{та} \quad (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n x^n.$$

Друга оцінюється одразу і незалежно від x:

$$\left|(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n x^n\right| \leqslant (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_n| x^n < \frac{\varepsilon}{2}\cdot(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Що ж до першої, то вона прямує до 0 при $x \to 1$ і при достатній наближеності x до 1 буде

$$\left|(1-x)\sum_{n=0}^{N} \alpha_n x^n\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

отже остаточно

$$\left|A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right| < \varepsilon,$$

що і доводить дане твердження. □

419. Теорема Таубера

Якщо сума ряду (A) може бути обчислена методом Пуассона – Абеля і дорівнює A, то у звичному значенні, як ми бачили, цей ряд може і не мати суми. Іншими словами, із існування границі

$$\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A, \tag{419.1}$$

взагалі кажучи, не випливає збіжність ряду (A). Звичайно виникає питання, які додаткові умови слід накласти на поведінку членів цього ряду, щоб із (419.1) можна було зробити висновок про збіжність ряду (A), тобто існування для нього суми A у звичному значенні.

Перша теорема у цьому напрямку була доведена Таубером (словац. Alfred Tauber, Альфре́д Та́убер).

Теорема 419.1. *Нехай ряд* (418.1) *збігається при* $0 < x < 1$*, і виконується гранична рівність* (419.1)*. Якщо члени ряду* (A) *такі, що*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n} = 0, \tag{419.2}$$

то і

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

Доведення. Доведення розіб'ємо на дві частини. Спочатку припустимо, що

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0 \quad \text{або} \quad a_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(Звідси, за відомою теоремі Коші (теор. 33.2), вже випливає виконання умови (419.2), але не навпаки, так що ми виходимо тепер з **більш часткового** припущення, ніж (419.2).)

Позначимо

$$\delta_n = \max_{k\geqslant n} |ka_k|;$$

при $n \to \infty$ величина δ_n монотонно спадає і прямує до нуля.

Для будь-якого натурального N маємо

$$\sum_{n=0}^{N} a_n - A = \sum_{n=0}^{N} a_n(1 - x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right).$$

Далі, користуючись очевидними нерівностями для $0 < x < 1$:

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) < n(1 - x)$$

та

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n = \frac{x^{N+1}}{1 - x} < \frac{1}{1 - x},$$

маємо

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |na_n|(1 - x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|na_n| x^n}{n} + \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right| \leqslant$$
$$\leqslant (1 - x)N\delta_0 + \frac{\delta_{N+1}}{(N + 1)(1 - x)} + \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right|.$$

Взявши довільно мале число $\varepsilon > 0$, покладемо

$$(1 - x)N = \varepsilon \quad \text{або} \quad x = 1 - \frac{\varepsilon}{N},$$

так що $x \to 1$, коли $N \to \infty$. Візьмемо тепер N досить великим, щоб виконувалася нерівність $\delta_{N+1} < \varepsilon^2$ та відповідне x було настільки близько до 1, що

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right| < \varepsilon.$$

Тоді

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n - A\right| < (2+\delta_0)\cdot\varepsilon,$$

що й доводить твердження теореми.

До розглянутого окремого випадку теореми зводиться і загальний випадок. Нехай

$$v_0 = 0, \quad v_n = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n \quad (n \geqslant 1),$$

тож

$$a_n = \frac{1}{n}(v_n - v_{n-1}) \quad (n \geqslant 1),$$

і далі

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{n-1}}{n} x^n = \\ &= a_0 + (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1}.\end{aligned} \tag{419.3}$$

Але з припущення теореми, тобто з того, що $\frac{v_n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, легко отримати, що

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n} x^n = 0. \tag{419.4}$$

Для доведення цього достатньо розбити тут суму на дві

$$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty} = (1-x)\sum_{n=1}^{N} + (1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty}$$

і вибрати N таким, щоб у другій сумі всі абсолютні значення множників були менше від наперед заданого числа $\varepsilon > 0$, тоді і абсолютне значення другої суми буде менше від ε, хоч би яке було x; щодо першої суми, що складається з певного скінченного числа доданків, того ж можна досягти за рахунок наближення x до 1.

Тож, зважаючи на (419.3), (419.1) та (419.4) маємо

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} x^{n+1} = A - a_0.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Але тут вже можна застосувати доведений частковий випадок теореми, тож і

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n}{n(n+1)} = A - a_0.$$

З іншого боку

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{v_m}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{n} \frac{v_m}{m} - \sum_{m=1}^{n} \frac{v_m}{m+1} = \sum_{m=1}^{n} \frac{v_m}{m} - \sum_{m=1}^{n+1} \frac{v_{m-1}}{m} = -\frac{v_n}{n+1} + \sum_{m=1}^{n} a_m.$$

Звідси, оскільки перший доданок праворуч прямує до нуля

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} a_m = A - a_0,$$

що й завершує доведення теореми. □

Згодом різними авторами було встановлено цілу низку тонких теорем подібного типу з дещо зміненими умовами Таубера. На них ми не будемо зупинятись.

420. Метод середніх арифметичних

Ідея методу в найпростішому його виконанні належить Фробеніусу (нім. Georg Frobenius, Ґеórґ Фробéніус), але його пов'язують зазвичай з ім'ям Чезаро (іт. Ernesto Cesàro, Ернéсто Чезáро), який дав методу подальший розвиток. Ось у чому полягає метод.

За частковими сумами A_n даного числового ряду (A) *будуються їх послідовні середні арифметичні*

$$\alpha_0 = A_0, \quad \alpha_1 = \frac{A_0 + A_1}{2}, \quad \dots, \quad \alpha_n = \frac{A_0 + A_1 + \dots + A_n}{n+1}, \quad \dots;$$

якщо варіанта α_n при $n \to \infty$ має границю A, то це число називають "узагальненою сумою (Чезаро)" даного ряду.

Приклади.

1) Повертаючись до ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

матимемо тут

$$\alpha_{2k} = \frac{k+1}{2k+1}, \quad \alpha_{2k-1} = \frac{1}{2},$$

так що $\alpha_n \to \frac{1}{2}$. Ми прийшли до тієї ж суми, що і за **методом Пуассона – Абеля** (пр. 418.1).

2) Для ряду

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \quad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

часткові суми будуть мати вигляд (якщо тільки $\theta \neq 0$)

$$A_n = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}\,.$$

Тепер не складно порахувати середні арифметичні:

$$(n+1)\alpha_n = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\theta}\sum_{m=0}^{n}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta = \frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}\sum_{m=0}^{n}(\cos m\theta - \cos(m+1)\theta) =$$

$$= \frac{1-\cos(n+1)\theta}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2.$$

Отже, остаточно

$$\alpha_n = frac12(n+1)\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2..$$

Очевидно, $\alpha_n \to 0$; для значень $\theta \neq 0$ “узагальненою сумою” і тут буде 0 (порівняйте з пр. 418.2).

3) Зрештою, знову розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\theta \quad (-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

Маємо при $\theta \neq 0$

$$A_n = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

і потім

$$(n+1)\alpha_n = \frac{n+1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}\sum_{m=1}^{n+1}(\sin(m+1)\theta - \sin m\theta) =$$

$$= \frac{n+1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin(n+2)\theta - \sin\theta}{4\sin^2\frac{1}{2}\theta}\,.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Звідси зрозуміло, що
$$\alpha_n \to \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\theta.$$

У всіх випадках за методом Чезаро вийшла та сама “узагальнена сума”, що і вище, за методом Пуассона – Абеля. Нижче (розд. 421) буде з'ясовано, що це — не випадковість.

Тут також безпосередньо зрозуміла **лінійність** методу. Відома ж теорема Коші (теор. 33.2), у випадку існування границі
$$\lim_{n\to\infty} A_n = A,$$
показує наявність тієї ж границі і для середніх арифметичних α_n. Отже, метод Чезаро є **регулярним**.

421. Взаємини між методами Пуассона – Абеля і Чезаро

Почнемо з простого зауваження.

Твердження 421.1. *Якщо “сума” ряду* (A), *що обчислена методом середніх арифметичних, дорівнює скінченному значенню A, то необхідно*
$$a_n = o(n).$$

Доведення. Справді, з $\alpha_{n-1} \to A$ і $\dfrac{n+1}{n}\alpha_n \to A$ випливає, що
$$\frac{(n+1)\alpha_n - n\alpha_{n-1}}{n} = \frac{A_n}{n} \to 0,$$
а тоді й
$$\frac{a_n}{n} = \frac{A_n}{n} - \frac{n-1}{n}\,\frac{A_{n-1}}{n-1} \to 0,$$
що й потрібно було довести. □

Поставлене в назві розділу питання вирішує наступна теорема, що належить Фробеніусу.

Теорема 421.1. *Якщо “сума” ряду* (A) *за методом середніх арифметичних дорівнює скінченному значенню A, то одночасно можна знайти суму цього ряду за методом Пуассона – Абеля, і ця сума буде дорівнювати A.*

Доведення. Отже, нехай $\alpha_n \to A$. Зважаючи на зроблене на початку зауваження, є очевидною збіжність степеневого ряду
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

для $0 < x < 1$. **Двічі** виконавши перетворення Абеля (дивіться розд. 383 і особливо пр. 385.6), послідовно отримаємо

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\alpha_n x^n$$

(при цьому слід пам'ятати, що $A_0 + A_1 + \ldots + A_n = (n+1)\alpha_n$).

У справедливості цієї тотожності легко переконатися й безпосередньо, відштовхуючись від збіжного, зважаючи на обмеженість α_n, ряду праворуч:

$$\begin{aligned}
&(1-2x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\alpha_n x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)\alpha_n - 2n\alpha_{n-1} + (n-1)\alpha_{n-2}]x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\{[(n+1)\alpha_n - n\alpha_{n-1}] - [n\alpha_{n-1} - (n-1)\alpha_{n-2}]\}x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(A_n - A_{n-1})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.
\end{aligned}$$

(При цьому ми вважаємо $\alpha_{-1} = \alpha_{-2} = A_{-1} = 0$.) Збіжність останнього ряду тут виходить сама собою.

Відомо, що (для $0 < x < 1$)

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

або

$$1 = (1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Помножимо обидві частини цієї тотожності на A і віднімемо з неї почленно попередню тотожність:

$$A - f(x) = (1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(A-\alpha_n)x^n.$$

Суму праворуч розіб'ємо на дві:

$$(1-x)^2\sum_{n=0}^{N-1}(\ldots) + (1-x)^2\sum_{n=N}^{\infty}(\ldots),$$

причому число N виберемо так, щоб при $n > N$ виконувалась (нерівність)

$$|A - \alpha_n| < \varepsilon,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

де ε — довільне наперед задане додатне число. Тоді абсолютне значення другої суми буде менше ε (незалежно від x!), а для першої суми того самого можна досягти за рахунок наближення x до 1. Цим і завершується доведення (порівняйте з доведенням теореми Абеля, теор. 418.1). ☐

Отже, ми показали, що у всіх випадках, де застосовний метод Чезаро, застосовним також буде і метод Пуассона – Абеля з тим самим результатом. Зворотне твердження не вірне: існують ряди, які мають суму за методом Пуассона – Абеля, але які проте не мають "узагальненої суми" за методом Чезаро.

Розглянемо, наприклад, ряд

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots$$

Оскільки тут явно не витримано необхідну умову для обчислення суми за методом середніх арифметичних, зазначене на початку, то цей метод неможливо застосувати. Водночас сума ряду

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots$$

(при $0 < x < 1$) дорівнює $\dfrac{1}{(1+x)^2}$, яка при $x \to 1 - 0$ прямує до границі $\dfrac{1}{4}$. Це і є "узагальнена сума" нашого ряду за методом Пуассона – Абеля.

Отже, метод Пуассона – Абеля є більш потужним: тобто застосовним в ширшому класі випадків, ніж метод Чезаро, але не суперечить йому в тих випадках, коли вони обидва виявляються застосовними.

422. Теорема Харді – Е. Ландау

Як і у разі методу Пуассона – Абеля, для методу Чезаро також можуть бути доведені теореми, схожі на теорему Таубера, що встановлюють ті додаткові умови щодо членів ряду, за наявності яких із підсумовності ряду методом середніх арифметичних випливає його збіжність у звичайному значенні слова.

Зважаючи на теорему Фробеніуса стає очевидно, що кожна нова теорема для методу Пуассона – Абеля приводить, зокрема, до такої самої теореми для методу Чезаро. Наприклад, сама теорема Таубера перефразується тепер так: *Якщо $\alpha_n \to A$ і виконується умова*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0, \qquad (422.1)$$

то водночас і $A_n \to A$. Втім, тут вона безпосередньо випливає з тотожності, яку нескладно перевірити:

$$A_n - \alpha_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n+1}\,.$$

Саме:

$$\begin{aligned}(n+1)A_n-(n+1)\alpha_n &= (n+1)A_n-(A_0+A_1+\dots+A_n)=\\ &=(A_n-A_0)+(A_n-A_1)+\dots+(A_n-A_{n-1})=\\ &=(a_1+a_2+\dots+a_n)+(a_2+\dots+a_n)+a_n=\\ &=a_1+2a_2+\dots+na_n.\end{aligned}$$

Ця тотожність вказує навіть на **необхідність** умови (422.1).

Харді (англ. Godfrey Hardy, Ґóдфрі Хáрді) довів, що перехід від $\alpha_n \to A$ до $A_n \to A$ можна зробити не тільки, якщо $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ (це міститься в попередньому!), але і при більш широкому припущенні, що

$$|ma_m| < C \quad (C = \text{const};\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Е. Ландау (нім. Едмунд Ландау, Éдмунд Ландáу) показав, що можна задовольнитися навіть “однобічнім” виконанням цього співвідношення.

Теорема 422.1 (Теорема Харді – Е. Ландау)**.** *Якщо ряд* (A) *підсумовується до “суми” A за методом середніх арифметичних і при цьому виконується умова*

$$ma_m > -C \quad (C = \text{const};\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

то водночас і

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

Змінюючи знаки всіх членів ряду, бачимо, що достатньо також зробити інше припущення:

$$ma_m < C.$$

Зокрема, теорема, очевидно, може бути застосована до рядів із членами **постійного знака**.]

Доведення. Для доведення розглянемо спочатку суму

$$S = \sum_{m=n+1}^{n+k} A_m,$$

де n, k — довільні натуральні числа. За допомогою тотожного перетворення вона легко зводиться до вигляду

$$S = \sum_{m=0}^{n+k} A_m - \sum_{m=0}^{n} A_m = (n+k+1)\alpha_{n+k} - (n+1)\alpha_n = k\alpha_{n+k} + (n+1)(\alpha_{n+k} - \alpha_n). \quad (422.2)$$

Якщо взяти будь-яке A_m (при $n < m \leqslant n+k$), то, використовуючи припущену нерівність $a_m > -\frac{C}{m}$, можна отримати таку оцінку знизу:

$$A_m = A_n + (a_{n+1} + \dots + a_m) > A_n - \frac{k}{n}C,$$

звідки, підсумовуючи за m, знайдемо

$$S > kA_n - \frac{k^2}{n}C.$$

Звідси, зіставляючи з (422.2), приходимо до такої нерівності:

$$A_n < \alpha_{n+k} + \frac{n+1}{k}(\alpha_{n+k} - \alpha_n) + \frac{k}{n}C. \tag{422.3}$$

Станемо тепер довільно збільшувати n до нескінченності, а змінна k нехай змінюється так, щоб відношення $\frac{r}{n}$ прямувало до наперед заданого числа $\varepsilon > 0$. Тоді права частина нерівності (422.3) прямуватиме до границі $A + \varepsilon C$, тож для досить великих значень n буде

$$A_n < A + 2\varepsilon C. \tag{422.4}$$

Цілком аналогічно, розглядаючи суму

$$S' = \sum_{m=n-k+1}^{n} A_m = k\alpha_{n-k} + (n+1)(\alpha_n - \alpha_{n-k})$$

і зробивши для A_m (при $n - k < m < n$) оцінку зверху:

$$A_m = A_n - (a_{m+1} + \dots + a_n) < A_n + \frac{k}{n-k}C,$$

прийдемо до нерівності

$$S' < kA_n + \frac{k^2}{n-k}C.$$

Звідси

$$A_n > \alpha_{n-k} + \frac{n+1}{k}(\alpha_n - \alpha_{n-k}) - \frac{k}{n-k}C.$$

Якщо $n \to \infty$ і одночасно $\frac{k}{n} \to \varepsilon$, як і раніше, але цього разу нехай $\varepsilon < \frac{1}{2}$, то права частина цієї нерівності прямує до границі $A - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}C > A - 2\varepsilon C$. Отже, для досить великих n виявиться

$$A_n > A - 2\varepsilon C. \tag{422.5}$$

Зіставляючи (422.4) і (422.5), бачимо, що, справді,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Теорему доведено. □

Зауважимо, що схожа теорема була потім доведена і для підсумовування методом Пуассона – Абеля — для неї щойно доведена теорема є частковим наслідком. Але через складність доведення ми його не наводимо.

423. Застосування узагальненого підсумовування до множення рядів

Зупинимося на застосуванні узагальнених методів підсумовування до **множення рядів** за правилом Коші (розд. 389). Розглянемо два ряди: ряд (A) і ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n + \dots ; \tag{B}$$

тоді ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0); \tag{C}$$

називається **добутком** рядів (A) та (B) у формі Коші. Якщо ці ряди збігаються і мають звичайні суми A і B, то ряд (C) все ж може виявитися розбіжним (такий приклад був наведений в пр. 392.2).

Твердження 423.1. *Однак у всіх випадках ряд* (C) *підсумовується методом Пуассона – Абеля і сума дорівнює AB.*

Доведення. Справді, для $0 < x < 1$ ряд (418.1) так само як ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots$$

обидва абсолютно збігаються (розд. 379); позначимо їх суми, відповідно, через $f(x)$ та $g(x)$. Добуток цих рядів, тобто ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) x^n,$$

за класичною теоремою Коші (теор. 389.1) також збігається і має суму, що дорівнює добутку $f(x) \cdot g(x)$. Ця сума при $x \to 1 - 0$ прямує до AB, бо, як ми бачили, порізно

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to 1-0} g(x) = B.$$

Отже, “узагальненою сумою” (за методом Пуассона – Абеля) ряду (C) справді буде AB, що й потрібно було довести. □

Звідси як наслідок виходить теорема Абеля про множення рядів (теор. 392.2). Так само з самого доведення ясно, що *той самий висновок буде вірним, якщо ряди* (A) *і* (B) *— замість того, щоб збігатися у звичайному розумінні — лише підсумовуються методом Пуассона – Абеля і їх суми дорівнюють* A *та* B.

У такому разі, враховуючи теорему Фробеніуса (теор. 421.1), можна зробити таке твердження.

Твердження 423.2. *Якщо ряди* (A), (B) *та* (C) *підсумовуються методом Чезаро і мають відповідно "узагальнені суми"* A, B *та* C, *то необхідно*

$$C = AB.$$

Як приклад розглянемо піднесення до квадрата ряду

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \ldots + (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{2m!!} + \ldots\,,$$

який виходить з біноміального розкладу

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \ldots + (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{2m!!}x^m + \ldots\,,$$

при $x = 1$. Помножуючи вказаний числовий ряд на самого себе, прийдемо до добре відомому нам ряду

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\,,$$

"узагальнена сума" якого, як за методом Пуассона – Абеля, так і за методом Чезаро, буде $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. (Ми користуємося тут числовою тотожністю

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{(2m-1)!!}{2m!!} \frac{(2n-2m-1)!!}{(2n-2m)!!} = 1,$$

де $(-1)!!$ та $0!!$ умовно означають **одиницю**.)

Далі, "піднесемо до квадрата" і цей розбіжний ряд. Ми отримаємо ряд

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots\,,$$

"узагальнена сума" якого за методом Пуассона – Абеля буде $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ (за методом Чезаро цій ряд не підсумовується!).

nebayduzhi.math@gmail.com

424. Інші методи узагальненого підсумовування рядів

1) *Методи* Вороного (укр. Георгій Вороний, Ге́оргій Феодо́сійович Ворони́й). Нехай маємо додатну числову послідовність $\{p_n\}$ і

$$P_0 = p_0, \quad P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n \quad (n > 0).$$

З часткових сум A_n ряду (A) складемо вирази

$$w_n = \frac{p_n A_0 + p_{n-1} A_1 + \dots + p_0 A_n}{P_n}.$$

Якщо $w_n \to A$ при $n \to \infty$, то A називається "узагальненою сумою" ряду (A) за означенням Вороного — для вибраної послідовності $\{p_n\}$.

Лінійність методу як у цьому випадку, так і в наступних — очевидна, і ми на ній не будемо зупинятися.

Твердження 424.1. *Для регулярності методу Вороного необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{P_n} = 0.$$

Доведення. **Необхідність.** Припустимо спочатку регулярність методу: нехай з $A_n \to A$ завжди випливає $w_n \to A$. Якщо, зокрема, взяти ряд

$$1 - 1 + 0 + 0 + 0 + \dots,$$

для якого $A_0 = 1$, а інші $A_n = 0$ (так що і $A = 0$), то необхідно

$$w_n = \frac{p_n}{P_n} \to 0.$$

Достатність. Припустимо тепер, що умова теореми виконана, і доведемо, що з $A_n \to A$ випливає $w_n \to A$.

Звернемося до теореми Тьопліца (теор. 391.1) та замінимо там x_n на A_n та t_{nm} на $\frac{p_{n-m}}{P_n}$. Умова а) цієї теореми виконана, бо

$$t_{nm} = \frac{p_{n-m}}{P_n} < \frac{p_{n-m}}{P_{n-m}} \to 0.$$

Виконання умов б) і в) очевидно, оскільки

$$\sum_{m=0}^{n} |t_{nm}| = \sum_{m=0}^{n} t_{nm} = 1.$$

Отже, як і потрібно було довести, $w_n \to A$. □

2) *Узагальнені методи Чезаро.* Ми вже знайомі (розд. 420) з методом середніх арифметичних; він є найпростішим із нескінченної послідовності методів підсумовування, запропонованих Чезаро. Фіксуючи натуральне число k, Чезаро вводить варіанту

$$\gamma_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{C_{n+k}^k} = \frac{C_{n+k-1}^{k-1}A_0 + C_{n+k-2}^{k-1}A_1 + \ldots + C_{k-1}^{k-1}A_n}{C_{n+k}^k}$$

та розглядає її границю при $n \to \infty$ як “узагальнену суму” (k-го порядку) ряду (A). Якщо $k = 1$, то ми отримуємо метод середніх арифметичних.

Надалі нам не раз знадобиться таке співвідношення між коефіцієнтами C:

$$C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} + \cdots + C_{n+k-1}^{k-1} = C_{n+k}^k; \tag{424.1}$$

воно легко доводиться методом математичної індукції відносно n, якщо виходити із відомого співвідношення

$$C_{n+k}^k = C_{(n-1)+k}^k + C_{n+(k-1)}^{k-1}.$$

Насамперед покажемо, що *методи Чезаро всіх порядків є окремими випадками регулярних методів Вороного.* Для цього достатньо взяти $p_n = C_{n+k-1}^{k-1}$, бо тоді з (424.1) випливає, що $P_n = C_{n+k}^k$, і до того ж, очевидно, що

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{1}{n+k} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

За допомогою тієї ж рівності (424.1), користуючись самим означенням величин $S_n^{(k)}$, можна показати, що

$$S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)} = S_n^{(k)} \tag{424.2}$$

(де $S_n^{(0)} = A_n$).

Це дає можливість з’ясувати зв’язок між підсумовуванням методом Чезаро k-го та $(k-1)$-го порядку. Нехай ряд (A) може бути підсумований методом $(k-1)$-го порядку, так що $\gamma_n^{(k-1)} \to A$. Зважаючи на (424.1) та (424.2) маємо

$$\gamma_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{C_{n+k}^k} = \frac{S_0^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \cdots + S_n^{(k-1)}}{C_{n+k}^k} =$$
$$= \frac{C_{k-1}^{k-1}\gamma_0^{(k-1)} + C_k^{k-1}\gamma_1^{(k-1)} + \cdots + C_{n+k-1}^{k-1}\gamma_n^{(k-1)}}{C_{n+k}^k}.$$

Застосуємо теорему Тьопліца (теор. 391.2) поклавши

$$x_n = \gamma_n^{(k-1)} \quad \text{та} \quad t_{nm} = \frac{C_{m+k-1}^{k-1}}{C_{n+k}^k} \quad (m = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

Звідки маємо, що й $\gamma_n^{(k)} \to A$. Отже, *якщо ряд* (A) *може бути підсумований методом Чезаро якогось порядку, то він може бути підсумований методом будь-якого* ***вищого*** *порядку, і мати ту саму суму.*

Наведемо тепер узагальнення вже відомої нам теореми Фробеніуса (теор. 421.1).

Теорема 424.1. *Якщо ряд* (A) *може бути підсумований якимось із методів Чезаро (скажімо k-го порядку), то він може бути підсумований методом Пуассона – Абеля, і мати ту саму суму.*

Доведення. Нехай

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(k)}}{C_{n+k}^k} = A. \tag{424.3}$$

Звідси нескладно зробити висновок, що ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n \tag{424.4}$$

збігається, коли $-1 < x < 1$. Справді, оскільки $C_{n+k}^k \sim \dfrac{n^k}{k!}$, то з (424.3) маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|S_n^{(k)}\right|}{n^k} = \frac{|A|}{k!}\,.$$

Якщо $A \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|S_n^{(k)}\right|} = 1,$$

тому, за теоремою Коші – Адамара, радіус збіжності ряду (424.4) дорівнює 1. Він точно **не менше** 1, якщо $A = 0$.

Розглянемо тепер низку тотожностей

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(1)} x^n,$$

$$\ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k-1)} x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n.$$

(Тут далі враховуються співвідношення типу (424.2).)

Вище ми отримали збіжність останнього ряду на проміжку $(-1, 1)$; звідси випливає (дивіться пр. 390.4) збіжність і всіх попередніх рядів. Крім того,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(k)} C_{n+k}^k x^n. \tag{424.5}$$

Порівняємо з цією тотожністю іншу:

$$1 = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^k x^n, \tag{424.6}$$

яка виконується на тому ж проміжку $(-1, 1)$; її можна отримати диференціюючи k разів прогресію:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Помноживши обидві частини тотожності (424.6) на A і віднімаючи від нього почленно рівність (424.5), отримаємо, нарешті,

$$A - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(A - \gamma_n^{(k)}\right) C_{n+k}^k x^n.$$

Подальші міркування (з урахуванням (424.3)!) цілком аналогічні до тих, за допомогою яких була доведена теорема Абеля (теор. 418.1) і теорема Фробеніуса (теор. 421.1); залишаємо читачеві зробити це. В результаті ми й отримаємо:

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A,$$

що й потрібно було довести. □

Зазначимо, що існують розбіжні ряди, які підсумовуються методом Пуассона – Абеля, але не підсумовуються жодним із узагальнених методів Чезаро. Отже, перший із названих методів виявляється сильнішим за всі останні навіть узятих разом!

3) *Методи Хьольдара.* Ці методи полягають просто в повторному застосуванні методу середніх арифметичних. Усі питання, які стосуються їх регулярності та зв'язку, вирішуються посиланням на теорему Коші.

Можна довести, що k-кратне застосування методу середніх арифметичних цілком рівносильно застосуванню методу Чезаро k-го порядку, тобто підсумовує той же клас рядів і дає ту саму суму.

4) *Метод Бореля.*

Твердження 424.2. *Використовуючи ряд* (A) *та його часткові суми* A_n*, будується вираз*

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} = e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} .$$

Якщо останній ряд є збіжним, хоча для досить великих значень x*, та його сума при* $x \to \infty$ *прямує до* A*, то це число і є "узагальненою сумою" за методом Бореля для ряду* (A)*.*

Доведення. Доведемо регулярність методу Бореля. Припустимо збіжність ряду (A) і позначимо його суму через A, а залишки $A - A_n$ — через α_n. Маємо (для досить великих x)

$$A - e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A \frac{x^n}{n!} - e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!} .$$

Візьмемо довільне мале число $\varepsilon > 0$; знайдеться такий номер N, що для $n > N$ буде $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Запишемо останній вираз у вигляді суми

$$e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \frac{x^n}{n!} + e^{-x} \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \frac{x^n}{n!} .$$

Абсолютне значення другого доданку $< \frac{\varepsilon}{2}$, хоч би яке було x; а першого — стає $< \frac{\varepsilon}{2}$ за досить великих x (оскільки він є добутком e^{-x} на многочлен, цілий відносно x). Цим усе доведено. □

Читач бачить схожість цього доведення з доведенням теореми Абеля (теор. 418.1) та інших.

5) *Метод Ойлера.* Для ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

ми мали формулу (413.5)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \Delta^p a_0}{2^{p+1}}. \tag{424.7}$$

що виражає "перетворення Ойлера". *При цьому, як було доведено, із збіжності ряду в лівій частині вже випливає збіжність ряду у правій частині та рівність їх сум.*

Однак, навіть якщо перший ряд розбіжний, то другий ряд може виявитися і збіжним; у такому разі суму другого ряду Ойлера використовував як "узагальнену суму” першого ряду. У цьому власне і полягає метод Ойлера підсумовування рядів; зроблене щойно зауваження гарантує регулярність методу.

Якщо писати ряд у звичайному вигляді (A), не виділяючи знаків ±, і згадати вираз (413.2) для p-ої різниці, то можна сказати, що метод Ойлера для “узагальненої суми” ряду (A) використовує звичайну суму ряду

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{a_0 + C_p^1 a_1 + C_p^2 a_2 + \dots + C_p^p a_p}{2^{p+1}}$$

(за умови, що останній збігається).

На цьому ми закінчимо огляд різних методів підсумовування розбіжних рядів, оскільки і наведених вже достатньо, щоб у читача з’явилось враження про різноманіття підходів до цього питання. Регулярність методу як необхідну його особливість, ми доводили у всіх випадках. На жаль, ми не завжди мали змогу достатньо заглибитись у питання про зв’язки різних методів. А тимчасом може статися, що два методи мають області, що **перетинаються** (але не покривають одна одну); може виявитися і що два методи ставлять **різні** “узагальнені суми” одному й тому самому ряду.

425. Приклади

1) Теорема Харді.

Теорема 425.1. *Нехай* $\{a_n\}$ *— додатна монотонно спадна послідовність, що збігається до* 0. *Позначимо*

$$A_0 = a_0, \quad A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad (n > 0).$$

Довести, що знакозмінний ряд

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 + \dots$$

може бути підсумований методом Чезаро (1-го порядку), і його “узагальнена сума” дорівнює половині суми збіжного ряду, що задовольняє умови теореми Ляйбніца

$$\alpha = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots.$$

Доведення. **Вказівка.** Обчислити середнє арифметичне перших $2m$ часткових сум даного ряду:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(a_0 - a_1) + (a_0 - a_1 + a_2 - a_3) + \dots + (a_0 - a_1 + \dots + a_{2m-1} - a_{2m-1})}{m}$$

і, за теоремою Коші (теор. 33.2), прямує до $\frac{1}{2}\alpha$. Потім легко вже показати, що до тієї самою границі прямує і середнє арифметичне перших $2m + 1$ часткових сум. ☐

nebayduzhi.math@gmail.com

2) Взявши $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ або $a_n = \ln\dfrac{n+2}{n+1}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots)$, довести, використовуючи теор. 425.1, що розбіжні ряди

$$H_1 - H_2 + H_3 - H_4 + \dots$$

$(H_n$ — часткова сума гармонічного ряду) та

$$\ln 2 - \ln 3 + \ln 4 - \ln 5 + \dots$$

обидва підсумовуються методом Чезаро, та їх “узагальнені суми” відповідно дорівнюють

$$\frac{1}{2}\ln 2 \quad \text{та} \quad \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}\,.$$

Вказівка. У другому випадку використовується формула Волліса (317.1).

3) За допомогою тієї ж теореми довести, що при $-1 < x < 0$ розбіжний ряд Діріхлє

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{\xi} \quad (\xi = -x,\ 0 < \xi < 1)$$

підсумовується методом Чезаро.

Вказівка. Записати n^{ξ} у вигляді суми

$$n^{\xi} = (1-0) + (2^{\xi}-1) + \dots + (n^{\xi} - (n-1)^{\xi})$$

і методами диференціального числення довести, що зі зростанням n варіанта $n^{\xi} - (n-1)^{\xi}$ спадає (при цьому, зважаючи на пр. 32.5, вона прямує до 0!).

4) Якщо “розбавити” члени збіжного ряду нулями, то це ніяк не відобразиться ні на збіжності ряду, ні на його суму. Як видно з наступних прикладів, це може бути і не так для узагальненого підсумовування розбіжних рядів. Розглянемо ряди

$$\text{а)}\quad \underset{0}{1} - \underset{1}{1} + \underset{2}{1} - \underset{3}{1} + \underset{4}{1} - \underset{5}{1} + \dots$$

$$\text{б)}\quad \underset{0}{1} - \underset{1}{1} + \underset{2}{0} + \underset{3}{1} - \underset{4}{1} + \underset{5}{0} + \underset{6}{1} - \underset{7}{1} + \underset{8}{0} + \dots$$

$$\text{в)}\quad \underset{0}{0} + \underset{1}{1} - \underset{2}{1} + \underset{3}{0} + \underset{4}{1} + \underset{5}{0} + \underset{6}{0} + \underset{7}{0} - \underset{8}{1} + \dots$$

(член ± 1, який стояв у а) на m-му місці (де $m = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$), в в) був переміщений на $2m$-те місце; інші місця заповнені нулями).

Про перший ряд ми вже знаємо, що його “узагальнена сума”, обчислена за методом Чезаро дорівнює $1/2$. Показати, що ряд б) має вже іншу суму, саме $1/3$, а ряд в) зовсім не підсумовується методом Чезаро.

Вказівка. У разі ряду в), при зміні n від 2^{2m-1} до $2^{2m}-1$, середнє арифметичне перших $n+1$ членів коливається

$$\text{від}\quad \frac{1}{3}\cdot\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}+1} \to \frac{2}{3} \quad \text{до} \quad \frac{1}{3}\cdot\frac{2^{2m}-1}{2^{2m}} \to \frac{1}{3}\,.$$

5) Нехай k — будь-яке натуральне число. Розглянемо ряд

$$\Sigma_k \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{n+k}^k$$

і доведемо, що Σ_k не підсумовується методом Чезаро k-го порядку, але підсумовується методом Чезаро $(k+1)$-го порядку, і “сума” дорівнює $1/2^{k+1}$.

Використовуючи рівність (424.5) і двічі — рівність (424.6) (в першій замінюючи x на $-x$, а в другій x на x^2), послідовно отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(k)} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n C_{n+k}^k x^n = \frac{1}{(1-x^2)^{k+1}} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+k}^k x^{2m}.$$

(Збіжність останнього ряду на проміжку $(-1, 1)$ легко показати за допомогою теореми Коші – Адамара, а звідси вже випливає і збіжність першого ряду.) Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у першому та в останньому з цих рядів (ми користуємося тут “теоремою про тотожність степеневих рядів”, яка буде доведена лише нижче, теор. 437.3), приходимо до висновку, що

$$S_{2m}^{(k)} = C_{m+k}^k, \quad S_{2m+1}^{(k)} = 0 \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \dots) \tag{425.1}$$

Отже,

$$\gamma_{2m}^{(k)} = \frac{C_{m+k}^k}{C_{2m+k}^k} \to \frac{1}{2^k}, \quad \gamma_{2m+1}^k = 0,$$

і запропонований ряд не має узагальненої суми Чезаро k-го порядку.

З іншого боку, зважаючи на (425.1), (424.2) та (424.1) як для $n = 2m$, так і для $n = 2m+1$ буде $S_n^{(k+1)} = C_k^k + C_{1+k}^k + \dots + C_{m+k}^k = C_{m+k+1}^{k+1}$. Звідси

$$\gamma_{2m}^{(k+1)} = \frac{C_{m+k+1}^{k+1}}{C_{2m+k+1}^{k+1}} \to \frac{1}{2^{k+1}};$$

те саме справедливо і для $\gamma_{2m+1}^{(k+1)}$, що і доводить наше твердження.

6) Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^k,$$

де k — будь-яке натуральне число, також підсумовується методом Чезаро $(k+1)$-го порядку. Це можна довести, спираючись на попередній результат. Справді, розкладемо C_{n+k}^k за степенями $n+1$:

$$C_{n+k}^k = \frac{1}{k!}(n+k)(n+k-1)\dots(n+1) = \alpha_1^{(k)}(n+1)^k + \alpha_2^{(k)}(n+1)^{k-1} + \dots + \alpha_k^{(k)}(n+1);$$

nebayduzhi.math@gmail.com

тут $\alpha_i^{(k)}$ — сталі коефіцієнти, причому $\alpha_1^{(k)} = 1/k! \neq 0$. Виписав ще ряд таких рівностей, замінюючи k на $k-1,\ k-2,\ \dots,\ 1$, легко потім, навпаки, записати $(n+1)^k$ як суму:

$$(n+1)^k = \beta_1^{(k)} C_{n+k}^k + \beta_2^{(k)} C_{n+k-1}^k + \dots + \beta_k^{(k)} C_{n+1}^1$$

зі сталими коефіцієнтами β. Але тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^k \equiv \beta_1^{(k)} \Sigma_k + \beta_2^{(k)} \Sigma_{k-1} + \dots + \beta_k^{(k)} \Sigma_1 \,.$$

Оскільки **всі** ряди Σ_i $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ k)$ підсумовуються методом Чезаро $(k+1)$-го порядку (ми враховуємо тут властивості методів Чезаро послідовних порядків!), то зважаючи на **лінійність** названого методу це справедливо і для запропонованого ряду.

Саме обчислення “узагальненої суми” ми можемо здійснити лише згодом (розд. 449).

Наведемо ще кілька простих прикладів безпосереднього застосування методів Хьольдара, Бореля та Ойлера.

7) Підсумувати ряди використовуючи метод Хьольдара

а) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots;$

б) $1 - 3 + 6 - 10 + \dots;$

Відповідь:

а) Дворазове усереднення дає 1/4;

б) Триразове усереднення дає 1/8.

8) Підсумувати ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

методом Бореля.

Відповідь:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

9) Підсумувати методом Ойлера ряди

а) $1 - 1 + 1 - 1 + \dots;$

б) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots;$

в) $1 - 2 + 2^2 - 2^4 + \dots;$

г) $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots;$

Вказівка. У всіх випадках зручно скористатися перетворенням Ойлера у формі (424.7).

Відповідь:

а) $A = \dfrac{1}{2}$;

б) $\Delta^0 a_0 = 1, \quad \Delta^1 a_0 = 1, \quad \Delta^p a_0 = 0$ для всіх $p > 1, \quad A = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$;

в) $\Delta^p a_0 = 1, \quad A = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} - \ldots = \dfrac{1}{3}$;

г) $\Delta^0 a_0 = 1, \quad \Delta^1 a_0 = 7, \quad \Delta^2 a_0 = 12, \quad \Delta^3 a_0 = 6, \quad \Delta^p a_0 = 0$ для всіх $p > 3$,
$A = \dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{4} + \dfrac{12}{8} - \dfrac{6}{16} = -\dfrac{1}{8}$.

426. Загальний клас лінійних регулярних методів підсумовування

Наведемо на закінчення деяку загальну схему для побудови класу лінійних регулярних методів підсумовування, що містить, зокрема, всі методи, що згадувалися вище.

Нехай в деякій області $\mathcal{X}$ зміни параметра x задана послідовність функцій

$$\varphi_0, \ \varphi_1, \ \varphi_2, \ \ldots, \ \varphi_n, \ \ldots . \tag{Φ}$$

Припустимо, що область $\mathcal{X}$ має точку згущення — число ω, скінченне або нескінченне. *Для числового ряду* (A) *будується ряд, що складається з функцій:*

$$A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \cdots + A_n\varphi_n(x) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\varphi_n(x) \tag{426.1}$$

(де $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$). Якщо цей ряд, принаймні для x, досить близьких до ω, збігається та його сума при $x \to \omega$ прямує до границі A, це число і називається “узагальненою сумою” числового ряду (A).

Отже, ми отримуємо якийсь метод підсумовування рядів, пов’язаний з вибором послідовності (Φ) та граничної точки ω. За самою побудовою методу зрозуміло, що цей метод **лінійний**.

Теорема 426.1. *Припустимо тепер, що функції $\varphi_n(x)$ задовольняють таким трьом умовам:*

а) для будь-якого зафіксованого n

$$\lim_{x\to\omega} \varphi_n(x) = 0;$$

б) для x досить близьких до ω (тобто для $|x-\omega|<\delta'$, якщо ω скінченне, або для $x>\Delta'$, якщо $\omega=+\infty$)

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\varphi_n(x)|\leqslant K \quad (K=\mathrm{const});$$

в) нарешті,

$$\lim_{x\to\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)=1.$$

Тоді метод підсумовування виявляється ***регулярним.***

Доведення. Отже, нехай

$$\lim_{n\to\infty}A_n=A.$$

Тоді для довільно взятого $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер n', що для $n>n'$ буде

$$|A_n-A|<\frac{\varepsilon}{3K}\,. \tag{426.2}$$

Зважаючи на обмеженість A_n і абсолютну збіжність ряду $\sum\varphi_n(x)$, принаймні для $|x-\omega|<\delta'$ $(x>\Delta')$ буде збігатися також і ряд $\sum A_n\varphi_n(x)$. При цьому, очевидно,

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\varphi_n(x)-A=\sum_{n=0}^{n'}(A_n-A)\varphi_n(x)+\sum_{n=n'+1}^{\infty}(A_n-A)\varphi_n(x)+A\left(\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)-1\right),$$

тому, переходячи до абсолютних величин,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}A_n\varphi_n(x)-A\right|\leqslant\left|\sum_{n=0}^{n'}(A_n-A)\varphi_n(x)\right|+\sum_{n=n'+1}^{\infty}|A_n-A|\cdot|\varphi_n(x)|+|A|\cdot\left|\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x)-1\right|.$$

Другий доданок праворуч $<\frac{\varepsilon}{3}$, з (426.2) і умови б). Щодо першого і третього доданків, то кожне з них можна зробити $<\frac{\varepsilon}{3}$, наблизивши x до ω, зважаючи на умови теореми а) та в). Отже,

$$\lim_{x\to\omega}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\varphi_n(x)=A,$$

тобто “узагальнена сума” існує і дорівнює звичайній сумі. □

Якщо x — це натуральний параметр m (і $\omega=+\infty$), то послідовність функцій (Φ)

замінюється нескінченною прямокутною **матрицею**:

$$\begin{array}{l|cccccc} & \multicolumn{6}{l}{\longrightarrow} \\ & t_{00} & t_{01} & t_{02} & \dots & t_{0m} & \dots \\ & t_{10} & t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1m} & \dots \\ & t_{20} & t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2m} & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ & t_{n0} & t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nm} & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \downarrow & & & & & & \end{array} \tag{T}$$

"Узагальненою сумою" ряду (A) *тут будемо називати границю варіанти*

$$T_m = A_0 t_{0m} + A_1 t_{1m} + \dots + A_n t_{nm} + \dots,$$

коли $m \to \omega$*, припускаючи, що цей ряд збігається, принаймні для досить великих значень* m*.*

Твердження 426.1. *Умови регулярності перетворюються на цей випадок так:*

а) для будь-якого зафіксованого n

$$\lim_{m\to\infty} t_{nm} = 0;$$

б) для досить великих m

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t_{nm}| \leqslant K \quad (K = \mathrm{const});$$

в) нарешті,

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} t_{nm} = 1.$$

По суті, всі ці ідеї належать Тьопліца (порівняйте з розд. 391), у якого, як читач пам'ятає, матриця передбачалася трикутною. **Цього часткового випадку нам здебільшого було достатньо.**

Згадаємо ще, що під згадану схему безпосередньо підходить як підсумовування методом Пуассона – Абеля, так і підсумовування методом Бореля. У першому випадку маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x) x^n A_n,$$

тож роль $\varphi_n(x)$ в області $\mathcal{X} = (0,1)$ $(\omega = 1)$ відіграє множник $(1-x)x^n$. У другому випадку $\varphi_n(x) = e^{-x} \cdot \dfrac{x^n}{n!}$ в $\mathcal{X} = (0,\ +\infty)$ $(\omega = +\infty)$. Дотримання умов а), б), в) легко перевіряється, і тим (на підставі доведеної вище загальної теореми) знову доводиться **регулярність** цих методів.

Загальне означення методу підсумовування, дане вище, та теорему про його регулярність легко змінити так, щоб у них брали участь не часткові суми A_n, а безпосередньо члени a_n ряду (A), що підсумовується. Зупинятися на цьому не будемо.

Глава 12

ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПОСЛІДОВНОСТІ І РЯДИ

12.1. Рівномірна збіжність

427. Вступні зауваження

Ми вже вивчали вище нескінченні послідовності та їхні границі, нескінченні ряди та їхні суми; елементами цих послідовностей або членами рядів були сталі числа. Щоправда, іноді в їхньому складі траплялися змінні значення в ролі параметрів, але під час дослідження їм незмінно приписувались сталі значення. Так, наприклад, коли ми встановлювали, що послідовність

$$1+\frac{x}{1},\ \left(1+\frac{x}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{x}{3}\right)^3,\ \ldots,\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\ \ldots$$

має границю e^x або що ряд

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

має суму $\ln(1+x)$, то x було для нас сталим значенням. Ми не брали до уваги **функціональну природу** елементів послідовності та її границі або членів ряду та його суми, але зараз саме до цього моменту буде прикута наша увага.

Припустимо, що дана **послідовність**, елементами якої є функції

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{427.1}$$

від однієї змінної x, що визначені в деякій області її зміни $\mathcal{X}=\{x\}$ (найчастіше це буде проміжок; але поки що ми охоплюємо більш загальний випадок, називаючи x

будь-яку нескінченну числову множину). Нехай для кожного x із $\mathcal{X}$ ця послідовність має скінченну границю; оскільки вона цілком визначається значенням x, то також зображує собою функцію від x (в $\mathcal{X}$):

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \tag{427.2}$$

яку ми будемо називати **граничною функцією** для послідовності (427.1) (або для функції $f_n(x)$).

Тепер ми будемо цікавитись не лише існуванням границі для кожного окремого значення x, а і **функціональними властивостями** граничної функції. Щоб читач міг зрозуміти наперед які саме нові задачі при цьому виникають, згадаємо для прикладу про одну з них.

Припустимо, що елементи послідовності (427.1) є неперервними функціями від x на деякому проміжку $\mathcal{X} = [a, b]$; чи гарантує це неперервність граничної функції? Як бачимо з наступних прикладів, властивість неперервності інколи розповсюджується на граничну функцію, а інколи ні.

Приклади. Для всіх випадків $\mathcal{X} = [0, 1]$.

1) $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$ при $x < 1$ і $f(1) = 1$ (розрив в точці $x = 1$);

2) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $f(x) = 0$ при $x > 0$ і $f(0) = 1$ (розрив в точці $x = 0$);

3) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $f(x) = 0$ для всіх x (всюди неперервна);

4) $f_n(x) = 2n^2x \cdot e^{-n^2x^2}$, $f(x) = 0$ для всіх x (всюди неперервна).

Природно виникає задача — вказати умови, за яких гранична функція буде неперервною; цим ми займемося в розд. 431 (і розд. 432).

Ми вже бачили (розд. 362), що розгляд числового ряду і його суми є лише іншою формою дослідження послідовності та її границі. Розглянемо тепер ряд, членами якого є функції від однієї змінної x в деякій області $\mathcal{X}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{427.3}$$

Нехай цей ряд збігається для кожного значення x в $\mathcal{X}$; тоді його сума також буде зображена у вигляді деякої функції від x: $f(x)$. Ця сума буде визначатись граничною рівністю вигляду (427.2), якщо часткову суму ряду позначити як $f_n(x)$:

$$f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x). \tag{427.4}$$

І навпаки, питання про граничну функцію для довільно заданої послідовності (427.1) можна розглядати у вигляді підсумовування ряду (427.3), якщо взяти:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= f_1(x), \\ u_2(x) &= f_2(x) - f_1(x) \\ &\dots \\ u_n(x) &= f_n(x) - f_{n-1}(x), \\ &\dots . \end{aligned}$$

Нам частіше доведеться мати справу саме з функціональними рядами, оскільки ця форма дослідження граничної функції на практиці зазвичай зручніше.

Також варто буде зауважити, що предметом наших найближчих досліджень будуть не лише питання збіжності ряду (427.3), але і функціональні властивості його суми. Як приклад можна назвати питання про неперервність суми ряду за припущення неперервності його членів; це та сама задача, що вже згадувалась вище.

Як виявляється, функціональні властивості граничної функції (або, що те саме, суми ряду) $f(x)$ істотно залежать від **характеру** наближення $f_n(x)$ до $f(x)$ для різних значень x. Вивченням типових можливостей, що при цьому з'являються, ми займемося в наступному розділі.

428. Рівномірна і нерівномірна збіжності

Припустимо, що для всіх x із $\mathcal{X}$ виконується рівність (427.2). За означенням границі це означає наступне: **якщо зафіксувати значення** x із $\mathcal{X}$ (аби мати справу з визначеною числовою послідовністю), то для будь-якого заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \tag{428.1}$$

де x дорівнює зафіксованому раніше значенню.

Якщо взяти **інше** значення x, то отримаємо **іншу** числову послідовність, і — для того ж ε — знайдений номер N може виявитись непридатним; тоді його довелось би замінити на більший. Але x набуває **нескінченної множини** значень, а отже перед нами **нескінченна множина** різних числових послідовностей, що збігаються до границі. Для кожної з них окремо знайдеться своє N; виникає питання: чи існує такий номер N, який (при заданому ε) міг би підійти **одразу для всіх** послідовностей?

Покажемо на прикладах, що в одних випадках такий номер N існує, а в інших — ні.

1) Нехай для початку

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

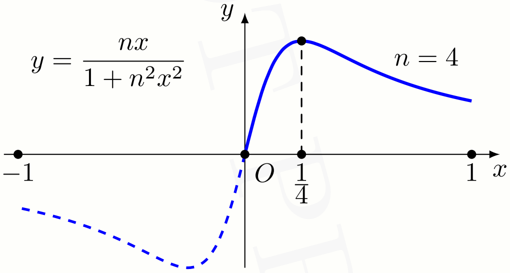


Рис. 428.1

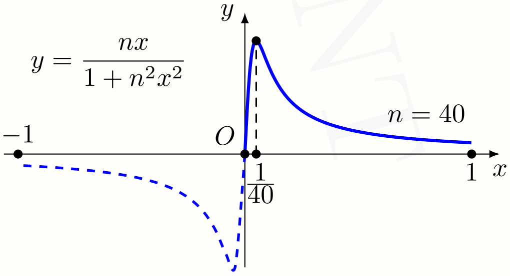


Рис. 428.2

Оскільки тут

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{1}{2n}\,,$$

то відразу зрозуміло, що для виконання нерівності $f_n(x) < \varepsilon$ достатньо, яким би не було x, взяти $n > \frac{1}{2\varepsilon}$. Отже, наприклад число $N = E\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$ в цьому випадку підходить **одночасно для всіх** x.

2) Візьмемо тепер (пр. 427.3):

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Для будь-якого **фіксованого** $x > 0$ достатньо взяти $n > E\left(\frac{1}{x\varepsilon}\right)$, щоб було: $f_n(x) < \frac{1}{nx} < \varepsilon$. Але, з іншого боку, **хоч би яке велике взяти** n, для функції $f_n(x)$ на проміжку $[0,1]$ завжди знайдеться точка, а саме точка $x = \frac{1}{n}$, в якій її значення дорівнює $\frac{1}{2}$: $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Отже, за рахунок збільшення n неможливо зробити $f_n(x) < \frac{1}{2}$ для **всіх** значень x від 0 до 1 **одночасно**. Іншими словами, вже для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ не існує номера N, що підходив би для всіх x одночасно.

На рис. 428.1 та рис. 428.2 зображені графіки цих функцій, що відповідають $n = 4$ та $n = 40$: є характерний **горб** висоти $\frac{1}{2}$, що переміщується справа наліво зі зроста-

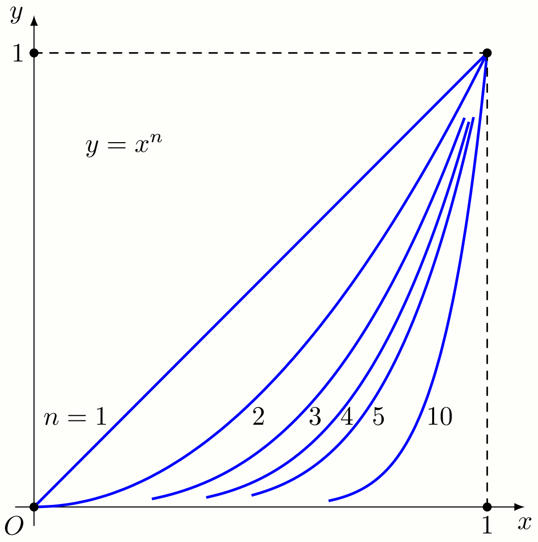


Рис. 428.3

нням n. Хоча по кожній окремій вертикалі точки послідовних кривих нескінченно наближаються до осі x зі зростанням n, але жодна крива в **цілому** не прилягає до цієї осі **на всьому проміжку** від $x = 0$ до $x = 1$.

Інша річ з функціями, розглянутими в пр. 428.1. Ми не зводимо їх графіків, бо вони, наприклад, при $n = 1$ або $n = 40$, виходять із графіків, зображених на рис. 428.1 та рис. 428.2 шляхом зменшення всіх ординат, відповідно, в 4 або в 40 разів. В цьому випадку криві відразу на всьому проміжку примикають до осі x.

Дамо тепер основне **означення**.

Якщо:

1) послідовність (427.1) *має в* $\mathcal{X}$*; граничну функцію* $f(x)$ *і*

2) для кожного числа $\varepsilon > 0$ *існує такий* ***незалежний*** *від* x *номер* N*, що при* $n > N$ *нерівність* (428.1) *виконується* ***відразу для всіх*** x *з* $\mathcal{X}$*,*

то кажуть, що послідовність (427.1) *збігається (або функція* $f_n(x)$ *прямує) до функції* $f(x)$ ***рівномірно*** *відносно* x *в області* $\mathcal{X}$*.*

Отже, у першому з наведених прикладів функція $f(x)$ прямує до нуля **рівномірно** відносно x на проміжку $[0, 1]$, а в другому — ні.

Потрібно сказати, що і для інших функцій, розглянутих у попередньому розділі, збіжність не буде **рівномірною**. Покажемо це.

3) Для функції $f_n(x) = x^n$ (пр. 427.1) неможливість нерівності $x^n < \varepsilon$ (для $\varepsilon < 1$) **відразу для всіх** $x < 1$ маємо хоча б з того, що $x^n \to 1$, якщо (при фіксованому n) $x \to 1$. На рис. 428.3 видно як порушується рівномірність: тут гранична функція змінюється стрибком, а **горб** нерухомий.

nebayduzhi.math@gmail.com

Розглянемо ще два приклади.

4)

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}\,.$$

5)

$$f_n(x) = 2n^2 x \cdot e^{-n^2x^2}\,.$$

Неможливість рівномірного наближення на проміжку $[0,1]$ до граничної функції, яка для $x > 0$ в обох випадках дорівнює 0, випливає з того, що, відповідно,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

або

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n}{e}\,.$$

У другому випадку висота **горбів**, які заважають рівномірному прямуванню до 0, ще і нескінченно зростає.

Покажемо на прикладах функцій x^n і $\frac{1}{1+nx}$ ще інший шлях для дослідження питання. Нерівності

$$x^n < \varepsilon \quad \text{та} \quad \frac{1}{1+nx} < \varepsilon$$

рівносильні, відповідно, таким:

$$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln x} \quad \text{та} \quad n > \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) \qquad (0 < x < 1;\ 0 < \varepsilon < 1).$$

Оскільки вирази справа необмежено зростають, перший — коли x наближається до 1, а другий — коли x наближається до 0, то ясно, що ніякий номер n не може задовольнити ці нерівності **відразу для всіх значень** x.

Перенесемо тепер усе сказане вище про збіжність функцій на випадок функціонального ряду (427.3).

Припускаючи, що ряд **збіжний**, розглянемо його суму $f(x)$, часткову суму $f_n(x)$ (дивіться (427.4)) і, нарешті, його залишок після n-го члена

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x).$$

Для будь-якого фіксованого x

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо часткова сума $f_n(x)$ прямує до суми ряду $f(x)$ ***рівномірно*** *відносно x області $\mathcal{X}$ (або, що те саме, залишок ряду $\varphi_n(x)$* ***рівномірно*** *прямує до 0), то кажуть, що ряд (427.3)* ***рівномірно*** *збігається в цій області.*

Це означення, очевидно, рівносильне наступному.

Ряд (427.3), що збігається для всіх x з області $\mathcal{X}$, називається ***рівномірно*** *збіжним в цій області; якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ існує такий* ***незалежний*** *від x номер N, що для $n > N$ нерівність*

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \textit{або} \quad |\varphi_n(x)| < \varepsilon \tag{428.2}$$

виконується ***одночасно для всіх*** *x з $\mathcal{X}$.*

(Поняття **рівномірної** збіжності ряду було введено в науку в 1848 році одночасно Зайделєм (нім. Philipp von Seidel, Фі́ліп фо́н За́йдель) і Стоксом (ірл. George Stokes, Джо́рдж Сто́кс), але ще до них застосовувалося Ваярштрассом на його лекціях.)

Приклади рівномірно і нерівномірно збіжних рядів, звичайно, можна скласти, перетворивши наведені вище приклади послідовностей. Ми наведемо тут ще кілька нових прикладів.

6) Розглянемо прогресію

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1};$$

вона збігається на відкритому проміжку $\mathcal{X} = (-1, 1)$. Для будь-якого x з $\mathcal{X}$ залишок після n-го члена має вигляд

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}\,.$$

Якщо фіксувати довільне n, то очевидно:

$$\lim_{-1+0} |\varphi_n(x)| = \frac{1}{2}\,, \qquad \lim_{x\to 1-0} \varphi_n(x) = \infty.$$

І те, й інше доводить, що здійснити **для всіх x одночасно** нерівність

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon \quad \left(\text{якщо } \varepsilon < \frac{1}{2}\right),$$

взявши фіксований номер n, неможливо. Збіжність прогресії на проміжку $(-1, 1)$ **нерівномірна**; це відноситься також до проміжків $(-1, 0]$ та $[0, 1)$ (окремо).

7) Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n}$$

збіжний для будь-якого значення x з $\mathcal{X} = (-\infty,\ +\infty)$, бо він задовольняє умовам теореми Ляйбніца (теор. 381.1). Зважаючи на зауваження, зроблене після доведення теореми, абсолютне значення залишку ряду оцінюється своїм першим членом:

$$|\varphi_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1}\,.$$

Звідси ясно, що на всьому нескінченному проміжку ряд збігається **рівномірно**.

8) Аналогічно, і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$$

збігається **рівномірно** в $\mathcal{X} = (-\infty,\ +\infty)$, бо для $x \neq 0$

$$|\varphi_n(x)| < \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{x^2}{1+nx^2+\ldots} < \frac{1}{n}\,.$$

Зазначимо, що ряд, складений з абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n},$$

хоча і збігається, але **нерівномірно**. Справді, його залишок, для $x \neq 0$, такий,

$$\varphi_n(x) = \frac{\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^n};$$

для будь-якого фіксованого n він прямує до 1, коли $x \to 0$.

Зауваження. Якщо в прикладі 2), замість проміжку $[0,1]$, розглянути будь-який проміжок $[a,1]$, де $0 < a < 1$, то в ньому збіжність вже буде **рівномірною**. Справді, для всіх $x \geqslant a$

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{n}{1+n^2a^2} < \frac{1}{na^2}\,.$$

А на будь-якому проміжку $[0,a]$ збіжність, очевидно, **нерівномірна**. Отже, навколо точки $x = 0$ як би “згущується” властивість нерівномірності; назвемо її **точкою нерівномірності**. Те саме стосується і прикладів 4), 5) та 8). Аналогічну роль в прикладі 3) відіграє точка $x = 1$, а прикладі 6) — обидві точки $x = -1$ та $x = 1$.

У складніших випадках точки нерівномірності можуть зустрічатися нескінченну кількість разів.

429. Умова рівномірної збіжності

Теорема Бользано – Коші (теор. 39.1), що вказує умову існування скінченної границі для заданої числової послідовності (“принцип збіжності”), природно приводить до наступної умови **рівномірної збіжності** для заданої в області $\mathcal{X}$ послідовності функцій (427.1).

nebayduzhi.math@gmail.com

Теорема 429.1. *Для того щоб послідовність* (427.1)
1) мала граничну функцію і
2) збігалася до цієї функції ***рівномірно*** *відносно x в області $\mathcal{X}$,*
необхідно і достатньо, щоб для кожного числа $\varepsilon > 0$ існував такий незалежний від x номер N, щоб для $n > N$ і будь-якого $m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ нерівність

$$|f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{429.1}$$

виконувалася ***одночасно для всіх*** *x з $\mathcal{X}$.*

(Цю вимогу можна коротко сформулювати так: принцип збіжності для послідовності (427.1) повинен здійснюватися **рівномірно** для всіх x з $\mathcal{X}$.)

Доведення. **Необхідність.** Якщо послідовність (427.1) має граничну функцію $f(x)$ і збігається до неї **рівномірно** в $\mathcal{X}$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться **незалежний** від x номер N, такий, що для $n > N$ буде

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

для **всіх** x. Аналогічно і

$$|f_{n+m}(x) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

А з цих обох нерівностей випливає (429.1).

Достатність. Нехай умова теореми виконана. Тоді, для будь-якого **фіксованого** значення x з $\mathcal{X}$ послідовності (427.1) перетворюється на числову послідовність, для якої виконується умова Бользано – Коші. Отже, для цієї послідовності існує скінченна границя. Це доводить існування граничної функції $f(x)$ для послідовності (427.1).

Тепер, взявши довільне $n > N$ і x з $\mathcal{X}$, станемо в нерівності (429.1) безмежно збільшувати m (n та x — зафіксовані). Переходячи до границі, отримаємо:

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Це доводить рівномірне прямування $f_n(x)$ до $f(x)$. □

Нескладно перефразувати доведену теорему для випадку функціонального ряду.

Теорема 429.2. *Для того щоб ряд* (427.3) *збігався* ***рівномірно*** *в області $\mathcal{X}$, необхідно і достатньо, щоб для кожного числа $\varepsilon > 0$ існував такий незалежний від x номер N, що для $n > N$ і будь-якого $m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ нерівність*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon \tag{429.2}$$

виконується ***одночасно для всіх*** *x з $\mathcal{X}$.*

Звідси, зокрема, випливає корисний наслідок.

Наслідок 429.2.1. *Якщо всі члени ряду (427.3), що* ***рівномірно*** *збігається в області $\mathcal{X}$, помножити на* ***обмежену*** *в $\mathcal{X}$ функцію $v(x)$:*

$$|v(x)| \leqslant M,$$

то рівномірна збіжність збережеться.

На практиці для визначення рівномірної збіжності конкретних послідовностей чи рядів отримані умови мало придатні. Для цього користуються заснованими на них зручнішими у застосуванні достатніми ознаками, які формулюються зазвичай для **рядів**.

430. Ознаки рівномірної збіжності рядів

Ось найпростіша і найчастіше застосовувана ознака.

Теорема 430.1 (Ознака Ваярштрасса)**.** *Якщо члени функціонального ряду (427.3) задовольняють в області $\mathcal{X}$ нерівності*

$$|u_n(x)| \leqslant c_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots), \tag{430.1}$$

де c_n — члени деякого ***збіжного*** *числового ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots, \tag{C}$$

то ряд (427.3) збігається в $\mathcal{X}$ ***рівномірно****.*

За наявності нерівності (430.1) кажуть, що для ряду (427.3) існує мажорантний ряд (C).

Доведення. Справді, з (430.1) одержуємо нерівність

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| \leqslant c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+m},$$

Що виконується одночасно для всіх x з області $\mathcal{X}$. Згідно з принципом збіжності, який ми застосовуємо до числового ряду (C), для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що для $n > N$ права частина попередньої нерівності буде вже менше від ε, а з нею і ліва частина, до того ж для всіх x одночасно. Цим наше твердження доведено (розд. 429). □

Отже, наприклад, на будь-якому проміжку **рівномірно** збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається **абсолютно**. Адже

$$|a_n \sin nx| \leqslant |a_n|, \quad |a_n \cos nx| \leqslant |a_n|.$$

Отже роль **мажорантного** ряду тут відіграє ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Твердження 430.1. *Кожен рівномірно збіжний на проміжку $\mathcal{X}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ може бути за допомогою дужок перетворений в ряд, до якого вже може бути застосована ознака Ваярштрасса.*

Доведення. Справді, візьмемо якийсь додатний збіжний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$. Для числа c_1 (розд. 429) знайдеться такий номер m_1, що $|u_{m_1+1}(x)+\dots+u_n(x)| < c_1$ в $\mathcal{X}$ для $n > m_1$. Потім, для числа c_2 знайдеться такий номер $m_2 > m_1$, що $|u_{m_2+1}(x)+\dots+u_n(x)| < c_2$ в $\mathcal{X}$ для $n > m_2$, і так далі. Тоді, групуючи члени цього ряду так:

$$[u_1(x) + \dots + u_{m_1}(x)] + [|u_{m_1+1}(x) + \dots + u_{m_2}(x)] + \dots$$

отримаємо ряд, члени якого, починаючи з другого, за абсолютною величиною не перевищують в $\mathcal{X}$ послідовних членів взятого числового ряду. ☐

Якщо до ряду (427.3) можна застосувати ознаку Ваярштрасса, то ряд (427.3) необхідно **абсолютно** збіжний. Більше того, одночасно з рядом (427.3) буде рівномірно збігатися і ряд, складений із абсолютних величин його членів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|. \tag{430.2}$$

Але можливі випадки, коли **неабсолютно** збіжний ряд (427.3) збігається **рівномірно**. Наприклад, ряд з пр. 428.7 (цей ряд не збігається абсолютно; це легко отримати із порівняння з гармонічним рядом). Можливо навіть таке, що ряд (427.3) збігається абсолютно і рівномірно, але ряд (430.2) все ж таки збігається нерівномірно (дивіться пр. 428.8). Подібні випадки явно не охоплюються ознакою Ваярштрасса; для їх дослідження потрібні тонкіші ознаки.

nebayduzhi.math@gmail.com

Зараз ми наведемо дві ознаки, що належать до функціональних рядів виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\cdot b_n(x) = a_1(x)\cdot b_1(x) + \dots + a_n(x)\cdot b_n(x) + \dots, \tag{W}$$

де $a_n(x)$, $b_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ — функції від x в $\mathcal{X}$. Ми скопіюємо ці ознаки з ознак Абеля (теор. 384.1) та Діріхлє (теор. 384.2) з теорії числових рядів; умовно називатимемо і їх іменами цих вчених.

Теорема 430.2 (Ознака Абеля)**.** *Нехай ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = b_1(x) + \dots + b_n(x) + \dots \tag{B}$$

збігається рівномірно в області $\mathcal{X}$, а значення функції (для кожного x) — це монотонні послідовності, і які в сукупності для будь-яких x і n обмежені:

$$|a_n(x)| \leqslant K.$$

*Тоді ряд (W) збігається **рівномірно** в області $\mathcal{X}$.*

Доведення. Доведення аналогічне до доведення теор. 384.1. Зважаючи на **рівномірну** збіжності ряду (B) номер N можна знайти незалежно від x, використовуючи умову розд. 429 (замість ознаки збіжності), а потім за допомогою леми Абеля (лем. 383.1) отримуємо, як і вище (вважаючи $n > N$):

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)\cdot b_k(x)\right| \leqslant \varepsilon(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+m}(x)|) \leqslant 3K\varepsilon,$$

відразу для всіх x із $\mathcal{X}$. Цим наше твердження доведено. □

Теорема 430.3 (Ознака Діріхлє)**.** *Нехай часткові суми $B_n(x)$ ряду (B) у сукупності за будь-яких x і n обмежені:*

$$|B_n(x)| \leqslant M,$$

*а значення функції $a_n(x)$ (для кожного x) — монотонна послідовність, яка збігається до 0 **рівномірно** в області $\mathcal{X}$. Тоді і ряд (W) збігається **рівномірно** у цій області.*

Доведення. І тут доведення проводиться так само, як і доведення теор. 384.2. Зазначимо лише, що номер N можна вибрати незалежно від x саме через рівномірне прямування $a_n(x)$ до 0. □

На практиці часто замість **функціональної** послідовності $\{a_n(x)\}$ присутня звичайна **числова** послідовність $\{a_n\}$ або замість **функціонального** ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ — звичайний **числовий** ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Слід зазначити, що цей випадок, звісно, є частковим випадком розглянутого вище; адже **збіжна** послідовність $\{a_n\}$ і збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ можна розглядати як **рівномірно збіжні** (залежності від x **немає**).

Наприклад, якщо послідовність $\{a_n\}$ додатних чисел, що монотонно прямують до 0, то обидва ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

за ознакою Діріхлє, рівномірно збігаються на будь-якому замкненому проміжку, який не містить точок вигляду $2k\pi$ (де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Це випливає з того, що, наприклад (дивіться пр. 385.2),

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \sin ix\right| = \left|\frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}x\right|},$$

і на названому проміжку $\sin\frac{1}{2}x$ не дорівнює 0), тому для суми можна вказати границю, що не залежить від x.

Подальші приклади застосування ознак рівномірної збіжності читач знайде в розд. 439 і наступних.

12.2. Функціональні властивості суми ряду

431. Неперервність суми ряду

Ми переходимо тепер до вивчення функціональних властивостей суми ряду, побудованого із функцій, у зв'язку із властивостями саме цих функцій. Вище вже було вказано на еквівалентність **послідовностей** та **нескінченних рядів**. Ми віддаємо перевагу саме останнім, тому що у застосуваннях зустрічаються майже виключно саме нескінченні ряди. Перенесенню усього сказаного про функціональні ряди на випадок послідовностей функцій буде присвячено окремий розділ розд. 436.

Введене раніше поняття **рівномірної** збіжності надалі відіграватиме вирішальну роль, і його важливість розкриється з повною силою.

Почнемо з питання щодо неперервності суми ряду, якого ми вже торкалися у розд. 427.

Теорема 431.1. *Нехай функції* $u_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ *визначені на проміжку* $\mathcal{X} = [a, b]$ *і усі є неперервними у деякій точці* $x = x_0$ *цього проміжку. Якщо ряд* (427.3) *на проміжку* $\mathcal{X}$ *збігається* ***рівномірно***, *то і сума ряду* $f(x)$ *у точці* $x = x_0$ *також буде неперервною.*

(Схоже твердження вперше було сформульоване Коші; але знаменитий автор надав йому занадто загальну форму, не висунувши вимоги рівномірності, без якої воно перестає бути вірним.)

Доведення. Використовуючи введені раніше позначення, матимемо, що при довільному $n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ та довільному x із $\mathcal{X}$:

$$f(x) = f_n(x) + \varphi_n(x) \tag{431.1}$$

та, зокрема,

$$f(x_0) = f_n(x_0) + \varphi_n(x_0),$$

звідки

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f_n(x) - f_n(x_0)| + |\varphi_n(x)| + |\varphi_n(x_0)|. \tag{431.2}$$

Візьмемо тепер довільне $\varepsilon > 0$. Зважаючи на рівномірну збіжність ряду, можна **зафіксувати** номер n так, щоб нерівність

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon \tag{431.3}$$

виконувалась для **усіх** значень x на проміжку $\mathcal{X}$ (у тому числі і для $x = x_0$). Зазначимо, що при фіксованому n функція $f_n(x)$ є сумою певного скінченного числа функцій $u_k(x)$, неперервних у точці $x = x_0$. Тому вона також є неперервною у цій точці, і для взятого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при $|x - x_0| < \delta$ буде

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon. \tag{431.4}$$

Тоді, зважаючи на (431.2), (431.3) та (431.4), із нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає, що

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

що і доводить теорему. □

Зрозуміло, що *якщо функції $u_n(x)$ є неперервними на всьому проміжку $\mathcal{X} = [a, b]$, то при наявності* ***рівномірної*** *збіжності і сума ряду* (427.3)*, $f(x)$, буде неперервною на всьому проміжку.*

Те, що вимога **рівномірної** збіжності у тексті теореми не може бути опущена, показує, наприклад, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

(дивіться пр. 428.8), сума якого дорівнює 1 при $x \neq 0$ і дорівнює 0 при $x = 0$.

Однак, рівномірна збіжність фігурує у теоремі лише як **достатня** умова, і не слід думати, що вона є **необхідною** для неперервності суми ряду (дивіться розд. 432, далі): наприклад, ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2x\left[n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2x^2}\right], \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right] \tag{431.5}$$

(порівняйте з пр. 428.5 та пр. 428.2) на проміжку $[0, 1]$ мають неперервну суму 0, хоча обидва збігаються **нерівномірно** на цьому проміжку.

Втім, є класи випадків, коли рівномірна збіжність все ж виявляється необхідною. У цьому напрямку ми доведемо наступну теорему, що належить Діні (іт. Ulisse Dini, Улíсе Дíні).

Теорема 431.2. *Нехай члени ряду* (427.3) *неперервні на всьому проміжку $\mathcal{X} = [a, b]$ і* ***додатні****. Якщо ряд має суму $f(x)$, що також є неперервною на всьому проміжку, то він збігається на цьому проміжку рівномірно.*

Доведення. Розглянемо залишки ряду (427.3):

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Функція $\varphi_n(x)$ від x, як різниця двох неперервних функцій, також неперервна. Зважаючи на додатність членів ряду, послідовність $\{\varphi_n(x)\}$, при сталому x, є спадною (незростаючою):

$$\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x) \geqslant \ldots \geqslant \varphi_n(x) \geqslant \varphi_{n+1}(x) \geqslant \ldots$$

Насамкінець, оскільки ряд (427.3) збігається на проміжку $\mathcal{X}$, то при будь-якому сталому x

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

Для того, щоб показати рівномірну збіжність ряду, достатньо довести, що для кожного числа $\varepsilon > 0$ існує хоча б одне значення n, що $\varphi_n(x) < \varepsilon$ водночас для всіх x (бо тоді для великих значень n ця нерівність виконувалася б теж).

Доведення цього будемо проводити від протилежного. Припустимо, що для **деякого** $\varepsilon > 0$ такого номера n не існує. Тоді при будь-якому $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ на проміжку $\mathcal{X}$ знайдеться таке значення $x = x_n$, що $\varphi_n(x_n) \geqslant \varepsilon$. Застосуємо лему Бользано – Вейєрштрасса (лем. 41.1) до послідовності $\{x_n\}$, усі елементи якої містяться у скінченному проміжку $\mathcal{X}$, та виділимо із цієї послідовності часткову послідовність $\{x_{n_k}\}$, що збігається до границі x_0.

Зважаючи на неперервність $\varphi_m(x)$, маємо:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m\left(x_{n_k}\right) = \varphi_m(x_0),$$

незалежно від m. З іншого боку, при будь-якому m, для досить великих k:

$$n_k \geqslant m \quad \text{і} \quad \varphi_m(x_{n_k}) \geqslant \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon.$$

Переходячи тут до границі при $k \to \infty$, знайдемо, що

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m(x_{n_k}) = \varphi_m(x_0) \geqslant \varepsilon.$$

А ця нерівність, що виконується для будь-якого m, суперечить тому, що

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x_0) = 0.$$

Теорему доведено. □

432. Зауваження про квазі-рівномірну збіжність

Отже, якщо функціональний ряд (427.3) складається з неперервних на проміжку $\mathcal{X} = [a, b]$ функцій і збігається на цьому проміжку до суми $f(x)$, то для неперервності останньої **досить** наявності рівномірної збіжності ряду, але, в загальному випадку, зовсім не **необхідна**. Ще Діні та іншими було помічено, що **достатньою** умовою є деяка “ослаблена” рівномірність збіжності: вона полягає у тому, що *для кожного числа* $\varepsilon > 0$ *і кожного номеру* N' *існує* ***хоча б один*** *незалежний від* x *номер* $n > N'$*, такий що нерівність* (428.2) *виконується одночасно для всіх* x *із* $\mathcal{X}$. Справді, при доведенні теор. 431.1 ми використовували лише **один** номер n, при якому нерівність (431.3) виконується для всіх x із $\mathcal{X}$.

Однак, навіть ця “ослаблена” рівномірність все ж не є **необхідною** для неперервності суми $f(x)$ ряду (427.3). Вона не виконується, наприклад, для рядів (431.5), що збігаються до неперервної суми $f(x) \equiv 0$.

Арзеля (іт. Cesare Arzelà, Че́йзаре Арзеля́) ввів до розгляду у 1883 році особливий тип збіжності (що згодом дістала назву **квазі-рівномірної** збіжності), яка вирішує питання про **точну** характеристику ряду, що забезпечує неперервність його суми.

Про ряд (427.3)*, що збігається на проміжку* $\mathcal{X} = [a, b]$*, говорять, що він збігається* ***квазі-рівномірно*** *на* $\mathcal{X}$ *до суми* $f(x)$*, якщо для кожного числа* $\varepsilon > 0$ *і кожного номера* N' *проміжок* $\mathcal{X}$ *може бути покритим* ***скінченним*** *числом відкритих проміжків*

$$(a_1,\, b_1),\ (a_2,\, b_2),\ \ldots,\ (a_i,\, b_i),\ \ldots,\ (a_k,\, b_k),$$

і їм у відповідність можуть бути поставлені k *номерів*

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_i,\ \ldots,\ n_k \quad (> N')$$

так, що для всіх значень x *(із* $\mathcal{X}$*), що містяться у* $(a_i,\ b_i)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$*, нерівність*

$$|f(x) - f_{n_i}(x)| = |\varphi_{n_i}(x)| < \varepsilon$$

виконується одночасно.

При згаданій раніше “ослабленій” рівномірній збіжності **усім** значенням x із $\mathcal{X}$ ставився у відповідність **один і той самий** номер n, а тут усі x розбиваються на групи, яким у відповідність ставляться різні значення n, але кожний раз - **у скінченній кількості**.

Користуючись цим поняттям, Арзеля отримав таку теорему.

Теорема 432.1. *Нехай функції* $u_n(x)$ *визначені та неперервні на проміжку* $\mathcal{X} = [a, b]$*, і ряд* (427.3) *збігається на цьому проміжку. Для того, щоб сума ряду* $f(x)$ *також була неперервною у* $\mathcal{X}$*,* ***необхідно та достатньо****, щоб ряд збігався у* $\mathcal{X}$ *до* $f(x)$ ***квазі-рівномірно****.*

Доведення. **Необхідність.** Припустимо спочатку неперервність функції $f(x)$, а отже і всіх залишків $\varphi_n(x)$. Візьмемо в $\mathcal{X}$ **довільну** точку x', а також довільні числа ε та N. Для них знайдеться такий номер $n' > N$, що

$$|\varphi_{n'}(x')| < \varepsilon.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

За умови неперервності функції $\varphi_{n'}(x)$, схожа нерівність

$$|\varphi_{n'}(x)| < \varepsilon$$

буде виконуватись і в деякому околі $\sigma' = (x' - \delta',\ x' + \delta')$ точки x'. Із усіх цих відкритих проміжків σ', побудованих для всіх можливих x' із $\mathcal{X}$, складеться певна **нескінченна** система Σ, що покриває проміжок $\mathcal{X}$. Тоді, згідно з лемою Бореля (лем. 88.1), з неї виділяється і **скінченна** підсистема проміжків

$$\Sigma^* = \{\sigma_1,\ \sigma_2,\ \dots,\ \sigma_k\},$$

що також покриває $\mathcal{X}$. Ці проміжки і будуть тими, про які ідеться у означенні квазі-рівномірної збіжності.

Достатність. Припустимо тепер, що ряд (427.3) збігається до своєї суми $f(x)$ квазі-рівномірно. Взявши довільні числами ε та N', побудуємо проміжки $(a_i,\ b_i)$ і виберемо номери n_i $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ k)$ із вказаними у означенні властивостями. Виберемо довільно у $\mathcal{X}$ точку x_0; нехай вона міститься в проміжку $(a_{i_0},\ b_{i_0})$. Як і в доведенні теор. 431.1 (431.2), можемо написати

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f_{n_i}(x) - f_{n_i}(x_0)| + |\varphi_{n_i}(x)| + |\varphi_{n_i}(x_0)|. \tag{432.1}$$

При цьому, очевидно,

$$|\varphi_{n_i}(x_0)| < \varepsilon;$$

якщо x також належить до цього проміжку $(a_{i_0},\ b_{i_0})$, то і

$$|\varphi_{n_i}(x)| < \varepsilon.$$

Можна знайти таке число $\delta > 0$, що, для $|x - x_0| < \delta$, не тільки x буде міститися в заданому проміжку, але й перший доданок справа у (432.1) буде $< \varepsilon$, а отже

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon,$$

і неперервність $f(x)$ у точці x_0 доведено. (Як читач помітив, припущення, що усі номери n_i можуть бути вибрані як завгодно великими, насправді ніде не використовується.) □

Із цієї теореми з легкістю отримується теорема Діні теор. 431.2. Справді, якщо ряд (427.3) складається із додатних неперервних функцій і збігається до неперервної суми, то, як ми бачили, збіжність обов'язково буде квазі-рівномірною.

Користуючись тим, що в даному випадку залишки $\varphi_n(x)$ спадають із зростанням n, достатньо взяти номер N більшим за усі n_i $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ k)$, щоб для $n > N$ нерівність (428.2) виконувалась одночасно для всіх x із $\mathcal{X}$: збіжність виявляється **рівномірною**.

433. Почленний перехід до границі

Наведемо ще одну теорему, яка є узагальненням теор. 431.1. У ній $\mathcal{X}=\{x\}$ — **довільна** нескінченна множина, що має точку згущення a (скінченну або ні) (розд. 52); ця точка сама може і не належати до множині.

Теорема 433.1. *Нехай кожна з функцій* $u_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ *визначена у області* $\mathcal{X}$ *і має скінченну границю, коли* x *прямує до* a*:*

$$\lim_{x\to a} u_n(x)=c_n. \tag{433.1}$$

Якщо ряд (427.3) *у області* $\mathcal{X}$ *збігається* ***рівномірно****, то*

1) збігається ряд, складений із цих границь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n=C, \tag{C}$$

та

2) сума ряду (427.3)*,* $f(x)$*, також має границю, коли* $x\to a$*, а саме*

$$\lim_{x\to a} f(x)=C. \tag{433.2}$$

Доведення. Згідно з умовою рівномірної збіжності розд. 429, для довільно взятого $\varepsilon>0$ існує такий номер N, що для $n>N$ та $m=1,\ 2,\ 3,\ \dots$ нерівність (429.2) виконується для всіх x із $\mathcal{X}$. Переходячи тут до границі при $x\to a$ з урахуванням (433.1), знайдемо, що

$$|c_{n+1}+c_{n+2}+\dots+c_{n+m}|\leqslant\varepsilon,$$

тому для ряду (C) виконується умова збіжності (розд. 376).

Якщо C, C_n та γ_n означають, як зазвичай, його суму, часткову суму та залишок, то

$$C=C_n+\gamma_n.$$

Віднімаючи цю рівність почленно з (431.1), нескладно отримати:

$$|f(x)-C|\leqslant|f_n(x)-C_n|+|\varphi_n(x)|+|\gamma_n|. \tag{433.3}$$

Зважаючи на **рівномірну збіжність** ряду (427.3) і збіжність ряду (C), взявши будь-яке $\varepsilon>0$, можна **зафіксувати** n досить великим, щоб для всіх x із $\mathcal{X}$ було:

$$|\varphi_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \text{а також}\quad |\gamma_n|<\varepsilon. \tag{433.4}$$

Оскільки, очевидно,

$$\lim_{x\to a} f_n(x)=\lim_{x\to a}\sum_{k=1}^{n}u_k(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k=C_n,$$

то якщо обмежитися випадком скінченного a, знайдеться таке $\delta > 0$, що при $|x - a| < \delta$ буде:

$$|f_n(x) - C_n| < \varepsilon. \tag{433.5}$$

Тоді, для вказаних значень x, зважаючи на (433.3), (433.4) та (433.5), буде виконуватися нерівність

$$|f(x) - C| < 3\varepsilon,$$

що і приводить до (433.2). (Читач впізнає у цьому міркуванні те, яке вже було застосоване для доведення теор. 431.1.) ☐

Рівність (433.2) можна записати у вигляді (дивіться (433.1)):

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \to a} u_n(x) \right\};$$

тож, при наявності рівномірної збіжності, *границя суми ряду дорівнює сумі ряду, що складається із границь його членів*, або, інакше кажучи, *у ряді допустимий граничний перехід* ***почленно***.

434. Почленне інтегрування рядів

Перейдемо тепер до розгляду питання щодо інтегрування суми збіжного функціонального ряду.

Теорема 434.1. *Якщо функції $u_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ неперервні на проміжку $\mathcal{X} = [a, b]$, і складений із них ряд (427.3) збігається на цьому проміжку* ***рівномірно****, то інтеграл від суми $f(x)$ ряду (427.3) може бути представленим так:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \dots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \dots \tag{434.1}$$

Доведення. Зважаючи на неперервність функцій $u_n(x)$ та $f(x)$ (теор. 431.1), існування усіх цих інтегралів є очевидним. Проінтегрувавши тотожність

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \varphi_n(x)$$

у проміжку $[a, b]$, отримаємо:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \dots + \int_a^b u_n(x)\,dx + \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Отже, сума n членів ряду (434.1) відрізняється від інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ додатковим членом $\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx$. Для доведення розкладу (434.1) треба лише показати, що

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx = 0. \tag{434.2}$$

Зважаючи на рівномірну збіжність ряду (427.3), для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що при $n > N$

$$|\varphi_n(x)| < \varepsilon$$

зразу для всіх x на проміжку $[a, b]$. Тоді для тих же значень n буде:

$$\left|\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |\varphi_n(x)|\,dx < (b-a)\cdot\varepsilon,$$

що і доводить граничне співвідношення (434.2). □

Рівність (434.1) може бути записана у вигляді

$$\int\limits_a^b \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int\limits_a^b u_n(x)\,dx\right\},$$

отже у випадку рівномірно збіжного ряду *інтеграл від суми ряду дорівнює сумі ряду, побудованого з інтегралів його членів*, або, інакше кажучи, *допустиме* ***почленне*** *інтегрування ряду.*

Як і у випадку з теор. 431.1, вимога рівномірної збіжності **істотна** для справедливості розкладу (434.1), тобто не може бути просто відкинута, але вона все ж не є **необхідною**. Ряди (431.5), розглянуті вище, як раз ілюструють цю обставину. Обидва вони на проміжку $[0, 1]$ збігаються до функції $f(x) = 0$ **нерівномірно**. Але, інтегруючи перший почленно, ми отримаємо, що сума ряду інтегралів дорівнює

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 2n^2x\cdot e^{-n^2x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(1-e^{-n^2}\right) = 1, \quad \text{хоча} \quad \int\limits_0^1 f(x)\,dx = 0;$$

для другого ж ряду аналогічно знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{ln\,(1+n^2)}{2n} = 0 = \int\limits_0^1 f(x)\,dx.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Цікавим є приклад ряду

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \quad (0 \leqslant x < 1).$$

Тут

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots,$$

отже ряд **можна** інтегрувати почленно, хоча при $x = 1$ він взагалі **розбігається**.

Наведемо тепер узагальнення теор. 434.1, пов'язане з відмовою від вимоги **неперервності** розгляданих функцій.

Теорема 434.2. *Якщо функції $u_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ інтегровні (розд. 295) на проміжку $\mathcal{X} = [a, b]$, і складений із них ряд (427.3) збігається **рівномірно**, то сума $f(x)$ ряду також буде інтегровною, і розклад (434.1) буде справедливий.*

Доведення. Почнемо з інтегровності функції $f(x)$.

Зважаючи на рівномірну збіжність ряду, для заздалегідь заданому ε, ми можемо **зафіксувати** n настільки великим, щоб у всіх точках проміжку $[a, b]$ було:

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{або} \quad f_n(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f_n(x) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{434.3}$$

Візьмемо $[\alpha, \beta]$ — довільну частину проміжку $[a, b]$, і нехай m та M будуть точними границями функції $f_n(x)$ у $[\alpha, \beta]$, а $\omega = M - m$ — її коливання; відповідне коливання функції $f(x)$ позначимо через Ω. Зважаючи на (434.3), у межах проміжку $[\alpha, \beta]$:

$$m - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < M + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{тож} \quad \Omega \leqslant \omega + \varepsilon.$$

Розіб'ємо тепер проміжок $[a, b]$ звичним чином на частинні проміжки $[x_i,\ x_{i+1}]$ та станемо індексом i позначати коливання, що відповідають i-му проміжку. Тоді $\Omega_i \leqslant \omega_i + \varepsilon$, та

$$\sum_i \Omega_i \cdot \Delta x_i \leqslant \sum_i \omega_i \cdot \Delta x_i + \varepsilon(b - a).$$

Оскільки другий доданок справа є довільно малим, а перший прямує до нуля разом з $\lambda = \max \Delta x_i$, то це ж справедливо і стосовно виразу зліва, звідки і випливає інтегровність функції $f(x)$ (297.4).

Що ж стосується рівності (434.1), то вона доводиться так само, як і вище. □

Покажемо на прикладі, що при порушенні рівномірності ряд, що складається із інтегровних функцій, може мати неінтегровну суму. Нехай $u_n(x)$ (для $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) дорівнює 1, якщо x виражається **нескорочуваним** дробом $\dfrac{m}{n}$, і дорівнює 0 — у решті точок проміжку $[0, 1]$. Ці функції матимуть лише скінченне число розривів, отже є інтегровними у $[0, 1]$, а сумою ряду буде заздалегідь неінтегровна функція Діріхлє (пр. 300.2).

Разом з тим, зрозуміло (ми бачили це на прикладах), рівномірна збіжність не є **необхідною** умовою для інтегровності суми ряду, що складається з інтегровних функцій. Для цього випадку Арзеля привів умову, що є **необхідною та достатньою** ("квазі-рівномірна збіжність"), порівняйте з розд. 432.

435. Почленне диференціювання рядів

За допомогою теор. 434.1 легко доводиться наступна теорема.

Теорема 435.1. *Нехай функції* $u_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ *визначені на проміжку* $\mathcal{X} = [a, b]$ *і мають у ньому неперервні похідні* $u'(x)$. *Якщо на цьому проміжку не тільки збігається ряд* (427.3), *але й* ***рівномірно*** *збігається ряд, складений із похідних:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots, \tag{435.1}$$

тоді і сума $f(x)$ *ряду* (427.3) *має у* $\mathcal{X}$ *похідну, причому*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{435.2}$$

Доведення. Позначимо через $f^*(x)$ суму ряду (435.1); за теор. 431.1, це буде неперервна функція від x. Скориставшись тепер теор. 434.1, проінтегруємо ряд (435.1) почленно на проміжку від a до довільного значення x із $\mathcal{X}$; ми отримаємо

$$\int_a^x f^*(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)\,dt.$$

Але, очевидно, $\int\limits_a^x u_n'(t)\,dt = u_n(x) - u_n(a)$, отже

$$\int_a^x f^*(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = f(x) - f(a).$$

(Це перетворення зумовлено **наперед** відомою **збіжністю** рядів $\sum u_n(x)$ та $\sum u_n(a)$; дивіться теор. 364.4.) Оскільки інтеграл зліва, зважаючи на неперервність підінтегральної функції, має похідну, що дорівнює $f^*(x)$ (вл. 305.2), то ту ж похідну має і функція $f(x)$, яка від інтеграла відрізняється лиш на сталу. ☐

nebayduzhi.math@gmail.com

Рівність (435.2) можна переписати (користуючись, слідуючи за Арбоґастом та Коші, позначенням похідної через D) у вигляді

$$D\left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} Du_n(x).$$

Отже, при вказаних умовах, *похідна від суми ряду виявляється рівною сумі ряду, що складений з похідних його членів*, або, інакше кажучи, *допустиме **почленне** диференціювання ряду.*

Розглянемо ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}[e^{-(n-1)^2x^2} - e^{-n^2x^2}]$$

та

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2) - \frac{1}{2(n-1)}\ln(1+(n-1)^2x^2)\right].$$

Перший із них зводиться до 0 при $x = 0$ та до 1 у всіх інших точках, а сума другого усюди дорівнює 0. Якщо продиференціювати їх почленно, то вийдуть уже знайомі нам ряди (431.5), що збігаються на всьому проміжку $[0, 1]$ до 0, але обидва **нерівномірно**. У першому випадку ряд із похідних збігається і при $x = 0$, де сума початкового ряду похідної мати не може, бо вона розривна у цій точці. У другому випадку, навпаки, почленне диференціювання всюди приводить до вірного результату. Цими прикладами ілюструється роль вимоги, щоб ряд похідних збігався **рівномірно**: вона **істотна** але не є **необхідною**.

Теор. 435.1 може бути звільнена від деяких зайвих припущень ціною невеликого ускладнення доведення.

Теорема 435.2. *Нехай функції $u_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ визначені на проміжку $\mathcal{X} = [a, b]$ і мають у ньому скінченні похідні $u_n'(x)$. Якщо ряд (427.3) збігається хоча б в одній точці, наприклад при $x = a$, а ряд (435.1), складений із похідних, **рівномірно** збігається на всьому проміжку $\mathcal{X}$, то тоді:*
*1) ряд (427.3) збігається **рівномірно** на всьому проміжку та*
2) його сума $f(x)$ має у $\mathcal{X}$ похідну, що виражається рівністю (435.2).

Доведення. Візьмемо на проміжку $[a, b]$ дві різні точки x_0 та x і складемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0}. \tag{435.3}$$

Ми доведемо, що для будь-якого фіксованого x_0 цей ряд збігається для всіх $x \neq x_0$ та ще й **рівномірно** відносно x.

З цією метою, взявши довільне число $\varepsilon > 0$, зважаючи на **рівномірну** збіжність ряду (435.1), знайдемо такий номер N, що при $n > N$ та $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ нерівність

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k'(x)\right| < \varepsilon \tag{435.4}$$

виконується для всіх значень x одночасно. Фіксуючи на момент n та m, розглянемо функцію

$$U(x) = \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x);$$

її похідна

$$U'(x) = \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k'(x);$$

зважаючи на (435.4), абсолютне значення похідної завжди $< \varepsilon$. Але, очевидно,

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{u_k(x) - u_k(x_0)}{x - x_0} = \frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} = U'(c),$$

де c міститься між x_0 та x (теорема Лаґранжа, теор. 112.1). Тому, остаточно, для всіх $x \neq x_0$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{u_k(x) - u_k(x_0)}{x - x_0}\right| < \varepsilon;$$

оскільки ця нерівність виконується лише для $n > N$, хоч би яким би було $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, то **рівномірна** збіжність ряду (435.3) доведена. Звідси ж витікають усі потрібні нам висновки.

Передусім, взявши $x_0 = a$, із рівномірної збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) - u_n(a)}{x - a}, \quad \text{а з ним і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)]$$

(дивіться насл. 429.2.1), та із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(a)$ робимо висновок щодо **рівномірної** збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Якщо через $f(x)$ позначити його суму, то сумою ряду (435.3), де x_0 знову є довільним значенням x на проміжку $[a, b]$, — очевидно, буде $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Оскільки у рівномірно збіжному ряді можна переходити до границі **почленно** (згідно з теор. 433.1), то, спрямовуючи x до x_0, отримаємо:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lim_{x \to x_0} \frac{u_n(x) - u_n(x_0)}{x - x_0} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0),$$

nebayduzhi.math@gmail.com

що й потрібно було довести. □

Зауваження Усі ці теореми стосовно почленного граничного переходу, почленного інтегрування та почленного диференціювання встановлюють аналогію між функціональними рядами та сумами скінченного числа функцій. Ця аналогія, однак, є обмеженою певними умовами, у характеристиці яких **рівномірна збіжність** займає виключне місце.

436. Зв'язок з послідовностями

Особливий інтерес викликає переформулювання отриманих результатів з точки зору послідовностей функцій. Це дасть змогу встановити чіткий зв'язок між розгляданими питаннями та загальним питанням про **перестановку двох граничних процесів**, яке відіграє дуже важливу роль у всьому аналізі. З іншого боку, намітиться і шлях для узагальнення отриманих результатів.

Отже ми знову зіставляємо послідовність функцій (427.1) та функціональний ряд (427.3), вважаючи, що вони пов'язані відношеннями:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

або, що рівносильно:

$$u_1(x) = f_1(x), \quad u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) \quad (n = 2,\ 3,\ \dots).$$

Гранична функція для послідовності буде тією ж, що і сума відповідного ряду. Рівномірна збіжність може бути лише одночасно і для послідовності, і для ряду.

I. Розглянемо спочатку питання про **границю** згаданої граничної функції. Нехай множина $\mathcal{X} = \{x\}$, у якій визначені усі розглядані функції, має точку згущення a. Тоді теор. 433.1 перефразується так.

Теорема 436.1. *Якщо функції $f_n(x)$ мають границі*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \text{ із } \mathcal{X}) \tag{436.1}$$

та

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = C_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots), \tag{436.2}$$

причому в першому випадку прямування до границі відбувається ***рівномірно*** *відносно x (у $\mathcal{X}$), тоді існують обидві скінченні границі*

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad \text{та} \quad \lim_{n\to\infty} C_n,$$

які дорівнюють одна одній.

Рівність

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} C_n,$$

якщо прийняти до уваги (436.1) та (436.2), може бути переписана так:

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

Отже, ця теорема встановлює для функції $f_n(x)$ **від двох** змінних x та n, умови існування і рівності двох повторних границь і безпосередньо приводить до досліджень розд. 168.

Надамо читачеві можливість самостійно переформулювати для послідовностей обидві теореми з розд. 431.

II. Тепер нехай область $\mathcal{X}$ являє собою проміжок $[a, b]$, і розглянемо питання щодо **інтеграла** граничної функції. Ось аналог теор. 434.2.

Теорема 436.2. *Якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ складається із функцій, що є інтегровними на проміжку $[a, b]$, і збігається до своєї граничної функції $f(x)$* ***рівномірно*** *відносно x у $[a, b]$, то функція $f(x)$ буде інтегровною в $[a, b]$, і до того ж*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Останню рівність перепишемо у вигляді:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\} dx. \tag{436.3}$$

Отже, границю, що відноситься до інтеграла, виявляється можливим віднести безпосередньо до підінтегральної функції. У такому випадку говорять, що *допустимий граничний перехід* ***під знаком*** *інтеграла.*

У рівності (436.3) переставляються знаки **границі** та **інтеграла**. Оскільки визначений інтеграл також є результатом деякого граничного процесу, то це питання також виявляється спорідненим до того, яке вивчалось у розд. 168.

III. Нарешті, перейдемо до питання стосовно **похідної** граничної функції. Перефразуємо теор. 435.2.

Теорема 436.3. *Нехай усі функції $f_n(x)$ диференційовні на проміжку $[a, b]$, і послідовність похідних $\{f_n'(x)\}$ збігається на всьому проміжку* ***рівномірно*** *відносно x. Якщо відомо, що послідовність функцій $\{f_n(x)\}$ збігається хоча б в одній точці проміжку $[a, b]$, то можна стверджувати, що*
1) ця послідовність збігається на всьому проміжку, і навіть ***рівномірно****,*
2) гранична функція $f(x)$ є диференційовною, до того ж

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Якщо переписати цю рівність більш виразно:

$$D\left\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\} = \lim_{n\to\infty}\{Df_n(x)\},$$

тоді стає зрозуміло, що ідеться про перестановку знаків **границі** та **похідної**. Оскільки похідна також є **границею**, то і цей процес пов'язаний із перестановкою двох граничних переходів.

Насамкінець зазначимо наступне. З точки зору нескінченного ряду, натуральний параметр n, звісно, не може бути заміненим на більш загальний. Інша річ, коли ідеться про послідовності функцій. Тут функція $f_n(x)$ може бути замінена на функцію двох змінних $f(x, y)$, де y змінюється у довільній області $\mathcal{Y} = \{y\}$, що має точку згущення y_0 (скінченну, або ні). Граничний перехід при $n \to \infty$ заміняється граничним переходом при $y \to y_0$. Формулювання і доведення теорем, що відносяться до цього більш загального випадку, не становлять труднощів. До деяких із цих узагальнень ми повернемося пізніше, у главі 14.

437. Неперервність суми степеневого ряду

Дуже важливим прикладом застосування усієї викладеної теорії є дослідження властивостей **степеневих рядів**. Ми обмежимося степеневими рядами виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \tag{437.1}$$

бо, як ми бачили у розд. 403, ряди більш загального виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \tag{437.2}$$

безпосередньо зводяться до виду (437.1) простою заміною змінної.

Нехай ряд (437.1) має **радіус збіжності** $R > 0$ (розд. 379). Передусім, можна навести таку теорему.

Теорема 437.1. *Яке б додатне число $r < R$ не обрати, ряд (437.1) буде збігатися* ***рівномірно*** *відносно x на замкненому проміжку $[-r, r]$.*

Доведення. Справді, оскільки $r < R$, то при $x = r$ ряд (437.1) збігається **абсолютно**, тобто збігається додатній ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot r^n = |a_0| + |a_1| \cdot r + |a_2| \cdot r^2 + \dots + |a_n| \cdot r^n + \dots \tag{437.3}$$

При $|x| \leqslant r$ абсолютні значення членів ряду (437.1) не перевищують відповідні члени цього ряду, який, отже, відіграє роль **мажорантного** ряду. Тоді, за ознакою Ваярштрасса, ряд (437.1) для вказаних значень x збігається **рівномірно**. ☐

nebayduzhi.math@gmail.com

Хоча число r може бути обране як завгодно близьким до R, але з доведеного вище все ж не витікає рівномірна збіжність на проміжку $[-R, R]$. На прикладі прогресії пр. 428.6 читач бачить, що як раз краї проміжку збіжності можуть виявитися **точками нерівномірності**.

Тепер, як наслідок теор. 431.1, наведемо таку теорему.

Теорема 437.2. *Сума $f(x)$ степеневого ряду (437.1) для всіх значень x проміжку $(-R, R)$ являє собою неперервну функцію від x.*

Доведення. Яке б значення $x = x_0$ всередині проміжку збіжності ми б не обрали, можна підібрати таке число $r < R$, щоб було $|x_0| < r$. Застосувавши теор. 431.1 на проміжку $[-r, r]$ та беручи до уваги теор. 437.1, отримаємо неперервність функції $f(x)$ на цьому проміжку, а отже, зокрема, і при $x = x_0$. □

(Звертаємо увагу читача на те, що ми уникли застосування теор. 431.1 на проміжку $(-R, R)$, де рівномірна збіжність не може бути гарантована.)

Неперервність суми степеневого ряду може бути використана для доведення **теореми про тотожність степеневих рядів** (що нагадує схожу теорему для многочленів).

Теорема 437.3 (Теорема про тотожність степеневих рядів)**.** *Якщо два степеневих ряди*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

та

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots$$

у околі точки $x = 0$, мають одну і ту ж саму суму, то ці ряди є ***тотожними****, тобто їх відповідні коефіцієнти є попарно рівними:*

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \dots,\ a_n = b_n,\ \dots .$$

(Тут береться до розгляду не тільки ***двобічний*** *окіл $(-\delta, \delta)$ точки $x = 0$, але і* ***однобічній*** *виду $[0, \delta)$ або $(-\delta, 0]$)*

Доведення. Приймаючи $x = 0$ у тотожності

$$a_0 + a_1 x + \dots = b_0 + b_1 x + \dots ,$$

одразу ж переконуємося у рівності $a_0 = b_0$. Відкидаючи ці члени в обох частинах записаної тотожності і ділячи їх на x (**у цьому випадку ми вимушені вважати, що** $x \neq 0$), отримаємо нову тотожність

$$a_1 + a_2 x + \dots = b_1 + b_2 x + \dots ,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

яка також справедлива у околі точки $x = 0$, **але без самою точки**. Не маючи права прийняти тут $x = 0$, ми, однак, можемо спрямувати x до 0; застосовуючи граничний перехід і користуючись неперервністю, ми все ж таки отримаємо, що $a_1 = b_1$. Відкидаючи ці члени та знову ділячи на $x \neq 0$, при $x \to 0$ знайдемо, що $a_2 = b_2$, тощо. □

Ця проста теорема, що показує **єдиність** розкладу функції у степеневий ряд, має часті застосування. З її допомогою, наприклад, одразу маємо, що *розклад парної (непарної) функції у степеневий ряд виду* (437.1) *може мати лише парні (непарні) степені* x.

Розглянемо тепер більш тонке питання стосовно поведінки ряду поблизу одного з **країв** $x \pm R$ його проміжку збіжності (вважаючи надалі, що цей проміжок є скінченним). Ми можемо обмежитися тут лише правим краєм $x = R$; усе сказане про нього, за допомогою простої заміни x на $-x$, переноситься і на випадок лівого краю $x = -R$.

Передусім доведемо таку просту теорему.

Теорема 437.4. *Якщо степеневий ряд* (437.1) *на краю* $x = R$ *його проміжку збіжності* ***розбігається****, то збіжність ряду на проміжку* $[0, R)$ *не може бути* ***рівномірною****.*

Доведення. Справді, при наявності рівномірної збіжності, можна було б, згідно з теор. 433.1, перейти у нашому ряді до границі при $x \to R-0$ почленно, і тоді встановити збіжність ряду з границь:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + \ldots + a_n R^n + \ldots ,$$

що суперечить припущенню. □

Справедлива й така, у деякому сенсі обернена теорема.

Теорема 437.5. *Якщо степеневий ряд* (437.1) *збігається при* $x = R$ *(можливо неабсолютно), то збіжність ряду необхідно буде* ***рівномірною*** *на всьому проміжку* $[0, R]$*.*

Доведення. Справді, якщо записати ряд (437.1) у вигляді

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n \quad (0 \leqslant x \leqslant R),$$

тоді шуканий висновок безпосередньо витікає із ознаки Абеля, оскільки ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ збігається, а множники $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ утворюють монотонну та рівномірно обмежену послідовність

$$1 \geqslant \frac{x}{R} \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^2 \geqslant \ldots \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^n \geqslant \left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} \geqslant \ldots$$

□

Доведене твердження дає змогу застосувати теор. 431.1 до усього проміжку $[0, R]$. Отже, як доповнення до теор. 437.2 щодо неперервності суми степеневого ряду на відкритому проміжку $(-R, R)$, ми наведемо таку теорему (що належить Абелю). (Інше доведення цієї теореми (у припущенні $R = 1$) ми наводили у розд. 418 — у зв'язку із питанням щодо регулярності методу Пуассона – Абеля підсумовування розбіжних рядів.)

Теорема 437.6 (Теорема Абеля)**.** *Якщо степеневий ряд* (437.1) *збігається для* $x = R$, *то його сума неперервна в точці* $x = R$ *(зрозуміло, зліва), тобто*

$$\lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Теорема Абеля має важливі застосування.

Якщо для функції $f(x)$ отримано розклад у степеневий ряд лише на відкритому проміжку $(-R, R)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (-R < x < R),$$

але функція неперервна, а ряд продовжує збігатися, і на одному з кінців цього проміжку, наприклад для $x = R$, **тоді розклад залишається вірним на цьому кінці проміжку**. У цьому легко переконатися, переходячи у написаній рівності до границі для $x \to R - 0$.

Отже, наприклад, отримавши розклад

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

лише для $-1 < x < 1$, але, знаючи, що ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

збігається, робимо висновок, що його сума дорівнює $\ln 2$.

Так само обґрунтовується і твердження із розд. 407 стосовно того, що біноміальний ряд

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}x^n + \ldots$$

і при $x = \pm 1$ має суму $(1+x)^m$, якщо тільки ряд виявляється збіжним.

438. Інтегрування і диференціювання степеневих рядів

Застосуємо тепер до степеневих рядів теореми з розд. 434 та розд. 435.

Зіставляючи уже доведені теор. 437.1 та теор. 437.5 із теор. 434.1, отримаємо таку теорему.

Теорема 438.1. *Степеневий ряд* (437.1) *на проміжку* $[0, x]$, *де* $|x| < R$, *завжди можна інтегрувати* ***почленно****, тому*

$$\int\limits_0^x f(x)\,dx = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots \tag{438.1}$$

Значення x *може виявитися одним із кінців проміжку збіжності, якщо на цьому кінці ряд* (437.1) *збігається.*

Переходимо до питання щодо диференціювання степеневого ряду.

Теорема 438.2. *Степеневий ряд* (437.1) *всередині його проміжку збіжності можна диференціювати* ***почленно****, тому*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \tag{438.2}$$

Твердження залишається справедливим і для кінця проміжку збіжності, якщо вказаний ряд на цьому кінці збігається.

Доведення. Візьмемо **будь-яке** x всередині проміжку збіжності початкового ряду, так що $|x| < R$, і вставимо число r' між $|x|$ та R: $|x| < r' < R$. Зважаючи на збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r'^n = a_0 + a_1 r' + a_2 r'^2 + \ldots + a_n r'^n + \ldots,$$

його загальний член є обмеженим:

$$|a_n| r'^n \leqslant L \quad (L = \text{const};\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Тоді для абсолютної величини n-го члена ряду (438.2) отримаємо оцінку

$$n|a_n| \cdot |x|^{n-1} = n|a_n| \cdot r'^n \cdot \left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1} \cdot \frac{1}{r'} \leqslant \frac{L}{r'} \cdot n\left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1}.$$

Ряд

$$\frac{L}{r'}\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1} = \frac{L}{r'}\left(1 + 2\left|\frac{x}{r'}\right| + \ldots + n\left|\frac{x}{r'}\right|^{n-1} + \ldots\right)$$

збігається; у цьому нескладно переконатися за допомогою ознаки д'Аламбера (теор. 368.3), якщо врахувати, що $\left|\frac{x}{r'}\right| < 1$. В такому разі абсолютно збігається ряд (438.2). Звідси зрозуміло, що *радіус збіжності* R' *цього ряду не менший за* R.

Якщо тепер взяти **довільне** $r < R$, то одночасно і $r < R'$; зважаючи на теор. 437.1 ряд (438.2) **рівномірно** збігається на проміжку $[-r, r]$, отже, згідно з теор. 435.1, на цьому проміжку допустиме почленне диференціювання ряду (437.1). Оскільки $r < R$ довільне, то основне твердження теореми доведено.

У випадку збіжності ряду (438.2), скажімо, при $x = R$, ця збіжність є **рівномірною** (теор. 437.5) на проміжку $[0, R]$, і теор. 438.2 може бути застосована до цілого цього проміжку — почленне диференціювання виявляється допустимим і при $x = R$. □

Зауваження. Ми переконалися у тому, що $R' \geqslant R$. З іншої сторони, абсолютні значення членів початкового ряду (437.1) не перевищують відповідні члени ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = a_1 x + 2a_2 x^2 + \ldots + na_n x^n + \ldots,$$

що має той самий радіус збіжності R', що й ряд (438.2). Тому, $R \geqslant R'$. Отже, остаточно, $R = R'$: *радіуси збіжності степеневого ряду* (437.1) *та ряду* (438.2), *що отриманий з нього шляхом почленного диференціювання, однакові.* Втім, це легко встановлюється і за допомогою теореми Коші – Адамара (теор. 380.1), якщо згадати, що $\sqrt[n]{n} \to 1$, коли $n \to \infty$ (пр. 32.10).

Оскільки ряд (437.1) отриманий почленним диференціюванням із ряду (438.1), то і ці ряди мають спільний радіус збіжності.

Остання теор. 438.2 відкриває можливість послідовного **багаторазового** диференціювання степеневого ряду. Отже, як і раніше позначаючи через $f(x)$ функцію, що може бути представлена у вигляді степеневого ряду (437.1) на його проміжку збіжності, будемо мати всюди всередині цього проміжку:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \\
f'(x) &= 1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 x + 3\cdot a_3 x^2 + \ldots + n\cdot a_n x^{n-1} + \ldots \\
f''(x) &= 1\cdot 2\cdot a_2 + 2\cdot 3\cdot a_3 x + \ldots + (n-1)\cdot n\cdot a_n x^{n-2} + \ldots \\
f'''(x) &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot a_3 + \ldots + (n-2)(n-1)n\cdot a_n x^{n-3} + \ldots \\
&\ldots \\
f^{(n)}(x) &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot (n-1)\cdot na_n + \ldots \\
&\ldots
\end{aligned}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо прийняти у всіх цих рівностях $x = 0$, то прийдемо до добре знайомим нам виразам коефіцієнтів степеневого ряду:

$$a_0 = f(0),\ a_1 = f'(0),\ a_2 = \frac{f''(0)}{2!},\ a_3 = \frac{f'''(0)}{3!},\ \dots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \dots$$

(порівняйте з (403.7)). Якби йшлося про ряд загального вигляду (437.2), то прийшлось би лише замість значення $x = 0$ підставити $x = x_0$. Отож:

Теорема 438.3. *Функція, що може бути представлена у вигляді степеневого ряду на його проміжку збіжності, має всередині цього проміжку похідні усіх порядків. Сам ряд, по відношенню до цієї функції, є нічим іншим, як її рядом Тейлора.*

Це чудове твердження проливає світло на питання розкладання функцій у степеневі ряди, якими ми займалися у попередній главі. Ми бачимо, що **якщо** функція взагалі розкладається у степеневий ряд, то необхідно — у ряд Тейлора; тому ми і обмежилися дослідженням можливості для функції бути представленою саме своїм рядом Тейлора. Зазначимо, що *функція, яка розкладається у ряд Тейлора за степенями $x - x_0$, називається **аналітичною** у точці x_0.*

Представлена теорія поширюється і на кратні степеневі ряди. Зупинимося, для визначеності на ряді з двома змінними:

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik}(x - x_0)^i (y - y_0)^k.$$

Всередині області збіжності (розд. 396) такий ряд також можна почленно диференціювати за будь-якою із змінних і будь-яке число разів. Звідси, як і щойно, легко отримуються вирази для коефіцієнтів

$$a_{00} = f(x_0, y_0), \quad a_{10} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad a_{01} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},$$
$$a_{20} = \frac{1}{2!}\,\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2},\ \dots$$

і, взагалі,

$$a_{ik} = \frac{1}{i!k!}\,\frac{\partial^{i+k} f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^k}.$$

Отже, розклад функції $f(x, y)$ (за умови, що розкладання можливе) необхідно має вигляд

$$f(x, y) = \sum_{i,k=0}^{\infty} \frac{1}{i!k!}\,\frac{\partial^{i+k} f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^k}(x - x_0)^i (y - y_0)^k.$$

І цей ряд називається **рядом Тейлора**; він природно співвідноситься із **формулою Тейлора**, про яку йшлося у розд. 195. *При наявності такого розкладу функція $f(x, y)$ називається **аналітичною** у точці (x_0, y_0).*

12.3. Застосування

439. Приклади на неперервність суми ряду і на почленний перехід до границі

1) Дослідити на неперервність суму ряду

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^p+x^2\cdot n^q}$$

за припущенням, що $p\cdot q\geqslant 0$ і один із цих показників >1 (чим забезпечується збіжність ряду для всіх значень x). Очевидно, що досить обмежитися невід'ємними x.

Якщо $p>1$, то для $x\leqslant x_0$ ($x_0>0$ — **будь-яке** число) існує збіжний мажорантний ряд

$$x_0\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\,.$$

Отже, за ознакою Ваярштрасса (теор. 430.1) наш ряд збігається рівномірно, та його сума на проміжку $[0,x_0]$ неперервна. Зважаючи на довільність x_0 це також справедливо і на всьому проміжку $[0,+\infty)$.

Якщо $p\leqslant 1$, але $q>1$, то, записавши ряд, для $x>0$, у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{x}}{n^q+\left(\frac{1}{x}\right)^2 n^p}\,,$$

робимо висновок, як і вище, про неперервність його суми для всіх $x>0$. Отже, потрібно лише з'ясувати чи неперервна сума в точці $x=0$.

Методами диференціального числення можна отримати, що n-й член ряду досягає свого найбільшого значення при $x=n^{\frac{p-q}{2}}$ і це значення дорівнює

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{p+q}{2}}}\,.$$

Якщо $p+q>2$, то для нашого ряду існує збіжний мажорантний ряд

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{p+q}{2}}}\,,$$

чим забезпечується неперервність функції $f(x)$ для всіх x, **включаючи точку** $x=0$.

nebayduzhi.math@gmail.com

Залишається відкритим питання про неперервність $f(x)$ для $x = 0$ у разі, якщо $p < 1$, $q > 1$, але $p + q \leqslant 2$. Ми побачимо нижче в пр. 491.13, що за цих умов функція $f(x)$ у точці $x = 0$ має розрив.

2) Розглянемо ряд Діріхлє (пр. 385.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x},$$

де $\{a_n\}$ — деяка послідовність дійсних чисел. Припустимо, що він не “всюди розбіжний”, так що для нього існує межова абсциса збіжності $\lambda < +\infty$. Для будь-якого числа $x_0 > \lambda$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}},$$

буде збіжний. Звідси можна зробити висновок, що наш ряд збігається **рівномірно** для всіх $x \geqslant x_0$ (аналог теор. 437.1). Це твердження випливає з ознаки Абеля, якщо переписати наш ряд у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}},$$

і помітити, що множники $\dfrac{1}{n^{x-x_0}}$ зменшуються зі зростанням n, причому вони всі разом обмежені одиницею. А тоді, за теор. 431.1, сума ряду буде неперервною для $x > x_0$, а отже (зважаючи на довільність x_0), і для всіх $x > \lambda$ (аналог теор. 431.2).

Якщо λ скінченне, і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}},$$

збіжний, то таким же чином переконуємося в рівномірній збіжності нашого ряду для $x \geqslant \lambda$ (порівняйте з теор. 437.5) і в неперервності його суми при $x = \lambda$ справа (порівняйте з теор. 437.6).

3) У пр. 390.6 ми розглядали функцію

$$E(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

і переконалися, що вона задовольняє таке співвідношення:

$$E(x + y) = E(x) \cdot E(y). \tag{439.1}$$

Тепер, згідно з теор. 437.2, функція $E(x)$ виявляється неперервною на всьому проміжку від $-\infty$ до $+\infty$. Зважаючи на доведення з пр. 75.1, неперервна функція, що задовольняє рівняння (439.1) необхідно має вигляд: $E(x) = a^x$. Нарешті, основа a, очевидно, визначиться рівністю

$$a = E(1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Отже, остаточно, $E(x) = e^x$ (порівняйте з (404.3)).

4) Дамо нове трактування біноміального ряду (407.1)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n + \dots,$$

який абсолютно збігається для будь-якого m, якщо $|x| < 1$. Спробуємо визначити його суму. Позначимо цю суму як функцію від m через $\varphi(m)$ (x фіксоване і $|x| < 1$).

З алгебри відомо, що для будь-якого **натурального** m (тоді ряд обривається на $(m+1)$-му члені) $\varphi(m) = (1+x)^m$. Покажемо, що це справедливо для всіх m.

Взявши будь-яке k, розглянемо схожий ряд

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n + \dots$$

із сумою $\varphi(k)$ і перемножимо обидва ряди за правилом Коші. Нескладно написати кілька перших членів цього добутку:

$$\varphi(m) \cdot \varphi(k) = 1 + (m+k)x + \left(\frac{m(m-1)}{2} + mk + \frac{k(k-1)}{2} \right) x^2 + \dots =$$
$$= 1 + (m+k)x + \frac{(m+k)(m+k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots .$$

Коефіцієнтом при $\frac{x^n}{n!}$ очевидно буде якийсь цілий многочлен n-го степеня відносно m і k. Який його вид? Якщо m і k — будь-які **натуральні** числа більші від n, то з елементарних міркувань випливає, що названий коефіцієнт буде

$$(m+k)(m+k-1)\dots(m+k-n+1).$$

Отже (як це випливає з теореми алгебри про тотожність цілих многочленів з двома змінними), такий самий вигляд він матиме за **будь-яких** m і k. Отже, шукана функція $\varphi(m)$ задовольняє функціональне рівняння

$$\varphi(m) \cdot \varphi(k) = \varphi(m+k.)$$

Покажемо тепер, що функція $\varphi(m)$ **неперервна**. Це випливає з рівномірної збіжності біноміального ряду для всіх значень m, абсолютне значення яких не перевищують довільно взяте число $m_0 > 0$: для цих значень існує збіжний мажорантний ряд

$$1 + m_0|x| + \frac{m_0(m_0+1)}{1 \cdot 2}|x|^2 + \frac{m_0(m_0+1)(m_0+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}|x|^3 + \dots .$$

У такому разі, як ми знаємо (пр. 75.1), необхідно

$$\varphi(m) = a^m.$$

Оскільки $a = \varphi(1) = 1 + x$, то остаточно

$$\varphi(m) = (1+x)^m.$$

5) Відомий вже читачеві логарифмічний ряд (405.1) можна отримати з біноміального ряду (407.1), за допомогою співвідношення (77.4)

$$\ln a = \lim_{k\to\infty} k\left(\sqrt[k]{a} - 1\right) \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Покладемо $a = 1 + x$ (де $|x| < 1$) і підставимо замість $(1+x)^{1/k}$ його розклад

$$(1+x)^{\frac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{k}x + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{1\cdot 2}x^2 + \dots + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{1}{k}-n+1\right)}{1\cdot 2\cdot\dots\cdot n}x^n + \dots .$$

Тоді $\ln(1+x)$ представиться як границя при $k\to\infty$ виразу

$$\begin{aligned} k\left((1+x)^{\frac{1}{k}} - 1\right) &= x - \frac{x^2}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right) + \frac{x^3}{2}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right) - \dots \\ &\dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{(n-1)k}\right) + \dots . \end{aligned} \tag{439.2}$$

Члени цього ряду (**при сталому** x) мають ще натуральний параметр k. У всій області його зміни ряд (439.2) збігається **рівномірно** відносно k; це випливає з того, що для нього існує мажорантний ряд

$$|x| + \frac{|x|^2}{2!} + \frac{|x|^3}{3!} + \dots + \frac{|x|^n}{n} + \dots \quad (x = \mathrm{const},\ |x| < 1),$$

який вже не містить k (ознака Ваярштрасса, теор. 433.1). Отже, за теор. 436.1, в ряді (439.2) можна перейти до границі при $k\to\infty$ почленно, що приводить до логарифмічного ряду. Нагадаємо, що область зміни $\mathcal{X}$ змінної x, про яку йшлося в теор. 436.1, могла бути будь-якою; зокрема, вона могла звестися і до натурального ряду (та $a = +\infty$).

6) Схожий цікавий приклад показує як отримати показниковий ряд (404.3) з співвідношення

$$e^x = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Маємо, розкладаючи степінь бінома за формулою Ньютена,

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{x}{k}\right)^k = \\ &= 1 + k\cdot\frac{x}{k} + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{x}{k}\right)^2 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{1\cdot 2\dots n}\cdot\left(\frac{x}{k}\right)^n + \dots = \qquad (439.3)\\ &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right) + \dots + \frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{k}\right) + \dots .\end{aligned}$$

Насправді тут, для кожного k, членів завжди скінченне число ($= k+1$), але ми можемо вважати, що перед нами “нескінченний ряд”, якщо інші члени вважати рівними 0. Цей “ряд” збігається **рівномірно** для кожного k, бо, очевидно, збіжний ряд

$$1 + \frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^2}{2!} + \dots + \frac{|x|^n}{n!} + \dots \qquad (x = \mathrm{const})$$

буде мажорантним для нашого ряду. У такому разі, за теор. 433.1, в “ряді” (439.3) можна перейти до границі **почленно** спрямувавши k до ∞. Оскільки $(n+1)$-й член цього ряду, рівний 0, поки $k < n$, для всіх $k \geqslant n$ має вже вигляд

$$\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{k}\right),$$

то його границя, коли $k \to \infty$, дорівнює $\frac{x^n}{n!}$. Отже, ми знову приходимо до розкладу показникової функції e^x.

7) Використовуючи формулу Муавра, ми вже отримали в розд. 408 формулу

$$\sin mz = m\cos^{m-1} z\cdot\sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{m-3} z\cdot\sin^3 z + \dots .$$

Покажемо, як звідси можна отримати розклад функції $\sin x$ у степеневий ряд.

Зробимо заміну $z = \frac{x}{m}$ і винесемо $\cos^m \frac{x}{m}$ за дужки; наша формула перепишеться так:

$$\sin x = \cos^m\frac{x}{m}\left[m\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{m} - \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\frac{\left(m\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{m}\right)^3}{3!} + \dots\right].$$

Вважаючи x фіксованим, перейдемо праворуч у цій формулі до границі при $m \to \infty$.

Оскільки $\cos^m \frac{x}{m}$ (наприклад, дивіться пр. 79.4, взявши $\lambda = 0$] і $m\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{m} \to x$, то переходячи до границі, справді, виходить необхідний розклад (404.4):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots .$$

Залишається обґрунтувати почленний граничний перехід у дужках, де кількість членів при кожному m скінченне, але необмежено зростає разом з m (порівняйте з пр. 439.6).

Візьмемо x між $-\frac{1}{2}m_0\pi$ і $+\frac{1}{2}m_0\pi$; будемо вважати $m > m_0$. Легко показати, що тоді абсолютне значення виразу $m\operatorname{tg}\frac{x}{m}$ спадає зі зростанням m і, отже, обмежено:

$$\left|m\operatorname{tg}\frac{x}{m}\right| \leqslant L = m_0\operatorname{tg}\frac{|x|}{m_0} \quad (m > m_0).$$

У такому разі для розкладу в дужках існує збіжний мажорантний ряд

$$L + \frac{L^3}{3!} + \dots .$$

Міркування завершується як і в попередньому прикладі.

Аналогічно можна отримати розклад $\cos x$ в степеневий ряд.

Зауваження. пр. 349.5, пр. 349.6 та пр. 349.7 ілюструють отримання розкладів елементарних функцій, дане Ойлером у його книзі:
“Introductio in Analysin Infinitorum” (“Введення в аналіз нескінченно малих”) (1748).

8) Довести, що

а) $$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2}\ln 2,$$

б) $$\lim_{x\to 1-0}(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

а) Нехай $0 < x < 1$; оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ збігається, а множники $\frac{x^n}{1+x^n}$ обмежені зверху одиницею і монотонно спадають зі зростанням n, то можна застосувати ознаку Абеля (теор. 430.2). Тож ряд збігається **рівномірно** для всіх x на відрізку $(0, 1)$. Виконаємо **почленний** перехід до границі при $x \to 1 - 0$ (теор. 433.1) і отримаємо необхідний результат.

б) Нехай і тут $0 < x < 1$; маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1-x)x^n}{1-x^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{2n-1}}\,.$$

На цей раз ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ не збігається, але його часткові суми обмежені. Проте множники $\frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{2n-1}}$ не тільки монотонно спадають зі зростанням n, але й **рівномірно** прямують до 0 для x на відразу $(0, 1)$, бо

$$\frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{2n-1}} < \frac{x^n}{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}} < \frac{x^n}{nx^n} = \frac{1}{n}\,.$$

У такому разі можемо застосувати ознаку Діріхлє (теор. 430.3), ряд збігається **рівномірно**, можна виконати **почленний** перехід до границі при $x \to 1-0$, і так далі.

9) Говорячи про степеневий ряд, ми завжди мали на увазі, що члени його розташовані за зростанням показників. Якщо **всередині** проміжку збіжності це не має значення, оскільки ряд збігається абсолютно, то, наприклад, теорема Абеля стає невірною без цього застереження.

Перевірити це можна взявши ряд

$$x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} + \dots,$$

отриманий перестановкою членів з логарифмічного ряду (порівняйте з пр. 388.1).

10) Застосуємо теорему Абеля (теор. 437.6) для доведення його ж теореми про множення рядів (теор. 392.2). Розглянемо два збіжних ряди

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{A}$$

та

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{B}$$

і припустимо, що їх добуток (Коші)

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \tag{C}$$

де $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$ також збігається. Потрібно довести, що тоді

$$A \cdot B = C.$$

Доведення. Зі збіжності ряду (A) насамперед робимо висновок, використовуючи лем. 379.1, що ряд

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{A*}$$

абсолютно збіжний для $|x| < 1$. Тому радіус збіжності R цього ряду $\geqslant 1$. Отже, принаймні виконується співвідношення

$$\lim_{x \to 1-0} A(x) = A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n;$$

власне, якщо $R = 1$ — за теоремою Абеля (теор. 437.6), а якщо $R > 1$ — за теор. 437.2.

Якщо розглянути, аналогічно, ряди (коли $|x| < 1$):

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \tag{B*}$$

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \tag{C*}$$

то для них буде справедливо все, що було сказане про ряд (A*).

Застосовуючи тепер до **абсолютно** збіжних рядів (A*) та (B*) теорему Коші (теор. 389.1), матимемо

$$A(x) \cdot B(x) = C(x).$$

Залишається лише перейти тут до границі при $x \to 1-0$, щоб отримати необхідний результат:

$$A \cdot B = C.$$

$\square$

440. Приклади на почленне інтегрування рядів

1) Знайти суму ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

можна так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1} = \lim_{x\to 1-0} \int\limits_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} dx =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^3} = \lim_{x\to 1-0} \left(\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} .$$

Ми використали спочатку теорему Абеля, а потім — почленне інтегрування степеневого ряду (теор. 437.6, теор. 438.1).

2) Почленним інтегруванням рядів

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \ldots ,$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^{n-1}x^{2(n-1)} + ...$$

на проміжку $[0, x]$ (де $|x| < 1$) відразу отримуємо розклади

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...,$$

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + ...,$$

які в пр. 405.17 та пр. 404.15 були отримані використовуючи складніші міркування. Справедливість першого розкладу при $x = 1$ та другого при $x = \pm 1$ доводиться додатково за допомогою теореми Абеля (теор. 437.6).

3) Якщо згадати, що похідна функція $\arcsin x$ дорівнює $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ і розкладається в ряд так (407.3):

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} x^{2n} \quad (-1 < x < 1),$$

то почленним інтегруванням цього ряду легко отримати (новий для нас) розклад самого арксинуса:

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

Оскільки цей ряд збігається і при $x = \pm 1$ (пр. 370.5), то за теоремою Абеля розклад справедливий за цих значень. Зокрема, при $x = 1$ будемо мати такий ряд для числа π:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Втім, збіжність ряду

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

тепер може бути доведена простіше. Маємо: для будь-якого m

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} < \arcsin x < \frac{\pi}{2}.$$

Перейдемо тут до границі при $x \to 1$ і отримаємо

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

звідки (розд. 365) і випливає необхідне.

Аналогічно, розклавши похідну

$$\left[\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

в ряд і почленно проінтегрувавши його, знайдемо розклад

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Ця функція є не що інше, як $\operatorname{Arsh} x$, тобто функція, обернена до $\operatorname{sh} x$ (пр. 49.4; пр. 339.3).

4) За допомогою почленного інтегрування рядів виходять розклади в нескінченні степеневі ряди для деяких інтегралів, що **не виражаються в скінченному вигляді** через елементарні функції (дивіться розд. 272). Ці розклади можуть бути використані для наближених обчислень.

Так, виходячи з відомого розкладу

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

(порівняйте з (404.3)), знайдемо

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots.$$

Спробуємо обчислити з точністю до 10^{-4} інтеграл

$$W = \int_0^1 e^{-x^2} dx,$$

де верхня межа інтеграла дорівнює 1. Отримаємо для W знакозмінний **числовий** ряд зі спадними абсолютними значеннями:

$$W = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \ldots.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Оскільки восьмий член значно менше ніж задана точність, то ми збережемо лише перші сім членів. Відповідна (від'ємна) поправка Δ легко оцінюється

$$|\Delta| < \frac{1}{75\,600} < \frac{1{,}5}{10^5}\,.$$

Обчислюючи залишені члени із п'ятьма знаками після коми, знайдемо:

$$\begin{aligned}
&+1\\
-\frac{1}{3} &= -\,0{,}333\,33\ (+)\\
+\frac{1}{10} &= +\,0{,}100\,00\\
-\frac{1}{42} &= -\,0{,}023\,81\ (-)\\
+\frac{1}{216} &= +\,0{,}004\,63\ (-)\\
-\frac{1}{1320} &= -\,0{,}000\,76\ (-)\\
+\frac{1}{9360} &= +\,0{,}000\,11\ (-)\\
\hline
&+\,0{,}746\,84
\end{aligned}$$

Якщо врахувати всі поправки, то виявиться, що

$$0{,}746\,81 < W < 0{,}746\,85, \quad W = 0{,}7468\dots$$

і всі чотири знаки вірні. (Порівняйте з пр. 328.5).

5) Аналогічно, оскільки (порівняйте з (404.4))

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \dots,$$

то

$$\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)} + \dots.$$

Спробуємо обчислити за допомогою цього розкладу інтеграл

$$\mu = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$$

з точністю до 10^{-3}.

Маємо, вважаючи $x = \pi$,

$$I_2 = \pi - \frac{1}{18}\pi^3 + \frac{1}{600}\pi^5 - \frac{1}{35280}\pi^7 + \frac{1}{3265920}\pi^9 - \frac{1}{439084800}\pi^1 1 + \dots,$$

тобто знову знакозмінний ряд з членами, абсолютною значення яких спадають.

Оскільки шостий член менше за 0,0007, ми обмежимося п'ятьма членами. Обчислюємо тільки чотири знаки після коми:

$$\begin{aligned} \pi &= +\,3{,}1416\ (-)\\ -\frac{1}{18}\pi^3 &= -\,1{,}7226\ (-)\\ +\frac{1}{600}\pi^5 &= +\,0{,}5100\ (+)\\ -\frac{1}{35280}\pi^7 &= -\,0{,}0856\ (+)\\ +\frac{1}{3265920}\pi^9 &= +\,0{,}0091\ (+)\\ \hline &\quad +\,1{,}8525 \end{aligned}$$

Враховуючи поправки, приходимо до висновку

$$1{,}8517 < \mu < 1{,}8527, \quad \mu = 1{,}852 \pm 0{,}001.$$

6) Запишемо за допомогою рядів інтеграли

$$\text{а)}\ \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx,$$

$$\text{б)}\ \int\limits_0^1 x^{-x} dx,$$

а) Згадуючи розклад арктангенса, маємо:

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{7}x^6 + \dots\right) dx = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots.$$

Оскільки ряд, що стоїть під знаком інтеграла, збігається при $x = 1$, то ми можемо робити почленне інтегрування (теор. 438.1).

Ми вже згадували (пр. 328.6), що значення цього інтеграла

$$G = 0{,}915\,965\ldots$$

відоме як “стала Катальо”. Тепер ми бачимо, що

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\,.$$

б) Переписавши підінтегральний вираз у вигляді $e^{-x\ln x}$, розкладаємо його в показниковий ряд

$$x^{-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n \ln^n x}{n!}$$

(при $x = 0$ члени ряду, починаючи з $n = 1$, замінюємо граничними значеннями, тобто нулями). Цій ряд збігається **рівномірно**, коли $0 < x \leqslant 1$, бо максимум функції $|x\ln x|$ (як легко отримати методами диференціального числення) є e^{-1}, і тому для нашого ряду існує збіжний мажорантний ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{-1})^n}{n!}\,.$$

Отже, ми можемо почленно інтегрувати наш ряд. Оскільки (пр. 312.4)

$$\int_0^1 x^n \cdot \ln^n x\,dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}\,,$$

то остаточно

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^m}\,.$$

7) Ми мали (414.1) розклад

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2p!!}{(2p+1)!!} \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^p \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Вважаючи тут $x = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ і враховуючи, що $\operatorname{arctg} \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin y$ (розд. 50), знайдемо:

$$\frac{\arcsin y}{\sqrt{1-y^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2p!!}{(2p+1)!!} y^{2p+1} \quad \left(0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Проінтегруємо цю рівність від 0 до y, причому праворуч виконаємо інтегрування почленно:

$$\frac{1}{2}(\arcsin y)^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2p!!}{(2p+1)!!} \cdot \frac{y^{2p+2}}{2p+2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[2(m-1)]!!}{(2m-1)!!} \cdot \frac{y^{2m}}{2m}\,.$$

Цей результат можна переписати так:

$$2(\arcsin y)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{2m!}(2y)^{2m}.$$

При $y = \frac{1}{2}$ отримаємо звідси

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{2m!}(2y)^{2m} = \frac{\pi^2}{18}\,.$$

Але ми бачили вже ((395.3); дивіться також розд. 416), що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 3\sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{2m!}$$

так що, остаточно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,. \qquad (440.1)$$

До цього цікавого результату Ойлера ми будемо повертатися ще не один раз.

8) Обчислити інтеграл

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx.$$

Якщо скористатися логарифмічним рядом (405.1), то для підінтегральної функції отримаємо розклад

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n-1} + \ldots\,,$$

який вірний на всьому проміжку $[0,1]$. Інтегруючи почленно, знайдемо

$$I = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\,.$$

Ми щойно отримали рівність (440.1); з нього випливає

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Отже, ми приходимо до остаточного виразу для шуканого інтеграла

$$I = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

9) Нехай потрібно знайти інтеграл ($|a| < 1$)

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1 + a \cdot \cos x)}{\cos x} dx.$$

(При $x = \frac{\pi}{2}$ приписуємо підінтегральному виразу граничне значення при $x \to \frac{\pi}{2}$; це значення дорівнює a.)

Користуючись розкладом логарифма, маємо:

$$\frac{\ln(1 + a \cdot \cos x)}{\cos x} = a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{n+1}}{n+1} \cos^n x,$$

причому ряд збігається **рівномірно** на проміжку $[0, \pi]$. Помітивши, що (312.1)

$$\int\limits_0^{\pi} \cos^{2m-1} x\, dx = 0, \quad \int\limits_0^{\pi} \cos^{2m} x\, dx = 2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2m} x\, dx = \frac{(2m-1)!!}{2m!!}\pi,$$

зробимо почленне інтегрування:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1 + a \cdot \cos x)}{\cos x} dx = \pi \left(a + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{2m!!} \cdot \frac{a^{2m+1}}{2m+1} \right).$$

В отриманому ряді ми впізнаємо розклад функції арксинус (дивіться приклад 3). Отже, остаточно знаходимо (у скінченному вигляді!)

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1 + a \cdot \cos x)}{\cos x} dx = \pi \cdot \arcsin a.$$

10) Розглянемо розклад (для $|r| < 1$):

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx. \tag{440.2}$$

Його легко довести. Помноживши праву частину на знаменник $1 - 2r \cos x + r^2$, ми отримаємо:

$$1 - 2r \cos x + r^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx - 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1} \cdot 2 \cos nx \cdot \cos x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2} \cos nx.$$

Якщо замінити $2\cos nx\cdot\cos x$ через $\cos(n+1)x+\cos(n-1)x$ і відповідно розбити другу суму на дві, то після скорочень залишиться лише $1-r^2$, що і завершує доведення.

Зважаючи на збіжність ряду $\sum |r|^n$ (при $|r|<1$), ряд в (440.2) праворуч збігається **рівномірно** відносно x на проміжку $[-\pi,\pi]$. Візьмемо тепер інтеграли від $-\pi$ до π і ліворуч, і праворуч, причому ряд можна інтегрувати почленно (теор. 434.1). Оскільки

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0$$

то ми отримаємо:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx = 2\pi.$$

(порівняйте з пр. 309.8).

Аналогічно, помноживши обидві частини тотожності (440.2) на $\cos mx$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ і інтегруючи почленно, легко отримати

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mx}{1-2r\cos x+r^2}dx = 2\pi\frac{r^m}{1-r^2}\,.$$

При цьому використовується відомий результат (пр. 309.4)

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cos nx\,dx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m\neq n,\\ \pi, & \text{якщо } m=n. \end{cases}$$

11) Якщо в тотожності (440.2) перенести одиницю ліворуч і розділити обидві частини на $2r$, то отримаємо:

$$\frac{\cos x - r}{1-2r\cos x+r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cos nx.$$

Цього разу фіксуємо довільне значення x і будемо розглядати r як змінну з областю зміни $(-1,1)$. Проінтегруємо обидві частини рівності від 0 до будь-якого r з цього проміжку, причому степеневий ряд праворуч будемо інтегрувати **почленно**. Оскільки ліворуч чисельник (з точністю до числового множника) є похідною знаменника за r, то в результаті отримаємо:

$$\ln(1-2r\cos x+r^2) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\cos nx \quad (|r|<1).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Тепер знову фіксуємо r, а x будемо змінювати від 0 до π. Легко бачити, що ряд праворуч збігається рівномірно відносно x на цьому проміжку, отже можемо **почленно** інтегрувати (теор. 434.1). Виконавши інтегрування прийдемо до інтеграла Пуассона:

$$\int\limits_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx = 0 \quad (|r| < 1)$$

(порівняйте з пр. 307.4; пр. 314.14). Звідси, як ми бачили, легко отримати значення інтеграла і при $|r| > 1$.

12) Розглянемо функції Бесселя:

$$J_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\,d\theta,$$

$$J_n = \frac{2x^n}{(2n-1)!!\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \cos(x\sin\theta)\cos^{2n}\theta\,d\theta \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

(порівняйте з пр. 395.14). Розкладаючи підінтегральні вирази за степенями $x\sin\theta$ та інтегруючи почленно, легко отримати вже знайомі нам розклади цих функцій в ряди за степенями x.

Наприклад, інтегруючи ряд

$$\cos(x\sin\theta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}\sin^{2k}\theta}{2k!}$$

і згадуючи формулу (312.2)

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2k}\theta\,d\theta = \frac{(2k-1)!!}{2k!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \tag{440.3}$$

знайдемо

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(k!)^2\cdot 2^{2k}}.$$

13) Нам вже зустрічалися так звані повні еліптичні інтеграли 1-го та 2-го роду (розд. 315 та інші).

$$\mathbf{K}(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \quad \mathbf{E}(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Розкладемо їх в ряд за степенями модуля k $(0 < k < 1)$.

Вважаючи у формулі (407.3) $x = -k^2 \sin^2 \varphi$, отримаємо:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} k^{2n} \cdot \sin^{2n}\varphi.$$

Цей ряд збігається **рівномірно** відносно φ, бо для нього існує збіжний мажорантний ряд для всіх значень φ

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2n!!} k^{2n},$$

отже, за теор. 434.1, тут можемо виконати **почленне** інтегрування, яке ми й виконаємо. Знову використовуючи формулу (440.3), отримаємо:

$$\mathbf{K}(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right)^2 \cdot k^{2n}\right].$$

Аналогічно, виходячи з формули (407.2), знайдемо

$$\mathbf{E}(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right)^2 \cdot \frac{k^{2n}}{2n-1}\right].$$

Цими рядами також можна скористатися для наближених обчислень. Наприклад, розглянемо ряд

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{256} - \frac{5}{2048} - \frac{175}{262144} - \frac{441}{2097152} - \ldots\right).$$

Якщо зберегти тут лише написані члени, то відповідна похибка буде від'ємна, і її можна оцінити так:

$$|\Delta| < \left(\frac{11!!}{12!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{11\cdot 2^6}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\right) < 0{,}000\,24;$$

можна розраховувати на точність до 10^{-3}. Обчислимо:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} &= 1{,}570\,80\ (-)\\
\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{8} &= 0{,}196\,35\ (-)\\
\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{256} &= 0{,}018\,41\ (-)\\
\frac{\pi}{2}\cdot\frac{5}{2048} &= 0{,}003\,83\ (-)\\
\frac{\pi}{2}\cdot\frac{175}{262144} &= 0{,}001\,05\ (-)\\
\frac{\pi}{2}\cdot\frac{441}{2097152} &= 0{,}000\,33\ (+)\\
\hline
&1{,}350\,83
\end{aligned}$$

$$1{,}350\,57 < \mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1{,}350\,85 \quad \mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1{,}350\ldots$$

(порівняйте з пр. 328.4).

Потрібно сказати, що лише за малих значень k вище вказані ряди для повних еліптичних інтегралів $\mathbf{K}(k)$ та $\mathbf{E}(k)$ насправді вигідні для обчислень. Але існують перетворення, що дають змогу зводити обчислення вказаних інтегралів до випадку скільки завгодно малого k (порівняйте з розд. 315).

14) Можна використовувати отриманий розклад функції $\mathbf{E}(k)$ для обчислення такого інтеграла:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathbf{E}(h\sin\theta)}{1-h^2\cdot\sin^2\theta}\sin\theta\,d\theta \quad (0<h<1).$$

Насамперед, легко перевірити такий розклад:

$$\frac{\mathbf{E}(k)}{1-k^2} = \frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot 5k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot 7k^6+\ldots\right] =$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right)^2\cdot(2n+1)k^{2n}\right],$$

наприклад, помножуючи праву частину рівності на $1-k^2$.

Підставляючи $k = h\cdot\sin\theta$ і помножуючи ще на $\sin\theta$, ми можемо інтегрувати почленно від 0 до $\frac{\pi}{2}$, оскільки отриманий ряд збігається у цих межах **рівномірно** (для нього існує збіжний мажорантний ряд, наприклад попередній ряд, де $k = h$). Оскільки (312.1)

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta = \frac{2n!!}{(2n+1)!!},$$

то знаходимо:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathbf{E}(h\sin\theta)}{1-h^2\cdot\sin^2\theta}\sin\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2}h^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}h^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}h^6+\ldots\right) =$$
$$= \frac{\pi}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}h^{2n}\right).$$

Зіставивши вираз у дужках з формулою (407.3), отримуємо значення шуканого інтеграла і навіть у скінченному вигляді:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathbf{E}(h\sin\theta)}{1-h^2\cdot\sin^2\theta}\sin\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-h^2}}.$$

15) На закінчення, розглянемо питання про розкладання за степенями x (але не цілим!) функції

$$y = \arcsin(1-x) \quad (x \geqslant 0).$$

(Про розклад звичайного типу за цілими додатними степенями x тут не може бути мови, бо інакше, за теор. 438.3, наша функція мала б скінченну похідну і при $x = 0$, чого насправді не може бути.)

Маємо (використовуючи біноміальний ряд):

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}x}} =$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2x}}\left(1+\frac{1}{4}x+\frac{3}{32}x^2+\ldots\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{32\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}}-\ldots,$$

причому, якщо відкинути перший член, який при $x = 0$ дорівнює ∞, збіжність ряду буде **рівномірною** на будь-якому проміжку $[0, x]$, де $0 < x < 2$. Первісна функція для першого члена є $-\sqrt{2x}$; для решти ряду первісну отримуємо почленним інтегруванням. Оскільки при $x = 0$ має бути $y = \frac{\pi}{2}$, то остаточно знаходимо такий розклад за **дробовими** степенями x (справедливий для $0 \leqslant x < 2$):

$$y = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\,x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{80\sqrt{2}}x^{\frac{5}{2}} - \ldots.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Аналогічно можемо отримати і такий розклад:

$$\arcsin\sqrt{\frac{2x}{1+x^2}} = \sqrt{2}\left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}} + \ldots\right)$$

для $0 \leqslant x < 1$.

441. Приклади на почленне диференціювання рядів

1) Повернувшись знову до функції (порівняйте з пр. 390.6, пр. 439.3):

$$y = E(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

ми можемо тепер легко отримати її похідну; для цього досить (теор. 438.1) почленно продиференціювати цей ряд. Ми отримаємо, що

$$E'(x) = E(x),$$

отже ця функція задовольняє диференціальне рівняння:

$$y' = y.$$

Звідси

$$y = Ce^x.$$

Оскільки $E(0) = 1$, то остаточно знаходимо, що

$$E(x) = e^x.$$

2) Аналогічний спосіб може бути застосований до визначення суми біноміального ряду

$$y = f(x) = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n + \ldots$$

(на цей раз m фіксоване, а x змінюється на проміжку $(-1,1)$; порівняйте з пр. 439.4). Диференціюючи його почленно, отримаємо:

$$f'(x) = m\left(1 + (m-1)x + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n + \ldots\right).$$

Тепер нескладно переконатися у тому, що

$$(1+x)\cdot f'(x) = m\cdot f(x).$$

При множенні $f'(x)$ на $1+x$ треба скористатися властивістю біноміальних коефіцієнтів:

$$\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}+\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}=\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n},$$

окремим випадком якого є відоме співвідношення

$$C_{m-1}^{n}+C_{m-1}^{n-1}=C_m^n.$$

Отже наша функція задовольняє диференціальне рівняння

$$(1+x)\cdot y' = my.$$

Звідси

$$y = C(1+x)^m.$$

Оскільки $f(0)=1$, то стала $C=1$ і, остаточно,

$$y=f(x)=(1+x)^m.$$

3) Ми знаємо вже, що сума ряду Діріхлє (пр. 385.3)

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$$

для $x>\lambda$ (де λ — межова абсциса збіжності, $\lambda<+\infty$) є неперервною функцією (пр. 439.2).

Застосовуючи почленного диференціювання, можна знайти похідну цієї функції:

$$\varphi'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}\cdot\ln n\quad(x>\lambda).$$

Поки що ми отримали цей результат лише формально. Для того, щоб обґрунтувати його, достатньо переконатися у тому, що останній ряд збігається **рівномірно** відносно x для всіх $x\geqslant x_0$, де x_0 — **довільне** (але фіксоване) число, більше за λ. Це доводиться, як і в пр. 439.2, за допомогою ознаки Абеля, спираючись на те, що множники $\frac{\ln n}{n^{x-x_0}}$, починаючи з $n=2$, спадають зі зростанням n і всі разом є обмеженими числом $\ln 2$. Хоч би яке значення $x>\lambda$ ми взяли, його можна помістити між значеннями $x'>\lambda$ та $x''>x'$; до проміжку $[x',x'']$ може бути застосована теор. 435.1.

Так само можна переконатися у існуванні для функції $\varphi(x)$ похідних усіх порядків і отримати їх у вигляді рядів.

Усе сказане, зокрема, може бути застосоване до функції Рімана

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (x > 0).$$

4) Ми вже зустрічали розклад у степеневий ряд функції Бесселя з нульовим індексом

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}}$$

(пр. 395.14, пр. 440.12).

Покажемо тепер, що ця функція задовольняє *диференціальне рівняння Бесселя*:

$$xu'' + u' + xu = 0.$$

Приймаючи $u = J_0(x)$, матимемо

$$xu = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k)^2}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} \cdot x^{2k-1},$$

а потім, двічі почленно диференціюючи розклад u,

$$u' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} \cdot x^{2k-1},$$

$$xu'' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k(2k-1)}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} \cdot x^{2k-1}.$$

Якщо додати ці рівності, то коефіцієнт при x^{2k-1} буде дорівнювати

$$\frac{(-1)^k}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} \left[2k(2k-1) + 2k - (2k)^2\right] = 0,$$

що і доводить дане твердження.

Аналогічно можна переконатися у тому, що **функція Бесселя** з довільним натуральним індексом $J_n(x)$, про яку також йшлося вище, задовольняє загальне *рівняння Бесселя*:

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0.$$

5) Більш повчальним є інше формулювання задачі: нехай треба **знайти** функцію, що розкладається у ряд для всіх x і задовольняє рівняння Бесселя.

Виконаємо це, наприклад, для найпростішого випадку, коли $n = 0$. Напишемо розклад шуканої функції у вигляді ряду з **невизначеними коефіцієнтами**:

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

і, вважаючи його всюди збіжним, двічі продиференціюємо почленно. Підставляючи усі ці розклади у рівняння, отримаємо:

$$a_1 + \sum_{m=2}^{\infty} (m^2 a_m + a_{m-2}) x^{m-1} = 0.$$

Згідно з теор. 437.3:

$$a_1 = 0, \quad m^2 a_m + a_{m-2} = 0 \quad (m = 2,\ 3,\ \dots).$$

Звідси, передусім, усі коефіцієнти з непарними індексами $a_{2k-1} = 0$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$, що ж стосовно коефіцієнтів із парними індексами a_{2k}, то за допомогою рекурентної формули вони всі виразяться через a_0:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}}.$$

Отже, з точністю до довільного множника a_0 ми повертаємося до функції $J_0(x)$.

Те, що отриманий ряд є насправді всюди збіжним, перевіряється безпосередньо. А із самого способу його отримання випливає, що функція, яка ним представлена, задовольняє рівняння.

(Звертаємо увагу читача на своєрідне застосування *методу невизначених коефіцієнтів*; тут у нас виявилася нескінченна множина цих коефіцієнтів і довелося застосувати теорему про тотожність степеневих рядів, замість теореми про тотожність многочленів, що зазвичай використовується у таких випадках.)

6) Ґауссом була введена функція

$$u = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} x^n$$

(*гіпергеометричний ряд*, дивіться пр. 372.1, пр. 378.4). Двічі диференціюючи цей ряд почленно (вважаючи $|x| < 1$), можна показати, що ця функція задовольняє так зване ***гіпергеометричне*** *диференціальне рівняння*

$$x(x-1)u'' - [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\cdot u' + \alpha\beta \cdot u = 0.$$

Залишаємо читачеві ці дещо громіздкі, але нескладні викладення. І тут можна змінити постановку задачі, як це було зроблено в пр. 441.5.

7) Визначимо для $0 \leqslant x \leqslant 1$ функцію $f(x)$ за допомогою рівності

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,.$$

Покажемо, що для $0 < x < 1$ ця функція задовольняє цікаве функціональне рівняння:

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \cdot \ln(1-x) = C = \mathrm{const}\,.$$

Для цього достатньо довести, що похідна за x від виразу зліва тотожно дорівнює нулю:

$$f'(x) - f'(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\ln x = 0.$$

Диференціюючи почленно ряд, що визначає функцію $f(x)$, знайдемо:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{1}{x}\ln(1-x);$$

роблячи заміну x на $1-x$, отримаємо, що

$$f'(1-x) = -\frac{1}{1-x}\ln x.$$

Цим і завершується доведення.

Значення сталої легко визначити, спрямовуючи у доведеному співвідношенні x до 1. Згідно з теоремою Абеля, його ліва частина буде прямувати до

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(440.1); отже, $C = \frac{\pi^2}{6}$.

8) У пр. 400.4 розглядався нескінченний добуток

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\varphi}{2^n} = \frac{\sin\varphi}{\varphi} \quad (\varphi \neq 0).$$

Приймаючи $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, спочатку прологарифмуємо цю рівність (теор. 401.4):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\cos\frac{\varphi}{2^n} = \ln\sin\varphi - \ln\varphi,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

а потім продиференціюємо отриманий ряд почленно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2^n} = \frac{1}{\varphi} - \operatorname{ctg} \varphi.$$

Оскільки для ряду із похідних існує збіжний мажорантний ряд геометричної прогресії, то почленне диференціювання є виправданим.

9) У розд. 408 ми вивели розклад $\sin x$ у нескінченний добуток (408.5):

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Вводячи абсолютні величини, звідси отримаємо:

$$|\sin x| = |x| \prod_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|.$$

Якщо x є відмінним від чисел вигляду $k\pi$ ($k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$), то, логарифмуючи, прийдемо до нескінченного ряду:

$$\ln|\sin x| = \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|.$$

Почленне диференціювання дає нам такий розклад:

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

Для його обґрунтування достатньо переконатися у тому, що отриманий ряд збігається рівномірно у будь-якому замкненому скінченному проміжку, що не містить точок виду $k\pi$. Справді, при зміні x у межах такого проміжку, його абсолютна величина залишається обмеженою: $|x| < M$, отже, для $n > \frac{M}{\pi}$,

$$\left|\frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}\right| = \frac{2|x|}{n^2\pi^2 - |x|^2} < \frac{2M}{n^2\pi^2 - M^2}.$$

Оскільки ряд

$$\sum_{n>\frac{M}{\pi}}^{\infty} \frac{2M}{n^2\pi^2 - M^2}$$

збігається, то шуканий результат отримується за допомогою ознаки Ваярштрасса.

Розкладу $\operatorname{ctg} x$ можна надати форму:

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right).$$

У цьому вигляді він виглядає як **розклад** $\operatorname{ctg} x$ **на прості дроби**, що відповідають окремим кореням 0 та $\pm n\pi$ знаменника $\sin x$.

Застосовуючи формулу $\operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, звідси можна отримати **розклад** $\operatorname{tg} x$ **на прості дроби**:

$$\operatorname{tg} x = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - \frac{2n-1}{2}\pi} + \frac{1}{x + \frac{2n-1}{2}\pi} \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}}.$$

Так само, якщо скористатися формулою:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right),$$

можна отримати розклад і для $\frac{1}{\sin x}$:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x - n\pi} + \frac{1}{x + n\pi} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

Продиференціювавши почленно розклад для $\operatorname{ctg} x$ (пропонуємо читачеві самостійно переконатися у тому, що це робити дозволено), отримаємо ще один корисний розклад:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(x - n\pi)^2} + \frac{1}{(x + n\pi)^2} \right].$$

10) Якщо розглянути $\operatorname{sh} x$ як нескінченний добуток (408.8), то так само можна прийти до розкладу

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2},$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2} \quad \text{тощо.}$$

11) Для функцій $\Gamma(x)$ ми вивели у розд. 402 формулу Ваярштрасса (402.6):

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \cdot e^{-\frac{x}{n}}.$$

Враховуючи, що $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$, та переходячи до логарифмів, звідси легко отримати (при x відмінному від 0 та від цілих від'ємних чисел)

$$\ln|\Gamma(x)| = -\ln|x| - Cx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left|1 + \frac{x}{n}\right|\right).$$

Диференціюючи почленно, **формально** звідси отримаємо

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - C + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right).$$

Покажемо тепер, що ряд справа збігається **рівномірно** на будь-якому скінченному проміжку (що не містить цілих від'ємних чисел). Справді, оскільки при цьому $|x|$ залишається обмеженим: $|x| < M$, то принаймні для $n > M$, маємо:

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}\right| = \frac{|x|}{n(n+x)} < \frac{M}{n(n-M)}.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n>M} \dfrac{M}{n(n-M)}$ збігається, то, згідно з ознакою Ваярштрасса, рівномірна збіжність забезпечена. Ми отримуємо можливість застосувати теор. 435.1 і тим самим довести існування похідної від $\ln|\Gamma(x)|$, а отже, і від $\Gamma(x)$, тощо.

Додаючи до правої частини отриманої формули ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = 0,$$

можна звести її до вигляду:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{x+\nu}\right).$$

Легко переконатися у існуванні для функції $\Gamma(x)$ похідних усіх порядків.

442. Метод послідовних наближень у теорії неявних функцій

Для того, щоб показати у дії теорію функціональних рядів (чи послідовностей), розглянемо знову питання щодо існування "неявних" функцій (розд. 206 і наступні). Обмежимося для простоти випадком одного рівняння:

$$F(x, y) = 0, \tag{442.1}$$

у якому y має бути виражений як однозначна функція від x. На цей раз ми застосуємо *метод послідовних наближень*, який дасть нам змогу не тільки довести існування цієї функції, але і дати вказівки стосовно того, як її **фактично** обчислити.

Твердження 442.1. *Нехай функція* $F(x, y)$ *неперервна разом зі своєю похідною* $F'_y(x, y)$ *у деякому квадраті*

$$\mathcal{D} = [x_0 - \Delta,\, x_0 + \Delta;\; y_0 - \Delta,\, y_0 + \Delta]$$

із центром у точці (x_0, y_0), *причому*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \textit{але} \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0. \tag{442.2}$$

Тоді рівняння (442.1) *в околі точки* (x_0, y_0) *визначає* y *як однозначну і неперервну функцію від* x, *яка при* $x = x_0$ *дорівнює* y_0.

Доведення. Нам зручніше розглянути спочатку **частковий випадок**, коли рівняння (442.1) має форму

$$y = y_0 + \varphi(x, y), \tag{442.3}$$

де функції φ та φ'_y задовольняють ті самі умови неперервності, що і F, але із заміною умов (442.2) наступними:

$$\varphi(x_0, y_0) = 0, \quad |\varphi'_y(x_0, y_0)| < 1. \tag{442.4}$$

Беручи до уваги неперервність похідної, ми можемо із самого початку вважати область $\mathcal{D}$ настільки малою, щоб у її межах взагалі було

$$|\varphi'_y(x, y)| < \lambda, \tag{442.5}$$

де λ — деяка стала, що **менша за** 1. Потім, зберігаючи проміжок зміни змінної y, нам доведеться стиснути проміжок зміни змінної x, замінивши його настільки малим проміжком $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$, щоб у його межах неперервна функція від x: $\varphi(x, y_0)$, яка дорівнює нулю при $x = x_0$, задовольняла нерівність

$$|\varphi(x, y_0)| < (1 - \lambda)\Delta. \tag{442.6}$$

Отже ми підготували область

$$\mathcal{D}^* = [x_0 - \delta,\, x_0 + \delta;\; y_0 - \Delta,\, y_0 + \Delta],$$

до якої і будуть відноситися наші подальші міркування.

Підставивши у **праву частину** рівняння (442.3) замість y сталу y_0, ми отримаємо деяку функцію від x:

$$y_1 = y_1(x) = y_0 + \varphi(x, y_0).$$

Аналогічно, приймаємо послідовно

$$\begin{aligned} y_2 &= y_2(x) = y_0 + \varphi(x, y_1), \\ y_3 &= y_3(x) = y_0 + \varphi(x, y_2), \\ &\dots \end{aligned}$$

і взагалі

$$y_n = y_n(x) = y_0 + \varphi(x, y_{n-1}). \tag{442.7}$$

Ці функції

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ldots$$

і здійснюють послідовні наближення до шуканої функції $y(x)$.

Щоправда, залишається ще переконатися, що усі вони не виходять за межі проміжку $[y_0-\Delta,\ y_0+\Delta]$, бо, якщо хоч якась із них вийшла за межі, то її вже не можна було б підставляти замість y у праву частину рівняння (442.3).

Доведемо це **індуктивно**. Нехай, скажімо,

$$y_0 - \Delta \leqslant y_{n-1} \leqslant y_0 + \Delta.$$

Із (442.7):

$$y_n - y_0 = \varphi(x, y_{n-1}).$$

Але

$$|\varphi(x, y_{n-1})| \leqslant |\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_0)| + |\varphi(x, y_0)|.$$

Перший доданок справа перетворюється згідно з теоремою про середнє значення, та, на підставі (442.5),

$$|\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_0)| = |\varphi'_y(x, \eta) \cdot (y_{n-1} - y_0) < \lambda \cdot \Delta,$$

а другий є меншим за $(1-\lambda)\Delta$ зважаючи на (442.6), отже в сукупності маємо

$$|y_n - y_0| < \lambda\Delta + (1-\lambda)\Delta = \Delta,$$

Що і доводить наше твердження.

Водночас, індуктивно доводиться, що всі побудовані вказаним способом функції будуть **неперервними**.

Звернемося тепер до питання щодо **границі** для послідовності функцій $\{y_n\}$. Зручніше, однак, розглянути ряд

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_n - y_{n-1}). \tag{442.8}$$

Із самого означення нашої послідовності зрозуміло, що

$$y_n - y_{n-1} = \varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_{n-2}).$$

Скориставшись знову теоремою про середнє значення та нерівністю (442.5), знайдемо, що

$$|y_n - y_{n-1}| < \lambda |y_{n-1} - y_{n-2}|.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Звідси, замінюючи послідовно n на $n-1$, на $n-2$ тощо, остаточно отримаємо

$$|y_n - y_{n-1}| < \lambda^{n-1} \cdot |y_1 - y_0| \leqslant \lambda^{n-1} \cdot (1-\lambda) \cdot \Delta,$$

зважаючи на (442.6). Отже, для ряду (442.8) існує збіжний мажорантний ряд (геометрична прогресія):

$$(1-\lambda)\Delta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}; \tag{442.9}$$

а отже, ряд (442.8) **збігається** та ще й **рівномірно** для всіх значень x на проміжку $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$. А тоді, згідно з теор. 431.1, і гранична функція

$$y = y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

буде **неперервною** на вказаному проміжку.

У тому, що ця функція задовольняє задане рівняння, легко переконатися переходячи до границі при $n \to \infty$ у рівності (442.7). Залишається лише довести, що не існує інших значень y, окрім визначених, які б задовольняли рівняння (442.3). Справді, якби при деякому x одночасно із (442.3) мало б місце

$$\tilde{y} = x_0 + \varphi(x, \tilde{y}),$$

то, віднімаючи та оцінюючи різницю значень φ, як зазвичай, отримали б

$$|y - \tilde{y}| = |\varphi(x, y) - \varphi(x, \tilde{y})| < \lambda \cdot |y - \tilde{y}|,$$

що неможливо, якщо $\tilde{y} \neq y$.

Звідси вже випливає, що

$$y(x_0) = y_0;$$

втім, це безпосередньо видно із того, що усі $y_n(x_0) = y_0$. Теорему — у розгляданому частковому випадку — доведено. Загальний випадок легко зводиться до часткового; а саме, рівняння (442.1) можна переписати у вигляді

$$y = y_0 + \left[y - y_0 - \frac{F(x,y)}{F'_y(x_0,y_0)} \right],$$

який те саме що й (442.3), якщо прийняти

$$\varphi(x,y) = y - y_0 - \frac{F(x,y)}{F'_y(x_0,y_0)}.$$

Ця функція задовольняє умови (442.4), та, зокрема, другу із них, тому що $\varphi'_y(x_0, y_0) = 0$. □

Як вже було згадано, викладений процес спрощує і фактичне обчислення шуканої функції $y(x)$ по наближенню. Похибка від заміни $y(x)$ на $y_n(x)$ легко оцінюється, оскільки залишок ряду (442.8) після n-го члену менше від відповідного залишку геометричної прогресії (442.9). Звідси і виходить:

$$|y(x) - y_n(x)| < \Delta \cdot \lambda^n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Повчальним є зіставлення доведення теореми про неявну функцію теор. 206.1 і щойно наведеного. Там ми мали справу із чистим "доведенням існування", тут же — із **побудовою** шуканого об'єкту.

Схожим способом можуть бути **ефективно** доведені і загальні теореми з розд. 208. Ми обмежилися найпростішим випадком, щоб краще виразити ідею цього методу.

443. Аналітичне означення тригонометричних функцій

Читач бачив, яку важливу роль в аналізі відіграють тригонометричні функції. Між тим вводяться вони на основі цілком геометричних міркувань, які абсолютно чужі аналізу. Тому набуває принципової важливості питання про можливість означення тригонометричних функцій та вивчення їх основних властивостей засобами аналізу. Нескінченні ряди якраз і є той інструмент, за допомогою якого все це може бути здійснено. І ми присвятимо цей розділ вивченню тригонометричних функцій за їх аналітичним означенням. Це буде ще одним прикладом застосування викладеної вище теорії.

Отже, розглянемо дві функції $C(x)$ і $S(x)$, формально визначені для всіх дійсних значень x рядами, що збігаються всюди:

$$C(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\,,$$

ні в якому разі не ототожнюючи їх поки що з раніше відомими нам функціями $\cos x$ і $\sin x$. Ми вже мали справу з функціями, означеними таким способом (пр. 390.7). За допомогою множення рядів, як там вказувалося, для них можна отримати дві такі основні формули:

$$C(x+y) = C(x) \cdot C(y) - S(x) \cdot S(y), \tag{443.1}$$

$$S(x+y) = S(x) \cdot C(y) + C(x) \cdot S(y), \tag{443.2}$$

які справедливі для всіх значень x і y.

Продовжимо дослідження властивостей функцій $C(x)$ та $S(x)$. Замінюючи x на $-x$, відразу отримуємо, що $C(x)$ парна функція, а $S(x)$ — непарна,

$$C(-x) = C(x), \quad S(-x) = -S(x).$$

Взявши $x = 0$, знайдемо, що

$$C(0) = 1, \quad S(0) = 0.$$

Якщо тепер, зберігаючи x довільним, замінити в (443.1) $y = -x$, то, з урахуванням щойно отриманих рівностей, отримаємо співвідношення, що алгебраїчно зв'язує обидві функції:

$$S^2(x) + C^2(x) = 1. \tag{443.3}$$

Легко отримати і формули подвійного аргументу, і формули половинного аргументу.

З теор. 437.2 і теор. 438.3 робимо висновок, що обидві функції $C(x)$ та $S(x)$ не тільки неперервні, але ще мають похідні всіх порядків. Зокрема, застосувавши до рядів, що означують наші функції, почленне диференціювання (теор. 438.2), легко переконуємося у тому, що

$$C'(x) = -S(x), \quad S'(x) = C(x). \tag{443.4}$$

Всі ці властивості, як бачимо, легко отримати.

Складніше довести **періодичність** цих функцій.

Твердження 443.1.
$C(x)$ та $S(x)$ — періодичні функції.

Доведення. Покажемо спочатку, що на проміжку $(0, 2)$ існує один, і тільки один, корінь функції $C(x)$. Ми знаємо, що $C(0) = 1$. Значення ж $C(2)$ можна написати в так (відділивши перші три члени ряду, а інші члени об'єднавши попарно):

$$C(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - \dots .$$

Оскільки всі дужки додатні:

$$\frac{2^{2n}}{2n!} - \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{2^{2n}}{2n!}\left(1 - \frac{2 \cdot 2}{(2n+1)(2n+2)}\right) > 0,$$

а сума перших трьох членів дає $-\frac{1}{3}$, то $C(2) < -\frac{1}{3} < 0$. Зважаючи на неперервність функції $C(x)$, звідси випливає, що на проміжку $(0, 2)$ існує корінь цієї функції.

З іншого боку, на тому ж проміжку функція

$$S(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \dots ,$$

очевидно, зберігає додатний знак, а похідна $C'(x) = -S(x)$ — від'ємний, отже, функція $C(x)$ спадає, коли x зростає від 0 до 2, і дорівнює нулю лише один раз.

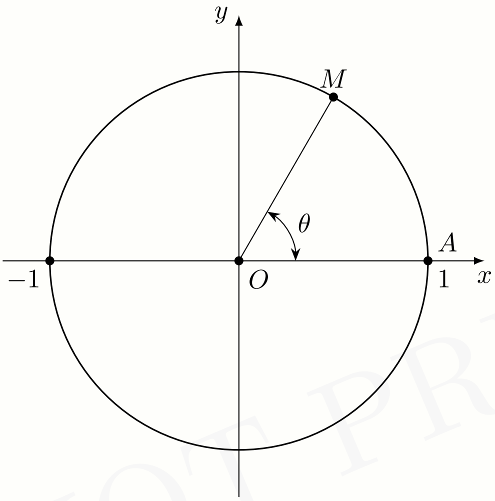


Рис. 443.1

Позначимо тепер згаданий корінь функції $C(x)$ через $\frac{\pi}{2}$, причому π тут поки що цілком формальне, і ототожнювати його з часткою довжини кола до діаметра поки що не можна.

Отже, маємо:

$$C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

остання рівність випливає з (443.3), з урахуванням того, що функція $S(x) > 0$ для $0 < x \leqslant 2$.

Вважаючи у формулах (443.1) та (443.2) спочатку $x = y = \frac{\pi}{2}$, а потім $x = y = \pi$, послідовно, знайдемо:

$$C(\pi) = -1, \quad S(\pi) = 0; \quad C(2\pi) = 1, \quad S(2\pi) = 0.$$

Якщо в тих самих формулах, **зберігаючи x довільним**, взяти $y = \pi$ або $y = 2\pi$, то отримаємо:

$$C(x + \pi) = -C(x), \quad S(x + \pi) = -S(x). \tag{443.5}$$

і нарешті,

$$C(x + 2\pi) = C(x), \quad S(x + 2\pi) = S(x).$$

Це і доводить, що функції $C(x)$ та $S(x)$ мають **період** 2π. □

Нескладно було б вивести і інші “формули зведення”; ми залишаємо це читачеві.

Тепер спробуємо довести збіг розглянутих функцій $C(x)$ та $S(x)$ з тригонометричними функціями $\cos x$ та $\sin x$, а також ототожнити формально введене нами число π з тим числом π, яке відіграє важливу роль в геометрії.

З цією метою розглянемо **криву**, задану параметрично рівняннями

$$x = C(t), \quad y = S(t),$$

де параметр t змінюється від 0 до 2π. Зважаючи на (443.3), всі точки її задовольняють рівнянню: $x^2 + y^2 = 1$, тобто лежать на колі, описаному навколо початку координат радіусом 1 (рис. 443.1). Покажемо, що при цьому ми отримаємо кожну її точку і лише один раз; винятком є, звичайно, початкова точка A, що відповідає значенням параметра $t = 0$, $t = 2\pi$.

Ми бачили, що $S(t) > 0$, для $0 < t \leqslant 2$, а отже, і для $0 < t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Заміняючи в другій з формул (443.5) x на $-t$, отримаємо

$$S(\pi - t) = S(t);$$

звідси можна побачити, що $S(t) > 0$ і для $\frac{\pi}{2} \leqslant t < \pi$. У такому разі, функція $C(t)$, похідна якої дорівнює $-S(t)$ монотонно спадає, коли t змінюється від 0 до π, проходячи по разу через кожне значення від 1 до -1. Звідси ясно, що проміжку $[0, \pi]$ зміни параметра взаємно однозначно відповідає верхня частина нашого кола. Аналогічне твердження можна зробити щодо проміжку $[\pi, 2\pi]$ значень параметра та нижній частини кола, зважаючи на

$$C(t + \pi) = -C(t), \quad S(t + \pi) = -S(t)$$

(дивіться (443.5))

Тепер застосуємо формулу (329.4) та обчислимо довжину дуги AM, вважаючи, що точка M відповідає значенню t параметра. Беручи до уваги (443.4) та (443.3), ми отримаємо

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{[C'(t)]^2 + [S'(t)]^2}\, dt = t.$$

Це показує, що t збігається з кутом $\theta = \angle AOM$, вираженим у радіанах, а тоді:

$$C(\theta) = x = \cos\theta, \quad S(\theta) = y = \sin\theta.$$

Водночас, довжина всього кола за нашою формулою виявляється рівною 2π; отже, введене нами число π тотожне з тим, що застосується в геометрії.

444. Приклад неперервної функції без похідної

Перший приклад такого роду був побудований Ваярштрассом; його функція визначається рядом:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot \cos(b^n \pi x) \qquad \left(0 < a < 1,\ ab > 1 + \frac{3}{2} \cdot \pi,\ b - \text{ціле, натуральне число}\right).$$

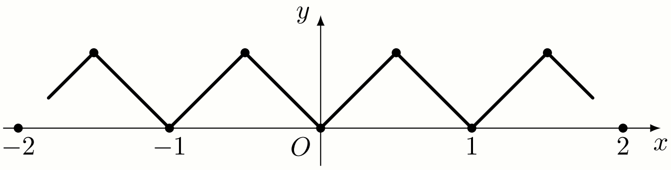


Рис. 444.1

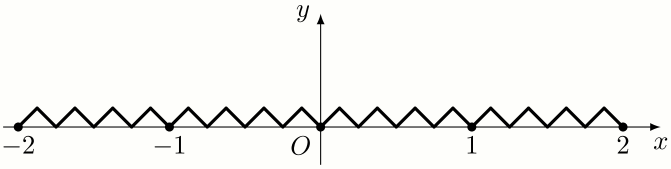


Рис. 444.2

Для цього ряду існує збіжний мажорантний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$, отже, ряд збігається **рівномірно** (теор. 430.1, теор. 431.1), і його сума є всюди **неперервною** функцією від x. Кропітким дослідженням Вайрштрасс зміг показати, що в жодній точці для неї не існує скінченної похідної.

Ван дер Варден (нід. Van der Waerden, Ба́ртель ван дер Ва́рден) навів інший приклад функції побудованої, по суті, на тій самій ідеї, лише замість кривих $y = \cos \omega x$ **коливаються** ламані.

Отже, позначимо через $u_0(x)$ абсолютне значення різниці чисел x і найближчим до нього цілим числом. Ця функція буде лінійною на кожному проміжку вигляду $\left[\frac{s}{2}, \ \frac{s+1}{2}\right]$, де s — ціле число. Функція $u_0(x)$ неперервна і має період 1. Її графік є ламаною, він зображений на рис. 444.1; окремі ланки ламаної кривої мають кутовий коефіцієнт ±1.

Далі розглянемо такі функції:

$$u_k(x) = \frac{u_0\left(4^k x\right)}{4^k} \quad (k = 1, \ 2, \ 3, \ \dots).$$

Ця функція буде лінійною на своєму проміжку вигляду $\left[\frac{s}{2 \cdot 4^k}, \ \frac{s+1}{2 \cdot 4^k}\right]$; вона також неперервна і має період $\frac{1}{4^k}$. Її графік також ламана, але з дрібнішими зубчиками; на рис. 444.2, наприклад, зображено графік функції $u_1(x)$. В усіх випадках кутові коефіцієнти окремих ланок ламаної і тут дорівнюють ±1.

Визначимо тепер, для всіх дійсних значень x, функцію $f(x)$ рівністю

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Оскільки, очевидно, що $0 \leqslant u_k(x) \leqslant \dfrac{1}{2 \cdot 4^k}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots)$, то для цього ряду існує збіжний мажорантний ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2 \cdot 4^k}$ і отже (як і у для функції Ваярштрасса) ряд збігається **рівномірно**, і функція $f(x)$ всюди **неперервна**.

Зупинимося на будь-якому значенні $x = x_0$. Обчислюючи його з точністю до $\dfrac{1}{2 \cdot 4^n}$ (де $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$), за недостачею і за надлишком, ми оточимо його числами вигляду:

$$\frac{s_n}{2 \cdot 4^n} \leqslant x_0 < \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n},$$

де s_n — ціле число. Очевидно, що замкнені проміжки

$$\Delta_n = \left[\frac{s_n}{2 \cdot 4^n},\ \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n}\right] \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots),$$

виявляються вкладеними один в одного. В кожному з них знайдеться така точка x_n, така що відстань від неї до точки x_0 дорівнює половині довжини проміжку:

$$|x_n - x_0| = \frac{1}{4^{n+1}}.$$

Ясно, що зі зростанням n варіанта $x_n \to x_0$.

Складемо тепер відношення приростів

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Але, для $k > n$ число $\dfrac{1}{4^{n+1}}$ є ціле кратне періоду $\dfrac{1}{4^k}$ функції $u_k(x)$, тому $u_k(x_n) = u_k(x_0)$, відповідні члени ряду дорівнюють 0 і можуть бути відкинуті. Якщо ж $k \leqslant n$, то функція $u_k(x)$, лінійна на проміжку Δ_k, буде лінійною і на проміжку Δ_n, що міститься в ньому, причому

$$\frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \pm 1 \quad (k = 0,\ 1,\ \dots,\ n).$$

Отже, маємо остаточно

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1).$$

Іншими словами, це відношення дорівнює парному цілому числу для непарного n і непарному цілому числу для парного n. Звідси ясно, що при $n \to \infty$ частка приростів ні до якої скінченної границі прямувати не може, тож наша функція не має скінченної похідної в точці $x = x_0$.

12.4. Додаткові відомості про степеневі ряди

445. Дії над степеневими рядами

Цей розділ ми присвятимо огляду, в основному вже відомих, дій над степеневими рядами, що стане відправною точкою для подальшого просування.

Розглянемо два ряди:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots\,, \tag{445.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots\,, \tag{445.2}$$

Припускаючи радіуси збіжності обох рядів відмінними від 0, позначимо через r найменший з них. Тоді для $|x| < r$, як ми знаємо (теор. 364.4, розд. 389), ці ряди можна почленно **додавати, віднімати і перемножувати**, причому результати знову розташовуються за степенями x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0) x^n. \tag{445.3}$$

Припустимо, що ряд (445.2) тотожний з (445.1); тоді вийде, що всередині проміжку збіжності степеневий ряд можна **підносити до квадрата**:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \dots + a_n a_0) x^n.$$

Якщо останній ряд, за вказаним вище правилом, знову помножити на ряд (445.1) і повторити це невизначене число разів, то прийдемо до висновку, що степеневий ряд, всередині проміжку збіжності, можна взагалі **підносити до степеня з будь-яким натуральним показником** m, причому результат запишеться також у вигляді степеневого ряду:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^n \quad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \dots). \tag{445.4}$$

Коефіцієнт $a_n^{(m)}$ залежить від коефіцієнтів $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ початкового ряду і, як це випливає з (445.3), **отримується з них лише за допомогою додавання і множення**. Це зауваження нам знадобиться нижче.

Тепер особливо зупинимося на **додаванні нескінченної множини степеневих рядів**, з чим нам часто доведеться мати справу нижче. Отже, нехай дана нескінченна послідовність степеневих рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}x^n \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \dots);$$

складемо з них повторний ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}x^n\right). \tag{445.5}$$

Теорема 445.1. *Якщо при деякому значенні x ряд, отриманий звідси заміною всіх членів їх абсолютними значеннями, збіжний, то збіжним буде і ряд* (445.5), *причому його сума $A(x)$ може бути розкладена в степеневий ряд просто об'єднуючи подібні члени:*

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad \textit{де} \quad A_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots).$$

Доведення. Доведення вичерпується посиланням на теор. 393.3. □

Застосування цієї важливої теореми розглянемо на прикладах.

1) Розкласти функції

$$\text{а)}\ f_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\cdot\frac{a^m}{1+a^{2m}x^2},$$

$$\text{б)}\ f_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\cdot\frac{a^m}{1+a^{2m}x^2}$$

($|x| < 1$ та $0 < a < 1$) в ряди за степенями x.

а) Маємо

$$\frac{a^m}{1+a^{2m}x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{m(2n+1)}x^{2n}$$

і, підставляючи та змінюючи порядок підсумовування,

$$f_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^{(2n+1)m}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{(2n+1)m}}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{a^{2n+1}}x^{2n}.$$

Оскільки повторний ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}a^{(2n+1)m}x^{2n} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}\cdot\frac{1}{1-a^{2m}x^2} < \frac{1}{1-x^2}\cdot e^a$$

збіжний, то перестановка підсумовувань виправдана.

б) Аналогічно,

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-a^{2n+1}} x^{2n}.$$

2) Виходячи з розкладу функції $x \operatorname{ctg} x$ на прості дроби (пр. 441.9), представимо її степеневим рядом. Для спрощення замінимо лише x на πx, тож

$$\pi x \cdot \operatorname{ctg} \pi x = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^2}{m^2 - x^2}.$$

Якщо $|x| < 1$, то для будь-якого $m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$\frac{x^2}{m^2 - x^2} = \frac{\frac{x^2}{m^2}}{1 - \frac{x^2}{m^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{m^2} \right)^n.$$

Зважаючи на те, що усі члени додатні, за теоремою відразу отримуємо:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^2}{m^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} \cdot x^{2n}, \quad \text{де} \quad s_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Отже, при $|x| < 1$ маємо:

$$\pi x \cdot \operatorname{ctg} \pi x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} x^{2n}.$$

3) Абсолютно аналогічно, виходячи з розкладу функції $x \cdot \operatorname{cth} x$ на прості дроби (пр. 431.10), отримаємо розклад в степеневий ряд

$$\pi x \cdot \operatorname{cth} \pi x = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} s_{2n} \cdot x^{2n} \quad (|x| < 1).$$

Згодом (розд. 449) ми дамо і інший вираз для коефіцієнтів розкладів пр. 445.2 та пр. 445.3.

4) Теорема зберігає своє значення і в тому випадку, коли ряди, що додаються, вироджуються у звичайні скінченні многочлени. Як приклад виведемо логарифмічний ряд, виходячи з біноміального та показникового рядів.

Для $|x| < 1$ і довільного α маємо (407.1):

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots.$$

Фіксуючи x, будемо розглядати члени цього ряду як цілі многочлени відносно α. Оскільки ряд

$$1+|\alpha|\cdot|x|+\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)}{1\cdot 2}|x|^2+\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)(|\alpha|+2)}{1\cdot 2\cdot 3}|x|^3+\dots$$

збіжний, як легко переконатися за допомогою ознаки д'Аламбера, то в попередньому ряді, згідно з теоремою, можна об'єднати подібні члени:

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots\right)+\dots.$$

З іншого боку, очевидно

$$(1+x)^\alpha=e^{\alpha\ln(1+x)}=1+\alpha\ln(1+x)+\dots.$$

Оскільки обидва розклади повинні бути тотожні, то прирівнюючи коефіцієнти при α, отримаємо:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots.$$

Зауважимо, що доведена теорема безпосередньо поширюється і на кратні ряди, наприклад, на ряд

$$\sum_{k=0,\,m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_{nkm}x^n\right).$$

Справді, варто лише замінити подвійний ряд простим, щоб звести справу до вже розглянутого випадку.

446. Підстановка ряду в ряд

Розглянемо функцію $y=f(x)$, яка на проміжку $(-R,R)$ розкладається в степеневий ряд (445.1). Нехай ще дана функція $\varphi(y)$, що також розкладається в степеневий ряд

$$\varphi(y)=\sum_{m=1}^{\infty}h_my^m=h_0+h_1y+h_2y^2+\dots+h_my^m+\dots \tag{446.1}$$

для значень y на проміжку $(-\rho,\rho)$.

Якщо $|a_0|=|f(0)|<\rho$, то й $|f(x)|<\rho$ при досить малому x, отже, має сенс **композиція** функцій $\varphi(f(x))$.

Теорема 446.1. *За єдиної умови, що $|a_0|<\rho$, цю функцію $\varphi(f(x))$ в околі точки $x=0$ можна розкласти в ряд за степенями x, якщо підставити в (446.1) замість y ряд (445.1) і, зробивши всі піднесення до степеня згідно з (445.4), потім об'єднати подібні члени.*

Доведення. Вважаючи $|x| < R$, розглянемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = |a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + \dots + |a_n| \cdot |x|^n + \dots;$$

зважаючи на неперервність його суми (теор. 437.2) та на те, що $|a_0| < \rho$, для досить малих x виконується нерівність

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| < \rho, \tag{446.2}$$

тому ряд

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \right)^m$$

буде збіжним.

Вважаючи, аналогічно до (445.4),

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(m)} \cdot |x|^n,$$

попередній ряд можна переписати у вигляді

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(m)} \cdot |x|^n \right).$$

Оскільки $\alpha_n^{(m)}$ виходить з $|a_0|, \dots, |a_n|$ за допомогою додавань і множень (розд. 445) так само, як $a_n^{(m)}$ з $a_0, \dots, a_n$, то очевидно: $|a_n^{(m)}| \leqslant \alpha_n^{(m)}$. Тому для згаданих значень x ряд

$$|h_0| + \sum_{m=1}^{\infty} |h_m| \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n^{(m)}| \cdot |x|^n \right)$$

буде збіжним, а тоді до ряду

$$h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^m = h_0 + \sum_{m=1}^{\infty} h_m \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} \cdot x^n \right)$$

можна застосувати останнє твердження попереднього розділу, що й доводить теорему. □

Область зміни x, для якої наше міркування забезпечує можливість розкладання функції $\varphi(f(x))$ у ряд за степенями x, характеризується нерівністю $|x| < R$ та нерівністю (446.2). Якщо $R = +\infty$, то перше обмеження зникає. Якщо $\rho = +\infty$, то зникає друге.

nebayduzhi.math@gmail.com

У більшості випадків застосування теореми достатньо знати, що розклад справедливий для малих значень x. Якщо цікавить вся область застосування отриманого ряду, то це питання потребує окремого дослідження.

Для прикладу проведемо його у найпростішому випадку. Розглянемо функцію

$$\varphi(y) = \sum_{m=0}^{\infty} y^m$$

у проміжку $(-1, 1)$ $(\rho = 1)$ і, замість y, підставимо функцію $f(x) = 2x - x^2$ $(R = +\infty)$. Складена функція

$$\varphi(f(x)) = \frac{1}{1 - (2x - x^2)} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

визначена, якщо

$$-1 < 2x - x^2 < 1, \quad \text{тобто} \quad 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}, \quad \text{але} \quad x \neq 1.$$

Розклад за степенями x нам відомий (пр. 390.1)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots;$$

цей ряд збіжний для $-1 < x < 1$. Цей ряд можна було б отримати і почленним диференціюванням (теор. 438.2) прогресії

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

За сукупністю, рівність

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2x - x^2)^m = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

справедливе за умови, що

$$1 - \sqrt{2} < x < 1.$$

Цікаво зіставити це з тим, що дає наше міркування. Відповідно до нього треба було б вимагати, щоб було (дивіться (446.2))

$$2|x| + |x|^2 < 1 \quad \text{або} \quad 1 - \sqrt{2} < x < \sqrt{2} - 1.$$

Як ми бачили, отримана рівність насправді застосовується у ширшій області.

І тут слід зазначити можливість подальших узагальнень теореми.

Теорема 446.2. *Нехай, наприклад, дано подвійний ряд*

$$\varphi(y,z)=\sum_{k,\,m=0}^{\infty} h_{km}y^k z^m,$$

що збігається при $|y|<\rho$ *та* $|z|<\rho$, *і два ряди*

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad z=g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

збіжні при $|x|<R$; *тоді, за умови:* $|a_0|<\rho$ *та* $|b_0|<\rho$, *складену функцію* $\varphi(f(x),\ g(x))$ *в околі* $x=0$ *можна розкласти в ряд за степенями* x, *якщо підставити замість* y *і* z *відповідні ряди і, виконавши піднесення до степеня та множення, зробити зведення подібних членів.*

447. Приклади

1) Знайти кілька перших членів розкладу функції

$$\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

за степенями x.

Маємо для $|x|<1$

$$\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}\cdot e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\ldots}=$$
$$=1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{6}+\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\ldots\right)^2+$$
$$+\frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\ldots\right)^3+\frac{1}{24}\left(-\frac{x}{2}+\ldots\right)^4+\frac{1}{120}\left(-\frac{x}{2}+\ldots\right)^5+\cdots=$$
$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\frac{2447}{5760}x^4-\frac{959}{2304}x^5+\ldots.$$

(Такого типу задачі близькі до тих, які розглядалися вже у розд. 125.)

2) Спробуємо отримати біноміальний ряд, виходячи з логарифмічного та показникового рядів.

При $|x|<1$ і будь-якому α, очевидно, буде:

$$(1+x)^\alpha=e^{\alpha\ln(1+x)}=e^{\alpha\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\right)}=$$
$$=1+\alpha\left(x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\ldots\right)+\frac{\alpha^2}{2!}\left(x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\ldots\right)^2+\cdots=$$
$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Вигляд кількох перших коефіцієнтів встановлюється відразу. Коефіцієнт загального члена, що має x^n, можна отримати з таких міркувань. Безпосередньо ясно, що він є цілим многочленом відносно α, степеня n: $Q_n(\alpha)$. Оскільки в розкладі при $\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n-1$ члена з x^n немає, то цей многочлен у названих точках дорівнює 0, а отже, має вигляд:

$$Q_n(\alpha) = c \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1).$$

При $\alpha = n$ коефіцієнт при x^n є 1, $Q_n(n) = 1$; звідси $c = \dfrac{1}{n!}$, і остаточно:

$$Q_n(\alpha) = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)}{n!}.$$

3) Нехай $f(x)$ буде деяка функція, що розкладається в ряд за степенями x, без вільного члена:

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots;$$

тоді, за загальною теоремою, для тих самих значень x розкладається в ряд і функція $g(x) = e^{f(x)}$, причому вільний член, очевидно, дорівнює 1. Потрібно знайти цей розклад.

Покажемо, як для цього може бути використаний **метод невизначених коефіцієнтів**. Нехай

$$g(x) = e^{f(x)} = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots.$$

Продиференціювавши цю рівність, знайдемо:

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \dots + n b_{n-1} x^{n-1} + \dots,$$

або, підставляючи замість множників лівої частини їхні розклади,

$$(b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \dots) \cdot (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots) = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \dots + n b_{n-1} x^{n-1} + \dots,$$

Ця умова приводить до такої системи рівнянь:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1, \\ 2a_2 + a_1 b_1 &= 2b_2, \\ 3a_3 + 2a_2 b_1 + a_1 b_2 &= 3b_3, \\ &\dots, \\ n a_n + (n_1) a_{n-1} b_1 + \dots + 2a_2 b_{n-2} + a_1 b_{n-1} &= n b_n, \\ &\dots, \end{aligned} \tag{447.1}$$

з якої невідомі коефіцієнти b **послідовно** визначаться.

Для прикладу застосуємо наведені викладки до розв'язання наступної задачі (Ваярштрасс).

Довести, що розклад функції

$$g(x) = (1-x)e^{\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{m-1}}{m-1}}$$

починається членами $1 - \dfrac{x^m}{m} + \ldots$, та що абсолютні значення всіх його коефіцієнтів менше за одиницю.

Напишемо $g(x)$ у вигляді

$$g(x) = e^{\ln(1-x)+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{m-1}}{m-1}} = e^{-\frac{x^m}{m}-\frac{x^{m+1}}{m+1}-\ldots};$$

тоді перша частина твердження стає очевидною. Друга частина доведеться **індуктивно**. Припустимо, що абсолютні значення всіх коефіцієнтів b_k зі значком, меншим за n, менше одиниці. Оскільки в даному випадку

$$a_k = 0 \quad \text{при} \quad k < m \quad \text{і} \quad a_k = -\frac{1}{k} \quad (ka_k = -1) \quad \text{при} \quad k \geqslant m,$$

то з n-ї рівності в (447.1) отримаємо, що $|b_n| < 1$.

(Пропонується застосувати зазначений метод до прикладів 1) та 2).)

4) Ті ж рівняння (447.1) можуть стати в нагоді і в іншому питанні. Нехай маємо розклад функції

$$g(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \ldots,$$

а шукається розклад функції

$$f(x) = \ln g(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \ldots.$$

Легко зрозуміти, що коефіцієнти a і b пов'язані тими самими співвідношеннями (447.1), але цього разу треба визначити коефіцієнти a.

5) Показати, що нескінченний добуток

$$F(x) = \prod_{m=1}^{\infty}(1+q^mx) = (1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)\ldots \quad (|q|<1),$$

при досить малих x розкладається за ступенями x, визначити коефіцієнти цього розкладу.

При $|x| < 1$ добуток збіжний і має додатне значення; логарифмуючи, отримаємо

$$\ln F(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\ln(1+q^mx) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(q^mx - \frac{1}{2}q^{2m}x^2 + \ldots\right).$$

Зокрема, цей ряд збіжний при заміні всіх членів у дужках їх абсолютними значеннями. Звідси (розд. 445) випливає, що $\ln F(x)$ в околі нуля розкладається у ряд за степенями x, а з ним (вже за теор. 446.1) розкладається і вираз

$$F(x) = e^{lnF(x)}.$$

Отже, для досить малих x маємо:

$$F(x) = 1 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots,$$

де коефіцієнти $b_1, \dots, b_n, \dots$ — ще треба визначити. Найпростіше це виконати, якщо використати очевидну рівність:

$$F(x) = (1 + qx) \cdot F(qx),$$

яку, скориставшись розкладом, можна переписати у вигляді:

$$1 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots = (1 + qx)(1 + b_1qx + b_2q^2x^2 + \dots + b_nq^nx^n + \dots).$$

За теоремою про тотожність степеневих рядів, маємо

$$b_1q + q = b_1, \quad b_2q^2 + b_1q^2 = b_2, \quad \dots, \quad b_nq^n + b_{n-1}q^n = b^n, \quad \dots$$

або

$$b_1 = \frac{q}{1-q}, \quad b_2 = \frac{b_1q^2}{1-q^2}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{b_{n-1}q^n}{1-q^n}, \quad \dots$$

і, остаточно,

$$b_1 = \frac{q}{1-q}, \quad b_2 = \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}, \quad \dots.$$

6) Візьмемо розклад функції $\frac{\sin x}{x}$ в нескінченний добуток (408.5) та нескінченний ряд (404.4) і прирівняємо їх логарифми (теор. 401.4):

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots\right)$$

або

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{n^4\pi^4} + \dots\right) = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \dots\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \dots\right)^2 + \dots.$$

Розклавши ліву та праву частини за степенями x (розд. 445, розд. 446) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, прийдемо до рівностей

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{2\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{180}, \qquad \dots,$$

звідки

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \dots,$$

Втім, нижче (розд. 449) ми знайдемо ці формули з інших міркувань. Також порівняйте з (440.1).

7)

nebayduzhi.math@gmail.com

Твердження 447.1. *Якщо функція $f(x)$ на проміжку $(-R, R)$ розкладається в степеневий ряд* (445.1) *і $\overline{x}$ — довільна точка цього проміжку, то в її околі функція розкладається в ряд за степенями $x - \overline{x}$.*

Доведення. Справді, покладемо у розкладі (445.1) $x = \overline{x} + y$; за загальною теоремою (змінюючи лише ролі x і y), поки $|x| + |y| < R$ або $|y| < R - |x|$, можна перейти до розкладу за степенями y, тобто за степенями $x - \overline{x}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k y^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x - \overline{x})^k.$$

Виконавши в ряді

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\overline{x} + y)^n$$

всі піднесення до степеня і зібравши подібні члени, легко визначити і коефіцієнти цього розкладу:

$$A_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{x}^n = f(\overline{x})$$

і взагалі,

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} a_n \overline{x}^{n-k} = \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n \overline{x}^{n-k} = \frac{f^{(k)}(\overline{x})}{k!}.$$

Цей результат, зважаючи на теор. 438.3, не є несподіваним. ☐

Ми лише для простоти взяли початковий ряд розкладеним за степенями x. Справа не змінилася б, якби функція $f(x)$ була дана розкладеною за степенями різниці $x - x_0$.

Нагадаємо, що функція $f(x)$, яка в околі точки $x = x_0$, розкладається в ряд за степенями $x - x_0$ називається **аналітичною** в цій точці. Отже, ми довели, що *функція, аналітична в будь-якій точці, буде аналітичною і у всіх точках деякого її околу.* (Цей ряд, необхідно, буде її рядом Тейлора, теор. 438.3.)

Це твердження поширюється на випадок функції кількох змінних.

8) На закінчення розглянемо розкладання функції

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x\alpha + \alpha^2}} = \left[1 + (\alpha^2 - 2x\alpha)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

за степенями α, при довільно зафіксованому x. Можливість такого розкладання гарантується нашою теоремою, якщо тільки $|\alpha|^2 + 2|x| \cdot |\alpha| < 1$. Нескладно побачити, що коефіцієнтом при α^n $(n \geqslant 1)$ буде якийсь многочлен $P_n = P_n(x)$ степеня n, тож

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2x\alpha + \alpha^2}} = 1 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \dots + P_n\alpha^n + \dots. \tag{447.2}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Для визначення цих коефіцієнтів продиференціюємо рівність (447.2) за α:

$$\frac{x-\alpha}{\left(\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}\right)^3} = P_1 + 2P_2\alpha + \dots + nP_n\alpha^{n-1} + \dots .$$

Зіставляючи цей результат з (447.2), легко отримати

$$(1-2x\alpha+\alpha^2)(P_1+2P_2\alpha+\dots+nP_n\alpha^{n-1}+\dots) = (x-\alpha)(1+P_1\alpha+P_2\alpha^2+\dots+P_n\alpha^n+\dots).$$

Прирівняємо тепер коефіцієнти при однакових степенях α в обох частинах. Ми знайдемо, що

$$P_1 = x \quad \text{та} \quad 2P_2 - 2xP_1 = -1 + xP_1, \quad \text{звідки} \quad P_2 = \frac{3x^2-1}{2}.$$

А потім і взагалі:

$$(n+1)P_{n+1} - 2nx \cdot P_n + (n-1)P_{n-1} = xP_n - P_{n-1}$$

або

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0.$$

Знаючи перші два многочлени, за цією рекурентною формулою можна послідовно обчислити решту многочленів.

Цікаво, що многочлени P_1 та P_2 збігаються з першими двома многочленами Льожондра, а згадана щойно формула тотожна з аналогічною формулою (320.9), за якою обчислюються многочлени Льожондра. Звідси робимо висновок, що *коефіцієнтами розкладу* (447.2) *є саме многочлени Льожондра.*

У зв'язку з цим функцію від двох змінних α та x

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}$$

називають "твірною функцією" для многочленів Льожондра. Розклад (447.2) з успіхом може бути використаний для вивчення властивостей цих многочленів.

448. Ділення степеневих рядів

Важливим прикладом застосування теореми про підстановку ряду в ряд є питання **про ділення степеневих рядів**.

Нехай вільний член a_0 ряду (445.1) відмінний від 0; представимо цей ряд у вигляді

$$a_0\left(1 + \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \dots + \frac{a_n}{a_0}x^n + \dots\right) = a_0(1+y),$$

вважаючи

$$y = \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \dots + \frac{a_n}{a_0}x^n + \dots .$$

Тоді

$$\frac{1}{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots} = \frac{1}{a_0}\,\frac{1}{1+y} = \frac{1}{a_0}(1 - y + y^2 - \dots + (-1)^m y^m + \dots).$$

Останній ряд відіграє роль ряду (446.1), причому тут $\rho = 1$. Згідно з загальною теоремою, цей вираз може бути розкладено за степенями x:

$$\frac{1}{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots} = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + \dots ,$$

принаймні для досить малих значень x, наприклад для тих, що задовольняють нерівності

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right| \cdot |x| + \left|\frac{a_2}{a_0}\right| \cdot |x|^2 + \dots + \left|\frac{a_n}{a_0}\right| \cdot |x|^n + \dots < 1.$$

Розглянемо другий степеневий ряд

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

з радіусом збіжності відмінним від 0. Тоді частка

$$\frac{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots}{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots}$$

для досить малих x може бути замінена добутком

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots)$$

і, отже, знову може бути представлено у вигляді деякого степеневого ряду

$$d_0 + d_1x + d_2x^2 + \dots + d_nx^n + \dots .$$

Коефіцієнти цього ряду найпростіше за все визначити методом невизначених коефіцієнтів, виходячи із співвідношення

$$(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots)(d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n + \dots) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots ,$$

де коефіцієнти a та b відомими. Перемноживши ряди зліва за загальним правилом (розд. 445), ми потім прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x ліворуч та праворуч. Отже отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} a_0d_0 &= b_0, \\ a_0d_1 + a_1d_0 &= b_1, \\ a_0d_2 + a_1d_1 + a_2d_0 &= b_2, \\ &\dots \\ a_0d_n + a_1d_{n-1} + \dots + a_{n-1}d_1 + a_nd_0 &= b_n. \end{aligned} \tag{448.1}$$

Оскільки коефіцієнт a_0 за припущенням відмінний від 0, то з першого рівняння відразу отримаємо: $d_0 = \dfrac{b_0}{a_0}$, потім друге дасть нам: $d_1 = \dfrac{b_1 - a_1 d_0}{a_0} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2}$ і так далі. У загальному випадку, якщо n коефіцієнтів $d_0, \ \dots, \ d_{n-1}$ вже знайдені, то $(n+1)$-е рівняння, що містить єдину невідому d_n, дасть змогу знайти її значення. Так, **послідовно**, рівняннями (448.1) визначаються всі коефіцієнти частки і до того ж цілком однозначно.

Приклади.

1) Знайти кілька перших членів частки

$$\frac{x}{\ln \dfrac{1}{1-x}} = \frac{x}{x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} + \dots} = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^3}{4} + \dots}.$$

Рівняння (448.1) тут набувають вигляду:

$$d_0 = 1, \quad d_1 + \frac{1}{2} d_0 = 0, \quad d_2 + \frac{1}{2} d_1 + \frac{1}{3} d_0 = 0, \quad d_3 + \frac{1}{2} d_2 + \frac{1}{3} d_1 + \frac{1}{4} d_0 = 0,$$

і так далі; звідси $d_0 = 1, \ d_1 = -\frac{1}{2}, \ d_2 = -\frac{1}{12}, \ d_3 = -\frac{1}{24}, \ \dots$. Отже,

$$\frac{x}{\ln \dfrac{1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{24} x^3 - \dots.$$

2) Знайти розклад $\operatorname{tg} x$ в околі нуля, розглядаючи $\operatorname{tg} x$ як частку $\sin x$ та $\cos x$, розклади яких відомі, (404.4) та (404.5).

Існування такого розкладу наперед відоме — за загальною теоремою. Оскільки $\operatorname{tg} x$ є **непарною** функцією, то його розклад містить лише **непарні** степені x. Коефіцієнт при x^{2n-1} у шуканому розкладі зручно взяти у формі $\dfrac{T_n}{(2n-1)!}$. Отже, маємо

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n}{(2n-1)!} x^{2n-1} \tag{448.2}$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Очевидно, $T_1 = 1$. Для визначення інших чисел T_n, прирівнюючи коефіцієнти при x^{2n-1} ліворуч і праворуч, отримаємо систему рівнянь вигляду:

$$\frac{T_n}{(2n-1)!} - \frac{T_{n-1}}{(2n-3)!} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{T_{n-2}}{(2n-5)!} \cdot \frac{1}{4!} - \dots = (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} \quad (n = 2, \ 3, \ \dots)$$

nebayduzhi.math@gmail.com

або, після домноження на $(2n-1)!$,

$$T_n - C_{2n-1}^2 T_{n-1} + C_{2n-1}^4 T_{n-2} - \ldots = (-1)^{n-1}.$$

Оскільки всі біноміальні коефіцієнти (C_n^k) — цілі числа, то послідовно переконуємося, що і коефіцієнти T_n всі цілі. Ось значення кількох перших із них:

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 2, \quad T_3 = 16, \quad T_4 = 272, \quad T_5 = 7936, \quad \ldots .$$

Отже,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$$

У наступному розділі буде вказано інший спосіб обчислення коефіцієнтів цього розкладу і точно встановлена область його застосування.

449. Числа Я. Бернуллі і розклади, в яких вони трапляються

Розглянемо ще один приклад ділення, який матиме важливі застосування:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \ldots}.$$

Згідно з загальним твердженням розд. 448, ця частка, принаймні для досить малих значень x, представляється у вигляді степеневого ряду

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n. \tag{449.1}$$

Його коефіцієнти ми взяли у формі: $\frac{\beta_n}{n!}$, що (як побачимо) зробить зручнішим їхнє послідовне визначення.

Запишемо співвідношення:

$$\left(1 + \frac{x}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \ldots\right) \times \left(1 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\beta_n}{n!}x^n + \ldots\right) = 1.$$

Після розкриття дужок отримаємо многочлен, коефіцієнти якого повинні дорівнювати нулю. Отже, ми отримуємо рівняння вигляду

$$\frac{1}{n!1!}\beta_n + \frac{1}{(n-1)!2!}\beta_{n-1} + \cdots + \frac{1}{(n-k+1)!k!}\beta_{n-k+1} + \cdots + \frac{1}{1!n!}\beta_1 + \frac{1}{(n+1)!} = 0$$

або, помноживши на $(n+1)!$,

$$C_{n+1}^1 \beta_n + C_{n+1}^2 \beta_{n-1} + \cdots + C_{n+1}^k \beta_{n+1-k} + \cdots + C_{n+1}^n \beta_1 + 1 = 0.$$

Використавши подібність з біном Ньютена, можна ці рівняння **символічно** записати так:

$$(\beta+1)^{n+1}-\beta^{n+1}=0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots);$$

після піднесення двочлена у степінь за звичайним правилом та скорочення старшого члена, степені β^k повинні бути замінені тут коефіцієнтами β_k. Отже, для визначення чисел β_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ матимемо нескінченну систему рівнянь:

$$\begin{aligned}2\beta_1+1&=0,\\ 3\beta_2+3\beta_1+1&=0,\\ 4\beta_3+6\beta_2+4\beta_1+1&=0,\\ 5\beta_4+10\beta_3+10\beta_2+5\beta_1+1&=0,\\ &\ldots,\end{aligned}$$

з яких послідовно знаходимо:

$$\beta_1=-\frac{1}{2},\quad \beta_2=\frac{1}{6},\quad \beta_3=0,\quad \beta_4=-\frac{1}{30},\quad \beta_5=0,\quad \beta_6=\frac{1}{42},\quad \beta_7=0,$$
$$\beta_8=-\frac{1}{30},\quad \beta_9=0,\quad \beta_{10}=\frac{5}{66},\quad \beta_{11}=0,\quad \beta_{12}=-\frac{691}{2730},\quad \beta_{13}=0,\quad \beta_{14}=\frac{7}{6},$$
$$\beta_{15}=0,\quad \beta_{16}=-\frac{3617}{510},\quad \beta_{17}=0,\quad \beta_{18}=\frac{43867}{798},\quad \beta_{19}=0,\quad \beta_{20}=-\frac{174611}{330},\quad \ldots$$

Оскільки числа β визначаються з лінійних рівнянь з цілими коефіцієнтами, то всі вони є **раціональними**. Легко показати, в загальному вигляді, що числа β з непарними значками (крім першого) — нулі. Справді, переносячи в рівності (449.1) член $-\frac{x}{2}$ наліво, матимемо у лівій частині рівності, очевидно, **парну** функцію

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{x}{2}\cdot\frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}=\frac{x}{2}\operatorname{cth}\frac{x}{2}.$$

У такому разі її розклад

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\beta_n}{n!}x^n$$

не може містити непарних степенів x, що й потрібно було довести.

Для чисел β з парними значками введемо звичне позначення, вважаючи

$$\beta_{2n}=(-1)^{n-1}B_n.$$

Ми скоро переконаємося, що всі B_n додатні. Тож,

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},$$
$$B_4=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{5}{66},\quad B_6=\frac{691}{2730},\quad B_7=\frac{7}{6},$$
$$B_8=\frac{3617}{510},\quad B_9=\frac{43867}{798},\quad B_{10}=\frac{174611}{330},\quad \ldots.$$

Ці числа B_n і називають **числами Я. Бернуллі**, який вперше прийшов до них при вивченні сум степенів послідовних натуральних чисел з натуральними показниками. Числа Я. Бернуллі відіграють важливу роль у багатьох питаннях аналізу.

Отже, замінюючи для зручності x на $2x$, маємо остаточний розклад

$$\begin{aligned} x \cdot \operatorname{cth} x &= 1 + \frac{2^2 B_1}{2!} x^2 - \frac{2^4 B_2}{4!} x^4 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_n}{2n!} x^{2n} + \dots = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_n}{2n!} x^{2n}, \end{aligned} \tag{449.2}$$

справедливий для досить малих значень x.

У пр. 445.3 ми вже мали розклад

$$\pi x \cdot \operatorname{cth} \pi x = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} s_{2n} \cdot x^{2n}, \quad \text{де} \quad s_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

Замінивши і в рівності (449.2) x на πx, перепишемо її так:

$$\pi x \cdot \operatorname{cth} \pi x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n} B_n}{2n!} \cdot x^{2n}.$$

Обидва розклади, зрозуміло, мають бути тотожні; звідси

$$B_n = \frac{2(2n)}{(2\pi)^{2n}} \cdot s_{2n}\,,$$

тому всі числа, виявляються **додатними**. Оскільки при $n \to \infty$, очевидно, $s_{2n} \to 1$, то з отриманої формули випливає, що числа Я. Бернуллі нескінченно зростають у разі зростання їх номера (хоча, як ми бачили, не монотонно, а за дуже вибагливим законом).

Зазначимо також корисні вирази, що виходять для сум s_{2n}:

$$s_{2n} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} \cdot B_n;$$

зокрема (порівняйте з пр. 447.6)

$$s_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad s_4 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Згадаємо тепер, що й для $\pi x \cdot \operatorname{ctg} \pi x$ ми мали (пр. 445.2) розклад, коефіцієнти якого також залежали від сум s_{2n}:

$$\pi x \cdot \operatorname{ctg} \pi x = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} s_{2n} \cdot x^{2n}. \tag{449.3}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Замінюючи тут πx на x і підставляючи замість s_{2n} знайдені їх вирази через числа Я. Бернуллі, отримаємо:

$$x \cdot \operatorname{ctg} x = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{2n!} x^{2n}. \tag{449.4}$$

Оскільки про розклад (449.3) ми знаємо, що він справедливий при $|x| < 1$, то розклад (449.4) справедливий при $|x| < \pi$. Але при $x \to \pm\pi$ ліва частина рівності (449.4) нескінченно зростає, отже, ряд справа не може бути збіжним ні при $x = \pm\pi$, ні при $|x| > \pi$: його радіус збіжності точно дорівнює π.

Втім, всі питання, пов'язані з визначенням радіусу збіжності степеневого ряду, легко вирішуються за допомогою теореми Коші – Адамара (теор. 380.1). Наприклад, для ряду (449.4) маємо

$$\rho_{2n-1} = 0, \quad \rho_{2n} = \sqrt[2n]{\frac{2^{2n} B_n}{2n!}} = \sqrt[2n]{\frac{2^{2n}}{2n!} \cdot \frac{2 \cdot 2n!}{(2\pi)^{2n}} \cdot s_{2n}} = \frac{1}{\pi} \sqrt[2n]{2 s_{2n}}\,,$$

$$\rho = \overline{\lim_{m \to \infty}}\, \rho_m = \frac{1}{\pi}, \qquad R = \frac{1}{\rho} = \pi.$$

Звідси, між іншим, ясно, що таким самим буде і радіус збіжності ряду (449.2), а ряд (449.1) має радіус збіжності 2π.

Користуючись тотожністю

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x,$$

з (449.4) легко заново отримати розклад для $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{2n!} B_n \cdot x^{2n-1}. \tag{449.5}$$

Він тотожний з отриманим раніше (дивіться (448.2)), але його зазвичай записують саме в цій формі тому, що числа Я. Бернуллі добре вивчені, і для них є великі таблиці. Радіус збіжності ряду, що представляє $\operatorname{tg} x$, дорівнює $\frac{\pi}{2}$; це видно тепер із способу, яким його отримали.

З числами Я. Бернуллі пов'язано багато інших корисних розкладів. Наприклад, оскільки

$$\left(\ln \frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(x \cdot \operatorname{ctg} x - 1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{2n!} x^{2n-1},$$

то, інтегруючи почленно, знаходимо (для $|x| < \pi$)

$$\ln \frac{\sin x}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_n}{2n!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n}\,.$$

Аналогічно, з розкладу (449.5) почленним інтегруванням отримуємо (для $|x| < \pi/2$)

$$\ln\cos x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{2n!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n}.$$

З цих розкладів легко отримати розклад для $\ln\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$. Ці ряди корисні при складанні логарифмо-тригонометричних таблиць.

На закінчення повернемося до розбіжного ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^k,$$

який ми розглядали в пр. 425.6. Там було доведено, що цей ряд можна підсумовувати методом Чезаро k-го порядку, але самої "узагальненої суми" (позначимо її через $A^{(k)}$) ми не знайшли; виконаємо це зараз. Втім, ми підсумуємо ряд методом Пуассона – Абеля, що як ми знаємо (пр. 424.2), має привести до того ж результату.

При $t > 0$ буде $0 < e^{-t} < 1$ і, підсумовуючи прогресію, отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)t} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{1}{e^t+1} = \frac{1}{e^t-1} - \frac{2}{e^{2t}-1} = \frac{1}{t}\cdot\frac{t}{e^t-1} - \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{e^{2t}-1}.$$

Використовуючи розклад (449.1), для досить малих t матимемо

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-(n+1)t} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^{2n}-1)\beta_n}{n!}\, t^{n-1}.$$

Продиференціюємо обидва ряди почленно k разів; для степеневого ряду праворуч ми спираємось на теор. 438.2; вона ж служить основою і для диференціювання ряду ліворуч, який теж виявляється степеневим, якщо зробити заміну $x = e^{-t}$. В результаті матимемо

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^k e^{-(n+1)t} = (-1)^{k+1}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(2^{2n}-1)\beta_n}{n!}(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)t^{n-k-1}.$$

Спрямуємо тепер t до 0, а отже, x до 1. Вираз ліворуч прямує саме до шуканого $A^{(k)}$. Праворуч отримаємо вільний член

$$(-1)^{k+1}\frac{(2^{2(k+1)}-1)\beta_{k+1}}{k+1}.$$

Згадуючи, що числа β з непарними значками, які більші за одиницю, всі нулі, а з парними — зводяться до чисел Я. Бернуллі, остаточно приходимо до формул:

$$A^{(2m)} = 0, \quad A^{(2m-1)} = (-1)^{m-1}\frac{2^{2m}-1}{2m}B_m \quad (m \geqslant 1).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

450. Розв'язування рівнянь рядами

Ми ще раз повернемося до питання про визначення змінної y, як функції від x, з нерозв'язаного рівняння:

$$F(x, y) = 0 \tag{450.1}$$

(порівняйте з розд. 206 та розд. 442!), але в іншій постановці.

Теорема 450.1. *Припустимо, що функція* $F(x, y)$ *в околі точки* $(x_0,\ y_0)$ *розкладається в ряд за степенями* $x - x_0$ *та* $y - y_0$*, причому постійний член в ньому дорівнює* 0*, а коефіцієнт при* $y - y_0$ *відмінний від* 0*. (Це точно відповідає звичайним умовам:* $F(x_0,\ y_0) = 0$*,* $F'_x(x_0,\ y_0) \neq 0$*.) Тоді і функція* $y = y(x)$*, яка визначається рівнянням* (450.1) *в околі зазначеної точки, також розкладається в ряд за степенями* $x - x_0$ *поблизу* $x = x_0$*.*

Іншими словами, якщо функція F*, що стоїть у лівій частині рівняння* (450.1)*, буде* ***аналітичною*** *в точці* $(x_0,\ y_0)$*, то і функція* $y = y(x)$*, яка визначається рівнянням, буде* ***аналітичною*** *в точці* x_0*. Отже, тут ідеться вже не лише про існування чи обчислення значень шуканої функції, але й про її* ***аналітичне задання****.*

Доведення. Без зменшення загальності можна вважати $x_0 = y_0 = 0$; це, по суті, зводиться до того, що за нові змінні ми беремо різниці $x - x_0$ та $y - y_0$, але зберігаємо старі позначення. Якщо виділити член з першим степенем y, то, переносячи його в іншу частину і ділячи на коефіцієнт при ньому, можна буде переписати це рівняння так:

$$y = c_{10}x + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3 + \dots \tag{450.2}$$

Ряд для функції y від x будемо шукати у вигляді:

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots \tag{450.3}$$

Насамперед, **якщо подібний розклад в околі нуля існує, то коефіцієнти його цілком однозначно визначаються самим співвідношенням** (450.2).

Справді, якщо замінити в ньому y (при зазначеному **припущенні**) розкладом (450.3), отримаємо:

$$\begin{aligned} & a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \\ & = c_{10}x + \\ & = c_{20}x^2 + c_{11}x(a_1x + a_2x^2 + \dots) + c_{02}(a_1x + a_2x^2 + \dots)^2 + \\ & = c_{30}x^3 + c_{21}x^2(a_1x + \dots) + c_{12}x(a_1x + \dots)^2 + c_{03}(a_1x + \dots)^3 + \dots \end{aligned} \tag{450.4}$$

За теор. 446.1, для досить малих x, праворуч тут можна виконати всі піднесення до степеня і зробити зведення подібних членів. Якщо після цього скористатися теоремою

nebayduzhi.math@gmail.com

про тотожність степеневих рядів і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x ліворуч і праворуч, то ми прийдемо до (нескінченної!) системи рівнянь:

$$\begin{aligned} &a_1 = c_{10}, \\ &a_2 = c_{20} + c_{11}a_1 + c_{02}a_1^2, \\ &a_3 = c_{11}a_2 + 2c_{02}a_1a_2 + c_{30} + c_{21}a_1 + c_{12}a_1^2 + c_{03}a_1^3, \quad \ldots \end{aligned} \tag{450.5}$$

відносно шуканих коефіцієнтів $a_1, \ \ldots, \ a_n, \ \ldots$. Оскільки в (450.2) праворуч всі члени, що містять y, не нижче другого степеня (тобто містять y другого степеня або вище, або y у першому степені, але помножений на будь-яку степінь x), то в n-му рівнянні системи (450.5) коефіцієнт a_n виявляється виражением через коефіцієнти $a_1, \ \ldots, \ a_{n-1}$ з меншими номерами (і відомі коефіцієнти c). **Цим і забезпечується можливість визначати коефіцієнти a_n послідовно один за іншим:**

$$\begin{aligned} &a_1 = c_{10}, \\ &a_2 = c_{20} + c_{11}c_{10} + c_{02}c_{10}^2, \\ &a_3 = (c_{11} + 2c_{02}c_{10})(c_{20} + c_{11}c_{10} + c_{02}c_{10}^2) + c_{30} + c_{21}c_{10} + c_{12}c_{10}^2 + c_{03}c_{10}^3, \\ &\ldots \end{aligned} \tag{450.6}$$

Також зробимо таке, важливе для подальшого, зауваження. Оскільки при розкритті дужок в (450.4) над літерами a та c не доводиться робити інших дій, крім додавання та множення, то в правих частинах рівнянь (450.5) ми матимемо цілі многочлени відносно цих літер, із свідомо **додатними** (навіть — **натуральними**) коефіцієнтами. А тоді і у формулах (450.6) праворуч також будуть цілі многочлени з додатними коефіцієнтами відносно літер c.

Складемо тепер ряд (450.3) з коефіцієнтами a, обчисленими саме за цими формулами. Про нього можна сказати, що він “формально” задовольняє співвідношення (450.4). Якби була доведена збіжність цього ряду для досить малих x, то вже не було б потреби доводити, що для представленої їм функції умова (450.2) виконана, тому що в цьому випадку рівності (450.5) цілком рівносильні (450.4). Отже, **все питання тепер зводиться до доведення лише того, що ряд** (450.3)**, коефіцієнти якого визначаються формулами** (450.6)**, є збіжним в деякому околі нуля.**

Розглянемо, одночасно з (450.2), аналогічне співвідношення

$$y = \gamma_{10}x + \gamma_{20}x^2 + \gamma_{11}xy + \gamma_{02}y^2 + \gamma_{30}x^3 + \gamma_{21}x^2y + \gamma_{12}xy^2 + \gamma_{03}y^3 + \ldots. \tag{450.7}$$

де всі коефіцієнти γ_{ik} **додатні** і, крім того, задовольняють нерівності

$$|c_{ik}| \leqslant \gamma_{ik}\,. \tag{450.8}$$

Побудуємо йому (поки формально) ряд, аналогічний до (450.3):

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots. \tag{450.9}$$

причому коефіцієнти його, як і в (450.6), визначимо формулами:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \gamma_{10},\\
&\alpha_2 = \gamma_{20} + \gamma_{11}\gamma_{10} + \gamma_{02}\gamma_{10}^2,\\
&\alpha_3 = (\gamma_{11} + 2\gamma_{02}\gamma_{10})(\gamma_{20} + \gamma_{11}\gamma_{10} + \gamma_{02}\gamma_{10}^2) + \gamma_{30} + \gamma_{21}\gamma_{10} + \gamma_{12}\gamma_{10}^2 + \gamma_{03}\gamma_{10}^3,\\
&\ldots
\end{aligned} \tag{450.10}$$

Сам склад цих формул, зважаючи на зазначене вище, забезпечує **додатність** чисел α_n. Крім того, зіставляючи з (450.6) та враховуючи (450.8), бачимо, що і (для всіх n)

$$|c_{ik}| \leqslant \gamma_{ik}\,. \tag{450.11}$$

Якби вдалося вибрати додатні коефіцієнти γ_{ik} так, щоб не тільки виконувалися умови (450.8), але і щоб відповідно побудований ряд (450.9) мав відмінний від нуля радіус збіжності, то, зважаючи на (450.11), це було б справедливо й для ряду (450.3) — і теорема була б доведена. Займемося **вибором** чисел γ_{ik}.

Існують такі додатні числа r і ϱ, що подвійний ряд

$$|c_{10}|\cdot r + |c_{20}|\cdot r^2 + |c_{11}|\cdot r\varrho + |c_{02}|\cdot \varrho^2 + \ldots$$

буде збіжним та його загальний член $|c_{ik}|r^i\varrho^k$ прямує до 0 і, отже, обмежений:

$$|c_{ik}|r^i\varrho^k \leqslant M, \quad \text{звідки} \quad |c_{ik}| \leqslant \frac{M}{r^i\varrho^k}\,.$$

Візьмемо $\gamma_{ik} = \dfrac{M}{r^i\varrho^k}$ і, згідно зі сказаним, розглянемо співвідношення:

$$y = \frac{M}{r}x + \frac{M}{r^2}x^2 + \frac{M}{r\varrho}xy + \frac{M}{\varrho^2}y^2 + \cdots = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{\varrho}\right)} - M - \frac{M}{\varrho}y$$

або, нарешті,

$$y^2 - \frac{\varrho^2}{\varrho+M}y + \frac{M\varrho^2}{\varrho+M}\cdot\frac{x}{r-x} = 0.$$

Тут вже можна **фактично** знайти функцію $y = y(x)$, що задовольняє рівняння — саме ту її гілку, яка дорівнює 0 при $x = 0$. Вирішуючи квадратне рівняння, ми отримаємо (вважаючи що $|x| < r$):

$$y = \frac{\varrho^2}{2(\varrho+M)}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4M(\varrho+M)}{\varrho^2}\cdot\frac{x}{r-x}}\right).$$

Ми взяли знак мінус перед коренем якраз для того, щоб при $x = 0$ мати $y = 0$.

Якщо для спрощення запису ввести позначення

$$r_1 = r\left(\frac{\varrho}{\varrho + 2M}\right)^2, \tag{450.12}$$

то вираз для y можна записати у вигляді:

$$y = \frac{\varrho^2}{2(\varrho + M)}\left[1 - \left(1 - \frac{x}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Звідки вже ясно, якщо скористатися біноміальним рядом, що він для $|x| < r_1 < r$ розкладається за степенями x. Оскільки згаданий розклад має бути тотожним з (450.9), то цим і завершується доведення збіжності ряду (450.9), а отже, і ряду (450.3), принаймні для $|x| < r_1$. □

Зазначимо, що теорема доводить лише можливість розкладання y за степенями x (або, у загальному випадку, за степенями $x - x_0$) в **околі** $x = 0$ ($x = x_0$). Визначення точного проміжку збіжності цього розкладу потребує особливого дослідження.

Так само можна трактувати і загальний випадок, коли система функцій визначається із системи рівнянь.

Чудовий метод міркування, застосований вище, належить Коші. Його зміст полягає в заміні даних степеневих рядів, з однією або декількома змінними, більш зручними для дослідження "мажорантними" рядами, всі коефіцієнти яких додатні і, відповідно, перевищують абсолютні величини коефіцієнтів цих рядів. У зв'язку з цим і сам метод отримав назву *методу мажорантних рядів*. Ним часто користуються в теорії диференціальних рівнянь.

451. Обернений степеневий ряд

Як окремий випадок розв'язаної задачі, розглянемо тепер питання про **обернення степеневого ряду**.

Теорема 451.1. *Нехай функція $y = f(x)$ в деякому околі точки $x = x_0$ представляється рядом, упорядкованим за степенями $x - x_0$. Позначаючи вільний член (який виражає значення y при $x = x_0$) через y_0, напишемо цей розклад у вигляді*

$$y - y_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \ldots.$$

При $a_0 \neq 0$, в околі $y = y_0$, x визначається звідси як функція від y, що розкладається в ряд за степенями $y - y_0$. Отже, якщо y є ***аналітичною*** *функцією від x у точці x_0, то у відповідній точці y_0 (при зазначеній умові) і обернена функція буде* ***аналітичною****.*

nebayduzhi.math@gmail.com

Доведення. Усе це безпосередньо випливає із доведеної теор. 450.1. Поклавши для простоти $x_0 = y_0 = 0$, напишемо співвідношення, що зв'язує y з x, як в (450.2), у вигляді

$$x = by + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \ldots$$

(потрібно пам'ятати, що тут, у порівнянні з попереднім розділом, x та y обмінялися ролями). Тоді коефіцієнти розкладу

$$x = b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + b_4y^4 + \ldots$$

послідовно визначаться з рівнянь:

$$\begin{aligned}
&b_1 = b,\\
&b_2 = c_2b_1^2,\\
&b_3 = 2c_2b_1b_2 + c_3b_1^3,\\
&b_4 = c_2(2b_1b_3 + b_2^2) + 3c_3b_1^2b_2 + c_4b_1^4,\\
&b_5 = 2c_2(b_1b_4 + b_2b_3) + 3c_3(b_1^2b_3 + b_1b_2^2) + 4c_4b_1^3b_2 + c_5b_1^5,\\
&\ldots .
\end{aligned}$$

☐

Наприклад, знаючи розклад синуса

$$y = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \ldots,$$

можна знайти розклад

$$x = \arcsin y = y + b_3y^3 + b_5y^5 + \ldots$$

(ми виписуємо лише непарні степені y, бо, зважаючи на непарність функції $y = \sin x$ наперед ясно, що і обернена функція буде непарною).

Перепишемо розклад

$$y = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \ldots$$

у вигляді

$$x = y + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \ldots,$$

для того щоб отримати коефіцієнти c для початкового розкладу:

$$c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{6}, \quad c_4 = -\frac{1}{120}, \quad \ldots .$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Рівняння, що визначають коефіцієнти b, у цьому випадку мають вигляд:

$$\begin{aligned}&b_1 = 1,\\ &b_3 = \frac{1}{6}b_1^3 = \frac{1}{6},\\ &b_5 = \frac{1}{2}b_1^2 b_3 - \frac{1}{120}b_1^5 = \frac{3}{40},\\ &\dots .\end{aligned}$$

Інший приклад: нехай

$$y = e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots ;$$

звідси

$$x = \ln(1+y) = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \dots .$$

Перепишемо розклад

$$y = e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

у вигляді

$$x = y - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \dots ,$$

для того щоб отримати коефіцієнти c для початкового розкладу:

$$c_2 = -\frac{1}{2!}, \quad c_3 = -\frac{1}{3!}, \quad c_4 = -\frac{1}{4!}, \quad \dots .$$

Коефіцієнти визначаються послідовно:

$$\begin{aligned}&b_1 = 1,\\ &b_2 = -\frac{1}{2}b_1^2 = -\frac{1}{2},\\ &b_3 = -b_1 b_2 - \frac{1}{6}b_1^3 = \frac{1}{3},\\ &b_4 = -\frac{1}{2}(2b_1 b_3 + b_2^2) - \frac{1}{2}b_1^2 b_2 - \frac{1}{24}b_1^4 = -\frac{1}{4},\\ &b_5 = -(b_1 b_4 + b_2 b_3) - \frac{1}{2}(b_1^2 b_3 + b_1 b_2^2) - \frac{1}{6}b_1^3 b_2 - \frac{1}{120}b_1^5 = \frac{1}{5},\\ &\dots .\end{aligned}$$

тому

$$\ln(1+x) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \dots .$$

Область зміни y, в якій гарантуються існування оберненої функції та справедливість отриманого для неї розкладу, можуть бути доведені використовуючи міркування розд. 450, але виявляється зазвичай дуже заниженою. Якщо, скажімо, у першому з наведених прикладів переписати рівняння, що пов'язує x та y, у формі (450.2):

$$x = y + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \dots$$

і обмежитися x та y, що задовольняють нерівності $|x| \leqslant -\frac{\pi}{2}$, $|y| \leqslant 1$, тобто взяти $\varrho = -\frac{\pi}{2}$, $r = 1$, то отримаємо $M = 1$ і, за формулою (450.12),

$$r_1 = \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2} + 2}\right)^2 < 0{,}2,$$

в той час як справжня область застосування отриманого результату — це проміжок $[-1, 1]$!

Зауваження. Корисно усвідомити значення умови $a_1 \neq 0$, за якої тільки і справедливе сформульоване вище твердження. Нехай $a_1 = 0$, але $a_2 \neq 0$, скажімо, $a_2 > 0$; отже, поблизу $x = 0$ (для простоти ми вважаємо $x_0 = y_0 = 0$) маємо

$$y = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots\,,$$

тож $y > 0$. Позначаючи через $y^{\frac{1}{2}}$ арифметичне значення кореня, бачимо, що

$$\sqrt{y} = \sqrt{a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots} = \pm x\sqrt{a_2}\sqrt{1 + \frac{a_3}{a_2}x + \frac{a_4}{a_2}x^2 +}\,,$$

причому поставлений подвійний знак збігається зі знаком x. За теор. 450.1, останній радикал поблизу $x = 0$ сам розкладається в степеневий ряд із вільним членом 1. Тож, остаточно (якщо подвійний знак перенести ліворуч):

$$\pm\sqrt{y} = a_1'x + a_2'x^2 + \dots\,,$$

де вже $a_1' = \sqrt{a_2}$. Використовуючи теорему цього розділу (роль y відіграє величина $\pm\sqrt{y}$!), ми отримаємо **два** різних розклади для x, залежно від обраного знака:

$$x_1 = b_1y^{\frac{1}{2}} + b_2y + b_3y^{\frac{3}{2}} + b_4y^2 + \dots > 0 \qquad \left(b_1 = \frac{1}{\sqrt{a_2}} > 0\right)$$

та

$$x_2 = -b_1y^{\frac{1}{2}} + b_2y - b_3y^{\frac{3}{2}} + b_4y^2 - \dots < 0.$$

Звертаємо увагу читача як на **двозначність** оберненої функції, так і на те, що кожна з її гілок розкладається не за цілими, а за **дробовими** степенями змінної y.

452. Ряд Лаґранжа

Застосуємо теор. 450.1 до окремого рівняння виду

$$y = a + x\varphi(y), \tag{452.1}$$

де функція $\varphi(y)$ передбачається аналітичною в точці $y = a$. Тоді, як ми знаємо, для досить малих значень x, звідси y визначається, як функція від x; вона аналітична в точці $x = 0$ і дорівнює a в цій точці.

Нехай, далі, $u = f(y)$ буде будь-яка функція від y, аналітична при $y = a$. Якщо замість y підставити сюди згадану функцію від x, то u виявиться функцією від x, яка також є аналітичною при $x = 0$. Спробуємо знайти розклад u за степенями x, точніше — знайти зручні вирази для коефіцієнтів цього розкладу.

Зауважимо попередньо, що при змінному a з рівняння (452.1) y визначається як функція двох змінних x та a, аналітична в точці $(0, a)$. (Це твердження передбачає, що теор. 450.1 поширена на випадок, коли в рівнянні фігурують **три** змінні, і одна з них визначається як функція від **двох** інших.) Тоді і змінна u буде функцією від тих самих двох змінних.

Диференціюючи (452.1) за x і за a, отримаємо:

$$[1 - x \cdot \varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y), \quad [1 - x \cdot \varphi'(y)]\frac{\partial y}{\partial a} = 1,$$

звідки, очевидно,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial a}, \tag{452.2}$$

а також і взагалі, при $u = f(y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a}\,. \tag{452.3}$$

З іншого боку, хоч би яка була функція $F(y)$, для якої існує похідна за y, маємо:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a}\right] = \frac{\partial}{\partial a}\left[F(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{452.4}$$

У цьому легко переконатися безпосереднім диференціюванням з посиланням на тотожності (452.2) та (452.3).

Всіма цими зауваженнями ми скористаємося для доведення важливої надалі формули:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left[\varphi^n(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a}\right] \tag{452.5}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

(тут $\varphi^n(y)$ означає **степінь**: $[\varphi(y)]^n$].) При $n = 1$ ця формула зводиться до (452.3). Припустимо тепер, що вона вірна для деякого значення $n \geqslant 1$, і встановимо її справедливість для похідної $(n+1)$-го порядку. Диференціюючи (452.5) за x і користуючись правом переставляти диференціювання (розд. 190), отримуємо

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^n(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

Але, зважаючи на (452.4) та (452.3) маємо послідовно

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^n(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a}\right] = \frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi^n(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi^{n+1}(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

Підставляючи це у попередню рівність, отримаємо:

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^{n}}{\partial a^{n}} \left[\varphi^{n+1}(y) \cdot \frac{\partial u}{\partial a}\right].$$

Отже, формула (452.5) індуктивно виправдана.

Звернемося, нарешті, до розкладання функції u за степенями x. При сталому a він має вигляд розкладу Тейлора (теор. 438.3)

$$u = u_0 + x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + \ldots,$$

де всі похідні взяті в точці $x = 0$. Але тоді y дорівнює a, отже $u_0 = f(y(0)) = f(a)$, і потім, за формулою (452.5),

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^n(a) \cdot f'(a)].$$

Підставляючи ці значення коефіцієнтів, ми приходимо до розкладу:

$$f(y) = f(a) + x \cdot \varphi(a) f'(a) + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{d}{da}[\varphi^2(a) \cdot f'(a)] + \ldots + \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^n(a) \cdot f'(a)] + \ldots, \quad (452.6)$$

який і називається рядом Лаґранжа. Він чудовий тим, що коефіцієнти його представлені як явні функції від a.

Якщо $f(y) \equiv y$, то, зокрема, отримуємо

$$y = a + x \cdot \varphi(a) + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{d}{da}[\varphi^2(a)] + \ldots + \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[\varphi^n(a)] + \ldots, \quad (452.7)$$

Існує тісний зв'язок між задачею, що розглядається в цьому розділі, та задачею обернення степеневого ряду. Якщо (за умови, що $\varphi(a) \neq 0$) переписати рівняння (452.1) як

$$x = \frac{y - a}{\varphi(y)} = b_0 + b_1(y - a) + b_2(y - a)^2 + \ldots,$$

то задача Лаґранжа буде рівносильна оберненню цього ряду, упорядкованого за степенями $y - a$. Навпаки, якщо поставлена задача обернення степеневого ряду

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots \quad (a_i \neq 0),$$

то, переписавши це співвідношення так:

$$y = x(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots),$$

позначимо суму ряду в дужках через $\psi(x)$. Тоді приходимо до рівняння типу (452.1)

$$x = y \cdot \frac{1}{\psi(x)};$$

тут $a = 0$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\psi(x)}$, і, крім того, x і y обмінялися ролями. Останнє зауваження важливо тому ще, що дає змогу одразу дати загальний вираз для результату обернення за формулою (452.7)

$$x = y \cdot \frac{1}{\psi(0)} + \frac{y^2}{2!}\left[\frac{d}{dx}\frac{1}{\psi^2(x)}\right]_{x=0} + \ldots + \frac{y^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{\psi^n(x)}\right]_{x=0} + \ldots . \tag{452.8}$$

Наведемо приклади.

1) Почнемо саме з використання формули (452.8). Нехай дано рівняння

$$y = x(a + x) \quad (a \neq 0)$$

або

$$x = y \cdot \frac{1}{a + x}.$$

Оскільки

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{(a+x)^n} = \frac{(-1)^{n-1}n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (2n-2)}{(a+x)^{2n-1}},$$

то приходимо до такого розкладу:

$$x = \frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}\frac{y^n}{a^{2n-1}} + \ldots .$$

Такий самий розклад виходить, якщо розв'язати квадратне рівняння відносно x, обравши те з його значень, яке дорівнює 0 разом з y.

2) Виходитимемо з рівняння типу (452.1)

$$y = a + \frac{x}{y},$$

тож тут $\varphi(y) = \frac{1}{y}$. Вважаючи $f(y) = y^{-k}$ і застосувавши формулу Лаґранжа (452.6), знайдемо

$$\frac{1}{y^k} = \frac{1}{a^k} - x \cdot \frac{k}{a^{k+2}} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{k(k+3)}{a^{k+4}} - \frac{x^3}{3!} \cdot \frac{k(k+4)(k+5)}{a^{k+6}} + \frac{x^4}{4!} \cdot \frac{k(k+5)(k+6)(k+7)}{a^{k+8}} - \ldots .$$

Оскільки це рівняння зводиться до квадратного

$$y^2 - ay - x = 0,$$

то, очевидно,

$$y = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + x}$$

(знак плюс перед коренем взятий у зв'язку з тим, що при $x = 0$ має бути $y = a$). Наприклад, якщо $a = 2$, то виходить (після домноження на 2^k) такий розклад

$$\left(\frac{2}{1 + \sqrt{1+x}} \right)^k = 1 - k \cdot \frac{x}{4} + \frac{k(k+3)}{2!} \left(\frac{x}{4} \right)^2 - \frac{k(k+4)(k+5)}{3!} \left(\frac{x}{4} \right)^3 + \ldots$$

3) У теоретичній астрономії важливу роль відіграє *рівняння Кеплара*:

$$E = M + \varepsilon \cdot \sin E,$$

де E — це ексцентрична аномалія планети, M — її середня аномалія, а ε — ексцентриситет планетної орбіти. Скориставшись рядом Лаґранжа (452.7), можна знайти розклад E за степенями ексцентриситету, з коефіцієнтами, залежними від M:

$$E = M + \varepsilon \cdot \sin M + \frac{\varepsilon^2}{2!} \cdot \frac{d}{dM} \sin^2 M + \ldots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dM^{n-1}} \sin^n M + \ldots .$$

Тут важливо знати точні розміри проміжку збіжності: Лаплас (фр. Pierre-Simon Laplace, П'є́р Лапла́с) перший встановив, що збіжність виконується при $\varepsilon < 0{,}6627\ldots$.

4) Нарешті, розглянемо рівняння

$$y = x + \frac{\alpha}{2}(y^2 - 1)$$

(тут x відіграє роль a, а α — роль x). Його розв'язок, що набуває x при $\alpha = 0$, буде

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}{\alpha} = \frac{2x - \alpha}{1 + \sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}} .$$

Розклад цієї функції за степенями α має вигляд:

$$y = x + \frac{\alpha}{2}(x^2 - 1) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \cdot \frac{d(x^2-1)^2}{dx} + \ldots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^n \cdot \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} + \ldots .$$

Продиференціюємо обидві частини цієї рівності за x (причому з аналітичного характеру y як функції від **двох** змінних α і x, можна зробити висновок, що для ряду допустиме **почленне** диференціювання). Ми отримаємо розклад

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = 1+\alpha\cdot\frac{1}{2}\,\frac{d(x^2-1)}{dx}+\alpha^2\cdot\frac{1}{2!2^2}\cdot\frac{d^2(x^2-1)^2}{dx^2}+\ldots+\alpha^n\cdot\frac{1}{n!2^n}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}+\ldots.$$

Його коефіцієнтами, як ми у цьому випадку **безпосередньо** бачимо (порівняйте з пр. 447.8), є многочлени Льожондра:

$$P_n = \frac{1}{n!2^n}\cdot\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,.$$

12.5. Елементарні функції комплексної змінної

453. Комплексні числа

Хоча наш курс цілком присвячений **дійсним** змінним та **дійсним** же функціям від них, зараз, відступаючи від основної лінії, ми розглянемо елементарні **функції комплексної змінної**. Викладення цього питання стосується теорії степеневих рядів, а, і роз'ясняє деякі принципові моменти цієї теорії. Окрім того, знайомство із функціями комплексної змінної виявляється корисним для обчислень в дійсному аналізі (дивіться приклади у розд. 461, а також главу 19, присвячену рядам Фур'є (фр. Joseph Fourier, Жозе́ф Фур'є́), у третьому томі цього курсу).

Ми припускаємо, що читач вже знає комплексні числа з алгебри. Тому ми обмежимося тут лише коротким оглядом основних властивостей цих чисел.

Комплексне число z має вигляд $x + yi$ де i — **уявна одиниця**, $i = \sqrt{-1}$, а x та y — дійсні числа. Серед них, x називається **дійсною**, а y — **уявною** складовою або частиною числа z, та позначаються так:

$$x = R(z) \quad y = I(z).$$

Два комплексних числа $x + yi$ та $x' + y'i$ дорівнюють одне одному тоді (і лише тоді), коли окремо $x = x'$ та $y = y'$ (інакше кажучи, і тут для нас рівність зводиться до простої тотожності, порівняйте з розд. 2). Додавання та множення комплексних чисел виконується за формулами:

$$(x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i,$$
$$(x + yi)(x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i;$$

легко переконатися у існуванні різниці та частки, що виражаються так:

$$(x + yi) - (x' + y'i) = (x - x') + (y - y')i,$$
$$\frac{x + yi}{x' + y'i} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}i$$

(останнє — за умови, що $x' + y'i \neq 0$, тобто що $x'^2 + y'^2 > 0$). При цьому для комплексних чисел зберігаються усі звичайні властивості цих операцій, що не пов'язані із поняттями **більше** та **менше** (ці поняття для комплексних чисел не визначаються). Точніше кажучи, справедливі вл. 3.1 – вл. 3.4 та вл. 4.1 – вл. 4.5.

Візьмемо на площині прямокутну систему координатних осей xOy (рис. 453.1). Тоді кожне комплексне число $z = x + yi$ може бути зображене на цій площині точкою $M(x, y)$, координатами якої будуть дійсна та уявна складові цього числа. Очевидно, що і навпаки — кожній точці M на площині відповідає цілком визначене комплексне

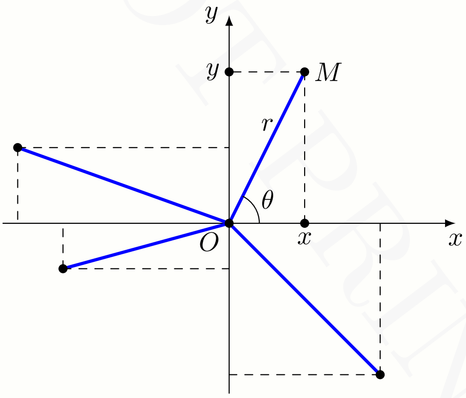


Рис. 453.1

число. У зв'язку з цим розглядану площину називають **площиною комплексної змінної** z або просто **комплексною площиною**.

Дійсні числа $x = x + 0\dot{i}$ зображаються точками на осі x (бо для них $y = 0$), а чисто уявні числа $y = 0 + yi$ $(x = 0)$ — точками на осі y. Ці осі і називають першу — **дійсною** віссю, а другу — **уявною**.

Важливу роль відіграють також полярні координати r, Θ точки, що зображує число $z = x + yi$ (дивіться рисунок). Невід'ємне число r називається **модулем** або **абсолютною величиною** комплексного числа z та позначається так: $r = |z|$. Модуль однозначно визначається комплексним числом z:

$$|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

і дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $z = 0$. Кут Θ називається **аргументом** комплексного числа z, $\Theta = \operatorname{Arg} z$. При $z \neq 0$, він визначається із рівностей

$$\cos\Theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\Theta = \frac{y}{r},$$

але лише із точністю до доданку виду $2k\pi$ (k — ціле). Для $z = 0$ аргумент взагалі залишається невизначеним. За винятком цього випадку для кожного числа z існує один і тільки один аргумент θ, що задовольняє нерівності

$$-\pi < \theta \leqslant \pi;$$

його називають **головним значенням** аргументу і позначають через $\arg z$.

Якщо $\theta < \pi$, то

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{r\sin\theta}{r + r\cos\theta} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}},$$

nebayduzhi.math@gmail.com

і кут $\arg z$ можна визначити за допомогою рівності

$$\arg z = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ця рівність справедлива для всіх комплексних чисел, крім дійсних від'ємних (та нуля).

Зазначимо, що для модулів комплексних чисел $z = x + yi$ та $z' = x' + y'i$ також виконується нерівність:

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|,$$

досить звична для абсолютних величин дійсних чисел. Справді, у даному випадку вона зводиться до відомої нерівності:

$$\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x'^2+y'^2},$$

яка являє собою частковий випадок нерівності Мінковського (133.9); дивіться також розд. 161.

Справедливі також і наслідки з нього (розд. 17).

Якщо в позначенні комплексного числа $z = x+yi$ прийняти $x = r\cdot\cos\Theta$, $y = r\cdot\sin\Theta$, то отримаємо так звану **тригонометричну форму** комплексного числа:

$$z = r(\cos\Theta + i\sin\Theta).$$

Візьмемо друге комплексне число z' також у тригонометричній формі:

$$z' = r'(\cos\Theta' + i\sin\Theta').$$

Тоді **добуток** zz' у тригонометричній формі запишеться так:

$$zz' = rr'[\cos(\Theta+\Theta') + i\sin(\Theta+\Theta')];$$

це безпосередньо випливає із теорем додавання для косинуса та синуса. Звідси

$$|zz'| = |z|\cdot|z'|, \quad \mathrm{Arg}\,zz' = \mathrm{Arg}\,z + \mathrm{Arg}\,z'.$$

Аналогічно, для частки чисел z та z' $(z' \neq 0)$ знайдемо:

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, \quad \mathrm{Arg}\,\frac{z}{z'} = \mathrm{Arg}\,z - \mathrm{Arg}\,z'.$$

Із формули добутку виходить формула для степені з натуральним показником n:

$$z^n = r^n(\cos n\Theta + i\sin n\Theta),$$

зокрема, при $r = 1$, приходимо до відомої формули Муавра (фр. Abraham de Moivre, Абраха́м де Муа́вр):

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta. \qquad (453.1)$$

Насамкінець, для **кореня** n-ої степені із z матимемо:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\Theta}{n} + i\sin\frac{\Theta}{n}\right),$$

де $\sqrt[n]{r}$ — **арифметичний** корінь із r. Приймаючи тут по черзі, наприклад,

$$\Theta = \theta,\ \theta + 2\pi,\ \theta + 4\pi,\ \dots,\ \theta + 2(n-1)\pi,$$

ми отримаємо n **різних** значень для кореня $\sqrt[n]{z}$ (звісно, вважаючи $z \neq 0$); при інших значеннях Θ значення кореня будуть лише повторюватися.

454. Комплексна варіанта та її границя

Розглянемо послідовність $\{z_n\}$, що складається із **комплексних** чисел $z_n = x_n + y_n i$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$, та змінну z, що набуває цих значень у порядку зростання номерів.

Означення границі такої комплексної **варіанти** дається у тих самих термінах, що і у випадку дійсної варіанти (розд. 23).

Стале число $c = a + bi$ називається ***границею*** *варіанти $z = z_n$, якщо, яким би малим не було число $\varepsilon > 0$, для нього існує такий номер N, що усі значення z_n із номерами $n > N$ задовольняють нерівність*

$$|z_n - c| < \varepsilon.$$

При цьому пишуть

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \quad \text{або} \quad z_n \to c.$$

Так само переносяться означення **нескінченно малої** та **нескінченно великої** величин.

Зазначимо, що тепер не може йти мови про прямування варіанти до нескінченності **певного знака**, оскільки комплексним числам знак взагалі не притаманний. Якщо z_n є нескінченно велика, тобто $|z_n| \to +\infty$, то кажуть, що $z_n \to \infty$ (без знака!).

Розглянемо, наприклад, варіанту $z_n = z^n$, де z — комплексне число. Якщо при цьому $|z| < 1$, то $z_n \to 0$; якщо ж $|z| > 1$, то $z_n \to \infty$; легко переконатися, що при $|z| = 1$ (але $z \neq 1$) для варіанти z_n границі взагалі немає.

Для комплексної варіанти легко безпосередньо довести основні твердження теорії границь, майже дослівно повторюючи попередні міркування. З іншого боку, усі ці твердження автоматично переносяться на випадок комплексної варіанти на підставі наступної простої теореми.

Теорема 454.1. *Комплексна варіанта $z_n = x_n + y_n i$ прямує до границі $c = a + bi$ тоді і лише тоді, коли дійсні варіанти x_n та y_n прямують відповідно до границь a та b.*

Доведення. Її доведення одразу випливає із нерівностей:

$$\left.\begin{array}{c}|x_n - a|\\ |y_n - b|\end{array}\right\} \leqslant |z_n - c| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \leqslant |x_n - a| + |y_n - b|.$$

□

Отже, дослідження комплексної варіанти може бути замінене дослідженням двох дійсних варіант. Зокрема, цим шляхом можна довести для комплексної варіанти і **принцип збіжності** (розд. 39).

Розглянемо тепер нескінченний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$$

із комплексними членами $c_n = a_n + b_n i$. **Сумою** ряду і тут називається границя часткової суми

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Так, наприклад, для геометричної прогресії

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + \ldots$$

(де z - комплексне число відмінне від 1), часткова сума дорівнює

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z};$$

звідси зрозуміло, що при $|z| < 1$ ряд має суму

$$C = \frac{1}{1 - z};$$

а при $|z| \geqslant 1$ у нього скінченної суми немає.

Усі основні поняття та теореми розд. 362, розд. 364 (разом із їх доведеннями) зберігаються.

Дослідження комплексного ряду може бути зведене до дослідження двох дійсних рядів, на підставі такої теореми.

Теорема 454.2. *Збіжність комплексного ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n i) \tag{C}$$

до суми $C = A + Bi$ рівносильна збіжності двох дійсних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{A}$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{B}$$

відповідно до сум A та B.

Це твердження, очевидно, є лише перефразована теорема, що була доведена вище у термінах варіанти.

Тепер доведемо теорему, аналогічну до теор. 377.1.

Теорема 454.3. *Якщо збігається додатній ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|, \tag{C*}$$

що складається із ***модулів*** *членів ряду (C), тоді і сам ряд (C) збігається.*

Доведення. Справді, зважаючи на очевидні нерівності

$$\left.\begin{array}{c} |a_n| \\ \\ |b_n| \end{array}\right\} \leqslant |c_n| = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2},$$

із збіжності ряду (C*) випливає збіжність обох рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|.$$

Звідси (розд. 377) випливає, що збігаються ряди (A) та (B), а тоді, згідно з попередньою теоремою, збігається і ряд (C). □

У разі збіжності ряду (C*) ряд (C) називається **абсолютно** збіжним, Зазначимо, що при цьому, як ми бачили, і ряди (A) та (B) також збігаються абсолютно.

Завдяки цій теоремі, для комплексних рядів зберігає свою силу, наприклад, ознака д'Аламбера (теор. 377.2).

На абсолютно збіжні комплексні ряди переносяться теор. 387.1 стосовно перестановки членів ряду та теорема Коші теор. 389.1 щодо почленного множення рядів. У першому випадку доведення здійснюється зведенням до двох дійсних рядів, а у другому — може бути збережене попереднє доведення.

Насамкінець, аналогічним чином можна на комплексний випадок перенести основні поняття та теореми із теорії подвійних рядів.

455. Функції комплексної змінної

Нехай комплексна змінна $z = x + yi$ набуває усіх можливих значень із деякої множини $\mathcal{Z} = \{z\}$, яке геометрично інтерпретується, як область (відкрита, або ні) у комплексній площині. Якщо кожному значенню z із області $\mathcal{Z}$ ставиться у відповідність **одне** або **декілька** значень іншої комплексної змінної $w = u + vi$, то останню називають (відповідно **однозначною** або **многозначною**) функцією від z у області $\mathcal{Z}$ і пишуть:

$$w = f(z) \quad \text{або} \quad w = g(z) \quad \text{тощо}$$

Прикладами однозначних функцій (і до того ж, у всій комплексній площині) можуть бути: $|z|$, z^n або взагалі — **ціла раціональна функція**, тобто цілий многочлен

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_{n-1} z + c_n$$

з довільними комплексними коефіцієнтами $c_0, \ c_1, \ \ldots, \ c_n$. **Дробова раціональна функція**, тобто нескорочувана частка двох многочленів, також є однозначно визначеною у всій площині, але у точках, що відповідають кореням знаменника, вона дорівнює нескінченності. Прикладами неоднозначних функцій можуть бути такі функції: $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$. Згодом, у розд. 457 – розд. 460 ми дослідимо інші важливі функції комплексної змінної.

У майбутньому, якщо не обумовлено протилежне, ми будемо розглядати **однозначні** функції.

Якщо $w = u + vi$ є функцією від $z = x + yi$ в області $\mathcal{Z} = \{z\} = \{x + yi\}$, то її складові u, v, очевидно, також будуть функціями від z або, що те ж саме, від x, y у відповідній області $\mathcal{Z}^* = \{(x, y)\}$ (яка геометрично зображається тією ж фігурою, що і $\mathcal{Z}$):

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Наприклад, для дійсних функцій $w = |z|$ або $w = \arg z$ матимемо, відповідно:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{або} \quad u = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (v = 0);$$

nebayduzhi.math@gmail.com

для функції $w = z^n = (x + yi)^n$, очевидно,

$$u = x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} y^2 + \dots,$$
$$v = n x^{n-1} y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} y^3 + \dots$$

Нехай c буде точкою згущення області $\mathcal{Z}$. Говорять, що *функція $w = f(z)$ при прямуванні z до c має границю C, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що $|f(z) - C| < \varepsilon$, як тільки $|z - c| < \delta$ (і $z \neq c$)*. (Тут c та C — комплексні числа.)

Записують цей факт, як зазвичай:

$$\lim_{z \to c} w = \lim_{z \to c} f(z) = C.$$

Легко перефразувати це означення для випадку, коли c (або C) дорівнює ∞; можна виразити його “мовою послідовностей”.

Якщо $c = a + bi$, $C = A + Bi$, то (як нескладно вивести, базуючись на розд. 454) попереднє співвідношення рівносильне таким двом:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} u(x, y) = A, \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} v(x, y) = B.$$

Неперервність функції $f(z)$ у певній точці $z_0 = x_0 + y_0 i$ з області $\mathcal{Z}$ визначається рівністю:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Вона, очевидно, рівносильна неперервності обох складових $u(x, y)$, $v(x, y)$ у точці (x_0, y_0).

Отже, згадуючи щойно наведені вирази для $|z|$ та складових z^n, бачимо, що ці функції є неперервними для усієї площини комплексної змінної. Аналогічно, $\arg z$ виявляється неперервною всюди, за винятком від'ємної частини дійсної осі.

Звичайно, неперервність може бути доведена і безпосередньо з комплексних міркувань. Наприклад, для функції $|z|$ вона одразу випливає з нерівності

$$||z| - |z_0|| \leqslant |z - z_0|.$$

Для функції z^n матимемо:

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1}).$$

Коли z наближається до z_0, значення z будуть обмежені деякою сталою: $|z| \leqslant M$, тому

$$|z^n - z_0^n| \leqslant n M^{n-1} \cdot |z - z_0|,$$

звідки і отримуємо шуканий висновок.

Тепер легко довести неперервність цілої та дробової раціональної функції (у останньому випадку — окрім коренів знаменника).

Означення **похідної** для функції $w = f(z)$ у точці $z = z_0$ має той самий вигляд, як і у звичайному диференціальному численні:

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Наприклад для функції $w = z^n$ маємо

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-1},$$

отже, переходячи до границі при $z \to z_0$, отримаємо знову знайому формулу:

$$w' = n z_0^{n-1}.$$

Формула (94.1) для похідної оберненої функції і усі правила диференціювання розд. 97 та розд. 98 переносяться без змін. Аналогічно подаються і поняття похідних вищих порядків.

Згадаємо ще про ряди:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots,$$

членами яких є функції від комплексної змінної z у одній і тій самій області $\mathcal{Z}$.

Тут, передусім, може бути введено поняття **рівномірної збіжності** у тих самих термінах, що і у розд. 428. У випадку комплексних функціональних рядів переконуватися у рівномірній збіжності також можна по наявності додатного мажорантного ряду, оскільки ознака Ваярштрасса справедлива і в цьому випадку. З-поміж теорем що стосуються функціональних рядів нам знадобиться надалі теорема **про почленний граничний перехід** у рівномірно збіжному ряді теор. 433.1; доводиться вона так само, як і раніше.

Тепер ми звернемося до розгляду, зокрема, **степеневих** рядів, які у теорії функцій комплексної змінної відіграють виключно важливу роль.

456. Степеневі ряди

Нехай маємо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots, \tag{456.1}$$

де c_0, c_1, c_2, ... — сталі комплексні коефіцієнти, а z — змінна, що змінюється у всій комплексній площині. Абсолютно так само, як це було зроблено у розд. 379 (або розд. 380), для нього може бути доведено існування такого невід'ємного числа R, що для $|z| < R$ (якщо $R > 0$) ряд (456.1) абсолютно збігається, а для $|z| > R$ (якщо $R < +\infty$) ряд розбігається. Отже, якщо відкинути випадок $R = 0$, ми матимемо при $R = +\infty$ ряд, що збігається на всій комплексній площині, а при скінченному R — ряд, що збігається всередині круга, описаного навколо початку радіусом R, та розбігається поза цим кругом. Замість **проміжку збіжності** тут з'являється **круг збіжності** і термін "радіус" нарешті виявляється виправданим.

Наприклад, як легко переконатися за допомогою ознаки д'Аламбера, ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

абсолютно збігається при будь-якому значенні z, а ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

мають радіуси збіжності $R = 1$.

На межі круга збіжності поведінка степеневого ряду може бути різною. Наприклад, із щойно наведених трьох рядів — перший **розбігається** у всіх точках кола $|z| = 1$, бо порушується основна умова збіжності — загальний член не прямує до нуля; другий ряд у всіх точках цього кола **абсолютно збігається**, оскільки збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$; насамкінець, третій ряд, якщо використати, що $z = \cos\theta + i\sin\theta$, набуває вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}$$

і (окрім випадку, коли $\theta = 0$, тобто коли $z = 1$) **збігається** (пр. 385.2), але **неабсолютно**.

Зауваження. Якщо коефіцієнти степеневого ряду — дійсні числа (як у наведених прикладах), то зрозуміло, що радіус R "круга збіжності" на комплексній площині — це те саме, що й радіус "проміжку збіжності" на дійсній осі.

Перелічимо тепер теореми стосовно степеневих рядів, які переносяться на комплексні степеневі ряди.

Теореми теор. 437.1 та теор. 437.2 зберігаються повністю, отже *всередині круга збіжності сума степеневого ряду* (456.1) *є* ***неперервною*** *функцією від* z.

Що ж стосується теореми Абеля (теор. 437.6), то зараз сформулюємо її у такій формі.

Теорема 456.1. *Якщо ряд (456.1) збігається у деякій точці z_0 кола $|z| = R$, то при наближенні точки z до точки z_0 зсередини **вздовж радіуса** матимемо*

$$\lim_{z\to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n.$$

(Можна довести цю рівність і при більш загальному законі наближення z до z_0, на чому ми, однак, не будемо тут зупинятися.)

Доведення. Зокрема, коли $z_0 = R$, можна вважати, що $z = r$ є дійсна додатна змінна, і рівність може бути представлена у вигляді

$$\lim_{r\to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n.$$

Якщо записати c_n як $c_n = a_n + b_n i$, то рівність розпадається на такі дві рівності:

$$\lim_{r\to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n, \quad \lim_{r\to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n R^n.$$

Оскільки ряди у правих частинах збігаються, зважаючи на припущення стосовно збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n i) \cdot R^n,$$

то для доведення цих рівностей залишається лише застосувати звичайну теорему Абеля.

Переходячи до загального випадку, позначимо через θ_0 аргумент числа z_0. Тоді можна записати:

$$z_0 = R(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0), \quad z = r(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0),$$

і рівність, що потрібно довести, запишеться так:

$$\lim_{r\to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\cos n\theta_0 + i\sin n\theta_0) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\cos n\theta_0 + i\sin n\theta_0) R^n.$$

Якщо множники в дужках віднести до коефіцієнтів, то питання, очевидно, зведеться до вже розгляданого випадку. □

Тепер (не посилаючись на загальну теорему про диференціювання рядів) безпосередньо доведемо таку теорему.

Теорема 456.2. *всередині круга збіжності степеневий ряд можна диференціювати* ***почленно****, тобто якщо для* $|z| < R$ *прийняти*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad \text{то} \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}.$$

Доведення. Передусім, зазначимо, що радіусом збіжності для останнього ряду також буде R, у чому легко переконатися, наприклад, за допомогою теореми Коші – Адамара.

Зупинимося на певній точці z_0, $|z_0| < R$. Матимемо:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-1}). \tag{456.2}$$

Якщо взяти ϱ між $|z_0|$ та R, то можна вважати і $|z| < \varrho$; тоді

$$|c_n (z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-1})| < n \cdot |c_n| \cdot \varrho^{n-1}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|c_n|\varrho^{n-1}$ збігається, бо ϱ менше за R, що (як ми вже згадували) служить радіусом збіжності і для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$. В такому випадку, застосовуючи ознаку Вейєрштрасса, робимо висновок щодо рівномірної збіжності ряду (456.2); у ньому при $z \to z_0$ можна перейти до границі **почленно**, що і приведе до шуканого результату. □

Звідси вже випливає, що твердження теор. 438.2 та теор. 438.3 також переносяться на комплексний випадок без змін.

Отже, всередині **круга збіжності** сума степеневого ряду є неперервною разом зі всіма своїми похідними. Іншими словами, якщо ми розкладаємо функцію у ряд за степенями z, то відстань від початку до найближчої до нього точки розриву функції (або будь-якої її похідної) є природною **межею** для радіуса збіжності цього розкладу.

У випадку прогресії

$$1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots = \frac{1}{1+z}$$

такою точкою буде $z = -1$; вона лежить на **дійсній** осі, тому і раніше було зрозуміло, що радіус збіжності розкладу функції $\frac{1}{1+z}$ не може бути більшим за одиницю.

Інакша справа із прогресією

$$1 - z^2 + z^4 - \ldots + (-1)^n z^{2n} + \ldots = \frac{1}{1+z^2}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Її сума має розрив у точках $z = \pm i$ **уявної** осі, на відстані одиниці від початку; залишаючись на дійсній осі, вздовж якої функція $\dfrac{1}{1+x^2}$ є неперервною разом із усіма своїми похідними, неможливо було б обґрунтувати, чому радіус збіжності її розкладу також дорівнює одиниці.

Такого роду приклади, коли перехід у комплексну область допомагає з'ясувати справжні причини тих чи інших особливостей розкладання дійсної функції від дійсної змінної, ми зустрінемо і нижче.

Насамкінець згадаємо, що усі правила дій над степеневими рядами (розд. 445), теорема про підстановку ряду в ряд (теор. 446.1), про ділення рядів (розд. 448) і, нарешті, про обернений степеневий ряд (теор. 451.1) зберігають свою силу і тут; доведення, що мають формальний характер, у повній мірі годяться і для комплексних степеневих рядів.

457. Показникова функція

Ми бачили у (404.3), що для будь-якого дійсного x справедливий розклад

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Якщо замінити у **цьому ряду** дійсну змінну x на комплексну $z = x + yi$, то вийде ряд $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, про який ми вже знаємо (розд. 456), що він збігається, тобто має певну скінченну суму у всій площині комплексної змінної. *Його суму і приймають, **за означенням**, за значення показникової функції e^z при будь-якому комплексному z, тобто приймають*

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \tag{457.1}$$

Це означення, як ми бачили, не суперечить звичайному означенню для випадку дійсного показника і є природнім його узагальненням.

Якщо скористатися правилом множення степеневих рядів, то, як і в пр. 390.6, легко переконатися, що при будь-яких **комплексних** значеннях z та z' буде

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}, \tag{457.2}$$

отже ця **характерна властивість показникової функції виявляється виконаною і у комплексній області**.

Функція e^z є неперервною у всій площині, більше того — вона має похідні усіх порядків; почленно диференціюючи ряд, що визначає її, отримаємо

$$(e^z)' = e^z,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

як і раніше.

Нехай $z = x + yi$, де x та y — дійсні числа; замінюючи у (457.2) z на x, а z' на yi, матимемо

$$e^z = e^x \cdot e^{yi}.$$

Окремо розглянемо тепер степінь із чисто уявним показником e^{yi}. Якщо в основному означенні (457.1) підставити yi замість z, то отримаємо

$$e^{yi} = 1 + yi - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!}i + \frac{y^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}i + ...$$

або, відокремлюючи дійсну частину від уявної,

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + ...\right) + \left(y - \frac{y^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...\right) i.$$

У цих рядах ми впізнаємо розклади $\cos y$ (404.5) та $\sin y$ (404.4) і, отже, приходимо до чудової формули

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y, \tag{457.3}$$

яку вперше отримав Ойлер. Звідси, наприклад,

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1.$$

Отже, якщо $z = x + yi$, то

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y); \tag{457.4}$$

ми бачимо, що

$$e^x = e^{R(z)} = |e^z|, \quad y = I(z) = \operatorname{Arg} e^z.$$

Оскільки $e^x > 0$ при будь-якому **дійсному** x, то e^z є відмінним від нуля при будь-якому **комплексному** z. (Цю рівність також можна було б взяти за основу означення показникової функції від комплексного аргументу; тоді (457.2) витікало б із теорем додавання для косинуса та синуса.)

Замінюючи у (457.3) y на $-y$, шляхом додавання та віднімання цих формул, отримаємо співвідношення

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}, \tag{457.5}$$

що виражають тригонометричні функції від **дійсного** аргументу через показникові функції від **чисто уявних** аргументів. Ми ще повернемося до цього чудового факту пізніше.

Якщо у рівності (457.4) замінити y на $y+2\pi$, то значення правої (а отже і лівої) частини не зміниться; інакше кажучи,

$$e^{z+2\pi i}=e^{z},$$

і *показникова функція виявляється* ***періодичною****, із чисто уявним періодом* $2\pi i$.

Легко показати, що окрім періодів вигляду $2k\pi i$ (k — ціле), інших періодів функція e^z мати не може. Справді, якщо $e^{z+\omega}=e^z$, то (припускаючи $z=0$) $e^{\omega}=1$. Нехай, скажімо, $\omega=\alpha+\beta i$, так що (457.4) $e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta)=1$; звідси $e^{\alpha}=1$ та $\alpha=0$, далі: $\cos\beta=1$, $\sin\beta=0$, отже, $\beta=2k\pi$, що й потрібно було довести.

Лише тепер, коли ми знаємо, що $e^{\pm 2\pi i}=1$, стає зрозуміло, чому розклад функції $\dfrac{x}{e^x-1}$ у степеневий ряд (449.1) має радіус збіжності 2π; хоча на **дійсній** осі у цій функції нема особливостей, які могли б це обґрунтувати, але на уявній осі є точки, де функція дорівнює нескінченності, і найближчими з них до початку якраз і будуть точки $z=\pm 2\pi i$, що лежать від нього на відстані 2π.

У зв'язку із узагальненням показникової функції на випадок будь-якого комплексного показника, нагадаємо ще одну цікаву функцію, яку ми розглядали в пр. 138.2 та пр. 407.1:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\quad (x\neq 0),\qquad f(0)=0.$$

Неможливість її розкладання за степенями x у будь-якому околі нуля, не зважаючи на неперервність самої функції з усіма похідними вздовж дійсної осі, включно із точкою $x=0$, стає безпосередньо очевидною при переході до **комплексної** змінної $z=x+yi$. Справді, функція

$$e^{-\frac{1}{z^2}}\ (z\neq 0)$$

при $z\to 0$ не має навіть границі, бо, наприклад, при наближенні z до нуля вздовж уявної осі, коли $z=yi$ та $y\to 0$, буде:

$$e^{-\frac{1}{z^2}}=e^{\frac{1}{y^2}}\to\infty.$$

458. Логарифмічна функція

Візьмемо довільне комплексне число w, відмінне від 0, і спробуємо знайти таке число z, що задовольняє рівняння:

$$e^z=w$$

(якщо $w=0$, то це рівняння, як нам відомо, розв'язків не має). Таке число z називається *(натуральним) логарифмом* w та позначається символом

$$z=\operatorname{Ln} w. \tag{458.1}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ і прийняти $z = x + yi$, то, зважаючи на (457.4), рівняння (458.1) розпадається на такі:

$$e^x = r, \quad \cos y = \cos\theta, \quad \sin y = \sin\theta,$$

звідки

$$x = \ln r, \quad y = \theta + 2k\pi \quad (k \text{ — ціле}).$$

(Тут мається на увазі **звичайний** натуральний логарифм додатного числа r.)

Ми приходимо до висновку, що логарифм w $(w \neq 0)$ завжди існує; він дорівнює

$$\operatorname{Ln} w = \ln|w| + i\operatorname{Arg} w = \ln|w| + i\cdot\arg w + 2k\pi i \tag{458.2}$$

і, отже, виявляється **многозначним**. Втім, це легко було передбачити, судячи з періодичності показникової функції. Взявши $k = 0$, отримаємо так зване **головне значення логарифма**:

$$\ln w = \ln|w| + i\cdot\arg w, \tag{458.3}$$

яке характеризується тим, що його уявна складова міститься в проміжку $(-\pi, \pi]$:

$$-\pi < I(\ln w) \leqslant \pi.$$

Наприклад, маємо

$$\begin{aligned} &\ln 1 = 0, \quad \operatorname{Ln} 1 = 2k\pi i;\\ &\ln(-1) = \pi i, \quad \operatorname{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i;\\ &\ln i = \frac{\pi}{2}i, \quad \operatorname{Ln} i = \frac{4k+1}{2}\pi i \quad \text{і так далі.}\end{aligned}$$

При змінному w формула (458.3) виражає **головну гілку** многозначної **логарифмічної функції** $\operatorname{Ln} w$. Інші гілки отримуються при різних значеннях k згідно з формулою

$$\operatorname{Ln} w = \ln w + 2k\pi i.$$

Легко побачити, що функція (458.3) є неперервною на всій площині комплексної змінної w, за винятком початкової точки і від'ємної частини дійсної осі. Розрив при $w = 0$ не може бути усунутий, бо при $w \to 0$, очевидно, $\ln w \to \infty$. Інша річ з від'ємними дійсними значеннями $w_0 = u_0 < 0$. Розрив тут утворюється, у деякому сенсі, штучно у зв'язку із нашою умовою брати $\arg w$ на проміжку $(-\pi, \pi]$. Коли $w = u + vi \to w_0$ при $v > 0$, то $\arg w \to \pi = \arg w_0$; якщо ж $v < 0$, то $\arg w \to -\pi$. Якби від **головної гілки**: $\ln w$ у другій чверті ми б перейшли до **іншої гілки**: $\ln w + 2\pi i$ — у третій чверті, то неперервність була б відновлена. Отже, бажаючи уникнути многозначності та розбиваючи многозначну функцію на однозначні гілки, ми тим самим для кожної окремої гілки створюємо розриви. Навпаки, одна гілка переходить у іншу неперервним чином. У цій зв'язності різних гілок многозначної функції і полягає чудова особливість комплексної площини, що не має аналогів серед многозначних дійсних функцій, визначених на дійсній осі.

Згідно із загальною теоремою про похідну оберненої функції, маємо (не беручи до розгляду точки розриву)

$$(\ln w)' = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}. \tag{458.4}$$

Замінивши w на $1+w$, розглянемо функцію $z = \ln(1+w)$ $(w \neq -1)$. Тоді

$$e^z = e^{\ln(1+w)} = 1 + w = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{тож} \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Звідси маємо, що для досить малих (за абсолютною величиною) значень w функція $z = \ln(1+w)$ розкладається в ряд за степенями w:

$$z = w + c_2 w^2 + c_3 w^3 + \ldots + c_n w^n + \ldots$$

Похідна від цієї функції по w виражається за допомогою ряду:

$$[\ln(1+w)]' = 1 + 2c_2 w + 3c_3 w^2 + \ldots + nc_n w^{n-1} + \ldots;$$

водночас, зважаючи на (458.4), вона виразиться так:

$$[\ln(1+w)]' = \frac{1}{1+w} = 1 - w + w^2 - \ldots + (-1)^{n-1} w^{n-1} + \ldots$$

Порівнюючи ці два розклади, бачимо, що

$$2c_2 = -1, \quad 3c_3 = 1, \quad \ldots, \quad nc_n = (-1)^{n-1}, \quad \ldots,$$

звідки

$$c_2 = -\frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad c_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \quad \ldots.$$

Отже, остаточно, в околі нуля маємо розклад:

$$\ln(1+w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{w^n}{n} + \ldots \tag{458.5}$$

Легко перевірити, що отриманий ряд має радіус збіжності $R = 1$. Ми бачили, що при досить малих z, його сума становить **головне значення** логарифма: $\ln(1+w)$; чи буде це справедливо і в усьому крузі $|w| < 1$?

Оскільки ряд (458.5) формально задовольняє рівність

$$e^{w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \ldots} = 1 + w,$$

то він і **фактично** задовольняє її, допоки збігається. Отже, у цілому колі $|w| < 1$ сума ряду (458.5), напевне, являє собою **одне із значень** $\mathrm{Ln}(1 + w)$; питання зводиться тепер до того, чи завжди це буде саме **головне значення**.

Якщо $|w| < 1$, так що точка, що зображає число $1 + w$, лежить **всередині** круга з радіусом 1 та центром у точці $w = 1$, тоді $\arg(1 + w)$ лежить між $-\frac{\pi}{2}$ та $\frac{\pi}{2}$, інші значення $\mathrm{Arg}(1 + w)$ лежать на проміжках

$$\left(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right), \quad \left(-\frac{9\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}\right), \quad \ldots$$

або

$$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right), \quad \ldots$$

Уявна складова суми ряду (458.5) і є $\mathrm{Arg}(1 + w)$ (458.2). Для **досить малих** $w = u + vi$ вона дає головне значення $\arg(1 + w)$, тобто міститься між $-\frac{\pi}{2}$ та $\frac{\pi}{2}$; одночасно із цим, як неперервна функція від u та v, вона не може перескочити у інші вказані проміжки, отже, **при всіх** $|w| < 1$ вона дорівнює саме головному значенню $\arg(1 + w)$. Це доводить, що рівність (458.5) є справедливою у всьому крузі $|w| < 1$.

Замінюючи у (458.5) w на $-w$ та віднімаючи отриманий ряд від (458.5), отримаємо корисний розклад:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+w}{1-w} = w + \frac{w^3}{3} + \ldots + \frac{w^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \tag{458.6}$$

яке є справедливим для $|w| < 1$. (Оскільки уявна складова різниці $\ln(1+w) - \ln(1-w)$ лежить між $-\pi$ та π, то ця різниця дає саме **головне значення** $\ln\frac{1+w}{1-w}$.)

459. Тригонометричні функції та обернені до них

Ми знаємо ((404.5), (404.4)), що при дійсному x функції $\cos x$ та $\sin x$ можуть бути представлені такими рядами:

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{x=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Природно визначити функції $\cos z$ та $\sin z$ для будь-якого **комплексного** z за допомогою аналогічних рядів:

$$\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \tag{459.1}$$

що збігаються на всій площині змінної z.

Цей спосіб введення тригонометричних функцій для нас не є новим: у розд. 443 ми вже користувалися ним навіть у дійсній області (щоб обґрунтувати ці важливі для аналізу функції без посилання до геометрії). Схожими міркуваннями можна було б і тут довести для косинуса та синуса теореми додавання, формули зведення, властивість періодичності та правила диференціювання — але вже для комплексних значень незалежної змінної.

Втім, ті ж самі результати можна отримати і іншим шляхом, отримавши зв'язок тригонометричних функцій із показниковою. Власне, для будь-якого комплексного z, узагальнюючи зроблене у розд. 457 для $z = yi$, можна вивести, що (порівняйте з (457.3))

$$e^{\pm zi} = \cos z \pm i \cdot \sin z,$$

а звідси (порівняйте з (457.5))

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}. \tag{459.2}$$

Ці формули цілком зводять вивчення тригонометричних функцій до вивчення показникової функції. (Їх можна було б покласти в основу означення тригонометричних функцій замість (459.1).) Пропонуємо читачеві, ґрунтуючись на формулах (459.2), заново довести вище згадані властивості косинуса та синуса, а також довести, що

1) $\cos z$ та $\sin z$ не мають інших періодів, окрім $2k\pi$ (k — ціле), та

2) що усі їх корені є дійсними.

Якщо у (459.2) взяти $z = yi$ (y — дійсне), то отримаємо

$$\cos yi = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} = \operatorname{ch} y, \quad \sin yi = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \cdot i = i \cdot \operatorname{sh} y. \tag{459.3}$$

Отже ми отримали **безпосередній** зв'язок між гіперболічними функціями від дійсного аргументу та тригонометричними — від чисто уявного. Цікаво зазначити, що $\cos yi$ є дійсним числом, що завжди більше за одиницю.

Тепер, скориставшись теоремами додавання, можна написати, що

$$\begin{aligned} \cos(x + yi) &= \cos x \cdot \cos yi - \sin x \cdot \sin yi, \\ \sin(x + yi) &= \sin x \cdot \cos yi + \cos x \cdot \sin yi \end{aligned}$$

або (беручи до уваги (459.3))

$$\begin{aligned} \cos(x + yi) &= \cos x \cdot \operatorname{ch} y - i \cdot \sin x \cdot \operatorname{sh} y, \\ \sin(x + yi) &= \sin x \cdot \operatorname{ch} y + i \cdot \cos x \cdot \operatorname{sh} y, \end{aligned}$$

і тим самим розкласти косинус та синус на їх складові.

Функції $\operatorname{tg} z$ та $\operatorname{ctg} z$ визначаються формулами

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} \quad \left(z \neq \left(k + \frac{1}{2}\pi\right)\right),$$
$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{e^{zi} - e^{-zi}} \quad (z \neq k\pi),$$

причому виявляється, що вони мають період π.

Розклади, отримані у розд. 449 для $\operatorname{tg} x$ та $x \cdot \operatorname{ctg} x$, будуть справедливі і після підстановки комплексної змінної z замість дійсної x. Подібність розкладів для $x \cdot \operatorname{ctg} x$ та $x \cdot \operatorname{cth} x$ стає цілком зрозумілою, якщо взяти до уваги формулу, що виходять із (459.3)

$$\operatorname{tg} yi = i \cdot \operatorname{th} y, \quad \operatorname{ctg} yi = -i \cdot \operatorname{cth} y.$$

З поміж функцій, обернених до тригонометричних, ми зупинимося на арктангенсі та арксинусі.

Зважаючи на те, що тригонометричні функції зводяться до показникової, природнім буде очікувати, що зворотні до них виявляться споріднені з логарифмом.

Почнемо із вказівки, що $w = \operatorname{tg} z$ не набуває значення $\pm i$ (у цьому легко переконатися розмірковуючи від протилежного). Нехай $w \neq \pm i$; тоді рівняння

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1} = w$$

може бути розв'язане відносно z:

$$e^{2zi} = \frac{1 + wi}{1 - wi}, \quad z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + wi}{1 - wi}.$$

Таким є вираз для оберненої функції $\operatorname{Arctg} w$, що, очевидно, є **нескінченно многозначною** разом із Ln.

Якщо для логарифма взяти його головне значення, то отримаємо **головне значення арктангенса**:

$$\operatorname{arctg} w = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + wi}{1 - wi} \quad (w \neq \pm i),$$

яке характеризується тим, що його дійсна частина міститься в проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$-\frac{\pi}{2} < R(\operatorname{arctg} w) < \frac{\pi}{2}.$$

Решта значень отримуються згідно з формулою

$$\operatorname{Arctg} w = \operatorname{arctg} w + k\pi \quad (k \text{ — ціле}).$$

Замінивши у ряді (458.6) w на wi, прийдемо до розкладу **головної гілки** арктангенса

$$\operatorname{arctg} w = w - \frac{w^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{w^{2n-1}}{2n-1} + \ldots,$$

яке справедливе для $|w| < 1$. (Для $w = \pm i$ функція $\operatorname{arctg} w$ дорівнює ∞).

Звернемося, насамкінець, до розв'язку рівняння

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w$$

відносно z:

$$e^{2iz} - 2wi \cdot e^{iz} - 1 = 0, \quad e^{iz} = wi \pm \sqrt{1 - w^2},$$

звідки

$$z = \operatorname{Arcsin} w = \frac{1}{i}\operatorname{Ln}\left(wi \pm \sqrt{1 - w^2}\right);$$

і тут отримуємо **нескінченно многозначну** функцію.

Обмежимося для логарифма його **головним значенням**:

$$z = \frac{1}{i}\ln\left(wi \pm \sqrt{1 - w^2}\right).$$

При $w = +1$ або -1 радикал дорівнює 0, і ми отримуємо, відповідно, $z = \frac{\pi}{2}$ або $-\frac{\pi}{2}$, що ми і приймемо як **головне значення арксинуса**. Нехай тепер $w \neq \pm 1$, і нам доведеться робити вибір серед **двох** значень z. Очевидно,

$$\left(wi + \sqrt{1 - w^2}\right)\left(wi - \sqrt{1 - w^2}\right) = -1,$$

отже

$$\frac{1}{i}\ln\left(wi + \sqrt{1 - w^2}\right) + \frac{1}{i}\ln\left(wi - \sqrt{1 - w^2}\right) = \pm\pi,$$

а, як наслідок, і

$$R\left(\frac{1}{i}\ln\left(wi + \sqrt{1 - w^2}\right)\right) + R\left(\frac{1}{i}\ln\left(wi - \sqrt{1 - w^2}\right)\right) = \pm\pi,$$

у той час як уявні частини відрізняються лише знаками. Оскільки кожна з дійсних частин не виходить за межі проміжку $(-\pi; \pi]$, то лише одна з них буде міститися між $-\frac{\pi}{2}$ та $\frac{\pi}{2}$; відповідне значення арксинуса і приймемо за **головне**. Винятком буде лише випадок, коли обидві дійсні частини дорівнюють $\frac{\pi}{2}$ або $-\frac{\pi}{2}$; тоді за головне значення приймається те значення, якому відповідає додатна уявна частина. (Наприклад, $\arcsin 2 = \frac{\pi}{2} + i\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$.) Беручи до уваги це зауваження, можна сказати, що **головне значення арксинуса** визначається умовою

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant R(\arcsin w) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Легко переконатися, що решта значень буде виражатися формулами:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Arcsin} w = \arcsin w + 2k\pi,\\ &\operatorname{Arcsin} w = (2k+1)\pi - \arcsin w \quad (k \text{ — ціле}).\end{aligned}$$

На завершення, пригадаємо розклад $\arcsin w$ за степенями w. У області дійсних змінних ми вже бачили, що для ряду

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

(що виражає $\sin x$), оберненим буде ряд

$$x = y + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{y^5}{5} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{y^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

(що виражає $\arcsin y$; дивіться пр. 440.3). Оскільки і у випадку комплексних змінних коефіцієнти визначаються цілком аналогічним чином, то зрозуміло, що у результаті **знаходження оберненого** ряду до

$$w = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

повинен вийти ряд

$$z = w + \frac{1}{2}\cdot\frac{w^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{w^5}{5} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{w^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Його радіус збіжності $R = 1$. (При $w = \pm 1$ порушується неперервність **похідної** арксинуса: $\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$.) При $|w| < 1$ він дає **одне** із значень $\operatorname{Arcsin} w$. Покажемо, що це буде саме **головне значення** $\arcsin w$. Справді, $|R(z)|$ не перевищує

$$|z| < 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1} + \cdots = \frac{\pi}{2},$$

звідки і випливає шуканий висновок.

460. Степенева функція

Нехай a та b будуть два комплексних числа, серед яких $a \neq 0$. Тоді загальне визначення степеня a^b буде таким

$$a^b = e^{b\operatorname{Ln} a} = e^{b(\ln a + 2k\pi i)} \quad (k \text{ — ціле}),$$

отже, степінь виявляється взагалі **многозначною**. При $k = 0$ виходить так зване **головне значення** степеня

$$a^b = e^{b \ln a}.$$

Для відмінності загальне значення степеня, слідуючи заКоші, деколи позначають так: $((a))^b$. Отже

$$((a))^b = a^b \cdot e^{2k\pi bi} \quad (k \text{ — ціле}).$$

Якщо b — **ціле** число, то другий множник перетворюється на одиницю: у цьому випадку степінь матиме лише одне значення. Коли b являє собою нескоротний раціональний дріб $\frac{p}{q}$ $(q > 1)$, то степінь буде мати рівно q різних значень. Нарешті, при будь-якому іншому значенні b степінь матиме **нескінченну множину** значень.

Наприклад,

$$2^i = e^{i \ln 2} = \cos(\ln 2) + i \cdot \sin(\ln 2), \quad ((2))^i = 2^i \cdot e^{-2k\pi} \quad (k \text{ — ціле}),$$

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{-\frac{\pi}{2}}, \quad ((i))^i = e^{-(4k+1)\frac{\pi}{2}} \quad (k \text{ — ціле}).$$

Якщо m — **будь-яке** комплексне число, то **степенева функція** $((z))^m$ взагалі є многозначною. Її головна гілка:

$$z^m = e^{m \ln z} \quad (z \neq 0).$$

Іноді при $z = 0$ приймають $z^m = 0$, якщо $R(m) > 0$.

Із співвідношення

$$(1+z)^m = e^{m \ln(1+z)}$$

цілковито так само, як у пр. 447.2, можна отримати **біноміальний ряд**

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} z^n + \ldots$$

Цей ряд збігається при будь-якому комплексному m, якщо $|z| < 1$, та відтворює, як видно із самого способу його отримання, саме **головне** значення степеня бінома. Його дослідженням займався Абель. (При $z = -1$, якщо не сама степінь $(1+z)^m$, то досить далекі її похідні мають розрив; виняток становить лише випадок, коли m дорівнює 0 або натуральному числу.)

461. Приклади

Тепер ми на декількох прикладах покажемо, яку допомогу комплексна змінна та елементарні функції надають дійсному аналізу.

1) Послідовні похідні функції

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

легко обчислюються, якщо виразити її у вигляді:

$$y = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right).$$

А саме,

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \frac{1}{2i}(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right] = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i} \cdot \frac{(x+i)^n - (x-i)^n}{(x^2+1)^n} = \\ &= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^n} \cdot \left[nx^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Наприклад,

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(4)} = 24 \cdot \frac{5x^4 - 10x^2 + 1}{(x^2+1)^5}.$$

Разом із тим, очевидно, виходять і послідовні похідні функції $\operatorname{arctg} x$ (порівняйте з пр. 116.8 та пр. 118.4).

2) Формули Ойлера, що виражають косинус та синус через показникову функцію, мають доволі різноманітне застосування. Наприклад, бажаючи знайти компактний вираз для суми

$$s = \sum_{k=1}^{n} \cos kx,$$

можна звести діло просто до **підсумовування геометричної прогресії**:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{kxi} + \sum_{k=1}^{n} e^{-kxi}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{xi} - e^{(n+1)xi}}{1 - e^{xi}} + \frac{e^{-xi} - e^{-(n+1)xi}}{1 - e^{-xi}}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}xi} - e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)xi}}{e^{-\frac{1}{2}xi} - e^{\frac{1}{2}xi}} + \frac{e^{-\frac{1}{2}xi} - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)xi}}{e^{\frac{1}{2}xi} - e^{-\frac{1}{2}xi}}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2i}\left(e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)xi} - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)xi}\right) - \frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1}{2}xi} - e^{-\frac{1}{2}xi}\right)}{\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1}{2}xi} - e^{-\frac{1}{2}xi}\right)} = \\ &= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

3) Цілі додатні степені $\sin x$ та $\cos x$, а також добутки таких степенів можна виразити через лінійні комбінації синусів та косинусів кратних дуг. Виконати це легко за допомогою тих самих формул Ойлера, розкривши вирази

$$\sin^n x = \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^n, \quad \cos^n x = \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}\right)^n$$

згідно з біномом Ньютена. Наприклад,

$$\begin{aligned}
\sin^5 x &= \frac{1}{32i}(e^{5xi} - 5e^{3xi} + 10e^{xi} - 10e^{-xi} + 5e^{-3xi} - e^{-5xi}) = \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{e^{5xi} - e^{-5xi}}{2i} - 5\frac{e^{3xi} - e^{-3xi}}{2i} + 10\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right) = \\
&= \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos^4 x \sin^3 x &= \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^3 = \\
&= -\frac{1}{128i}(e^{2xi} - e^{-2xi})^3(e^{xi} + e^{-xi}) = \\
&= -\frac{1}{128i}(e^{6xi} - 3e^{2xi} + 3e^{-2xi} - e^{-6xi})(e^{xi} + e^{-xi}) = \\
&= -\frac{1}{128i}(e^{7xi} + e^{5xi} - 3e^{3xi} - 3e^{xi} + 3e^{-xi} + 3e^{-3xi} - e^{-5xi} - e^{-7xi}) = \\
&= -\frac{1}{64}(\sin 7x + \sin 5x - 3\sin 3x - 3\sin x).
\end{aligned}$$

Можна отримати і загальні формули:

$$\text{а)}\ \sin^{2\nu} x = \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu-1}}\left\{\cos 2\nu x - 2\nu\cos(2\nu-2)x + \frac{2\nu(2\nu-1)}{1\cdot 2}\cos(2\nu-4)x - \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^\nu}{2}\frac{2\nu(2\nu-1)\ldots(\nu+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\nu}\right\},$$

$$\text{б)}\ \sin^{2\nu+1} x = \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu}}\left\{\sin(2\nu+1)x - (2\nu+1)\sin(2\nu-1)x + \frac{(2\nu+1)2\nu}{1\cdot 2}\sin(2\nu-3)x + \right.$$
$$\left. + \ldots + (-1)^\nu\frac{(2\nu+1)2\nu\ldots(\nu+2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\nu}\sin x\right\},$$

$$\text{в)}\ \cos^n x = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\cos nx + n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x + \ldots\right\},$$

nebayduzhi.math@gmail.com

причому у формулі в) останній член має вигляд

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2\nu(2\nu-1)\ldots(\nu+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\nu}\quad\text{або}\quad\frac{(2\nu+1)2\nu\ldots(\nu+2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\nu}\cos x,$$

залежно від того, $n=2\nu$ чи $2\nu+1$.

Подібні перетворення є вигідними при інтегруванні (порівняйте з розд. 287).

4) На комплексні функції від дійсної чи комплексної змінної поширюються найпростіші формули інтегрального числення (що відносяться до пошуку первісних).

Нехай треба обчислити інтеграли:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx,\quad \int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Ця задача рівносильна знаходженню інтеграла:

$$\int e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)\,dx=\int e^{(a+bi)x}\,dx,$$

який, згідно з елементарною формулою, дорівнює

$$\frac{1}{a+bi}e^{(a+bi)x}=\frac{\cos bx+i\sin bx}{a+bi}e^{ax}=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}+i\cdot\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}.$$

Прирівнюючи окремо дійсні та уявні частини, отримаємо шукані інтеграли (порівняйте з пр. 271.6).

Формулу для обчислення інтеграла типу

$$\int P(x)\cdot e^{ax}\,dx,$$

де $P(x)$ — цілий многочлен (пр. 271.4), можна поширити і на випадок комплексного a. Тоді до неї зведуться не тільки інтеграли

$$\int P(x)\cos bx\,dx,\quad \int P(x)\sin bx\,dx,$$

але й інтеграли

$$\int P(x)e^{ax}\cos bx\,dx,\quad \int P(x)e^{ax}\sin bx\,dx$$

(пр. 271.4; розд. 289).

5) Зв'язок між логарифмічною та оберненими тригонометричними функціями об'єднує багато формул інтегрального числення, що видаються цілковито різними, і дає змогу отримувати нові формули. Наприклад, інтеграли

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}\quad\text{та}\quad\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$$

або

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) \quad \text{та} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

зводяться один до одного заміною x на xi.

6) Відокремлюючи дійсну та уявну частини у відомих комплексних розкладах, можна часом просто отримати цікаві розклади у дійсній області.

а) Візьмемо прогресію

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad (|z|<1)$$

і приймемо $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Справа отримаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta),$$

а зліва — вираз

$$\frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{(1-r\cos\theta) - ir\sin\theta} = \frac{r\cos\theta - r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} + \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\cdot i\,.$$

Прирівнюючи дійсні та уявні складові з обох боків рівності (і скорочуючи на r), прийдемо до розкладів:

$$\frac{\cos\theta - r}{1-2r\cos\theta+r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\cos n\theta,$$

$$\frac{\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}\sin n\theta.$$

(порівняйте з пр. 440.11).

б) Вчинивши аналогічно з логарифмічним рядом:

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \quad (|z|<1),$$

отримаємо для $r<1$ (порівняйте з пр. 440.11):

$$\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta+r^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} r^n\frac{\cos n\theta}{n}\,,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n\frac{\sin n\theta}{n}\,.$$

Нехай $0 < \theta \leqslant \pi$; оскільки для $r = 1$ ряди справа продовжують збігатися (пр. 385.2), то можна, скориставшись теоремою Абеля (теор. 437.6), перейти тут до границі для $r \to 1{-}0$. Зліва отримаємо в першому випадку: $\frac{1}{2}\ln(2{-}2\cos\theta) = \ln 2\sin\frac{\theta}{2}$, а у другому: $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \frac{\pi-\theta}{2}$. Остаточно матимемо:

$$\ln 2\sin\frac{\theta}{2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}, \qquad \frac{\pi-\theta}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n} \qquad (0 < \theta \leqslant \pi).$$

(У третьому томі курсу ми зустрінемо багато чудових тригонометричних розкладів.)

7) У пр. 447.8 ми мали розклад

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\cdot\alpha^n,$$

де $P_n(x)$ — многочлени Льожондра. Змінюючи x у межах -1 та 1, приймемо тут $x = \cos\theta$:

$$\left(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos\theta)\cdot\alpha^n.$$

Замінимо тепер $2\cos\theta$ на $e^{\theta i} + e^{-\theta i}$; ми отримаємо

$$\begin{aligned}
&\left(1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \\
&= \left[1-\alpha\left(e^{\theta i}+e^{-\theta i}\right)+\alpha^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \left(1-\alpha e^{i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\alpha e^{-i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\
&= \left(1+\frac{1}{2}\alpha e^{i\theta}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^2 e^{2i\theta}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{2}\alpha e^{-i\theta}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^2 e^{-2i\theta}+\ldots\right).
\end{aligned}$$

Перемноживши ці два ряди згідно зі звичайним правилом і прирівнявши коефіцієнти при α^n в обох розкладах, ми прийдемо до виразу для $P_n(\cos\theta)$:

$$\begin{aligned}
P_n(\cos\theta) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(e^{ni\theta}+e^{-ni\theta}\right) + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{(n-1)i\theta}+e^{-(n-1)i\theta}\right) + \\
+ \frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(e^{(n-2)i\theta}+e^{-(n-2)i\theta}\right) + \ldots
\end{aligned}$$

Вирази в дужках тепер можна замінити послідовно на $2\cos n\theta$, $2\cos(n-1)\theta$, $2\cos(n-2)\theta$ тощо. Оскільки усі коефіцієнти тут є додатними, то цілком очевидно, що найбільшого значення цей вираз досягне, якщо $\theta = 0$, тобто, якщо $x = \cos 0 = 1$. Отже, скориставшись міркуваннями з області функцій комплексної змінної, ми знайшли цікавий результат, що цілковито відноситься до дійсної області: *на проміжку* $[-1, +1]$ *усі многочлени Льожондра досягають свого найбільшого значення на кінці проміжку, де* $x = 1$.

nebayduzhi.math@gmail.com

12.6. Ряди, що обгортають. Асимптотичні ряди. Формула Ойлера – Маклорена

462. Приклади

У 11.9 ми ознайомили читача з деякими найважливішими означеннями “узагальненої суми” для розбіжних рядів, причому самі **часткові суми** такого ряду були не дуже придатними для наближеного обчислення такої “суми”. Тепер ми знову розглянемо розбіжні ряди, але зовсім із іншого боку: ми покажемо, що **за наявності певних умов** саме часткові суми ряду певною мірою можуть давати чудові наближення до числа, що в якомусь розумінні “породило” цей ряд. Аби читач наперед відчув практичну важливість застосування розбіжних рядів у наближених обчисленнях, досить лише згадати про те, що цей метод застосовують астрономи, щоб заздалегідь обчислювати положення небесних тіл, причому точність отриманих ними результатів є цілком задовільною.

Ми спробуємо насамперед пояснити потрібні нам ідеї на двох простих прикладах.

1) Розглянемо логарифмічний ряд

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots \tag{462.1}$$

Добре відомо (розд. 405), що цей ряд є збіжним і відповідає функції $\ln(1+x)$ лише для $-1 < x \leqslant 1$. Поза цим проміжком (наприклад, для $x > 1$) ряд буде розбіжним і позбавленим суми. Однак і для значень $x > 1$ функція $\ln(1+x)$ продовжує бути пов’язаною з відрізками цього розбіжного ряду, бо, за *формулою Тейлора*,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x),$$

де “додатковий член” $r_n(x)$ можна взяти, скажімо, у формі Лаґранжа (розд. 126)

$$r_n(x) = \frac{1}{(1+\theta_1 x)^{n+1}} \cdot (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \theta \cdot (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (0 < \theta,\ \theta_1 < 1).$$

Як виявляється, *додатковий член менший за абсолютною величиною від першого відкинутого члена ряду й однаковий із ним за знаком* (як і для збіжного ряду, що задовольняє теорему Ляйбніца!). Отже, якщо замінити значення $\ln(1+x)$ при $x > 1$ відрізком розбіжного ряду (462.1), то ми отримаємо зручну оцінку похибки (і навіть знатимемо її знак). *Цього достатньо для того, щоб можна було скористатися вищезгаданим відрізком для наближеного обчислення числа* $\ln(1+x)$!

Звісно, якщо $0 < x \leqslant 1$, то зі збільшенням n до нескінченності похибка *прямуватиме* до 0; а для заданого n, якщо $x \to 0$, то навіть матимемо

$$\frac{r_n(x)}{x^n} \to 0, \quad \text{тобто} \quad r_n(x) = o(x^n),$$

тобто похибка буде нескінченно малою, порівняно з x, і порядок цієї нескінченно малої буде вище для більших n. Для довільного **фіксованого** $x > 1$ додатковий член зростає до нескінченності зі зростанням n, тож нема й мови про те, щоб для **даного** x *необмежено зменшувати* похибку за рахунок збільшення n. Однак, як показує сама оцінка

$$|r_n(x)| < \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

якщо x ***досить*** *близьке до* 1, то все ж таки можна зробити похибку ***довільно*** *малою*! Якщо x фіксоване, але близьке до 1, то абсолютні значення членів ряду (462.1), навіть при $x > 1$, будуть спершу зменшуватися, а саме: допоки виконується співвідношення

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n} = \frac{n}{n+1} x < 1 \quad \text{або} \quad n < \frac{1}{x-1},$$

а лише потім почнуть зростати. Вигідніше за все перервати ряд на члені з номером $n = E\left(\frac{1}{x-1}\right)$: так, для даного x, виходить *найкраще наближення* для числа $\ln(1+x)$.

У наведеному прикладі розглянутий ряд (462.1) усе ж таки був збіжним для $-1 < x \leqslant x$. Другий приклад повчальніший з тієї точки зору, що в ньому розглянуто постійно розбіжний ряд.

2) Розглянемо тепер

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{x+k} \quad (x > 0),$$

де $0 < c < 1$ (ряд збіжний!).

При $k < x$ маємо

$$\frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^3} - \frac{k^3}{x^4} + \dots;$$

якщо ж $k \geqslant x$, то ряд розбіжний. Але **формально** підставивши цей розклад у ряд, який визначає функцію $F(x)$, об'єднаємо подібні члени й отримаємо ряд

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_n}{x^n} + \dots, \tag{462.2}$$

де

$$A_n = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-1} c^k.$$

Легко переконатися, що ряди, які визначають коефіцієнти A_n, усі є збіжними. Але попередній ряд, вочевидь, розбіжний, бо

$$|A_n| \geqslant n^{n-1} c^n \quad \text{і} \quad \left|\frac{A_n}{x^n}\right| \geqslant \frac{n^{n-1} c^n}{x^n},$$

а останній вираз прямує до ∞, коли $n \to \infty$.

Для написаного розбіжного ряду (462.2) n-й відрізок буде:

$$S_n(x) = \sum_{v=1}^{n} \frac{A_v}{x^v} = \sum_{k=1}^{\infty} c^k \sum_{v=1}^{n} \frac{(-1)^{v-1} k^{v-1}}{x^v} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + (-1)^{n+1} \frac{k^n}{x^n}\right) \frac{c^k}{x+k},$$

тому “додатковий член”

$$r_n(x) = F(x) - S_n(x) = (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n c^k}{(x+k)x^n}.$$

Тут матимемо

$$r_n(x) = \theta \cdot (-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} k^n c^k \frac{1}{x^{n+1}} = \theta \cdot \frac{A_{n+1}}{x^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1).$$

Знову вбачаємо звичну особливість ряду, що задовольняє теорему Ляйбніца, хоч розглянутий ряд і є **розбіжним**. Звісно, наближено прирівнюючи $F(x)$ до часткової суми $S_n(x)$ цього розбіжного ряду *за* ***фіксованого*** x, *явно неможливо отримати* ***довільну*** *точність, однак її можна досягнути за* ***досить*** *великого* x. В даному випадку лишається слушним зауваження, що нарощування кількості збережених членів ряду вигідне лише доти, доки абсолютні значення членів зменшуються, тобто $\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| < 1$.

Очевидно, що за фіксованого n додатковий член $r_n(x)$ прямує до 0, якщо $x \to \infty$. Та, оскільки при цьому

$$x^n r_n(x) = \frac{\theta A_{n+1}}{x} \to 0,$$

то

$$r_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right), \tag{462.3}$$

тож $r_n(x)$ **виявляється нескінченно малою порядку вище** n**-го**. Що більше членів розбіжного ряду (462.2) утримано для наближеного подання функції $F(x)$, то вищого порядку малості буде похибка цього наближення, якщо $x \to \infty$!

463. Означення

Перейдемо до загальних формулювань і означень. Нехай дано числовий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \ldots. \tag{463.1}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

а) *Якщо його часткові суми почергово то менші, то більші за деяке число A, тобто якщо* ***додатковий член****, визначений формулою*

$$A = a_0 + a_1 + \dots + a_n + r_n, \tag{463.2}$$

є ***знакозмінним****, то кажуть, що ряд (463.1) обгортає число A.*

Проста рівність

$$r_n = a_{n+1} + r_{n+1}$$

робить очевидною **рівнозначність** даного формулювання наступному.

б) *Говорять, що ряд (463.1)* ***обгортає*** *число A, якщо:*
1) цей ряд — ***знакозмінний****;*
2) додатковий член r_n у формулі (463.2) менший за число a_{n+1} за абсолютною величиною і має однаковий із ним знак.
(Ми вживаємо термін “обгортає” і для випадків, коли вказана умова виконується лише для досить великих n (скажімо, для $n \geqslant n_0 > 1$.)

В попередньому розділі ми вже стикалися з такими рядами: ряд (462.1) обгортав $\ln(1 + x)$ (для довільного $x > 0$), а ряд (462.2) обгортав функцію $F(x)$, визначену в пр. 462.2 (також для $x > 0$).

Зауважимо, що в разі розбіжності ряду (463.1) він може обгортати й нескінченну кількість чисел A. Наприклад, ряд

$$1 - 2 + 2 - 2 + 2 - \dots$$

з частинними сумами $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \dots$, вочевидь, обгортає кожне з чисел проміжку $(-1, 1)$.

Властивість ряду, що обгортає, сформульована в означенні б), часто робить цей ряд цінним засобом для наближеного обчислення числа A, але зрозуміло, що не всілякий ряд, який обгортає число A, може бути використаний.

Нехай замість ряду (463.1) зі сталими членами і замість числа A маємо функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = a_0(x) + a_1(x) + \dots + a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots \tag{463.3}$$

і деяку функцію $A(x)$, причому усі функції $a_n(x)$ і $A(x)$ визначені в тій самій області $\mathcal{X}$. Щойно наведені означення числового ряду, який обгортає дане число, природним чином поширимо на випадок **функціонального** ряду, який **обгортає дану функцію**. Не зупиняючись на цьому, ми дамо нове означення щодо випадку, коли члени ряду, подібно до (463.3), містять параметр x, область зміни якого $\mathcal{X}$ має точкою згущення скінченне або нескінченне число ω. Як і раніше, додатковий член означимо рівністю

$$A(x) = a_0(x) + a_1(x) + \dots + a_n(x) + r_n(x).$$

в) *Ряд* (463.3) *називають* ***асимптотичним*** *розкладом* ***поблизу*** $x = \omega$ *функції* $A(x)$, *якщо для довільного фіксованого* n

$$\lim_{x\to\omega} \frac{r_n(x)}{a_n(x)} = 0. \tag{463.4}$$

При цьому, певна річ, припускаємо, що $a_n(x)$ відмінні від 0 (принаймні для x, досить близьких до ω).

Цей факт записують так:

$$A(x) \sim a_0(x) + a_1(x) + \dots + a_n(x) + \dots$$

Враховуючи

$$r_n(x) = a_{n+1}(x) + r_{n+1}(x)$$

та

$$\frac{r_n(x)}{a_n(x)} = \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \cdot \left[1 + \frac{r_{n+1}(x)}{a_{n+1}(x)}\right],$$

як наслідок із (463.4), отримуємо, що

$$\lim_{x\to\omega} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = 0. \tag{463.5}$$

Легко довести таке твердження.

Твердження 463.1. *Якщо ряд* (463.3) *обгортає функцію* $A(x)$, *причому виконується* (463.5), *то названий ряд є асимптотичним розкладом функції* $A(x)$ *поблизу* $x = \omega$.

Доведення. Справді, маємо

$$|r_n(x)| \leqslant |a_{n+1}(x)|,$$

тож

$$\left|\frac{r_n(x)}{a_n(x)}\right| \leqslant \left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|.$$

Тоді з припущення (463.5) безпосередньо випливає (463.4). □

Обидва ряди (462.1) і (462.2), наведені вище як приклади, є асимптотичними розкладами відповідних функцій, перший — поблизу $x = 0$, а другий — поблизу $x = \infty$.

В подальшому, нам **здебільшого** доведеться мати справу з асимптотичними розкладами вигляду

$$A(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots \tag{463.6}$$

поблизу $x = \infty$. Нагадаємо, що зміст написаного співвідношення полягає лише в тому, що, яким би не було фіксоване n, завжди

$$r_n(x) = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

або — в розгорнутому вигляді

$$\lim_{x\to\infty} \left[A(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \ldots - \frac{a_n}{x^n}\right] x^n = 0. \tag{463.7}$$

Отже, для "великих" x справедлива наближена формула

$$A(x) \doteq a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\,,$$

"якість" якої охарактеризовано рівністю (463.7).

Якщо переписати цю рівність у вигляді

$$\lim_{x\to\infty} \left[A(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \frac{a_2}{x^2} - \ldots - \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}\right] x^n = a_n, \tag{463.8}$$

то стане очевидною **єдиність** асимптотичного розкладу у вигляді (463.6) для функції $A(x)$ (звісно, з припущенням про допустимість такого розкладання). Згідно з формулою (463.8), всі коефіцієнти a_n можна визначити **послідовно**, і цілком однозначно!

Обернене твердження, однак, не є правильним: різні функції можуть мати **той самий** асимптотичний розклад. Наприклад, відомо, що $e^{-x} \cdot x^n \to 0$ при $x \to \infty$; з цієї причини очевидно, що всі функції вигляду $A(x) + C \cdot e^{-x}$ матимуть той самий асимптотичний розклад, що й функція $A(x)$.

Зауваження. Іноді, для зручності, писатимемо

$$B(x) \sim \varphi(x) + \psi(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}\,,$$

де $B(x)$, $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — функції, визначені в $\mathcal{X}$, водночас розуміючи, що

$$\frac{B(x) - \varphi(x)}{\psi(x)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}\,.$$

464. Основні властивості асимптотичних розкладів

Говорячи про "асимптотичні розклади", ми тут і далі маємо на увазі розклади вигляду (463.6). (Теорію таких розкладів розвинув Пуанкаре (фр. Henri Poincaré, Анрі Пуанкаре). Він же знайшов для них важливі застосування як у теорії диференціальних рівнянь, так і в небесній механіці.) Всі розглянуті функції далі ми вважаємо визначеними в області $\mathcal{X}$ з точкою згущення $+\infty$.

Властивість 464.1. *Якщо*

$$A(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad B(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{x^n}, \tag{464.1}$$

тоді (вочевидь) і

$$A(x) \pm B(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \pm b_n}{x^n},$$

тобто асимптотичні розклади можна додавати й віднімати почленно.

Властивість 464.2. *Асимптотичний розклад добутку $A(x) \cdot B(x)$ можна отримати формальним множенням розкладів (464.1), користуючись "правилом Коші".*

Доведення. Для будь-якого n

$$A(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

і

$$B(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots + \frac{b_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Перемноживши, отримаємо

$$A(x) \cdot B(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

де

$$c_m = \sum_{i=0}^{m} a_i b_{m-i}\,.$$

Це і є рівнозначним твердженню

$$A(x) \cdot B(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n},$$

що й потрібно було довести. □

Якщо ототожнити $B(x)$ із $A(x)$, то отримаємо асимптотичний розклад для квадрата: $[A(x)]^2$. Так само можна отримати асимптотичний розклад для функції $[A(x)]^m$, де m — довільне натуральне число.

Властивість 464.3. *Нехай дано функцію $F(y)$, аналітичну в точці $y = 0$, тобто яку можна розкласти в околі цієї точки в степеневий ряд:*

$$F(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m y^m = \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \dots + \beta_m y^m + \dots$$

Також розглянемо іншу функцію, $A(x)$, для якої існує асимптотичний розклад ***без вільного доданка****:*

$$A(x) \sim \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots, \tag{464.2}$$

тож $A(x) \to 0$, коли $x \to \infty$. В такому разі, принаймні для досить великих x, композиція функцій

$$F(A(x)) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m [A(x)]^m$$

має зміст.

Функція $F(A(x))$ також має асимптотичний розклад, який можна отримати з попереднього розкладу, якщо замість кожного степеня $[A(x)]^m$ підставити його асимптотичний розклад і формально звести подібні доданки (порівняйте з розд. 446!).

Доведення. Насамперед зауважимо, що в околі точки $y = 0$ функція $F(y)$ має неперервну (отже, обмежену) похідну, і для довільних двох точок цього околу y та $\overline{y}$ виконуватиметься нерівність

$$|F(\overline{y}) - F(y)| \leqslant L \cdot |\overline{y} - y| \quad (L = \text{const}).$$

Позначимо n-й відрізок ряду (464.2) як $A_n(x)$:

$$A_n(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}.$$

За фіксованого n, для досить великих x, обидві функції $A(x)$ і $A_n(x)$ належатимуть вказаному околу, тож

$$\left| x^n \left[F(A(x)) - F(A_n(x)) \right] \right| \leqslant L \cdot x^n |A(x) - A_n(x)| = L \cdot x^n |r_n(x)| \to 0,$$

коли $x \to \infty$, і

$$F(A(x)) = F(A_n(x)) + o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

З іншого боку, за теор. 446.1, для досить великих x:

$$\begin{aligned} &F(A_n(x)) = \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m [A_n(x)]^m = \\ &= \beta_0 + \frac{\beta_1 a_1}{x} + \frac{\beta_1 a_2 + \beta_2 a_1^2}{x^2} + \frac{\beta_1 a_3 + 2\beta_2 a_1 a_2 + \beta_3 a_1^3}{x^3} + \dots + \frac{\beta_1 a_n + \dots + \beta_n a_1^n}{x^n} + \\ &+ o\left(\frac{1}{x^n}\right). \end{aligned}$$

Беручи до уваги попередній вираз, можемо сформулювати **таку саму** рівність для $F(A(x))$, що й доводить правильність **асимптотичного** розкладу

$$F(A(x)) \sim \beta_0 + \frac{\beta_1 a_1}{x} + \frac{\beta_1 a_2 + \beta_2 a_1^2}{x^2} + \frac{\beta_1 a_3 + 2\beta_2 a_1 a_2 + \beta_3 a_1^3}{x^3} + \dots + \frac{\beta_1 a_n + \dots + \beta_n a_1^n}{x^n} + \dots,$$

про який йшлося. □

Наприклад, якщо розглянути

$$F(y) = e^y = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y^m}{m!},$$

то виявимо, що

$$e^{A(x)} \sim 1 + \frac{a_1}{x} + \left[\frac{a_2}{1!} + \frac{a_1^2}{2!}\right]\frac{1}{x^2} + \left[\frac{a_3}{1!} + \frac{2a_1 a_2}{2!} + \frac{a_1^3}{3!}\right]\frac{1}{x^3} + \dots + \left[\frac{a_n}{1!} + \dots + \frac{a_1^n}{n!}\right]\frac{1}{x^n} + \dots .$$

Цікавим застосуванням цієї теореми про підстановку ряду в ряд є (як і для збіжних степеневих рядів, розд. 448) *ділення асимптотичних розкладів функцій $B(x)$* і *$A(x)$* з тим припущенням, що вільний доданок a_0 другого з них не нульовий. Оскільки, порівняно із розд. 448, нових ідей тут немає, докладно не зупинятимемося на цьому.

Розглянемо **інтегрування** асимптотичних розкладів.

Нагадаємо (розд. 373), що інтегралом функції $f(x)$ від a до $+\infty$ називається границя

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx.$$

Властивість 464.4. *Нехай функція $A(x)$ неперервна на проміжку $\mathcal{X} = [a, +\infty)$ і допускає асимптотичне розкладання*

$$A(x) \sim \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots, \tag{464.3}$$

який ***починається з доданку, що містить*** $\frac{1}{x^2}$*. Тоді для цієї функції існує скінченний інтеграл від довільного $x \geqslant a$ до $+\infty$, і цей інтеграл (як функція від x) має асимптотичний розклад*

$$\int_x^{\infty} A(x)\,dx \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2}\cdot\frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}} + \dots, \tag{464.4}$$

який формально отримуємо з (464.3) ***почленним інтегруванням.***

Доведення. Справді, для

$$A_n(x) = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{x^k}, \quad r_n(x) = A(x) - A_n(x),$$

при довільному $\varepsilon \to 0$ і довільно фіксованому n, для досить великих x матимемо

$$x^n \cdot |r_n(x)| < \varepsilon. \tag{464.5}$$

Якщо $X > x$, то

$$\int_x^X A(x)\,dx = \int_x^X A_n(x)\,dx + \int_x^X r_n(x)\,dx = \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{k-1} \cdot \left(\frac{1}{x^{k-1}} - \frac{1}{X^{k-1}}\right) + \int_x^X r_n(x)\,dx.$$

Якщо $X \to \infty$, то отримаємо

$$\int_x^\infty A(x)\,dx = \frac{a_2}{1} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_3}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + R_{n-1}(x), \tag{464.6}$$

де

$$R_{n-1}(x) = \lim_{X\to\infty} \int_x^X r_n(x)\,dx = \int_x^\infty r_n(x)\,dx.$$

Оскільки, враховуючи (464.5), для досить великих x

$$\left|\int_x^X r_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_x^X |r_n(x)|\,dx < \varepsilon \int_x^X \frac{dx}{x^n} = \frac{\varepsilon}{n-1} \cdot \left(\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{X^{n-1}}\right),$$

то, роблячи граничний перехід для $X \to \infty$, матимемо (для зазначених x)

$$|R_{n-1}(x)| < \frac{\varepsilon}{x^{n-1}},$$

тож

$$\lim_{x\to\infty} x^{n-1} R_{n-1}(x) = 0,$$

а це, разом із рівністю (464.6), доводить правильність асимптотичного розкладу (464.4). ☐

Можна показати, що наявність в асимптотичному розкладі функції $A(x)$ доданка $\frac{a_1}{x}$ (при $a_1 \neq 0$) не існує скінченного інтеграла для цієї функції на проміжку від x до $+\infty$ (дивіться розд. 474).

Зауваження. Формальне почленне диференціювання асимптотичного розкладу в **загальному випадку** не є допустимим.

Розглянемо такий приклад:

$$F(x) = e^{-x} \sin e^{x}.$$

Для довільного n

$$\lim_{x\to\infty} F(x) \cdot x^{n} = 0,$$

тому $F(x) \sim 0$, тобто асимптотичний розклад функції $F(x)$ містить самі нулі. Втім, для похідної $F'(x) = e^{-x} \sin e^{x} + \cos e^{x}$ такий розклад зовсім неможливий, бо не існує навіть границі $\lim\limits_{x\to\infty} F'(x)$.

465. Виведення формули Ойлера – Маклорена

Ця формула відіграє важливу роль в аналізі. Зокрема, її повсякчас використовують для отримання конкретних розкладів, що обгортають, і асимптотичних розкладів. Ми дамо її виведення та вкажемо на застосування.

Виходячи з формули Тейлора із додатковим членом у формі визначеного інтеграла (розд. 318):

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) = hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x_0) + \varrho,$$

де додатковий член

$$\varrho = \frac{1}{m!} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f^{(m+1)}(t) \cdot (x_0+h-t)^m \, dt = \int\limits_{0}^{h} f^{(m+1)}(x_0+h-z) \cdot \frac{z^m}{m!} \, dz.$$

Тут і надалі, без додаткових вказівок, ми завжди припускаємо існування і неперервність усіх згадуваних похідних.

Замість f почергово підставлятимемо функції

$$\frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt, \quad f(x), \quad hf'(x), \quad h^2 f''(x), \quad \ldots, \quad h^{m-2} f^{(m-2)}(x),$$

одночасно замість m підставляючи

$$m,\ m-1,\ m-2,\ m-3,\ \ldots,\ 1.$$

Ми отримаємо систему із m рівностями:

$$\begin{array}{rr|l}
\frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = & f(x_0)+\frac{h}{2!}f'(x_0)+\frac{h^2}{3!}f''(x_0)+\dots+\frac{h^{m-1}}{m!}f^{(m-1)}(x_0)+\varrho_0 & 1 \\
\Delta f(x_0) = & hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(x_0)+\dots+\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x_0)+\varrho_1 & A_1 \\
h\Delta f'(x_0) = & h^2 f''(x_0)+\dots+\frac{h^{m-1}}{(m-2)!}f^{(m-1)}(x_0)+\varrho_2 & A_2 \\
\dots & \dots & \dots \\
h^{m-2}\Delta f^{(m-2)}(x_0) & =\frac{h^{m-1}}{1!}f^{(m-1)}(x_0)+\varrho_{m-1} & A_{m-1}
\end{array}$$

Виключимо з системи всі похідні у правих частинах. Для цього додамо почленно першу та другу рівність із усіма іншими, помноженими на числа $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ відповідно, які виберемо так, щоб виконувалися рівності

$$\begin{cases}
\frac{1}{2!}+A_1=0, \\
\frac{1}{3!}+\frac{1}{2!}A_1+A_2=0, \\
\dots \\
\frac{1}{m!}+\frac{1}{(m-1)!}A_1+\frac{1}{(m-2)!}A_2+\dots+A_{m-1}=0.
\end{cases} \tag{465.1}$$

В результаті знайдемо

$$\begin{aligned} f(x_0) =& \frac{1}{h}\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt + A_1\cdot\Delta f(x_0)+A_2 h\cdot\Delta f'(x_0)+\dots \\ & \dots + A_{m-1}h^{m-2}\cdot\Delta f^{(m-2)}(x_0)+r, \end{aligned} \tag{465.2}$$

де

$$r=-\varrho_0-A_1\varrho_1-A_2\varrho_2-\dots-A_{m-1}\varrho_{m-1}=$$
$$=-\frac{1}{h}\int\limits_0^h f^{(m)}(x_0+h-z)\cdot\left(\frac{z^m}{m!}+A_1\frac{hz^{m-1}}{(m-1)!}+A_2\frac{h^2z^{m-2}}{(m-2)!}+\dots+A_{m-1}h^{m-1}z\right)dz,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

або, коротше,

$$r = -\frac{1}{h}\int\limits_0^h f^{(m)}(x_0 + h - z)\varphi_m(z)\,dz, \tag{465.3}$$

де

$$\varphi_m(z) = \frac{z^m}{m!} + A_1\frac{hz^{m-1}}{(m-1)!} + A_2\frac{h^2z^{m-2}}{(m-2)!} + \dots + A_{m-1}h^{m-1}z. \tag{465.4}$$

Очевидно, що із системи лінійних рівнянь (465.1) коефіцієнти $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_{m-1}$ можна **однозначно** визначити один за одним незалежно від вибору функції f і чисел x_0 і h. Втім, ці коефіцієнти нам уже відомі — це коефіцієнти $\frac{\beta_k}{k!}$ розкладу $\frac{x}{e^x-1}$ за степенями x (449.1). Справді, якщо пригадати символічні рівняння:

$$(\beta + 1)^k - \beta^k = 0,$$

яких задовольняють числа β, то легко переконатися в тому, що саме ці числа $\frac{\beta_k}{k!}$ й будуть розв'язками рівнянь (465.1). Зі сказаного про числа β_k в розд. 449 випливає, що

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\beta_1}{1!} = -\dfrac{1}{2}, \\ A_{2p-1} = \dfrac{\beta_{2p-1}}{(2p-1)!} = 0 \quad \text{для} \quad p > 1, \\ \dots \\ A_{2p} = \dfrac{\beta_{2p}}{(2p)!} = (-1)^{p-1}\dfrac{B_p}{(2p)!}, \end{cases} \tag{465.5}$$

де B_p — це p-е число Я. Бернуллі.

Нехай функцію $f(x)$ задано на скінченному проміжку $[a, b]$; позначимо $h = \frac{b-a}{n}$, де n — натуральне число. Взявши за x_0 почергово числа

$$a,\ a + h,\ a + 2h,\ \dots,\ a + (n-1)h = b - h,$$

для кожного проміжку $[a + (i-1)\cdot h,\ a + ih]$ $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$ окремо напишемо рівність типу (465.2) з додатковим членом (465.3), і всі ці рівності почленно додамо. Отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n} f(a + (i-1)h) \equiv \sum_{a}^{b} f(x) = \frac{1}{h}\int\limits_a^b f(x)\,dx + A_1[f(b) - f(a)] + \\ + A_2h[f'(b) - f'(a)] + \dots + A_{m-1}h^{m-2}[f^{(m-2)}(b) - f^{(m-2)}(a)] + R, \tag{465.6}$$

де додатковий член

$$R = -\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{h} f^{(m)}(a+ih-z)\varphi_m(z)\,dz \equiv -\frac{1}{h}\sum_{a}^{b}\int_{0}^{h} f^{(m)}(x+h-z)\varphi_m(z)\,dz. \qquad (465.7)$$

Ця формула і є формулою Ойлера – Маклорена, до того ж вона містить додатковий член (який її автори, звісно, не писали). Числу m можна давати різні значення, починаючи з 2.

466. Дослідження додаткового члена

Насамперед зробимо кілька зауважень стосовно функцій $\varphi_m(z)$.

По-перше, продиференціювавши (465.4), отримаємо:

$$\varphi_m'(z) = \varphi_{m-1}(z) + A_{m-1}h^{m-1}. \qquad (466.1)$$

Далі, яким би не було $m \geqslant 2$, маємо

$$\varphi_m(0) = 0, \quad \varphi_m(h) = 0. \qquad (466.2)$$

Перше очевидне з самого вигляду многочлена $\varphi_m(z)$ (465.4), а друге випливає з останньої рівності системи (465.1).

Доведемо тепер таке твердження.

Твердження 466.1. *функція $\varphi_{2k}(z)$ (**парного** порядку) на проміжку $[0, h]$ не може набувати будь-якого значення більше, ніж двічі.*

Доведення. Припустимо протилежне; тоді її похідна (дивіться (466.1)) $\varphi_{2k}'(z) \equiv \varphi_{2k-1}(z)$ (адже $A_{2k-1} = 0!$) крім кінців проміжку $[0, h]$, дорівнювала б нулю всередині проміжку $[0, h]$ не менше як двічі (за теоремою Ролля). В такому разі похідна $\varphi_{2k-1}' \equiv \varphi_{2k-2} + A_{2k-2}h^{2k-2}$, за тією самою теоремою, мала би дорівнювати нулю всередині проміжку $[0, h]$ не менше як тричі, тобто функція $\varphi_{2k-2}(z)$ набувала б того самого значення: $-A_{2k-2}h^{2k-2}$ не менше як тричі. Так, поступово знижуючи порядок функції φ_{2k} на дві одиниці, ми дійшли би висновку, що функція $\varphi_2(z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}$ (**квадратичний** двочлен) набуває деякого значення не менше як тричі, що неможливо. Отримана суперечність і доводить те, що потрібно. □

З цього випливає важливий наслідок.

Твердження 466.2. *Функція $\varphi_{2k}(z)$ зберігає знак на проміжку $(0, h)$.*

Доведення. Дорівнюючи нулю на кінцях проміжку (466.2), всередині проміжку вона повинна бути ненульовою. □

Легко визначити, який знак має функція $\varphi_{2k}(z)$: для малих значень z (а отже, всюди між 0 і h) цей многочлен має знак молодшого доданка $A_{2k-2}h^{2k-2}$ ($A_{2k-1}=0$), тобто знак $(-1)^k$, оскільки $A_{2k-2}=(-1)^{k-2}\dfrac{B_{k-1}}{(2k-2)!}$.

Твердження 466.3. *Отже, кожна з двох послідовних функцій парного порядку $\varphi_{2k}(z)$ і $\varphi_{2k+2}(z)$* ***зберігають*** *певний знак на проміжку $(0,h)$, але їхні знаки* ***протилежні****.*

Ця зауваження нам знадобиться.

Повертаючись до додаткового члену R, вважатимемо тепер m **парним** числом, $m=2k$, і цього разу припустимо, що обидві похідні $f^{(2k)}(z)$ і $f^{(2k+2)}(z)$ на проміжку $[a,b]$ є **разом** або додатними, або **разом** від'ємними.

Вираз для R двічі інтегруємо частинами і, з урахуванням (466.1) і (466.2), отримуємо:

$$
\begin{aligned}
R &= \underline{-\frac{1}{h}\sum_a^b\int_0^h \varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(x+h-z)\,dz} = \\
&= \frac{1}{h}\sum_a^b\int_0^h \left(A_{2k}h^{2k}-\varphi'_{2k+1}(z)\right)f^{(2k)}(x+h-z)\,dz = \\
&= \frac{1}{h}A_{2k}h^{2k}\sum_a^b\left[f^{(2k-1)}(x+h)-f^{(2k-1)}(x)\right]-\frac{1}{h}\sum_a^b\int_0^h \varphi_{2k+1}(z)f^{(2k+1)}(x+h-z)\,dz = \\
&= A_{2k}h^{2k-1}\cdot\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right]-\frac{1}{h}\sum_a^b\int_0^h \varphi'_{2k+2}(z)f^{(2k+1)}(x+h-z)\,dz = \\
&= A_{2k}h^{2k-1}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right]\underline{-\frac{1}{h}\sum_a^b\int_0^h \varphi_{2k+2}(z)f^{(2k+2)}(x+h-z)\,dz}.
\end{aligned}
$$

Оскільки підкреслені суми інтегралів (з урахуванням прийнятих припущень) мають **протилежні знаки**, то *перша з них має той самий знак, що й вираз*

$$A_{2k}h^{2k-1}\left[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)\right]$$

і менша від нього за абсолютною величиною. Отже, остаточно

$$
\begin{aligned}
R = R_{2k} &= \theta\cdot A_{2k}h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)] = \\
&= \theta\cdot(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)] \qquad (466.3)\\
&(0<\theta<1).
\end{aligned}
$$

Якщо припустити, що **всі** похідні $f^{(2k)}(z)$ парного порядку зберігають знак на проміжку $[a, b]$, і замість формули (465.6) написати нескінченний ряд, враховуючи значення (465.5) коефіцієнтів A_m, то вийде нескінченний ряд Ойлера – Маклорена:

$$\begin{aligned}\sum_a^b f(x) =&\frac{1}{h}\int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(b)-f(a)] + \frac{B_1}{2!}h[f'(b)-f'(a)]-\\ &-\frac{B_2}{4!}h^3[f'''(b)-f'''(a)]+\dots+\\ &+(-1)^{k-2}\frac{B_{k-1}}{(2k-2)!}h^{2k-3}[f^{(2k-3)}(b)-f^{(2k-3)}(a)]+\\ &+(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k-1}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]+\dots.\end{aligned} \tag{466.4}$$

Цей ряд в загальному випадку є **розбіжним** (тому знак '=' поставлено тут умовно!). З урахуванням зроблених припущень він — принаймні від третього доданка — є знакозмінним. Враховуючи (466.3), можемо сказати, що наведений ряд **обгортає** суму $\sum\limits_a^b f(x)$ в лівій частині рівності. Якщо переставити цю суму й інтеграл $\frac{1}{h}\int\limits_a^b$, змінивши при цьому знаки всіх інших доданків на протилежні, то отримаємо ряд, який **обгортає** зазначений інтеграл.

Часткові суми цих рядів дають змогу, часом, із великою точністю обчислювати суму $\sum\limits_a^b$, знаючи інтеграл, або інтеграл $\frac{1}{h}\int\limits_a^b$, знаючи суму. Звісно, ***головну*** *роль тут відіграє той факт, що нам наперед відома* ***оцінка*** *додаткового члену.*

467. Приклади обчислень за допомогою формули Ойлера – Маклорена

1) Знайти наближене значення суми 900 (!) доданків

$$\sum_{i=100}^{i=999}\frac{1}{i} \equiv \sum_{100}^{1000}\frac{1}{x},$$

прийнявши $f(z) = 1/z$, $a = 100$, $b = 1000$, $h = 1$. Оскільки

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2}, \quad f''(z) = \frac{2}{z^3}, \quad f'''(z) = -\frac{6}{z^4}, \quad f^{(4)} = \frac{24}{z^5}, \quad f^{(5)} = -\frac{120}{z^6}$$

і, в загальному випадку,

$$f^{(2k)}(z) = \frac{(2k)!}{z^{2k+1}},$$

то умови щодо похідних парного порядку виконуються.

Ми продовжимо розкладання до члена, який містить f''', тому в додатковий член увійде вже $f^{(5)}$. В цьому разі формула Ойлера – Маклорена дасть:

$$\sum_{100}^{1000}\frac{1}{x}=\int\limits_{100}^{1000}\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{100^2}-\frac{1}{1000^2}\right)-\frac{6}{720}\left(\frac{1}{100^4}-\frac{1}{1000^4}\right)+$$
$$+\theta\cdot\frac{12}{3024}\left(\frac{1}{100^6}-\frac{1}{1000^6}\right)\quad(0<\theta<1).$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
\int\limits_{100}^{1000}\frac{dx}{x}=\ln 10 &= \quad 2{,}302\,585\,092\,994\,045\ldots,\\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{1000}\right) &= \quad 0{,}0045\\
\frac{1}{12}\left(\frac{1}{100^2}-\frac{1}{1000^2}\right) &= \quad 0{,}000\,008\,25\\
-\frac{6}{720}\left(\frac{1}{100^4}-\frac{1}{1000^4}\right) &= -\,0{,}000\,000\,000\,083\,325\\
& \quad\ \overline{2{,}307\,093\,342\,910\,720}\\
\theta\cdot\frac{12}{3024}\left(\frac{1}{100^6}-\frac{1}{1000^6}\right) &< \quad 0{,}000\,000\,000\,000\,004,
\end{aligned}$$

то з точністю до 10^{-14} можна прийняти

$$\sum_{100}^{1000}\frac{1}{x}=2{,}307\,093\,342\,910\,72.$$

2) Обчислимо

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{1+x}=\ln 2.$$

Тут $f(z)=\dfrac{1}{1+z}$, $a=0$, $b=1$; візьмемо $h=1/10$ $(n=10)$. Матимемо

$$f'(z)=-\frac{1}{(1+z)^2},\quad f''(z)=\frac{2}{(1+z)^3},\quad f'''(z)=-\frac{6}{(1+z)^4},$$

$$f^{(4)}(z)=\frac{24}{(1+z)^5},\quad f^{(5)}(z)=-\frac{120}{(1+z)^6},\quad \ldots,\quad f^{(2k)}(z)=\frac{(2k)!}{(1+z)^{2k}},$$

nebayduzhi.math@gmail.com

тож наші умови знову виконано. Скористаємося видозміненою формулою Ойлера – Маклорена, обірвавши її цього разу на члені, що містить f''':

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dz}{1+z} &= \frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}-\\ &\quad -\frac{1}{20}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{1200}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{6}{7\,200\,000}\left(1-\frac{1}{16}\right)-\\ &\quad -\theta\cdot\frac{12}{3\,024\,000\,000}\left(1-\frac{1}{64}\right)\qquad (0<\theta<1).\end{aligned}$$

Далі знаходимо

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{19} &= 0{,}718\,771\,403\\ -\frac{1}{20}\left(1-\frac{1}{2}\right) &= -\,0{,}025\\ -\frac{1}{1200}\left(1-\frac{1}{4}\right) &= -\,0{,}000\,625\\ \frac{6}{7\,200\,000}\left(1-\frac{1}{16}\right) &= 0{,}000\,000\,781\\ & \overline{0{,}693\,147\,184}\\ \theta\cdot\frac{12}{3\,024\,000\,000}\left(1-\frac{1}{64}\right) &< 0{,}000\,000\,004.\end{aligned}$$

Тому, з точністю до $1/2\cdot 10^{-8}$, отримуємо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0{,}693\,147\,18.$$

3) Покажемо, зрештою, як із використанням формули Ойлера – Маклорена можна наближено обчислити суму нескінченного ряду, який збігається повільно. Як приклад розглянемо наступний ряд:

$$\pi^2 = 6\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}.$$

Прийнявши в загальній формулі (465.6) (а також (466.3))

$$f(x)=\frac{1}{x^2},\quad h=1,\quad b=a+nh$$

де a і n — поки що довільні натуральні. Інтеграл і похідні легко обчислюємо; підставляючи замість A_m їхні вирази, отримаємо:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{(a+i)^2} = -\left[\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(a+n)^2}-\frac{1}{a^2}\right]-B_1\left[\frac{1}{(a+n)^3}-\frac{1}{a^3}\right]+$$
$$+B_2\left[\frac{1}{(a+n)^5}-\frac{1}{a^5}\right]-\ldots-(-1)^{k-2}B_{k-1}\left[\frac{1}{(a+n)^{2k-1}}-\frac{1}{a^{2k-1}}\right]-$$
$$-\theta_n(-1)^{k-1}B_k\left[\frac{1}{(a+n)^{2k+1}}-\frac{1}{a^{2k+1}}\right]\quad (0<\theta_n<1).$$

За фіксованих a і k перейдемо до границі, спрямувавши n до $+\infty$. Нескладно переконатися, що множник θ_n при цьому також прямує до деякого граничного значення θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, й у результаті:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(a+i)^2} = \frac{1}{a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^2}+B_1\cdot\frac{1}{a^3}-B_2\cdot\frac{1}{a^5}+B_3\cdot\frac{1}{a^7}-\ldots$$
$$\cdots+(-1)^{k-2}B_{k-1}\cdot\frac{1}{a^{2k-1}}+\theta\cdot(-1)^{k-1}B_k\cdot\frac{1}{a^{2k+1}}.$$

Приймемо тепер $a = 10$ і $k = 10$; скориставшися відомими значеннями чисел
Я. Бернуллі (розд. 449), остаточно знайдемо:

$$\pi^2 = 6\cdot\sum_{i=1}^{9}\frac{1}{i^2} = \frac{6}{10}+\frac{3}{100}+\frac{1}{1000}-\frac{1}{5\cdot 10^5}+\frac{1}{7\cdot 10^7}-\frac{1}{5\cdot 10^9}+$$
$$+\frac{5}{11\cdot 10^{11}}-\frac{691}{455\cdot 10^{13}}+\frac{7}{10^{15}}-\frac{3617}{85\cdot 10^{17}}+\frac{43867}{133\cdot 10^{19}}-\theta\cdot\frac{174611}{55\cdot 10^{21}}.$$

Обчислення проведемо з 19 знаками після коми:

$$\begin{aligned}
6\sum_{i=1}^{9}\frac{1}{i^2} &= 9{,}238\,606\,386\,999\,244\,142\,1\\
\frac{6}{10}+\frac{3}{100}+\frac{1}{1000} &= 0{,}631\\
-\frac{1}{5\cdot 10^5} &= -\,0{,}000\,002\\
\frac{1}{7\cdot 10^7} &= 0{,}000\,000\,014\,285\,714\,285\,7\\
-\frac{1}{5\cdot 10^9} &= -\,0{,}000\,000\,000\,2\\
\frac{5}{11\cdot 10^{11}} &= 0{,}000\,000\,000\,004\,545\,454\,5\\
-\frac{691}{455\cdot 10^{13}} &= -\,0{,}000\,000\,000\,000\,151\,868\,1\\
\frac{7}{10^{15}} &= 0{,}000\,000\,000\,000\,007\\
-\frac{3617}{85\cdot 10^{17}} &= -\,0{,}000\,000\,000\,000\,000\,425\,5\\
\frac{43867}{133\cdot 10^{19}} &= 0{,}000\,000\,000\,000\,000\,033\,0\\
& \overline{9{,}869\,604\,401\,089\,358\,621\,7}
\end{aligned}$$

Якщо взяти до уваги поправки на округлення й додатковий член, то виявимо, що

$$\pi^2 = 9{,}869\,604\,401\,089\,358\,62$$

з точністю до $1/2\cdot 10^{-17}$.

Цей приклад є вельми повчальним: суму π^2 **збіжного** ряду ми обчислили з дуже великою точністю за формулою Ойлера – Маклорена, на ділі скориставшись частковою сумою **розбіжного** ряду, який обгортає число π^2. Якби ми захотіли досягнути того самого, використовуючи самий збіжний ряд, то довелося б узяти понад мільярд його членів!

468. Інший вигляд формули Ойлера – Маклорена

Повернемося до формул (465.6) і (465.7), але тепер припустимо, що похідні функції $f(x)$ усіх порядків існують на нескінченному проміжку $[a,+\infty)$ і задовольняють наступні умови:

а) **всі** похідні $f^{(2k)}(z)$ парного порядку на цьому проміжку мають однаковий незмінний знак;

б) **всі** похідні $f^{(2k-1)}$ непарного порядку прямують до нуля, коли $z \to +\infty$.

Нехай число m парне: $m = 2k$. Числа a і h ми фіксуємо, а $b = a + nh$ (разом із n) будемо вважати змінними. Додатковий член R (дивіться (465.7) запишемо тепер у такому вигляді:

$$-\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(a+ih-z)\,dz + \frac{1}{h}\sum_{i=n+1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(a+ih-z)\,dz \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{h}\sum_{a}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(x+h-z)\,dz + \frac{1}{h}\sum_{b}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(x+h-z)\,dz.$$

Об'єднавши першу з цих сум з усіма членами формули (465.6), які містять a, в одну **сталу величину**:

$$C_k = -A_1 f(a) - A_2 h f'(a) - \ldots - A_{2k-2}h^{2k-3}f^{(2k-3)}(a) - \frac{1}{h}\sum_{a}^{\infty}\int_0^h,$$

яка не залежить від b **явно**, перепишемо формулу (465.6) так:

$$\sum_{a}^{b} f(x) = C_k + \frac{1}{h}\int_a^b f(x)\,dx + A_1 f(b) + A_2 h f'(b) + \cdots + A_{2k-2}h^{2k-2}f^{(2k-3)}(b) + R', \quad (468.1)$$

де

$$R' = \frac{1}{h}\sum_{i=n+1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(a+ih-z)\,dz = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^h \varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(b+ih-z)\,dz \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{h}\sum_{b}^{\infty}\int_0^b \varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(x+h-z)\,dz.$$

Для обґрунтування проведеного перетворення потрібно лише переконатись у **збіжності** використаних нескінченних рядів. Почнемо з ряду $\frac{1}{h}\sum\limits_{a}^{\infty}$. Із (466.4) випливає:

$$0 < \frac{\frac{1}{h}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\int\limits_0^h \varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(a+ih-z)\,dz}{A_{2k}h^{2k-1}\left[f^{(2k-1)}(a) - f^{(2k-1)}(a+nh)\right]} < 1.$$

За властивістю функції $\varphi_{2k}(z)$ (розд. 466) та з урахуванням припущення а), **усі доданки в чисельнику мають той самий знак**, який збігається зі знаком знаменника. Звідси, переходячи до границі для $n \to \infty$ та враховуючи припущення б), робимо висновок про збіжність ряду

$$\frac{1}{h}\sum_{a}^{\infty}\int\limits_{0}^{h}\varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(x+h-z)\,dz \equiv \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{h}\varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(a+ih-z)\,dz,$$

сума якого має той самий знак, що й вираз $A_{2k}h^{2k-1}\cdot f^{(2k-1)}(a)$, і за абсолютною величиною не перевищує його. Замінюючи в цих міркуваннях число a на b, переконаємось у збіжності ряду

$$\frac{1}{h}\sum_{b}^{\infty}\int\limits_{0}^{h}\varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(x+h-z)\,dz \equiv \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{h}\varphi_{2k}(z)f^{(2k)}(b+ih-z)\,dz,$$

а також у тому, що його сума має той самий знак, що й вираз $A_{2k}h^{2k-1}\cdot f^{(2k-1)}(b)$, і за абсолютною величиною не перевищує його.

Отже, ми не лише переконались у збіжності застосованих нескінченних рядів, але заразом і з'ясували, що додатковий член R' у формулі (468.1) можна записати у вигляді

$$R' = \theta\cdot A_{2k}h^{2k-1}\cdot f^{(2k-1)}(b) = \theta\cdot(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k-1}\cdot f^{(2k-1)}(b) \quad (0<\theta<1). \tag{468.2}$$

Вельми цікавим є те, що **стала C_k у формулі** (468.2), для якої — за самим способом її утворення — можливою була залежність від k, насправді від k не залежить! Для того, що у цьому впевнитись, досить порівняти формули (468.1) і (468.2), написаними для $k=1$:

$$\sum_{a}^{b} f(x) = C_1 + \frac{1}{h}\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx + A_1 f(b) + \overline{R}',$$

де

$$\overline{R}' = \overline{\theta}\cdot A_2 h\cdot f'(b) \quad (0<\overline{\theta}<1).$$

Маємо

$$C_1+\overline{\theta}\cdot A_2h\cdot f'(b) = C_k + A_2h\cdot f'(b)+\cdots+A_{2k-2}h^{2k-3}\cdot f^{(2k-3)}(b)+\theta\cdot A_{2k}h^{2k-1}\cdot f^{(2k-1)}(b).$$

Якщо здійснити граничний перехід для $b\to\infty$, то — з урахуванням припущення б) — отримаємо: $C_k = C_2 = C$. Стала C, яку природно було б назвати *сталою Ойлера – Маклорена для функції* $f(x)$, крім цієї функції залежить і від вибору a і h.

Зауваження. При граничному переході нам варто було би до знаків нерівності додати знаки рівності, і для множника θ в (468.2) написати $0\leqslant\theta\leqslant1$. Одразу зрозуміло, що рівність нулю відразу відпадає — сума нескінченного ряду з членами одного знака не може бути нулем. Якщо ж припустити $\theta = 1$, то — при збільшенні у формулі (468.1) номера k на одиницю — мали б $R' = 0$, але це неможливо, як було щойно показано. Отже, на справі $0 < \theta < 1$, як ми й писали.

Напишемо замість скінченної суми (468.1) нескінченний ряд. Ми отримаємо *ряд Ойлера – Маклорена* в наступному вигляді:

$$\sum_a^b f(x) = C + \frac{1}{h}\int\limits_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}f(b) + \frac{B_1}{2!}hf'(b) - \frac{B_2}{4!}h^3 f'''(b) + \dots$$
$$\dots + (-1)^{k-2}\frac{B_{k-1}}{(2k-2)!}h^{2k-3}f^{(2k-3)}(b) + (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k-1}f^{(2k-1)}(b) + \dots$$

(Знак ‘=’ тут має лиш умовний зміст!) З урахуванням припущення а), всі похідні $f^{(2k-1)}(b)$ зі зростанням b змінюються в одному напрямку; а оскільки, згідно з припущенням б), вони прямують до нуля, коли $b \to \infty$, то всі вони мають один і той самий знак. Звідси (і з (468.2)) робимо висновок, що і в новій формі ряд Ойлера – Маклорена **обгортає** суму $\sum\limits_a^b f(x)$ із правої частини рівняння.

Зауваження. Зробимо, на завершення, пояснення стосовно можливості визначити саму сталу C, що фігурує в написаному вище розкладі. Вибравши деяке $b > a$, для якого і сума, і інтеграл легко обчислюються, можна для числа C отримати ряд, що його **обгортає**:

$$C = \sum_a^b f(x) - \frac{1}{h}\int\limits_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{2}f(b) - \frac{B_1}{2!}hf'(b) + \frac{B_2}{4!}h^3 f'''(b) - \dots,$$

який у багатьох випадках і дає змогу знайти наближене значення C.

469. Формула і ряд Стьорліна

Для прикладу використання отриманих раніше розкладів, обчислимо з їх використанням

$$\ln(n!) = \ln n + \sum_{i=1}^{n-1} \ln i.$$

Прийнявши $a = 1$, $h = 1$ і (замінивши n на $n-1$) $b = n$, а також

$$f(z) = \ln z, \quad \text{тож} \quad f^{(m)}(z) = (-1)^{m-1}\frac{(m-1)!}{z^m}.$$

Умови а) й б) буде виконано. Отже, отримаємо **асимптотичний розклад** для $\ln(n!)$:

$$\ln(n!) \sim C + \left(n + \frac{1}{2}\right)\cdot \ln n - n + \frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{B_2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k-1)\cdot 2k}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}} + \dots. \tag{469.1}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

До суми логарифмів додаємо окремо написаний $\ln n$. Число 1, яке виникає внаслідок інтегрування, включене до C.

Це — так званий *ряд Стьорліна*; він, вочевидь, розбіжний, бо модуль його спільного члену (розд. 449), який дорівнює $\dfrac{s_{2k}}{2\pi^2 n}\cdot\dfrac{(2k-2)!}{(2\pi n)^{2k-2}}$, прямує до ∞.

З асимптотичного розкладу $\ln(n!)$, як було вказано в вл. 464.3, можна отримати розклад і для самого факторіала. А саме, підставляючи замість коефіцієнтів B_k їхні числові значення, отримаємо:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51849n^3}-\frac{571}{2488320n^4}+\ldots\right).$$

Якщо обмежити ряд (469.1) наведеними доданками, доповненими додатковим членом, то матимемо **формулу Стьорліна**:

$$\begin{gathered}\ln(n!) = C+\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln n-n+\frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{B_2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots\\ \cdots+(-1)^{k-1}\frac{B_k}{(2k-1)\cdot 2k}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}}+\theta\cdot(-1)^k\frac{B_{k+1}}{(2k+1)(2k+2)}\cdot\frac{1}{n^{2k+1}},\end{gathered}\tag{469.2}$$

яка, як далі буде показано, вже цілком придатна для наближених обчислень.

Прийнявши $k=1$, отримаємо простий і важливий частковий випадок **формули Стьорліна**:

$$\ln(n!) = C+\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln n-n+\frac{\theta}{12n};$$

потенціюючи, її зазвичай записують у вигляді:

$$n! = e^C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

Цю формулу в розд. 406 ми вже вивели іншим способом; також ми там з'ясували, що $e^C = a = \sqrt{2\pi}$, тож невідома нам досі стала C є рівною $\frac{1}{2}\ln 2\pi$.

Обчислимо для прикладу $\ln(100!)$ із десятьма знаками після коми — за формулою (469.2), прийнявши $k=2$. Додавши всього п'ять чисел

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln 2\pi &= 0{,}918\,938\,533\,204\\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln n = 100{,}5\cdot\ln 100 &= 462{,}819\,603\,691\,803\\ -n &= -100\\ \frac{B_1}{2n} = \frac{1}{1200} &= 0{,}000\,833\,333\,333\\ -\frac{B_2}{12n^3} = -\frac{1}{36\cdot 10^7} &= -0{,}000\,000\,002\,777,\end{aligned}$$

отримаємо для $\ln(100!)$ значення $363{,}739\,375\,555\,6$, точне до $1/2\cdot 10^{-10}$ (з урахуванням додаткового члена й поправок на округлення). Точність наближення можна **значно** покращити, взявши більше доданків і в кожному обчисливши більше знаків після коми. Ця точність буде зростати — в даному випадку — приблизно до 300-го члена (поки члени за абсолютною величиною продовжують спадати).

Зауваження. Читач у низці прикладів бачив, що відрізки напевне розбіжних рядів інколи дають змогу обчислювати значення потрібних величин із дуже великою точністю. Подібні ряди і раніше, й у наш час деякі автори називали “напів розбіжними”. Ми, однак, вирішили відмовимося від цього терміну, бо не можемо означити його досить точно й узагальнено водночас.

Глава 13

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

13.1. Невласні інтеграли з нескінченними межами

470. Означення інтегралів з нескінченними межами

В главі 9 було досліджено поняття визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ для випадку **скінченного** проміжку $[a,b]$ й **обмеженої** функції $f(x)$. Ця глава присвячена узагальненню цього поняття в різних напрямах. Почнемо з розгляду інтеграла, поширеного на **нескінченний** проміжок.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a,+\infty)$, тобто для $x \geqslant a$, та інтегровна на його довільній скінченній частині $[a,A]$; тоді інтеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ має зміст для довільного $A > a$.

Границю цього інтеграла (скінченну чи нескінченну), коли $A \to +\infty$, називають ***інтегралом функції*** $f(x)$ ***на проміжку від*** a ***до*** $+\infty$ й позначають символом

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx. \tag{470.1}$$

В разі, коли ця границя скінченна, кажуть, що інтеграл (470.1) **збіжний**, а функцію $f(x)$ називають **інтегровною** на нескінченному проміжку $[a,+\infty)$. Якщо границя (470.1) нескінченна чи взагалі не існує, тоді кажуть, що інтеграл **розбіжний**. На відміну від розглянутого раніше інтеграла у власному сенсі, або **власного** інтеграла, тут щойно означений інтеграл (470.1) називають **невласним**. Ми вже стикалися з поняттям невласного інтеграла в розд. 373.

Розглянемо **приклади**.

1) Функція

$$\frac{1}{1+x^2}$$

інтегровна на довільному скінченному проміжку $[0,A]$ $(A>0)$, водночас маємо

$$\int\limits_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^A = \operatorname{arctg} A.$$

Спрямуємо $A \to +\infty$. Оскільки для цього інтеграла існує скінченна границя $\frac{\pi}{2}$, то інтеграл від 0 до $+\infty$ збігається й має значення

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

2) Дослідимо питання, за яких значень показника $\lambda > 0$ існує невласний інтеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \quad (a>0). \tag{470.2}$$

Нехай $\lambda \neq 1$, тоді

$$\int\limits_0^A \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda} \Big|_a^A = \frac{1}{1-\lambda}(A^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}).$$

Цей вираз для $A \to \infty$ має границю ∞ або скінченне число $\frac{1}{1-\lambda} a^{1-\lambda}$, залежно від того, буде $\lambda < 1$ або $\lambda > 1$.

Якщо $\lambda = 1$, маємо

$$\int\limits_a^A \frac{dx}{x^\lambda} = \ln x \Big|_a^A = \ln A - \ln a$$

що прямує до ∞, коли $A \to \infty$.

Отже, інтеграл (470.2) збіжний (і має значення $\frac{1}{1-\lambda} a^{1-\lambda}$), якщо $\lambda > 1$, і розбіжний, якщо $\lambda \leqslant 1$.

Аналогічно до (470.1) визначимо й інтеграл функції $f(x)$ на проміжку від $-\infty$ до a:

$$\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{A'\to-\infty} \int\limits_{A'}^a f(x)\,dx \quad (A' < a); \tag{470.3}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

так само й інтеграл функції $f(x)$ на проміжку від $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A'\to-\infty\\ A\to+\infty}} \int\limits_{A'}^{A} f(x)\,dx. \tag{470.4}$$

Для цих випадків діє та сама термінологія, яку було введено для інтеграла (470.1).

В останньому випадку, взявши довільне число a, можна прийняти

$$\int\limits_{A'}^{A} f(x)\,dx = \int\limits_{A'}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{A} f(x)\,dx,$$

й існування границі для $A' \to -\infty$, $A \to +\infty$ для інтеграла в лівій частині рівності, вочевидь, рівнозначне з існуванням границь (470.1) і (470.3) окремо. (Виняток становить лише випадок, коли обидва інтеграли дорівнюють нескінченностям, але різних знаків.) Отже, інтеграл від $-\infty$ до $+\infty$ можна означити й рівністю

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

припускаючи, що кожен із інтегралів у правій частині існує. Це означення не залежить від вибору точки a.

Приклади.

3)

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A'\to-\infty} \int\limits_{A'}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A'\to-\infty} (-\operatorname{arcctg} A') = \frac{\pi}{2};$$

4)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty} = \pi.$$

471. Застосування основної формули інтегрального числення

В наведених вище прикладах інтеграл на скінченному проміжку ми обчислювали обчисленням первісної, після чого переходили до границі. Можна об'єднати ці обидві дії в одній формулі.

Нехай, наприклад, функцію $f(x)$ визначено на проміжку $[a, +\infty)$ і вона інтегровна на кожній скінченній його частині $[a, A]$. Якщо для $f(x)$ при цьому існує первісна

$F(x)$ на всьому проміжку $[a, +\infty)$, то за основною формулою інтегрального числення (308.1)

$$\int\limits_a^A f(x)\,dx = F(A) - F(a) = F(x)\Big|_a^A.$$

Звідси зрозуміло, що невласний інтеграл (470.1) існує тоді й тільки тоді, коли існує скінченна границя

$$\lim_{A\to\infty} F(A) = F(\infty),$$

і тоді

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = F(\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^\infty.$$

Аналогічно

$$\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^a,$$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-\infty}^\infty,$$

якщо через $F(-\infty)$ позначити границю $\lim\limits_{A'\to-\infty} F(A')$. Сама можливість обчислення подвійної заміни, пов'язана з існуванням і скінченністю границі, що фігурує в ній, уже свідчить про збіжність інтеграла.

Звернемося до прикладів.

472. Приклади

1)

$$\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx \quad (a > 0).$$

Оскільки первісна функція

$$F(x) = -\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}\cdot e^{-a},$$

то $F(0) = -\dfrac{b}{a^2+b^2}$ і $F(\infty) = 0$ і

$$\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}\,.$$

Аналогічно

$$\int\limits_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{b\sin bx - a\cos bx}{a^2+b^2}\cdot e^{-ax}\Big|_0^\infty = \frac{a}{a^2+b^2}\,.$$

2)

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} =$$

$$= \left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}+1\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right)\right]\Bigg|_0^\infty =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

3)

$$\int\limits_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx = \cos\frac{1}{x}\Big|_{2/\pi}^\infty = 1.$$

4)

$$\int\limits_0^\infty \sin x\,dx.$$

Первісною функцією тут буде $-\cos x$, але подвійна підстановка $-\cos x\Big|_0^\infty$ тут не має змісту, оскільки $\cos x$ не прямує ні до якої границі, коли $x\to\infty$: інтеграл не існує.

5)

$$\int\limits_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,dx.$$

Інтегруючи частинами й розкладаючи на прості дроби, знаходимо первісну функцію

$$F(x) = \int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,dx = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\ln x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{8}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,.$$

Маємо:

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \frac{1}{8};$$

це значення границі й будемо вважати за значення функція $F(x)$ у точці $x=0$. З іншого боку, $F(+\infty)=0$. Тому значення інтеграла становить $-\frac{1}{8}$.

6) Для тіла, отриманого обертанням гіперболи $xy=1$ навколо осі x, обчислити об'єм і площу бічної поверхні тієї його частини, яка обмежена нерівністю $x\geqslant 1$.

Скінченна частина тіла, яка відповідає зміні x від 1 до A $(A > 1)$, має об'єм і бічну поверхню

$$V_A = \pi \int\limits_1^A \frac{dx}{x^2}, \quad S_A = 2\pi \int\limits_1^A \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,dx.$$

Природно буде за об'єм V і площу бічної поверхні S всього тіла (яке простягається до нескінченності) прийняти границі цих величин, тобто прийняти

$$V = \pi \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}, \quad S = 2\pi \int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\,dx.$$

Однак попри те, що перший інтеграл збігається (пр. 470.2), і для об'єму виходить скінченне значення π, другий інтеграл розбігається, що вказує на нескінченне значення площі бічної поверхні.

Для того, щоб переконатися в останньому, достатньо зауважити, що

$$S_A > 2\pi \int\limits_1^A \frac{dx}{x} = 2\pi \ln A,$$

і S_A прямує до ∞, коли $A \to \infty$.

7) Нехай у початку координат O розташовано масу m, яка притягує матеріальну точку M маси 1, що розташована на осі OX на відстані x від O, із силою

$$F = \frac{m}{x^2}$$

(за законом Ньютена). Яку роботу A здійснить сила F при переміщенні точки M уздовж осі OX із положення, яке відповідає $x = r$, у нескінченність?

Робота, вочевидь, буде **від'ємною**, бо сила спрямована проти руху. Поширюючи на цей випадок формулу (353.1), знайдемо:

$$A = \int\limits_r^\infty -\frac{m}{x^2}\,dx = \frac{m}{x}\bigg|_r^\infty = -\frac{m}{r}.$$

Для оберненого переміщення точки M із нескінченності до відстані $x = r$ сила тяжіння здійснить **додатну** роботу $\frac{m}{r}$. Цю величину називають *потенціалом* розглянутої сили на точку M, і вона слугує мірою накопиченої в точці *потенціальної енергії.*

8) Для роботи, виконуваної газом при його розширенні від об'єму V_1 до об'єму V_2 $(V_2 > V_1)$, ми отримали формулу (354.1):

$$A = \int\limits_{V_1}^{V_2} p\,dV.$$

Нехай дано деяку масу ідеального газу, який займає об'єм V_1 за тиску p_1. Припустимо, що газ розширюється до нескінченності без теплообміну із зовнішнім середовищем (адіабатний процес). В цих умовах, як відомо з пр. 361.3, справедлива формула Пуассона

$$pV^k = c \quad \left(\text{де } k = \frac{c_p}{c_v} > 1 \right).$$

Тоді робота, яка могла би бути виконана над газом при такому розширенні, буде

$$A_{\text{макс}} = \int\limits_{V_1}^{\infty} cV^{-k}\,dv = \frac{c}{1-k}\cdot\frac{1}{V^{k-1}}\Bigg|_{V_1}^{\infty} = \frac{c}{k-1}\cdot\frac{1}{V_1^{k-1}}.$$

Беручи до уваги, що $c = p_1V_1^k$, і підставляючи це в отриману формулу, остаточно знайдемо

$$A_{\text{макс}} = \frac{p_1V_1}{k-1}.$$

9) У пр. 356.8 ми визначили силу F, з якою скінченний прямолінійний відрізок струму діє на одиничний "магнітний заряд":

$$F = \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{aI}{(a^2+s^2)^{3/2}}\,ds.$$

Розглянемо тепер випадок **нескінченного** (в обидва боки) провідника, тобто приймемо $s_1 = -\infty$, $s_2 = +\infty$. Тоді

$$F = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{aI}{(a^2+s^2)^{3/2}}\,ds = \frac{I}{a}\cdot\frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2I}{a}.$$

Звісно, **нескінченний** провідник — це абстракція. Втім, отриманий результат може виявитися корисним: у випадку дуже довгого провідника його вигідно наближено розглядати як нескінченний, адже так ми досягаємо значного спрощення формули!

10) Якщо в електричному колі із самоіндукцією в момент часу $t = 0$ струм сили I_0 розімкнути, то в ньому виникне **екстраструм розімкнення**, що підпорядковується закону

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

(дивіться пр. 359.4; надалі збережено колишні позначення). Обчислимо повну кількість теплоти Q, яка виділяється цим струмом у провіднику внаслідок закону Джула (англ. James Joule, Джéймс Джýл).

Елементарна кількість теплоти за проміжок часу $[t,\ t+dt]$ становить

$$dQ = I^2R\cdot dt.$$

Сумуючи вздовж **нескінченного** проміжку, отримаємо:

$$Q=\int\limits_0^\infty I^2R\cdot dt=RI_0^2\cdot\int\limits_0^\infty e^{-\frac{2R}{L}t}\,dt=\frac{1}{2}LI_0^2.$$

Зазначимо, що хоч дійсний струм за скінченний проміжок часу стає нехтовно малим, для визначення повної кількості енергії струму, яка переходить у теплоту, потрібно інтегрувати за нескінченним проміжком.

473. Аналогія з рядами. Найпростіші теореми

В подальшому, ми обмежимось інтегралами вигляду (470.1): все сказане про них легко перенести на випадки (470.3) і (470.4). Водночас ми завжди будемо припускати, що функція $f(x)$ інтегровна у **власному сенсі** між довільними межами a і $A > a$, тож питання стосується лише **невласного** інтеграла від a до ∞.

Між невласними інтегралами $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ і числовими рядами $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ існує глибока аналогія, яку корисно підкреслити.

Якщо процес **сумування** за n замінити на процес **інтегрування** за x, то аналогами будуть

спільний член ряду a_n	підінтегральна функція $f(x)$
часткова сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n$	власний інтеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$
сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ як границя часткової суми, коли $N\to\infty$	невласний інтеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ як границя власного інтеграла, коли $A\to\infty$
залишок ряду $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$	інтеграл $\int\limits_A^\infty f(x)\,dx$

Перелічимо **найпростіші** теореми про невласні інтеграли, схожі з теоремами з розд. 364 про ряди. Їх доведення, з використанням зазначеної аналогії, надамо читачеві.

Теорема 473.1. *Якщо інтеграл* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *збігається, то збігатиметься й інтеграл* $\int\limits_A^\infty f(x)\,dx$ $(A > a)$, *і навпаки. Водночас*

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \int\limits_a^A f(x)\,dx + \int\limits_A^\infty f(x)\,dx.$$

Теорема 473.2. *Якщо інтеграл* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *збігається, то*

$$\lim_{A\to\infty} \int\limits_A^\infty f(x)\,dx = 0.$$

Теорема 473.3. *Якщо інтеграл* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *збігається, то збігається й інтеграл* $\int\limits_a^\infty c \cdot f(x)\,dx$ $(c = \mathrm{const})$, *причому*

$$\int\limits_a^\infty c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int\limits_a^\infty f(x)\,dx.$$

Теорема 473.4. *Якщо збігаються обидва інтеграли* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *і* $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$, *то збігається й інтеграл* $\int\limits_a^\infty [f(x) \pm g(x)]\,dx$, *і*

$$\int\limits_a^\infty [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx \pm \int\limits_a^\infty g(x)\,dx.$$

474. Збіжність інтеграла у випадку додатної функції

Якщо функція $f(x)$ **додатна (невід'ємна)**, тоді інтеграл

$$\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx \tag{474.1}$$

монотонно зростає як функція змінної A. Питання про існування для неї скінченної границі для $A \to \infty$ дуже просто вирішити користуючись теоремами про границю монотонної функції (розд. 57).

nebayduzhi.math@gmail.com

Твердження 474.1. *Для збіжності невласного інтеграла (470.1) від* ***додатної*** *функції $f(x)$ необхідно й достатньо, щоб інтеграл (474.1) в міру зростання залишався обмеженим зверху:*

$$\int_a^A f(x)\,dx \leqslant L \quad (L = \text{const}).$$

Якщо ж цю умову не виконано, тоді інтеграл (470.1) має значення ∞ (розд. 365).

На цьому ґрунтується наступна "теорема порівняння" для інтегралів від додатних функцій.

Теорема 474.1 (Теорема порівняння)**.** *Якщо хоча би для $x \geqslant A\,(A \geqslant a$ виконується нерівність $f(x) \leqslant g(x)$, то зі збіжності інтеграла $\int_a^\infty g(x)\,dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$ або, що те саме, з розбіжності $\int_a^\infty f(x)\,dx$ випливає розбіжність $\int_a^\infty g(x)\,dx$.*

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теор. 366.1.

Часто є корисною наступна теорема, яка випливає з першої.

Теорема 474.2. *Якщо існує границя*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \quad (0 \leqslant K \leqslant +\infty),$$

то зі збіжності інтеграла $\int_a^\infty g(x)\,dx$, коли $K < +\infty$, випливає збіжність інтеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$, а з розбіжності першого інтеграла для $K > 0$, випливає розбіжність другого. Отже, для $0 < K < +\infty$ обидва інтеграли є збіжними або розбіжними одночасно.

Доведення таке саме, як для аналогічної теор. 366.2 (також дивіться теор. 473.3).

Вибираючи конкретну функцію для порівняння, можна звідси отримати частинні ознаки збіжності чи розбіжності інтеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Практичне значення має порівняння з функцією $\frac{1}{x^\lambda}$, яка є інтегровною на проміжку від $a > 0$ до $+\infty$ для $\lambda > 1$ і не є такою для $\lambda \leqslant 1$ (пр. 470.2). На цьому побудовано наступні ознаки Коші.

Теорема 474.3. *Нехай для досить великих x функція $f(x)$ має вигляд*

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

Тоді:

1) *Якщо $\lambda > 1$ і $\varphi(x) \leqslant c < +\infty$, то інтеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ збігається.*

2) *Якщо ж $\lambda \leqslant 1$ і $\varphi(x) \geqslant c > 0$, тоді цей інтеграл розбігається.*

Доведення. Для доведення потрібно скористатися теор. 474.1; функцією порівняння є $\frac{c}{x^\lambda}$ (дивіться теор. 473.3). □

Теорема 474.4. *Якщо для $x \to \infty$ функція $f(x)$ є нескінченно малою порядку $\lambda > 0$ $\left(\text{порівняно з } \frac{1}{x}\right)$, то інтеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ збігається або розбігається залежно від того, буде $\lambda > 1$ або ж $\lambda \leqslant 1$.*

Доведення. Тут посилаємося на теор. 474.2; роль функції $g(x)$ відіграє $\frac{1}{x^\lambda}$. □

Приклади.

1)

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\,dx, \quad \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Підінтегральні вирази для $x \to \infty$ є нескінченно малими порядків $\frac{1}{2}$ і 2 відповідно. Отже, перший інтеграл розбігається, другий — збігається.

2)

$$\int\limits_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

де многочлен $P(x)$ є цілим многочленом степеня m, а $Q(x)$ є цілим многочленом степеня $n > m$, який не має коренів на проміжку $[a, \infty)$.

Для досить великих x підінтегральний вираз зберігає знак. Тому (в разі необхідності змінюючи знак) можна застосувати наведені вище ознаки. Підінтегральна функція є (коли $x \to \infty$) нескінченно малою порядку $n - m$. Тому для $n = m + 1$ інтеграл розбіжний, а для $n \geqslant m + 2$ — збіжний. (Для $n \leqslant m$ він, вочевидь, розбіжний.)

475. Збіжність інтеграла в загальному випадку

Питання існування невласного інтеграла $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, згідно з означенням (470.1), можна звести до питання існування скінченної границі для функції від A:

$$\Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx, \tag{475.1}$$

коли $A \to \infty$.

Застосовуючи до цієї функції ознаку Больцано – Коші (теор. 58.1), умову існування невласного інтеграла можна подати так.

Теорема 475.1. *Для збіжності невласного інтеграла* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *(з припущенням, що на кожному проміжку* $[a, A]$, $A > a$, *функція* $f(x)$ *інтегровна у власному сенсі) необхідно й достатньо, щоб кожному числу* $\varepsilon > 0$ *відповідало таке число* $A_0 > a$, *щоб для* $A > A_0$ *і* $A' > A_0$ *виконувалася нерівність*

$$|\Phi(A') - \Phi(A)| = \left|\int\limits_a^{A'} f(x)\,dx - \int\limits_a^{A} f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_A^{A'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Цей критерій дає змогу легко отримати таке твердження.

Наслідок 475.1.1. *Якщо інтеграл* $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ *збігається, тоді (з припущенням, що на кожному проміжку* $[a, A]$, $A > a$, *функція* $f(x)$ *інтегровна у власному сенсі) напевне збігається й інтеграл* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Доведення. Справді, застосовуючи наведений критерій до інтеграла $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$, який ми вважаємо збіжним, бачимо, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $A_0 > a$, що

$$\int\limits_A^{A'} |f(x)|\,dx < \varepsilon,$$

коли $A' > A > A_0$. Але, вочевидь, $\left|\int\limits_A^{A'} f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_A^{A'} |f(x)|\,dx$ і, як наслідок, для тих самих A, A' виконується нерівність

$$\left|\int\limits_{A}^{A'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

звідки, з урахуванням критерію, випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$. □

Зауважимо, що зі збіжності останнього в загальному випадку аж ніяк не випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$. Ця обставина дає змогу відрізняти наступний випадок. Якщо збігається не лише $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$, але й $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$, тоді інтеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ називається *абсолютно збіжним*, а функцію $f(x)$ — *абсолютно інтегровною* на проміжку $[a, +\infty)$. Приклад інтеграла, який збігається неабсолютно, дамо в розд. 476 (пр. 476.1).

До **знакозмінної** функції ознаки з розд. 474 неможливо застосувати. Але можна спробувати використати їх для з'ясування **збіжності** інтеграла від додатної функції $|f(x)|$: якщо ця функція є інтегровною, то функція $f(x)$ також буде інтегровною, і до того ж **абсолютно**.

Звідси випливає наступне твердження, яке часто буває корисним.

Твердження 475.1. *Якщо функція $f(x)$ є* ***абсолютно*** *інтегровною на проміжку $[a, +\infty)$, а функція $g(x)$ обмежена, то і їхній добуток $f(x) \cdot g(x)$ буде функцією,* ***абсолютно*** *інтегровною на проміжку $[a, +\infty)$.*

Доведення. Для доведення досить вказати на нерівність

$$|f(x) \cdot g(x)| \leqslant L \cdot |f(x)|.$$

□

Нехай, наприклад, дано інтеграл

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax}{k^2 + x^2}\,dx.$$

Тут функція $f(x) = \dfrac{1}{k^2 + x^2}$ є (абсолютно) інтегровною, а функція $g(x) = \cos ax$, вочевидь, обмеженою. Як наслідок маємо абсолютну збіжність наведеного інтеграла.

Як бачимо, для **знакозмінної** функції наведені міркування — у сприятливому випадку — допоможуть з'ясувати лише **абсолютну** збіжність. Якщо ж інтеграл від даної функції розбіжний або неабсолютно збіжний, то розрізнити ці випадки з використанням сформульованих ознак неможливо.

476. Ознаки Абеля і Діріхлє

Тепер дамо ознаки іншого типу, ґрунтовані на використанні другої теореми про середнє (вл. 306.2). Вони аналогічні до ознак Абеля (теор. 384.1) і Діріхлє (теор. 384.2) збіжності нескінченних рядів, через що зручно пов'язати їх із тими самими іменами. Ці ознаки дають змогу з'ясувати збіжність невласних інтегралів у ряді випадків, коли абсолютна збіжність відсутня.

Теорема 476.1 (Ознака Абеля). *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені на проміжку $[a, +\infty)$, і водночас*

1) функція $f(x)$ інтегровна на цьому проміжку, так що інтеграл (470.1) збігається (хоч би і не абсолютно);

2) функція $g(x)$ монотонна й обмежена:

$$|g(x)| \leqslant L \quad (L = \text{const},\ a \leqslant x < \infty).$$

Тоді інтеграл

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \tag{476.1}$$

збіжний.

Доведення. За другою теоремою про середнє (вл. 306.2), для довільних $A' > A > a$, матимемо

$$\int\limits_A^{A'} f(x)g(x)\,dx = g(A)\int\limits_A^{\xi} f(x)\,dx + g(A')\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)\,dx, \tag{476.2}$$

де $A \leqslant \xi \leqslant A'$. Враховуючи перше припущення, для довільного заданого $\varepsilon > 0$ існує таке $A_0 > a$, що для $A > A_0$ буде

$$\left|\int\limits_A^{\xi} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \left|\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

Із урахуванням другого припущення, це дає нам (для $A' > A > A_0$)

$$\left|\int\limits_A^{A'} f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant |g(A)| \cdot \left|\int\limits_A^{\xi} f(x)\,dx\right| + |g(A')| \cdot \left|\int\limits_{\xi}^{A'} f(x)\,dx\right| < L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon,$$

з чого й випливає (розд. 475) збіжність інтеграла (476.1). □

Можна і для випадку інтегралів дати інше поєднання умов, накладених на функції $f(x)$ і $g(x)$, за яких збігається інтеграл від їхнього добутку.

Теорема 476.2 (Ознака Діріхлє)**.**
Нехай:

1) функція $f(x)$ інтегровна на довільному скінченному проміжку $[a, A]$ $(A > a)$, а інтеграл (475.1) є обмеженим:

$$\left|\int_a^A f(x)\,dx\right| \leqslant K \quad (K = \text{const},\ a \leqslant A < \infty);$$

2) функція $g(x)$ монотонно прямує до 0, коли $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Тоді інтеграл (476.1) збігається.

Як читач може бачити, перше припущення з теор. 476.1 дещо послаблене, бо ми тут не вимагаємо збіжності інтеграла (470.1); зате другу умову було посилено!

Доведення. Як і раніше, виходячи з рівності (476.2), але в цьому випадку перші множники $g(A)$ і $g(A')$ можна зробити необмежено малими, якщо взяти A і A' досить великими, а другі множники обмежені числом $2K$. □

Зауваження. Ознака Абеля випливає з ознаки Діріхлє. Справді, для обмеженої монотонної функції $g(x)$ існує скінченна границя

$$g(\infty) = \lim_{x\to\infty} g(x).$$

Записавши $f(x) \cdot g(x)$ у вигляді

$$f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(\infty) + f(x) \cdot [g(x) - g(\infty)],$$

ми бачимо, що для другого добутку виконано умови Діріхлє (дивіться теор. 473.3 і теор. 473.4).

Легко бачити, наприклад, що для $\lambda > 0$ збігаються інтеграли

$$\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda}\,dx \quad \text{та} \quad \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^\lambda}\,dx \quad (a > 0).$$

Використовуючи ознаку Діріхлє, ми приймаємо $f(x) = \sin x$ або $\cos x$, а $g(x) = \dfrac{1}{x^\lambda}$. Обидві умови теор. 476.2 виконані, оскільки

$$\left|\int_a^A \sin x\,dx\right| = |\cos a - \cos A| \leqslant 2 \quad \text{і, аналогічно,} \quad \left|\int_a^A \cos x\,dx\right| \leqslant 2$$

і функція $\frac{1}{x^\lambda}$ монотонно спадає і прямує до 0, коли $x \to \infty$.

Зокрема, звідси для $\lambda = 1$ випливає збіжність інтеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

(можна було узяти тут $a = 0$, тому що підінтегральна функція для $x \to 0$ має скінченну границю). Можна довести, що цей інтеграл збігається **неабсолютно**, тобто що інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

розбіжний. Справді, якщо б цей інтеграл був збіжним, то за теор. 474.1 збігався би й інтеграл

$$\int\limits_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \quad (a > 0),$$

бо $\sin^2 x \leqslant |\sin x|$. Інакше кажучи, збіжним був би інтеграл

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{1 - \cos 2x}{x}\,dx;$$

додавши до нього збіжний інтеграл

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx,$$

ми дійшли би висновку, що збіжним є інтеграл

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x},$$

що насправді не так (пр. 470.2).

Зауваження. Тепер, коли ми з'ясували збіжність інтегралів

$$\int\limits_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{та} \quad \int\limits_a^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx,$$

ми можемо нарешті **уточнити** визначення неелементарних функцій $\operatorname{si} x$ ("інтегральний синус") та $\operatorname{ci} x$ ("інтегральний косинус"), про які ми згадували в розд. 289. А саме, приймаємо

$$\operatorname{si} x = -\int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \quad (x \geqslant 0) \tag{476.3}$$

та

$$\operatorname{ci} x = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \quad (x > 0). \tag{476.4}$$

Якщо, наприклад, другу з цих формул записати у вигляді

$$\operatorname{ci} x = -\int_1^x \frac{\cos t}{t}\,dt - \int_1^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt,$$

то — за відомою властивістю визначеного інтеграла вл. 305.2 — зрозуміло, що похідна від $\operatorname{ci} x$ справді дорівнює $\frac{\cos x}{x}$.

477. Зведення невласного інтеграла до нескінченного ряду

Ми знаємо, що поняття границі функції має два означення: “мовою $\varepsilon - \delta$” та “мовою послідовностей” (розд. 52, розд. 53). Якщо до функції $\Phi(A)$ (дивіться (475.1)) застосувати друге означення границі, то означення (470.1) невласного інтеграла можна дати так: хоч би яку взяти послідовність зростаючих до нескінченності чисел $\{A_n\}$ $(A_n > a)$, послідовність інтегралів $\left\{\int_a^{A_n} f(x)\,dx\right\}$ повинна прямувати до однієї й тієї ж скінченної границі, яка й дає значення невласного інтеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$. (Досить припустити, що всі послідовності $\left\{\int_a^{A_n} f(x)\,dx\right\}$ збігаються, щоб звідси вже можна було дійти висновку, що границя у них буде одна й та сама (розд. 53).)

З іншої сторони, питання про границю послідовності $\left\{\int_a^{A_n} f(x)\,dx\right\}$ тотожне питанню про суму ряду (розд. 362):

$$\int_a^{A_1} + \left\{\int_a^{A_2} - \int_a^{A_1}\right\} + \left\{\int_a^{A_3} - \int_a^{A_2}\right\} + \cdots = \int_a^{A_1} + \int_{A_1}^{A_2} + \int_{A_2}^{A_3} + \dots\,.$$

Отже можна стверджувати.

Твердження 477.1. *для існування невласного інтеграла* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *необхідно і до-*

статньо, щоб, хоч би яка була варіанта $A_n \to \infty$ $(A_n > a)$, *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x)\,dx \quad (A_0 = a)$$

збігався до однієї і тієї ж суми, яка і дає значення невласного інтеграла.

Зазначимо, що у випадку **додатної** (невід'ємної) функції $f(x)$ — для існування інтеграла достатньо збіжності вказаного ряду **для одного окремого вибору варіанти** $A_n \to \infty$. Справді, тоді зростаюча функція (474.1) від A буде обмежена сумою цього ряду і, отже, має скінченну границю для $A \to \infty$ (розд. 474).

Зведення питання про збіжність інтеграла до питання про збіжність ряду представляється часто дуже вигідним, оскільки дає можливість використати численні ознаки збіжності чи розбіжності рядів.

Наприклад, розглянемо знову інтеграл

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

про який уже йшлося вище.

Оскільки $\sin x$ в міру зростання x набуває поперемінно то додатні, то від'ємні значення, змінюючи знак в точках $n\pi$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$, то природно саме ці числа взяти як A_n та розглянути ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{477.1}$$

Зробивши у загальному члені

$$v_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

підстановку $x = n\pi + t$, отримаємо

$$v_n = (-1)^n \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t}\,dt.$$

Звідси видно, що члени ряду мають знаки, що чергуються, і за абсолютною величиною монотонно спадають. Далі, для $n > 0$,

$$|v_n| = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi + t}\,dt < \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{n\pi}\,dt = \frac{1}{n}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

і, відтак, абсолютна величина членів ряду прямує до нуля зі збільшенням їх номера. За відомою теоремою Ляйбніца (теор. 381.1), ряд (477.1) збігається. Позначимо його суму через I. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке N, що для $n \geqslant N$ виконується нерівність

$$\left|\int\limits_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - I\right| < \varepsilon. \tag{477.2}$$

Тепер вже завершити доведення існування інтеграла простіше “мовою $\varepsilon-\delta$”. Нехай $A > N\pi$; тоді існує таке натуральне число n_0, що $n_0\pi \leqslant A < (n_0+1)\pi$,причому, очевидно, $n_0 \geqslant N$. Оскільки на проміжку від $n_0\pi$ до $(n_0+1)\pi$ функція $\sin x$ зберігає знак, то інтеграл $\int\limits_0^A$ буде міститися між інтегралами $\int\limits_0^{n_0\pi}$ та $\int\limits_0^{(n_0+1)\pi}$, кожний з яких лежить, зважаючи на (477.2), між $I-\varepsilon$ та $I+\varepsilon$. Те ж саме можна стверджувати і щодо інтеграла $\int\limits_0^A$. Тому, остаточно для $A > N\pi$ маємо

$$\left|\int\limits_0^{A} \frac{\sin x}{x}\,dx - I\right| < \varepsilon,$$

отже існує

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A} \frac{\sin x}{x}\,dx = I$$

Тут, як і в попередньому розділі, нас цікавить лише питання про збіжність цього інтеграла. Нижче ми побачимо, що його значення $I = \frac{\pi}{2}$.

Ми вже знаємо (розд. 476), що цей інтеграл збігається **неабсолютно**, тобто інтеграл $\int\limits_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ розбіжний. Цей факт також легко довести, використовуючи вираження інтеграла у вигляді ряду. Справді, якщо б інтеграл збігався, то мали б, як і щойно, що

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi+t}\,dt.$$

Але $n\pi + t \leqslant (n+1)\pi$, тому

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin t}{n\pi+t}\,dt \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi}\sin t\,dt = \frac{2}{(n+1)\pi},$$

тим часом як ряд $\frac{2}{\pi}\sum\frac{1}{n+1}$ розбіжний! (пр. 365.1).

nebayduzhi.math@gmail.com

478. Приклади

1) Дослідити збіжність інтегралів.

а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$

Підінтегральна функція є нескінченно малою першого порядку, коли $x \to +\infty$; інтеграл **розбігається**.

б) $\displaystyle\int\limits_{z_0}^\infty \frac{dz}{\sqrt{z(z-a)\,(z-b)}} \quad (z_0 > a > b > 0).$

Нескінченно мала порядку $\frac{3}{2}$; інтеграл **збігається**.

в) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx.$

Підінтегральна функція прямує до 0, коли $x \to 0$. Розкладаючи в ряд, бачимо, що вираз

$$e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} = \frac{b^2 - a^2}{x^2} + \ldots$$

є нескінченно малою 2-го порядку, коли $x \to +\infty$; інтеграл **збігається**.

г) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right) \frac{dx}{x^2}\,.$

Розкладаючи $e^{\pm x}$ у ряд, легко отримати

$$\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{12} + \ldots,$$

тому підінтегральний вираз прямує до $-\frac{1}{12}$, коли $x \to 0$. Коли $x \to \infty$, він буде нескінченно малою 2-го порядку. Інтеграл **збігається**.

2) Дослідити збіжність інтегралів.

а) $\displaystyle\int\limits_a^\infty x^\mu e^{-ax}\,dx \quad (\mu,\ a > 0).$

nebayduzhi.math@gmail.com

Узявши будь-яке $\lambda > 1$, маємо:

$$\frac{x^{\mu}e^{-ax}}{\frac{1}{x^{\lambda}}} = \frac{x^{\lambda+\mu}}{e^{ax}} \to 0;$$

інтеграл **збігається**.

б) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.

Помітимо спочатку, що підінтегральна функція прямує до 0, коли $x \to 0$. Взявши тепер знову **будь-яке** $\lambda > 1$, отримаємо:

$$\frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} : \frac{1}{x^{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}\cdot x^{-(2\lambda+2)} - x^{-(2\lambda+2)}}} \to 0, \quad \text{коли} \quad x \to +\infty;$$

інтеграл **збігається**.

в) $\displaystyle\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

Підінтегральна функція прямує до 0, коли $x \to 1$. Нехай $1 < \lambda < 2$, тоді відношення цієї функції до $\dfrac{1}{x^{\lambda}}$ можна написати у вигляді:

$$\frac{x^{\lambda}\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\ln x}{x^{2-\lambda}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \to 0, \quad \text{коли} \quad x \to \infty;$$

інтеграл **збігається**.

3) Дослідити збіжність інтегралів.

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(a+x)}\,dx \quad (a > 0).$

б) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} x^{\mu}e^{-ax}\cos x\,dx \quad (\mu, a > 0).$

Вказівка. В обох випадках маємо добуток обмеженої функції на (абсолютно) інтегровну.

4) Дослідити збіжність інтеграла ($\alpha > 0$)

$$\int\limits_1^{\infty} dx \int\limits_0^{\alpha} \sin\left(\beta^2x^3\right) d\beta = \int\limits_1^{\infty} \left\{ \int\limits_0^{\alpha} \sin\left(\beta^2x^3\right) d\beta \right\} dx.$$

Приймемо тут без доказу, що “внутрішній” інтеграл представляє неперервну функцію від x.

Спробуємо оцінити порядок спадання “внутрішнього” інтеграла, коли $x \to \infty$. Вважаючи у ньому $\beta^2 x^3 = z$, маємо:

$$\int\limits_0^{\alpha} \sin\left(\beta^2 x^3\right) d\beta = \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} \int\limits_0^{\alpha^2 x^3} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\, dz.$$

Зважаючи на збіжність інтеграла $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\, dz$ (пр. 476.1), знайдеться така постійна L, що для всіх $A > 0$

$$\left| \int\limits_0^{A} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}\, dz \right| \leqslant 2L.$$

Відтак, інтеграл $\int\limits_0^{\alpha} \sin(\beta^2 x^3)\, d\beta$ за абсолютною величиною не перевищує вираз $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Звідси випливає абсолютна збіжність запропонованого інтеграла.

5) Довести збіжність інтегралів ($a,\ k,\ \lambda > 0$). (У всіх випадках користуємося ознакою Діріхлє.)

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x \cdot \sin ax}{k^2 + x^2}\, dx.$

$g(x) = \frac{x}{k^2 + x^2}$ для досить великих x монотонно спадає і прямує до нуля, коли $x \to \infty$; інтеграл $\int\limits_0^{A} \sin ax\, dx$ очевидно обмежений.

б) $\int\limits_0^{\infty} e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x^{\lambda}}\, dx.$

$g(x) = \frac{1}{x^{\lambda}}$, монотонно спадаючи, прямує до нуля, коли $x \to \infty$, $f(x) = e^{\sin x} \cdot \sin 2x$, тому (якщо покласти $\sin x = t$)

$$\left| \int\limits_0^{A} f(x)\, dx \right| = 2 \left| \int\limits_0^{\sin A} t e^t\, dt \right| < 2e.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

в) $\displaystyle\int\limits_a^\infty |\ln x|^\lambda \frac{\sin x}{x}\,dx.$

$g(x) = |\ln x|^\lambda \cdot \frac{1}{x}$, для досить великих значень x

$$g'(x) = \frac{(\ln x)^{\lambda-1}}{x^2}(\lambda - \ln x) < 0,$$

тому $g(x)$ спадає, очевидно, прямуючи до нуля і так далі.

г) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x+x^2)}{x^\lambda}\,dx.$

$g(x) = \frac{1}{x^\lambda}$; $f(x) = \sin(x+x^2)$, тому (вважаючи $z = x + x^2$)

$$\int\limits_a^A \sin(x+x^2)\,dx = \int\limits_{a+a^2}^{A+A^2} \frac{\sin z}{\sqrt{1+4z}}\,dz.$$

Цей вираз за абсолютною величиною залишається обмеженим через те, що інтеграл $\displaystyle\int\limits_{a+a^2}^\infty \frac{\sin z}{\sqrt{1+4z}}\,dz$ збігається (у чому можна переконатися за допомогою тієї ж ознаки Діріхлє).

6) Довести наступне твердження.

Твердження 478.1. *Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a, +\infty)$ та має період $\omega > 0$, а функція $g(x)$ монотонна на тому ж проміжку та прямує до 0, коли $x \to +\infty$.*

Якщо інтеграл (власний)

$$\int\limits_a^{a+\omega} f(x)\,dx = 0, \tag{478.1}$$

то інтеграл (невласний)

$$\int\limits_a^\infty f(x)g(x)\,dx \tag{478.2}$$

збігається.

Якщо ж навпаки

$$\int\limits_a^{a+\omega} f(x)\,dx = K \neq 0, \tag{478.3}$$

то інтеграл (478.2) *збігається або розбігається залежно від того, збігається чи розбігається інтеграл*

$$\int_a^{\infty} g(x)\,dx. \tag{478.4}$$

Доведення. а) Припустимо спочатку виконання умови (478.1) і покажемо, що інтеграл

$$\int_a^{A} f(x)\,dx$$

у цьому випадку залишається **обмеженим** для всіх $A > a$.

Зважаючи на пр. 314.10 і зауваження в розд. 316, очевидно, й

$$\int_a^{a+k\omega} f(x)\,dx = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots),$$

і тоді, яким би не було $A > a$, якщо взяти $k = E\left(\dfrac{A-a}{\omega}\right)$, будемо мати

$$\left|\int_a^{A} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{a+k\omega}^{A}\right| = \left|\int_a^{A-k\omega}\right| \leqslant \int_a^{a+\omega} |f(x)|\,dx = L,$$

і необхідний висновок випливає безпосередньо з ознаки **Діріхлє**.

б) У припущенні (478.3), замінимо $f(x)$ на $f(x) - \dfrac{K}{\omega}$. Оскільки ця функція задовольняє умову типу (478.1), то інтеграл

$$\int_a^{\infty} \left[f(x) - \frac{1}{\omega}K\right] g(x)\,dx \tag{478.5}$$

за доведеним збігається. Звідси вже зрозуміло, що інтеграли (478.2) і (478.4) збігаються (чи розбігаються) одночасно. □

7) Якщо, наприклад, розглянути $f(x) = \sin^2 x$ на проміжку $[0, +\infty)$ $(\omega = \pi)$, то бачимо, що інтеграл

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2} \neq 0;$$

відтак, *інтеграл*

$$\int_0^{\infty} \sin^2 x \cdot g(x)\,dx$$

(за попередніх припущень відносно g) збігається або розбігається одночасно з інтегралом (478.4).

Натомість, інтеграл

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \sin^2 x\right) g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \cos 2x \cdot g(x)\,dx$$

збігається **у будь-якому випадку**, незалежно від поведінки інтеграла (478.4)!

8) Дослідити збіжність інтегралів.

а) $\displaystyle\int_0^\infty e^{\cos x} \cdot \sin(\sin x)\frac{dx}{x}.$

Маємо

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cdot \sin(\sin x)\,dx = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} = 0,$$

оскільки другий з двох останніх інтегралів відрізняється від першого з них лише знаком (підстановка $z = 2\pi - x$). Зважаючи на пр. 478.6, інтеграл збігається.

б) $\displaystyle\int_0^\infty e^{\sin x} \cdot \sin(\sin x)\frac{dx}{x}.$

На цей раз

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin x} \cdot \sin(\sin x)\,dx > 0,$$

тому (дивіться пр. 478.6) зважаючи на розбіжність інтеграла

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x} \qquad (a > 0)$$

— інтеграл розбігається.

9) Дослідити інтеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu + \sin x}\,dx$$

на збіжність залежно від значень параметра $\mu > 0$.

Маємо тотожність

$$\frac{\sin x}{x^\mu + \sin x} = \frac{\sin x}{x^\mu} - \frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu + \sin x)}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Інтеграл від першого члена справа

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^\mu}\,dx,$$

як ми знаємо (пр. 476.1), завжди збігається. Звернемося до інтеграла від другого члена справа

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu+\sin x)}\,dx. \tag{478.6}$$

Оскільки

$$\frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu+1)} < \frac{\sin^2 x}{x^\mu(x^\mu+\sin x)} < \frac{1}{x^\mu(x^\mu-1)},$$

то для $\mu > \frac{1}{2}$ інтеграл від виразу справа, а з ним й інтеграл (478.6) збігається; для $\mu \leqslant \frac{1}{2}$ розглянемо вираз зліва: інтеграл від нього, зважаючи на пр. 478.7, поводить себе так само, як й інтеграл

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^\mu(x^\mu+1)} \quad (a>0),$$

тобто розбігається, а з ним розбігається й інтеграл (478.6).

Остаточно, запропонований інтеграл збігається, якщо $\mu > \frac{1}{2}$, і розбігається, якщо $\mu \leqslant \frac{1}{2}$.

Цей приклад, у випадку $\mu \leqslant \frac{1}{2}$, повчально зіставити з ознакою збіжності **Діріхле**. Інтеграл від першого множника, $\sin x$, обмежений, водночас як другий множник

$$\frac{1}{x^\mu+\sin x}$$

прямує до 0, коли $x\to\infty$. Порушено лише вимогу **монотонності** цього множника, і запропонований інтеграл виявляється розбіжним!

10) Дослідити інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^\alpha\,dx}{1+x^\beta\cdot\sin^2 x}$$

на збіжність залежно від значень параметрів $\alpha,\ \beta>0$.

Позначивши підінтегральну функцію через $f(x)$, будемо мати для x між $n\pi$ та $(n+1)\pi$:

$$\frac{(n\pi)^\alpha}{1+[(n+1)\pi]^\beta\sin^2 x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{[(n+1)\pi]^\alpha}{1+(n\pi)^\beta\sin^2 x}.$$

Інтегруючи ці нерівності, врахуємо, що

$$\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1+A\sin^2 x} = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+A\sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{1+A}} \tag{478.7}$$

(це легко вивести з пр. 288.10 або пр. 309.9); ми отримаємо

$$\frac{n^{\alpha}\pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+(n+1)^{\beta}\pi^{\beta}}} \leqslant \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx \leqslant \frac{(n+1)^{\alpha}\pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+n^{\beta}\pi^{\beta}}}\,.$$

Тепер сумуємо по n від 0 до ∞:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\alpha}\pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+(n+1)^{\beta}\pi^{\beta}}} \leqslant \int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{\alpha}\pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+n^{\beta}\pi^{\beta}}}\,.$$

Оскільки обидва крайні ряди збігаються або розбігаються одночасно з рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha-\frac{1}{2}\beta},$$

це саме справедливо і для інтеграла.

Отже, запропонований інтеграл збігається, коли $\beta > 2(\alpha+1)$ та розбігається, коли $\beta \leqslant 2(\alpha+1)$.

11) Дослідити інтеграл на збіжність:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}\,dx}{1+x^{\beta}|\sin x|} \quad (\alpha,\ \beta > 0).$$

Метод розмірковування той самий, що й у попередньому прикладі. Замість інтеграла (478.7) тут доведеться розглядати інтеграл (дивіться пр. 288.14):

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+A\,\sin x} = 2\cdot\frac{\ln\left(A+\sqrt{A^2-1}\right)}{\sqrt{A^2-1}} \quad (A > 1).$$

Оскільки для $A \to \infty$

$$\frac{\ln\left(A+\sqrt{A^2-1}\right)}{\sqrt{A^2-1}} : \frac{\ln A}{A} \to 1,$$

то порівнювати запропонований інтеграл достатньо з рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\cdot\frac{\ln\,(n+1)^{\beta}}{(n+1)^{\beta}} \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{\alpha}\cdot\frac{\ln n^{\beta}}{n^{\beta}}\,.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

тобто, врешті-решт, з рядом:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}}\,.$$

Відповідь: для $\beta > \alpha + 1$ інтеграл збігається, а для $\beta \leqslant \alpha + 1$ розбігається.

Пр. 478.6, пр. 478.7, пр. 478.9, пр. 478.10 та пр. 478.11 належать Харді.

12) Провести повне дослідження випадків збіжності та розбіжності інтеграла:

$$J=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^{\alpha}\cdot|\sin x|^{\beta}}$$

залежно від значень параметрів α та β $(\alpha,\ \beta > 0)$.

а) Нехай $\alpha \leqslant 1$. Оскільки

$$\frac{1}{1+x^{\alpha}\cdot|\sin x|^{\beta}} \geqslant \frac{1}{1+x^{\alpha}},$$

то у цьому випадку інтеграл **розбігається** (розд. 474).

б) Нехай $\alpha \leqslant \beta$. Переходячи до ряду (розд. 477), маємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{dx}{1+x^{\alpha}\cdot|\sin x|^{\beta}}=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{dz}{1+(n\pi+z)^{\alpha}\sin^{\beta}z}\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\frac{1}{(n+1)\pi}}\,.$$

Але для $0 < z < \dfrac{1}{(n+1)\pi}$

$$(n\pi+z)^{\alpha}\ \sin^{\beta}z<(n+1)^{\alpha}\pi^{\alpha}z^{\beta}<(n+1)^{\beta}\pi^{\beta}\cdot\left(\frac{1}{(n+1)\pi}\right)^{\beta}=1,$$

тому члени останнього ряду виявляються більше за відповідні члени ряду, що розбігається

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}.$$

Отже, інтеграл знову **розбігається.**

в) Нехай $\alpha > \beta > 1$. Представимо J у вигляді суми $J_1 + J_2$, де

$$J_1=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dz}{1+(n\pi+z)^{\alpha}\sin^{\beta}z},\qquad J_2=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dz}{1+(n\pi-z)^{\alpha}\sin^{\beta}z}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Потім, для $0 < z < \frac{\pi}{2}$ та $n \geqslant 1$,

$$(n\pi + z)^{\alpha} \sin^{\beta} z \geqslant (n\pi)^{\alpha} \left(\frac{2}{\pi} z\right)^{\beta} = n^{\alpha} c^{\beta} z^{\beta}, \quad \text{де} \quad c = 2\pi^{\frac{\alpha}{\beta}-1},$$

звідки

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dz}{1 + (n\pi + z)^{\alpha} \sin^{\beta} z} \leqslant \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dz}{1 + n^{\alpha} c^{\beta} z^{\beta}} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot c} \int\limits_{0}^{n^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot c \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + t^{\beta}} \leqslant \frac{c^{*}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}},$$

де

$$c^{*} = \frac{1}{c} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dt}{1 + t^{\beta}}.$$

Отже,

$$J_1 \leqslant \frac{\pi}{2} + c^{*} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}} < \infty.$$

Аналогічно й $J_2 < \infty$, тому інтеграл **збігається**.

г) До випадку $\alpha > \beta > 1$ зводиться і загальний випадок, коли одночасно $\alpha > 1$ і $\alpha > \beta$. Справді, у цьому випадку легко знайти таке $\beta' \geqslant \beta$, щоб було $\alpha > \beta' > 1$. Оскільки збіжність лише посилюється, коли β зменшується, то і в згаданому загальному випадку очевидна **збіжність**.

Остаточно бачимо, що інтеграл J збігається, якщо одночасно виконанні умови $\alpha > 1$ та $\alpha > \beta$, і розбігаються у всіх інших випадках. Можна сказати і коротше: якщо $\alpha > \max(1, \beta)$, інтеграл збігається, а якщо $\alpha \leqslant \max(1, \beta)$ — розбігається.

13.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій

479. Означення інтегралів від необмежених функцій

Розглянемо тепер функцію $f(x)$, що задана на скінченному проміжку $[a, b]$, але **необмежену** на цьому проміжку. Припустимо для більшої визначеності, що на будь-якому проміжку $[a,\ b-\eta]$ $(0<\eta<b-a)$ функція обмежена та інтегровна, але виявляється необмеженою на кожному проміжку $[b-\eta,\ b]$ зліва від точки b. Точка b у цьому випадку називається *особливою точкою.*

Границя інтеграла $\int\limits_a^{b-\eta} f(x)\,dx$ *(скінченна або нескінченна), коли* $\eta \to 0$, *називається (невласним) інтегралом функції* $f(x)$ *на проміжку від* a *до* b *та позначається, як зазвичай:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0} \int\limits_a^{b-\eta} f(x)\,dx. \tag{479.1}$$

У випадку, якщо ця границя має скінченне значення, кажуть, що інтеграл (479.1) **збігається**, а функцію $f(x)$ називають **інтегровною** на проміжку $[a, b]$. Якщо ж границя (479.1) є нескінченною або взагалі не існує, то про інтеграл говорять, що він розбігається.

Приклад.

1) Функція $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ є обмеженою та інтегровною на будь-якому проміжку $[0, 1-\eta]$ $(0<\eta<1)$, та

$$\int\limits_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{1-\eta} = \arcsin(1-\eta).$$

У точці $x = 1$ функція дорівнює нескінченності. Нагадаємо, що тут ми розуміємо лише те, що функція $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ прямує до нескінченності, коли $x \to 1$. Очевидно, що на будь-якому проміжку $(1-\eta,\ 1)$ функція є необмеженою, тобто точка $x = 1$ є особливою. На практиці зазвичай доводиться мати справу саме з такого типу особливими точками.

Оскільки обчислений інтеграл прямує $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, коли $\eta \to 0$, то існує невласний інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to 0} \int\limits_0^{1-\eta} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Нехай тепер функція $f(x)$ є обмеженою та інтегровною на будь-якому проміжку $[a+\eta',\ b]$ $(0<\eta'<b-a)$, але виявляється необмеженою на кожному проміжку

$[a,\ a+\eta']$ справа від точки a (**особлива** точка). Тоді *(невласний) інтеграл функції* $f(x)$ *на проміжку від* a *до* b *можна означити за допомогою рівності*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta'\to 0}\int\limits_{a+\eta'}^{b} f(x)\,dx. \tag{479.2}$$

Взагалі, на проміжку $[a,b]$ може бути скінченне число **особливих** точок $c_0,\ \ldots,\ c_m$, поблизу яких функція $f(x)$ є необмеженою, між тим на кожній ділянці цього проміжку, що не містить особливих точок, функція є обмеженою та інтегровною.

Нехай (для простоти запису) таких точок є **три**, причому дві з них співпадають із кінцями проміжку a та b, а третя, c, лежить між ними. Тоді *означення інтеграла від* a *до* b *дається за допомогою рівності*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \ldots\\ \eta_4\to 0}}\left\{\int\limits_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} + \int\limits_{c+\eta_3}^{b-\eta_4}\right\}. \tag{479.3}$$

Взявши **всередині** кожного з проміжків $[a,c]$, $[c,b]$ відповідно по точці d, e, матимемо

$$\int\limits_{a+\eta_1}^{c-\eta_2} = \int\limits_{a+\eta_1}^{d} + \int\limits_{d}^{c-\eta_2},\quad \int\limits_{c+\eta_3}^{b-\eta_4} = \int\limits_{c+\eta_3}^{e} + \int\limits_{e}^{b-\eta_4}.$$

Легко помітити, що існування границі (479.3) є рівносильним до існування кожного із цих чотирьох інтегралів окремо, отже означення (479.3) можна замінити таким:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^d f(x)\,dx + \int\limits_d^c f(x)\,dx + \int\limits_c^e f(x)\,dx + \int\limits_e^b f(x)\,dx,$$

у припущенні, що усі невласні інтеграли справа існують (за винятком, коли два із цих інтегралів дорівнюють нескінченності різних знаків). Це означення не залежить від вибору точок d та e.

По відношенню до невласних інтегралів (479.2) та (479.3) зберігається та сама термінологія, що й вище.

Приклади.

2)

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

особлива точка -1,

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta'\to 0}\int\limits_{-1+\eta'}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta'\to 0}[-\arcsin(-1+\eta')] = \frac{\pi}{2}.$$

3)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

дві особливі точки -1 та $+1$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

4) Дослідимо для яких значень показника $\lambda > 0$ збігається невласний інтеграл

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{(x-a)^\lambda} \quad (b > a). \tag{479.4}$$

Для $\lambda \neq 1$ інтеграл

$$\int_{a+\eta}^{b} \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}\left[(b-a)^{1-\lambda} - \eta^{1-\lambda}\right]$$

прямує до ∞ або скінченного числа $\frac{1}{1-\lambda}(b-a)^{1-\lambda}$, коли $\eta \to 0$, залежно від того, чи буде $\lambda > 1$ або $\lambda < 1$.

Якщо $\lambda = 1$, то

$$\int_{a+\eta}^{b} \frac{dx}{x-a} = \ln(b-a) - \ln\eta \to \infty, \quad (\text{коли } \eta \to 0).$$

Отже, інтеграл (479.4) збігається і має значення $\frac{1}{1-\lambda}(b-a)^{1-\lambda}$, коли $\lambda < 1$; і розбігається (пр. 470.2), коли $\lambda \geqslant 1$.

5) Аналогічний результат можна отримати відносно інтеграла

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{(b-x)^\lambda} \quad (b > a,\ \lambda > 0),$$

який істотно не відрізняється від попереднього.

Зауваження. Корисно зазначити наступне: якщо функція $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ є інтегровною у власному сенсі (тобто інтеграл $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ вже визначений), то гранична рівність (479.1) ((479.2) або (479.3)) для неї виконується. Це безпосередньо витікає з **неперервності** інтеграла по верхній (нижній) межі (вл. 305.1). Отже, для невласного інтеграла ми **за означення** взяли таку рівність, яка для власного інтеграла виконується сама по собі.

Насамкінець, розглянемо функцію $f(x)$, що задана на нескінченному проміжку, наприклад у $[a, +\infty)$, та має на ньому **скінченне** число особливих точок (особливих точок може бути і нескінченна множина, головне, щоб на кожному **скінченному** проміжку $[a, A]$ $(A > a)$ їх було лише **скінченне** число (яке може рости до нескінченності разом із A)), поблизу яких вона перестає бути скінченною. Припустимо, що на кожному скінченному проміжку $[a, A]$ інтеграл $\int\limits_a^A f(x)\,dx$ існує, як власний або як невласний, згідно з означенням, що було дано вище. Тоді, переходячи ще раз до границі, коли $A \to \infty$, можна взяти рівність (470.1) за означення невласного інтеграла на проміжку $[a, +\infty)$.

У випадку нескінченного проміжку точка $\pm\infty$ відіграє ту саму роль, що і особливі точки, ставлячи вимогу додаткового граничного переходу. На цій підставі точку $\pm\infty$ також називають **особливою**, незалежно від того, чи залишається функція $f(x)$ обмеженою чи ні, коли x необмежено зростає.

480. Зауваження щодо особливих точок

Твердження 480.1. *Розглянемо функцію $f(x)$, що визначена на скінченному проміжку $[a, b]$, і припустимо, що вона на цьому проміжку не інтегровна у власному сенсі. Тоді на проміжку $[a, b]$ неминуче знайдеться така точка c, у* ***кожному*** *околі якої функція виявляється неінтегровною (у власному сенсі).*

Доведення. Справді, якби таких точок не було взагалі, то кожну точку x проміжку $[a, b]$ можна було б оточити таким околом σ, щоб у його межах функція була інтегровна. Застосувавши до системи $\Sigma = \{\sigma\}$, що покриває проміжок $[a, b]$, лему Бореля (лем. 88.1), у такому випадку легко розкласти проміжок $[a, b]$ на скінченне число частин, у кожній зокрема функція є інтегровною. Але звідси слідувала б її інтегровність на всьому проміжку $[a, b]$, що суперечить припущенню. ☐

Згадану точку c Й природно називати **особливою**: у ній немовби “вбирається” властивість функції не бути інтегровною. Особливих точок може бути декілька, навіть — нескінченна кількість; у випадку функції Діріхлє (пр. 300.2), наприклад, особливі точки заповнюють цілковито увесь проміжок $[0, 1]$.

Обмежимося випадком **скінченного** числа особливих точок c_0, …, c_m. У такому випадку природа “особливості”, що здійснюється у цих точках, добре розкривається: у околі кожної з них функція є **необмеженою** (отже саме **необмеженість** і є причиною **неінтегровності** у власному сенсі). Щоб переконатися у цьому, достатньо розглянути випадок, коли єдиною особливою точкою є b.

Твердження 480.2. *Отже, нехай для будь-якого* $\eta > 0$ $(\eta < b - a)$ *функція* $f(x)$ *інтегровна (а отже, неминуче — і обмежена) на проміжку* $[a,\ b-\eta]$, *але не інтегровна на проміжку* $[b-\eta,\ b]$. *Треба довести, що у цих умовах поблизу точки* b *функція не може залишатися обмеженою.*

Доведення. Припустимо протилежне: нехай для всіх x на $[a, b]$ маємо

$$|f(x)| \leqslant L \quad (L = \text{const}).$$

Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$ та $\eta < \frac{\varepsilon}{6L}$. Для проміжку $[a,\ b-\eta]$, де функція $f(x)$ інтегровна, для числа $\frac{\varepsilon}{3}$ можна знайти таке $\delta > 0$, щоб поділивши цей проміжок на частини з довжинами $\Delta x_{i'} < \delta$ було

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \frac{\varepsilon}{3},$$

де $\omega_{i'}$ означають, як завжди, відповідні коливання функції (розд. 297). Можна ще додатково припустити, що $\delta < \eta$. Поділимо тепер **весь** проміжок $[a, b]$ на частини з довжинами $\Delta x_i < \delta$, і нехай $\Delta x_{i'}$ відповідають тим частинам, які не виходять за межі $[a,\ b-\eta]$, а $\Delta x_{i''}$ — іншим (враховуючи проміжок $[b-\eta,\ b]$); із них тільки одна може виходити за межи $[a,\ b-\eta]$ — якщо точка $b-\eta$ сама не є точкою поділу. Тоді, як і раніше,

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

З іншого боку

$$\sum_{i''} \omega_{i''} \Delta x_{i''} < 2L \cdot \sum_{i''} \Delta x_{i''} < 2L(\eta + \delta) < 4L\eta < \frac{2}{3}\varepsilon,$$

і остаточно

$$\sum_{i} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i'} + \sum_{i''} < \varepsilon.$$

А цим обумовлюється (розд. 297) інтегровність функції $f(x)$ на всьому проміжку $[a, b]$, і точка b виявляється не особливою, всупереч припущенню щодо неї. Цим і завершується доведення. ☐

Отже, у випадку скінченного числа особливих точок, їх можна характеризувати саме тим, що поблизу них функція перестає бути обмеженою; це ми і використали для означення особливих точок у попередньому розділі.

481. Застосування основної формули інтегрального числення. Приклади

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a, b]$ та інтегровна (у власному сенсі) на кожному проміжку $[a,\ b-\eta]$, у той час як b є особливою точкою для неї. Якщо для $f(x)$ на проміжку $[a, b)$, тобто $a \leqslant x < b$, існує первісна функція $F(x)$, то

$$\int\limits_a^{b-\eta} f(x)\,dx = F(b-\eta) - F(a) = F(x)\Big|_a^{b-\eta},$$

і існування невласного інтеграла (479.1) є рівносильним існуванню скінченної границі $\lim\limits_{\eta\to 0} F(b-\eta)$. Якщо ця границя існує, то її природно прийняти за значення $F(b)$ первісної функції в точці $x = b$, досягнувши тим самим неперервності $F(x)$ на всьому проміжку $[a, b]$. Для обчислення інтеграла (479.1) ми маємо тоді формулу звичного вигляду:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \tag{481.1}$$

Ця ж формула справедлива і у тих випадках, коли особлива точка лежить всередині проміжку або коли є декілька особливих точок, але (це слід добре запам'ятати) за неодмінної умови, що первісна функція $F(x)$, для якої $f(x)$ є похідною всюди, окрім особливих точок, *була неперервною і в цих точках також*. Існування такої первісної забезпечує існування невласного інтеграла.

Зауваження. Говорячи про "первісну" функцію $F(x)$, ми могли б розуміти її у більш широкому сенсі: похідна $F(x)$ дорівнює $f(x)$ всюди, за винятком не тільки особливих точок, але і, можливо, ще деякого скінченного числа точок, *тільки б і в них не порушувалась неперервність функції* $F(x)$ (порівняйте з розд. 310).

Замінивши у основній формулі (481.1) b на x, а $f(x)$ на $F'(x)$, ми, як і у розд. 310, можемо записати її у вигляді

$$F(x) = F(a) + \int\limits_a^x F'(x)\,dx.$$

Отже, за заданою похідною $F'(x)$ **відновлюється** первісна функція $F(x)$, тільки якщо похідна є інтегровною **хоча б у невласному сенсі**.

Звернемося до **прикладів**.

1)

$$\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}},$$

особлива точка $x = 0$; оскільки первісна функція $\frac{3}{2}x^{2/3}$ є неперервною і у цій точці, то інтеграл існує:

$$\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^{8} = \frac{9}{2}.$$

2)

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{2x\,dx}{x^2-1},$$

не існує, оскільки первісна $\ln|x^2-1|$ набуває значення ∞ у особливих точках $x = \pm 1$.

3)

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

особлива точка $x = 1$; тут первісна $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$ є неперервною в точці $x = 1$; отже, інтеграл існує $\left(= \frac{\pi^2}{8}\right)$.

4)

$$\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx,$$

особлива точка $x = 0$; тут первісна $x\ln x - x$ прямує до 0, коли $x \to 0$. Приписуючи їй саме це значення для $x = 0$, матимемо

$$\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_{0}^{1} = -1.$$

5)

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}},$$

особлива точка $x = 1$; маємо:

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = -\arcsin\frac{x+1}{2x}\Big|_{1}^{2} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}.$$

6)

$$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\ln x},$$

особлива точка $x = 1$; інтеграл не існує, оскільки первісна $\ln\ln x$ прямує до ∞, коли $x = 1$.

482. Умови і ознаки існування інтеграла

Ми зупинимося лише на випадку, пов'язаному з означенням (479.1), оскільки перефразування для інших випадків не є проблемою. Враховуючи повну аналогію з невласним інтегралом, розширеним на нескінченний проміжок $[a, \infty)$, ми обмежимося формулюванням деяких основних тверджень. Доведення аналогічні до наведених вище.

Теорема 482.1. *Для збіжності невласного інтеграла* (479.1) *у випадку* ***додатної*** *функції $f(x)$ необхідно і достатньо, щоб для всіх $\eta > 0$ виконувалась нерівність*

$$\int\limits_a^{b-\eta} f(x)\,dx \leqslant L \quad (L = \mathrm{const}).$$

Теореми порівняння розд. 474 формулюються та доводяться майже в тих самих фразах. Наведемо без доведення ознаки Коші, що випливають звідси.

Теорема 482.2. *Нехай для досить близьких до b значень x функція $f(x)$ має вигляд:*

$$f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^{\lambda}} \quad (\lambda > 0).$$

Тоді:

1) якщо $\lambda < 1$ і $g(x) \leqslant c < +\infty$, то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ збіжний;

2) якщо $\lambda \geqslant 1$ і $g(x) \geqslant c > 0$, то цей інтеграл розбіжний.

Ось, більш часткова форма, зручна на практиці.

Теорема 482.3. *Якщо для $x \to b$ функція $f(x)$ є нескінченно великою порядку $\lambda > 0$ (порівняно з $\frac{1}{b-x}$), то інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ збігається або розбігається залежно від того, буде $\lambda < 1$ чи $\lambda \geqslant 1$.*

Приклади.

1)

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}.$$

Підінтегральна функція для $x \to 1$ представляє нескінченно велику порядку $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} : \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x+x^2+x^3}} \to \frac{1}{\sqrt[4]{4}}, \quad \text{коли } x \to 1.$$

Отже, інтеграл збіжний.

2)

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2 < 1).$$

Нескінченно велика порядку $\frac{1}{2}$, інтеграл збіжний.

3)

$$\int\limits_0^1 x^\mu \ln x \, dx.$$

Якщо $\mu > 0$, то $f(x) = x^\mu \ln x \to 0$, коли $x \to 0$ і інтеграл виявляється власним. Для $\mu \leqslant 0$ підінтегральна функція прямує до нескінченності, коли $x \to 0$.

Якщо $\mu > -1$, то взявши $1 > \lambda > |\mu| = -\mu$, будемо мати

$$\frac{x^\mu \ln x}{\frac{1}{x^\lambda}} = x^\lambda + \mu \ln x \to 0, \quad \text{коли } x \to 0;$$

оскільки інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ збігається, то й запропонований інтеграл збігається за теор. 482.1 (ми застосовуємо до функції $x^\mu \ln x$ ознаки, що призначені для доданих функцій, бо вона зводиться до додатної простою зміною знака).

Нарешті, якщо $\mu \leqslant -1$, то інтеграл $\int\limits_0^1 x^\mu \, dx$ розбіжний і, отже запропонований інтеграл теж розбіжний, бо

$$\frac{x^\mu \ln x}{x^\mu} = \ln x \to \infty, \quad \text{коли } x \to 0$$

за тією ж теоремою.

Подальші приклади читач знайде у наступному розділі.

Далі, застосовуючи ознаку Бользано – Коші, маємо таку загальну умову збіжності.

Теорема 482.4. *Для збіжності невласного інтеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *(де* b *— особлива точка) необхідно і достатньо, щоб кожному числу* ε *відповідало таке число* $\delta > 0$, *щоб для* $0 < \eta < \delta$ *та* $0 < \eta' < \delta$ *виконувалася нерівність*

$$\left| \int\limits_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Звідси, як і вище, випливає така теорема.

Теорема 482.5. *Якщо інтеграл* $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, *то й інтеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *теж збіжний. (У припущенні, що на кожному проміжку* $[a,\ b-\eta]$ $(\eta > 0)$, *функція* $f(x)$ *інтегровна (у власному сенсі)).*

Обернене, взагалі кажучи, неправильно. Тому й тут окремо розглядають випадок, коли разом з інтегралом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ збігається й інтеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$; тоді перший інтеграл називають *абсолютно збіжним*, а функцію $f(x)$ — *абсолютно інтегровною* на проміжку $[a, b]$.

Подібно до тв. 475.1 легко довести таку теорему.

Теорема 482.6. *Якщо функція* $f(x)$ ***абсолютно*** *інтегровна на проміжку* $[a, b]$, *а функція* $g(x)$ *інтегровна на* $[a, b]$ *у власному сенсі, то й функція* $f(x) \cdot g(x)$ *буде* ***абсолютно*** *інтегровна на зазначеному проміжку.*

Зв'язок із нескінченними рядами дається такою теоремою.

Теорема 482.7. *Для збіжності невласного інтеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *(де* b *— особлива точка) необхідно і достатньо, щоб хоч би яка була варіанти* $a_n \to b$, *ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,dx \quad (a_0 = a,\ a \leqslant a_n < b)$$

збігався до однієї й тієї самої суми; остання і надає значення невласного інтеграла.

4) Дамо **приклад** збіжного інтеграла, але не абсолютно. Розглянемо

$$f(x) = 2x \cdot \sin\frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x} \cdot \cos\frac{\pi}{x^2} \quad (0 < x \leqslant 2),$$

вона неперервна для $x > 0$, і єдиною особливою точкою для неї на проміжку $[0, 2]$ буде 0. З іншого боку, первісною для $f(x)$, як нескладно перевірити, є функція

$$F(x) = x^2 \cdot \sin\frac{\pi}{x^2}\,,$$

яка прямує до 0, коли $x \to +0$: $F(+0) = 0$. Тому, інтеграл

$$\int\limits_0^2 f(x)\,dx = x^2 \cdot \sin\frac{\pi}{x^2}\bigg|_0^2 = 2\sqrt{2}$$

збіжний.

Щоб переконатися, що інтеграл $\int\limits_0^2 |f(x)|\,dx$ розбіжний, запишемо його у вигляді ряду. Візьмемо таку варіанту $a_n \to 0$:

$$a_0 = 2, \quad a_{2k-1} = \sqrt{\frac{2}{2k-1}}, \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k}} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{a_n}^{a_{n-1}} |f(x)|\,dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} |f(x)|\,dx.$$

На проміжку $[a_{2k},\ a_{2k-1}]$, тобто для $k\pi \geqslant \frac{\pi}{x^2} \geqslant k\pi - \frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{x^2}$ та $\cos\frac{\pi}{x^2}$ мають протилежні знаки, тому $f(x)$ **зберігає** певний знак, і тому

$$\int\limits_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} |f(x)|\,dx = \left|\int\limits_{a_{2k}}^{a_{2k-1}} f(x)\,dx\right| = |F(a_{2k-1}) - F(a_{2k})| = \frac{2}{2k-1} > \frac{1}{k}.$$

Зважаючи на розбіжність гармонічного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, наш ряд буде розбіжним, й запропонований інтеграл теж буде розбіжним.

483. Приклади

Дослідити інтеграли на збіжність.

1)

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\theta} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}}$.

Особлива точка $\varphi = \theta$. Зважаючи на існування похідної

$$\lim_{\varphi\to\theta} \frac{\cos\varphi - \cos\theta}{\varphi - \theta} = -\sin\theta$$

підінтегральний вираз буде (для $\varphi \to \theta$) нескінченно великою порядку 1/2 (відносно $\frac{1}{\theta-\varphi}$). **Збіжний.**

б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\left(e^x-e^{-x}\right)}}$.

Особлива точка $x=0$. Оскільки

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x^{-x}}{x}=2,$$

то порядок підінтегрального виразу (відносно $\frac{1}{x}$) буде 2/3. **Збіжний.**

в) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$.

Тут

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1;$$

порядок (відносно $\frac{1}{1-x}$) дорівнює 1. **Розбіжний.**

г) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^p\,dx.$

Якщо $p>0$, то особливою точкою буде $\frac{\pi}{2}$. Якщо $p<0$ — точка 0. В обох випадках підінтегральний вираз є нескінченно великим порядку $|p|$. Отже, інтеграл **збіжний**, якщо $|p|<1$ і **розбіжний**, якщо $|p|\geqslant 1$.

ґ) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)^p d\theta.$

Якщо $p>0$, то особливою точкою буде $-\frac{\pi}{4}$. Якщо $p<0$ — точка $\frac{\pi}{4}$. Відповідь така сама як і в г).

2)

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

nebayduzhi.math@gmail.com

Підінтегральна функція прямує до 0, коли $x \to 1$. Особлива точка $x = 0$. Нехай $0 < \lambda < 1$, тоді

$$\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda \ln x}{\sqrt{1-x^2}} \to 0, \quad \text{коли} \quad x \to 0.$$

Збіжний.

б) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^{b-1} - x^{a-1}}{\ln x} dx \quad (a,\ b > 0).$

Для $x \to 1$, розкривши невизначеність, знайдемо, що підінтегральна функція має скінченну границю ($= b - a$). Особлива точка $x = 0$ (якщо хоча б одно з чисел a, b менше від 1, що ми й припустимо). Частка підінтегральної функції та чисельника дорівнює $\frac{1}{\ln x} \to 0$ (коли $x \to 0$). Зважаючи на збіжність $\int\limits_0^1 (x^{b-1} - x^{a-1})\, dx$, маємо, що й заданий інтеграл **збіжний**.

в) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x\, dx.$

Особлива точка $x = 0$. Нехай $0 < \lambda < 1$, маємо:

$$\frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x^\lambda}} = \left(\frac{x}{\sin x}\right)^\lambda \cdot \sin^\lambda x \cdot \ln \sin x \to 0, \quad \text{коли} \quad x \to 0.$$

Збіжний.

г) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \ln \left|\sin^2 \theta - k^2\right| d\theta \quad (k^2 \leqslant 1).$

Нехай $k = \sin \omega$ $\left(0 < \omega \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, особлива точка $\theta = \omega$. Нехай знову $0 < \lambda < 1$, тоді:

$$\frac{\ln \left|\sin^2 \theta - \sin^2 \omega\right|}{\frac{1}{|\theta - \omega|^\lambda}} = \left|\frac{\theta - \omega}{\sin \theta - \sin \omega}\right|^\lambda \cdot |\sin \theta - \sin \omega|^\lambda \cdot \left[\ln|\sin \theta - \sin \omega| + \ln(\sin \theta + \sin \omega)\right]$$

прямує до 0, коли $\theta \to \omega$. **Збіжний.**

3)

а) $\displaystyle\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx.$

Для $a < 1$ особлива точка $x = 0$; для $b < 1$ особлива точка $x = 1$. Розіб'ємо цей інтеграл на два, наприклад так: $\int\limits_0^1 = \int\limits_0^{1/2} + \int\limits_{1/2}^1$. Оскільки підінтегральна функція для $x \to 0$ і $a < 1$ є нескінченно великою порядку $1 - a$, то перший інтеграл буде збіжний лише за умови, що $1 - a < 1$, тобто $a > 0$. Аналогічно, другий інтеграл буде збіжний, якщо $b > 0$. Тож, заданий інтеграл **збіжний** тільки тоді, коли одночасно $a > 0$ і $b > 0$.

б) $\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \ln x \, dx.$

Точка $x = 0$ особлива. Розглянемо інтеграл $\int\limits_0^{1/2}$, вважаючи $a \leqslant 1$ (для $a > 1$ інтеграл існує, як власний). Використаємо тіж самі міркування, що і в пр. 482.3. Інтеграл буде збіжний, якщо $a > 0$, так само як і в а).

Розглянемо іншу особливу точку $x = 1$. Тут $\ln x$ є **нескінченно малою** 1-го порядку. Інтеграл $\int\limits_{1/2}^1$ існує, якщо $b > -1$.

Остаточно, заданий інтеграл буде збіжним, якщо $a > 0,\ b > -1$.

4)

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1}\varphi \, d\varphi}{|1 + k\cos\varphi|^n}.$$

Оскільки випадок, де $k < 1$, зводиться до випадку, де $k > 0$, заміною $\varphi = \pi - \varphi_1$, то можна обмежитися припущенням: $k \geqslant 0$. Крім того для збіжності інтеграла в будь-якому випадку необхідно: $n > 0$ — інакше для $\varphi \to 0$ (або $\varphi \to \pi$) підінтегральна функція буде нескінченно великою порядку $\geqslant 1$.

Якщо $k < 1$, то цієї умови достатньо. Якщо $k = 1$, то інтеграл не може бути збіжний, бо для $\varphi \to \pi$ маємо нескінченно велику порядку 1.

Нарешті, нехай $k > 1$. Тоді існує ще одна особлива точка: $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{k}\right)$. Якщо $\varphi \to \alpha$, то підінтегральний вираз буде нескінченно великою порядку n, отже, для збіжності інтеграла необхідно ще, щоб $n < 1$.

Підсумуємо все разом, заданий інтеграл **збіжний**, якщо
1) $0 \leqslant k < 1$ і $n > 0$; або
2) $k > 1$ і $0 < n < 1$.

У всіх інших випадках заданий інтеграл буде **розбіжний**.

5)

а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$

Особливі точки: ∞ та (для $a<1$) також 0. Якщо розкласти інтеграл: $\displaystyle\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$, то перший буде збіжний, для $a>0$ (нескінченно велика порядку $1-a<1$ відносно x), а другий — для $a<1$ (нескінченно мала порядку $2-a>1$ відносно $\frac{1}{x}$). Підсумуємо все разом, заданий інтеграл **збіжний**, якщо $0<a<1$.

б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx.$

Особливі точки ∞ та 0, $\displaystyle\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$. Взявши $0<\lambda<1$, маємо

$$\frac{\ln x}{1+x^2} : \frac{1}{x^\lambda} = \frac{x^\lambda \ln x}{1+x^2} \to 0, \quad \text{коли} \quad x \to 0,$$

і $\displaystyle\int_0^1$ збіжний. Тепер нехай $1<\mu<2$, тоді

$$\frac{\ln x}{1+x^2} : \frac{1}{x^\mu} = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{\ln x}{x^{2-\mu}} \to 0, \quad \text{коли} \quad x \to \infty,$$

отже, і $\displaystyle\int_1^\infty$ **збіжний**. Звідси випливає, що заданий інтеграл **збіжний**.

в) $\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx.$

Особливі точки ∞ та 0 (для $p<1$). $\displaystyle\int_0^1$ існує лише для $p>0$ (нескінченно мала порядку $1-p$ відносно $\frac{1}{x}$). $\displaystyle\int_1^\infty$ існує для будь-якого p, оскільки, взявши $\lambda>1$, маємо

$$\frac{x^{p-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^\lambda}} = \frac{x^{\lambda+p-1}}{e^x} \to 0, \quad \text{для} \quad x \to \infty.$$

заданий інтеграл існує для $p > 0$.

В наступних двох завданнях розглядаються функції на проміжку $[a, b]$ (скінченному або нескінченному). Нехай функції мають на цьому проміжку (або на скінченній його частині, якщо проміжок нескінченний) скінченне число особливих точок.

6) Довести, що:

а) якщо функція f^2 інтегровна, то й сама функція f необхідно буде абсолютно інтегровна (про таку функцію кажуть, що вона "інтегровна з квадратом");

б) якщо обидві функції f і g інтегровні с квадратом, то їх сума теж інтегровна з квадратом;

в) якщо обидві функції f і g інтегровні с квадратом, то їх добуток fg буде (абсолютно) інтегровна функція.

За теоремою порівняння, все це просто випливає з нерівностей

$$|f| \leqslant \frac{1+f^2}{2}, \quad (f+g)^2 \leqslant 2(f^2+g^2), \quad |fg| \leqslant \frac{f^2+g^2}{2}\,.$$

7) Для функцій зазначеного класу можуть бути отримані такі самі інтегральні нерівності, які були виведені в розд. 321, за умови інтегровності функцій у власному розумінні. Наприклад, якщо єдиною особливою точкою у всіх випадках є b (яке може бути і ∞), то написавши ту чи іншу інтегральну нерівність для проміжку $[a, x_0]$, де $a < x_0 < b$, а потім перейшовши до границі для $x_0 \to b$, можна довести справедливість нерівності й для невласних інтегралів. При цьому зі збіжності інтегралів у правій частині нерівності випливає збіжність інтегралів у лівій частини, подібно до того, як ми мали в пр. 375.8 для нескінченних рядів.

484. Головні значення невласних інтегралів

Припустимо, що на проміжку $[a, b]$ задана функція $f(x)$, яка має лише одну особливу точку c **всередині** проміжку та є інтегровною (у власному сенсі) у кожній його частині, що не містить c. Невласний інтеграл від a до b означимо рівністю

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\eta\to 0\\ \eta'\to 0}} \left\{ \int_a^{c-\eta} + \int_{c+\eta'}^{b} \right\},$$

причому границя має існувати, якщо робити **незалежний граничний перехід** за η і за η'. У деяких випадках, коли ця границя не існує, виявляється корисним розглядати границю того самого виразу, але за умови, що η та η' прямують до нуля, **залишаючись рівними**: $\eta' = \eta \to 0$. Якщо така границя існує, її називають (слідуючи заКоші) *головним значенням* невласного інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ та позначають символом

$$V.p.\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to 0}\left\{\int\limits_a^{c-\eta} + \int\limits_{c+\eta}^b\right\}.$$

(V.p. — початкові літери від слів “Valeur principale”, що на французькій означає “головне значення”). У цьому випадку говорять, що *інтеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *існує у сенсі головного значення.* Якщо інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ існує як невласний, то він, очевидно, існує і у сенсі головного значення; зворотне ж, взагалі, не є вірним.

Розглянемо **приклади**.

1) Інтеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c}$ $(a<c<b)$ як невласний не існує, бо вираз

$$\int\limits_a^{c-\eta}\frac{dx}{x-c} + \int\limits_{c+\eta'}^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a} + \ln\frac{\eta}{\eta'}$$

не має певної границі, якщо eta та η' прямують до 0 **незалежно одне від одного**. Разом із тим, якщо зв’язати eta та η' вимогою $\eta'=\eta$, то отримаємо вираз

$$\int\limits_a^{c-\eta} + \int\limits_{c+\eta}^b = \ln\frac{b-c}{c-a},$$

що виявляється незалежним від η, отже головне значення інтеграла існує.

$$V.p.\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$

2) Інтеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$ $(a<c<b,\ n\geqslant 2)$ для парному n має нескінченне значення, а для непарного — не існує взагалі, як невласний.

Розглянемо вираз

$$\int\limits_a^{c-\eta}\frac{dx}{(x-c)^n} + \int\limits_{c+\eta}^b \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}} + \frac{1}{\eta^{n-1}} + (-1)^n\frac{1}{\eta^{n-1}}\right].$$

Для непарного n він зводиться до сталого числа; таким самим буде в даному випадку і головне значення:

$$V.p.\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-c)^n} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}}\right] \quad (n\text{ — непарне}).$$

3) Розглянемо далі розбіжний інтеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{k-\sin\theta} \quad (0<k<1).$$

Особливою точкою буде $\alpha = \arcsin k$, і для $\theta \to \alpha$ підінтегральна функція перетворюється на нескінченність першого порядку. Маємо:

$$\int \frac{d\theta}{k-\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \ln\left|\frac{k-\sin\theta}{1-k\sin\theta-\sqrt{1-k^2}\,\cos\theta}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \ln\left|\frac{\sin\alpha-\sin\theta}{1-\cos(\alpha-\theta)}\right|.$$

Тому

$$\int\limits_0^{\alpha-\eta} + \int\limits_{\alpha+\eta}^{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \left\{\ln\frac{\sin\alpha-\sin(\alpha-\eta)}{\sin(\alpha+\eta)-\sin\alpha} + \ln\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right\}.$$

Для $\eta \to 0$ вираз під знаком логарифму у першому доданку прямує до 1 (у чому не складно переконатися, розкриваючи невизначеність згідно з правилом Лопіталя). Остаточно,

$$V.p. \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{k-\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \ln\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k} \quad (0<k<1).$$

У деяких випадках можна наперед показати існування головного значення інтеграла. Зупинимося на одному такому випадку. Нехай дано інтеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)},$$

де функція $f(x)$ є неперервною на проміжку $[a,b]$ та дорівнює 0 у лише одній точці c всередині цього проміжку. Припустимо, що в околі точки c існує перша похідна $f'(x)$, що не дорівнює нулю в точці $x=c$, а також існує друга похідна $f''(c)$ в точці.

Оскільки $\dfrac{1}{f(c)}$ для $x \to c$ виявляється нескінченно великою 1-го порядку і змінює знак, коли x проходить через c, то запропонований інтеграл не існує. Покажемо, що він існує у сенсі головного значення.

Нехай

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f'(c)(x-c)} + \varphi(x),$$

ця функція для $x \neq c$ є неперервною. Поблизу $x=c$ маємо, згідно з формулою Тейлора з додатковим членом у формі Пеано (розд. 124):

$$f(x) = f'(c)(x-c) + [f''(c)+\alpha(x)] \cdot \frac{(x-c)^2}{2},$$

де $\alpha(x) \to 0$, коли $x \to c$. Тоді, очевидно,

$$\varphi(x) = -\frac{\frac{1}{2}[f''(c) + \alpha(x)]}{f'(c)\left[f'(c) + \frac{f''(c) + \alpha(x)}{2}(x - c)\right]},$$

і тому $\varphi(x)$ поблизу $x = c$ залишається обмеженою а, отже, інтегровною навіть у власному сенсі. Оскільки для функції $\frac{1}{f'(c)(x-c)}$ інтеграл існує у сенсі головного значення (дивіться пр. 484.1), то це справедливо і по відношенню до шуканого інтеграла.

За допомогою цієї ознаки, наприклад, легко показати існування головного значення в пр. 484.3. Іншим прикладом може служити означення однієї важливої неелементарної функції, так званого “інтегрального логарифма”:

$$\operatorname{li} a = \int_0^a \frac{dx}{\ln x}.$$

Цей інтеграл збігається лише для $0 < a < 1$; для $a > 1$ його розуміють саме у сенсі головного значення.

Нескладно поширити поняття головного значення і на випадок будь-якого скінченного числа особливих точок **всередині** розглядуваного проміжку.

Досі ми **не брали до розгляду** можливість наявності особливостей на кінцях проміжку; можна цього і не робити, якщо тільки при побудові головних значень саме ці особливості не брати до уваги.

4) Нехай, для прикладу, візьмемо заздалегідь розбіжний інтеграл $(a > 0)$

$$\int_0^2 \frac{x^{a-1}}{1-x}\, dx.$$

Особливими тут будуть точки: $x = 1$ та (якщо $a < 1$) кінець проміжку $x = 0$. Легко показати, що у цьому випадку

$$V.p.\int_0^2 \frac{x^{a-1}}{1-x}\, dx = \lim_{\eta \to 0}\left\{\int_0^{1-\eta} + \int_{1+\eta}^{2}\right\}$$

зводиться просто до інтеграла

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{a-1} - (1+t)^{a-1}}{t}\, dt$$

(для $a < 1$ — невласному).

Насамкінець розглянемо ще один різновид “головного значення”, яким нерідко доводиться користуватися. А саме, зупинимося на інтегралі, що поширюється на нескінченний **у обидва боки** проміжок $(-\infty, +\infty)$, при цьому всередині проміжку ми не припускаємо наявності особливих точок. Як відомо, такий інтеграл можна означити за допомогою граничної рівності

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ A'\to-\infty}} \int\limits_{A'}^{A} f(x)\,dx,$$

де граничний перехід по A та по A' допускається незалежно одне від одного. Може виявитися, однак, що у цьому сенсі границі не існує, але існує границя, що відповідає окремому випадку $A' = -A$. Його також називають *головним значенням* інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ та позначають символом

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

Наприклад, якщо функція $f(x)$ є **непарною**, то її інтеграл на симетричному відносно 0 проміжку $(-A, A)$ буде дорівнювати 0, отже і

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0,$$

хоча невласного інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ може і не існувати зовсім (як, скажімо, для функції $\sin x$).

Якщо функція $f(x)$ **парна**, то

$$\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{A} f(x)\,dx,$$

границя для цього інтеграла існує тоді і тільки тоді, коли існує границя для інтеграла $\int\limits_{0}^{A} f(x)\,dx$, тобто існує невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$, а разом із ним і $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Отже, для парної функції головне значення інтеграла існує лише одночасно із невласним інтегралом (і, природно, дорівнює йому).

Будь-яку функцію $f(x)$ (інтегровну на кожному скінченному проміжку) можна виразити у вигляді суми двох функцій, **парної та непарної**

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{та} \quad \psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

(що зберігають ту ж властивість стосовно інтегровності).

Із сказаного вище тепер зрозуміло, що

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx,$$

за умови, що останній невласний інтеграл існує.

5) Наприклад, помічаючи, що функція $\dfrac{1+x}{1+x^2}$ складається із парної частини $\dfrac{1}{1+x^2}$ та непарної частини $\dfrac{x}{1+x^2}$, одразу можна записати

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi.$$

485. Зауваження про узагальнені значення розбіжних інтегралів

В 11.9 ми розглядали підсумовування **розбіжних рядів**, приписуючи такому ряду — згідно з тим чи іншим правилом — “узагальнену суму”. Подібно до того, існують методи, що дають змогу у певних випадках і **розбіжним інтегралам** приписувати “узагальнені значення”. Власне кажучи, ми саме це і робили раніше, вносячи деякі обмеження у граничні процеси, які приводять до звичайних невласних інтегралів. Тут же ми маємо на увазі вже істотно інші процеси, що більше нагадують ті, якими ми користувалися по відношенню до розбіжних рядів. Ми обмежимося двома прикладами таких процесів, які є аналогами методу Чезаро та методу Пуассона – Абеля для рядів.

I. Нехай функція $f(x)$ визначена для $x \geqslant 0$ та інтегровна у власному сенсі у кожному скінченному проміжку $[0,\,x]$, але не інтегровна у проміжку $[0,\,\infty)$. Визначимо функцію

$$F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$$

і обрахуємо її **середнє значення**

$$\frac{1}{x}\int\limits_0^x F(u)\,du.$$

Якщо для нього існує скінченна границя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x F(u)\,du = I,$$

тоді це число і розглядають як “узагальнене значення” інтеграла.

1) Застосуємо цей підхід, наприклад, до відомого нам розбіжного інтеграла

$$\int\limits_0^\infty \sin x\,dx \tag{485.1}$$

(пр. 472.4). Тут $f(x) = \sin x$, $F(x) = 1 - \cos x$, та

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x F(u)\,du = \lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x} = 1.$$

Отже, “узагальнене значення” розбіжного інтеграла (485.1) дорівнює 1.

Природно, і тут постає питання щодо **регулярності** викладеного методу: чи приписує цей метод **збіжному** інтегралу

$$\int\limits_0^\infty f(x)\,dx, \tag{485.2}$$

що має скінченне значення I, згідно з означенням розд. 470, те саме число I як “узагальнене значення”. Покажемо, що це саме так.

Для довільного числа $\varepsilon > 0$, зважаючи на збіжність інтеграла (485.2), знайдеться таке $x_0 > 0$, що для $x \geqslant x_0$ буде

$$|F(x) - I| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{де} \quad F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt.$$

Приймаючи $x > x_0$, маємо

$$\frac{1}{x}\int\limits_0^x F(u)\,du - I = \frac{1}{x}\int\limits_0^x [F(u)-I]\,du = \frac{1}{x}\int\limits_0^{x_0}[F(u)-I]\,du + \left(1-\frac{x_0}{x}\right)\cdot\frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x [F(u)-I]\,du,$$

отже

$$\left|\frac{1}{x}\int\limits_0^x F(u)\,du - I\right| < \frac{1}{x}\left|\int\limits_0^{x_0}[F(u)-I]\,du\right| + \frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x |F(u)-I|\,du.$$

Другий доданок справа $< \frac{\varepsilon}{2}$ (згідно із вибором числа x_0); перший же також стане $< \frac{\varepsilon}{2}$, для досить великого x, і одночасно:

$$\left| \frac{1}{x} \int\limits_0^x F(u)\, du - I \right| < \varepsilon.$$

Отже, справді

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x F(u)\, du = I,$$

що й потрібно було довести.

II. На цей раз для заданої функції $f(x)$, для якої інтеграл (485.2) не існує, введемо до розгляду інший інтеграл

$$\int\limits_0^\infty e^{-kx} f(x)\, dx.$$

Якщо останній інтеграл збігається для $k > 0$ та існує скінченна границя

$$\lim_{k \to 0} \int\limits_0^\infty e^{-kx} f(x)\, dx = I,$$

то ця границя і приймається як “узагальнене значення” розбіжного інтеграла (485.2).

2) Як приклад, розглянемо знову інтеграл (485.1). Оскільки

$$\int\limits_0^\infty e^{-kx} \sin x\, dx = \frac{1}{k^2 + 1}$$

(пр. 472.1) прямує до 1, коли $k \to +0$, то і тут “узагальнене значення” для інтеграла (485.1) дорівнює 1.

До питання стосовно регулярності другого методу ми повернемося у розд. 520.

13.3. Властивості і перетворення невласних інтегралів

486. Найпростіші властивості

Ми будемо розглядати функції, інтегровні (у власному чи невласному сенсі) на скінченному чи нескінченному проміжку $[a, b]$. Отже, a і b можуть означати не лише скінченні числа, але й $\pm\infty$. Найпростіші властивості невласних інтегралів, які ми лише перелічимо, цілком аналогічні до властивостей власний інтегралів (дивіться розд. 302 – розд. 306) і можуть бути отримані з останніх однаковим способом. Оскільки невласні інтеграли є границями власних, то зазвичай достатньо написати для останніх рівність або нерівність, яка виражає потрібну властивість, і зробити граничний перехід.

Тут, насамперед, також можна ввести поняття **інтеграла по орієнтованому проміжку** і довести таку властивість.

Властивість 486.1. *Якщо $f(x)$ інтегровна на проміжку $[b, a]$, то вона інтегровна й на проміжку $[a, b]$, причому*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

Можна прийняти це просто за **означення** інтеграла $\int\limits_a^b$ для випадку, коли $a > b$.

Далі.

Властивість 486.2. *Нехай $f(x)$ інтегровна на найбільшому з проміжків $[a, b]$, $[a, c]$ і $[c, b]$. (Точніше, на тому з проміжків, який містить у собі обидва інших.) Тоді вона інтегровна на двох інших, і виконується рівність*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Властивість 486.3. *Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a, b]$ і $c = \mathrm{const}$, то й $c \cdot f(x)$ також інтегровна, і*

$$\int\limits_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Властивість 486.4. *Нехай обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на проміжку $[a, b]$, тоді інтегровна й функція $f(x) \pm g(x)$, і*

$$\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

(Щодо інтегралів із нескінченною межею, вл. 486.3 і вл. 486.4 вже були згадані в розд. 473 і навіть використані в подальших викладках. Тут їх наведено в загальнішому формулюванні.)

При доведенні цієї й наступної властивостей слід врахувати зауваження з розд. 479. Нехай, скажімо, b буде єдиною особливою точкою для тої чи іншої з функцій $f(x)$, $g(x)$. Тоді, написавши рівність

$$\int\limits_a^{x_0} [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int\limits_a^{x_0} f(x)\, dx \pm \int\limits_a^{x_0} g(x)\, dx \quad (a < x_0 < b),$$

можна з неї отримати попередню формулу, переходячи до границі для $x_0 \to b$, як у разі, коли всі інтеграли від a до b невласні, так і тоді, коли один із них власний.

Властивість 486.5. *Якщо для двох інтегровних на $[a, b]$ функцій $f(x)$ і $g(x)$ виконано нерівність $f(x) \leqslant g(x)$, то для $a < b$*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\, dx.$$

Властивість 486.6. *Якщо функція $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ абсолютно інтегровна, то для $a < b$*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$$

Властивість 486.7. *Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a, b]$, то для довільного x із цього проміжку існує інтеграл*

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt \tag{486.1}$$

і є неперервною функцією від x.

Доведення. Нехай $a < x_0 \leqslant b$. Доведемо, наприклад, неперервність функції $\Phi(x)$ в точці $x = x_0$ зліва. Вибравши c між a й x_0 так, щоб на проміжку $[c, x_0]$ не було особливих точок, за винятком хіба що x_0, маємо для $c < x \leqslant x_0$

$$\int\limits_a^x f(t)\, dt = \int\limits_a^c f(t)\, dt + \int\limits_c^x f(t)\, dt \tag{486.2}$$

і достатньо з'ясувати, що

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \int\limits_c^x f(t)\, dt = \int\limits_c^{x_0} f(t)\, dt.$$

А ця рівність виконується (дивіться зауваження в розд. 479) як у разі, коли інтеграл у правій частині — власний, так і тоді, коли він невласний.

Якщо $x_0 = b = +\infty$, то неперервність функції $\Phi(x)$ для $x = +\infty$ розуміємо в тому сенсі, що

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \Phi(+\infty) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\,dt.$$

□

Властивість 486.8. *За тих самих припущень, якщо в точці x_0 функція $f(x)$ неперервна, то існує похідна функції $\Phi(x)$ (дивіться (486.1)) в цій точці, і*

$$\Phi'(x_0) = f(x_0).$$

Для доведення використовують розклад (486.2), відсилаючись до аналогічної властивості власного інтеграла.

Легко перефразувати вл. 486.7 і вл. 486.8 для випадку, коли змінною є нижня межа інтегрування.

487. Теореми про середнє значення

Перша теорема про середнє (вл. 304.6) припускає функцію $f(x)$ обмеженою, а проміжок скінченним, і тому її не можна перенести на випадок невласного інтеграла. В узагальненому ж вигляді (вл. 304.7) її можна перенести на цей випадок.

Теорема 487.1 (Перша теорема про серднє значення)**.** *Нехай обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на проміжку $[a, b]$, і $f(x)$ обмежена:*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

а $g(x)$ не змінює знак; тоді функція $f(x)\cdot g(x)$ також є інтегровною, і

$$\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = \mu\int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

де $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Існування інтеграла випливає із тв. 475.1 й аналогічної теор. 482.5. Саму рівність можна довести так само, як і для власних інтегралів.

Якщо функція $f(x)$ **неперервна** на замкненому проміжку $[a, b]$, то за m, M можна взяти найменше та найбільше значення $f(x)$ на $[a, b]$, і множник μ, як виявиться, дорівнює одному зі значень функції $f(x)$:

$$\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = f(c)\cdot\int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

де c належить $[a, b]$. Це твердження справедливе й у тому разі, якщо проміжок $[a, b]$ нескінченний, бо теореми Вайрштрасса (теор. 85.1) і Больцано – Коші (теор. 82.1) для цього випадку також справедливі. Пропонуємо читачеві переконатись у цьому самостійно.

Також наведемо таку теорему (порівняйте з вл. 306.2).

Теорема 487.2 (Друга теорема про середнє значення)**.** *Нехай функція $f(x)$ монотонна й обмежена на проміжку $[a, b]$, а функція $g(x)$ — інтегровна на цьому проміжку. Тоді й функція $f(x) \cdot g(x)$ інтегровна, й*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int\limits_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int\limits_\xi^b g(x)\,dx \quad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

Доведення. Для визначеності, зупинімося на випадку, коли a скінченне, $b = +\infty$ й інших особливих точок для $g(x)$ нема. Існування інтеграла випливає з ознаки Абеля.

Без зменшення загальності можна вважати функцію $f(x)$ **спадною**. Зважаючи на її обмеженість, існує скінченна границя

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Тоді $f^*(x) = f(x) - f(+\infty) \geqslant 0$. Для скінченного проміжку $[a, A]$ маємо (вл. 306.1):

$$\int\limits_a^A f^*(x)g(x)\,dx = f^*(a)\int\limits_a^\eta g(x)\,dx \quad (a \leqslant \eta \leqslant A). \tag{487.1}$$

Неперервна на проміжку $[a, +\infty)$ функція $\int\limits_a^A g(x)\,dx$ від змінної A має **скінченні** межі m, M, тож (дивіться (487.1))

$$m \cdot f^*(a) \leqslant \int\limits_a^A f^*(x)g(x)\,dx \leqslant M \cdot f^*(a)$$

і, після граничного переходу для $A \to +\infty$,

$$m \cdot f^*(a) \leqslant \int\limits_a^{+\infty} f^*(x)g(x)\,dx \leqslant M \cdot f^*(a).$$

Звідси

$$\int\limits_a^{+\infty} f^*(x)g(x)\,dx = \mu \cdot f^*(a) \quad (m \leqslant \mu \leqslant M). \tag{487.2}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Але неперервна функція $\int\limits_a^A g(x)\,dx$ досягає своїх меж m, M і набуває довільного значення між ними, тобто

$$\mu = \int\limits_a^\xi g(x)\,dx, \quad \text{де} \quad a \leqslant \xi \leqslant +\infty.$$

Приймаючи в (487.2) $f^*(x) = f(x) - f(+\infty)$ й підставляючи щойно знайдений вираз для μ, отримаємо потрібну формулу. ☐

488. Інтегрування частинами в разі невласних інтегралів

Твердження 488.1. *Нехай функція* $u = u(x)$ *і* $v = v(x)$ *визначені й неперервні разом зі своїми першими похідними в усіх точках проміжку* $[a, b]$, *за винятком точки* b *(яка може дорівнювати, зокрема,* $+\infty$*). Тоді виконується рівність*

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du,$$

якщо подвійну заміну розуміти як різницю

$$uv\Big|_a^b = \lim_{x\to b} u(x)v(x) - u(a)v(a).$$

(При цьому ми припускаємо, що з ***трьох*** *виразів, які наявні в рівності (два інтеграли та подвійна заміна)* ***два*** *мають зміст: існування третього випливає з цього.)*

Доведення. Справді, вибравши $a < x_0 < b$, напишемо звичайну формулу інтегрування частинами для проміжку $[a, x_0]$, де всі інтеграли — власні:

$$\int\limits_a^{x_0} u\,dv = [u(x_0)v(x_0) - u(a)v(a)] - \int\limits_a^{x_0} v\,du.$$

Нехай тепер у цій рівності x_0 прямує до b. Згідно з умовою, два вирази в цій рівності матимуть скінченні границі для $x \to x_0$ (дивіться розд. 477). Отже, має скінченну границю й третій вираз, і зазначену рівність доводимо граничним переходом. ☐

489. Приклади

1)

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = x\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx$$

Інтегруючи частинами, ми звели невласний інтеграл до власного й тим самим довели існування невласного інтеграла (пр. 483.2). Таку саму особливість мають і наступні приклади.

2)

а)

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int\limits_0^1 \ln x\,d(\operatorname{arctg} x) = \ln x\cdot\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = -\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx.$$

б) Аналогічним чином

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int\limits_0^1\frac{\arcsin x}{x}\,dx.$$

3)

$$\int\limits_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int\limits_a^\infty\frac{d(\cos x)}{x} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_a^\infty - \int\limits_a^\infty\frac{\cos x}{x^2}\,dx \quad (a>0).$$

Оскільки подвійна заміна й інтеграл у правій частині мають зміст, то цим знову доведено існування інтеграла в лівій частині (порівняйте з розд. 476, розд. 477).

Так само можна довести існування інтеграла $\int\limits_a^\infty \frac{f(x)}{x^\lambda}\,dx$ $(a,\ \lambda>0)$, якщо функція $f(x)$ неперервна й інтеграл від неї $F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx$ обмежений для всіх $x > a$ (це випливає з ознаки Діріхле).

Інтегруючи частинами, іноді можна отримати рекурентні формули, з використанням яких потім можна легко обчислювати інтеграли. Проілюструємо це на подальших прикладах (n і k — натуральні числа).

4)

$$I_n = \int\limits_0^\infty e^{-t}\cdot t^n\,dt.$$

Маємо:

$$I_n = -e^{-t} \cdot t^n \Big|_0^{\infty} + n \int\limits_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{n-1}\, dt = nI_{n-1},$$

звідки $I_n = n!$

Знищення подвійної заміни тут (й у подальших прикладах) створює перевагу для застосування формули інтегрування частинами саме до визначених інтегралів (а не до невизначених).

5)

$$E_n = \int\limits_0^{\infty} e^{-ax} \sin^n x\, dx \quad (a > 0).$$

Насамперед, інтегруючи частинами, знайдемо:

$$E_n = -\frac{1}{a} e^{-ax} \sin^n x \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{a} \int\limits_0^{\infty} e^{-ax} \sin^{n-1} x \cos x\, dx.$$

Оскільки подвійна підстановка дорівнює нулю, то, знову застосовуючи інтегрування частинами, отримаємо далі:

$$E_n = -\frac{n}{a^2} e^{-ax} \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\infty} + \frac{n(n-1)}{a^2} \int\limits_0^{\infty} e^{-ax} \sin^{n-2} x \cos^2 x\, dx - \frac{n}{a^2} \int\limits_0^{\infty} e^{-ax} \sin^n x\, dx.$$

Якщо замінити тут $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$, то легко отримати рекурентну формулу

$$E_n = \frac{n(n-1)}{n^2 + a^2} \cdot E_{n-2}\,.$$

Оскільки $E_0 = \frac{1}{a}$ і $E_1 = \dfrac{1}{1 + a^2}$, то остаточно для випадків парного й непарного n знайдемо, відповідно:

$$E_{2k-1} = \frac{(2k-1)!}{(1+a^2)(3^2+a^2) \cdot \ldots \cdot ((2k-1)^2 + a^2)},$$

$$E_{2k} = \frac{(2k)!}{a(2^2+a^2)(4^2+a^2) \cdot \ldots \cdot ((2k)^2 + a^2)}\,.$$

6) **Узагальнену** формулу інтегрування частинами (311.4) легко поширити на випадок невласних інтегралів.

Нехай, наприклад, маємо інтеграл

$$K = \int\limits_0^{\infty} e^{-(p+1) \cdot x} \cdot L_n(x)\, dx,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

де $p > 0$ і через $L_n(x)$ позначено так званий n-ий многочлен Чебишова – Лаґерра (фр. Edmond Laguerre, Едмо́н Лаґе́рр)

$$L_n(x) = e^x \cdot \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots).$$

Використовуючи зазначену формулу, матимемо

$$\begin{aligned}
K &= \int\limits_0^\infty e^{-px} \cdot \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}\, dx = \\
&= \left(e^{-px} \cdot \frac{d^{n-1}(x^n e^{-x})}{dx^{n-1}} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1} e^{-px}}{dx^{n-1}} \cdot x^n e^{-x} \right) \Bigg|_0^\infty + \\
&\quad + (-1)^n \int\limits_0^\infty x^n e^{-x} \cdot \frac{d^n e^{-px}}{dx^n}\, dx = \\
&= p^n \int\limits_0^\infty x^n e^{-(p+1)\cdot x}\, dx
\end{aligned}$$

і, остаточно (дивіться пр. 487.4):

$$K = \frac{p^n}{(p+1)^{n+1}} \cdot n!$$

Аналогічним чином виводимо

$$\int\limits_0^\infty e^{-x} \cdot L_n(x) \cdot L_k(x)\, dx = \begin{cases} 0 & , \quad \text{якщо} \quad k \neq n, \\ (n!)^2 & , \quad \text{якщо} \quad k = n. \end{cases}$$

490. Заміна змінних у невласних інтегралах

Нехай функція $f(x)$ визначена й неперервна на скінченному чи нескінченному проміжку $[a, b)$ і, як наслідок, інтегровна у власному сенсі в кожній його частині, яка не містить точки b, яка може дорівнювати й $+\infty$; ця точка, за припущенням — єдина особлива точка функції $f(x)$.

Розглянемо тепер **монотонну зростаючу** функцію $x = \varphi(t)$, неперервну разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на проміжку $[\alpha, \beta)$, де β може дорівнювати $+\infty$, і припустимо, що $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. Останню рівність потрібно розуміти так:

$$\lim_{t \to \beta} \varphi(t) = b.$$

За цих умов виконується рівність

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)\,dt, \tag{490.1}$$

якщо припустити, що існує один із цих інтегралів (існування іншого є наслідком). Другий інтеграл буде або власним, або невласним — із єдиною особливою точкою β.

За теоремою про обернену функцію (теор. 83.1) зрозуміло, що й t можна розглядати як монотонну зростаючу й неперервну функцію від x на $[a, b)$: $t = \theta(x)$, водночас

$$\lim_{x\to b}\theta(x) = \beta.$$

Нехай тепер x_0 і t_0 є довільними взаємовідповідними значеннями x і t із проміжків (a, b) і (α, β). Тоді за допомогою заміни змінної у власному інтегралі будемо мати

$$\int\limits_a^{x_0} f(x)\,dx = \int\limits_a^{t_0} f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

Якщо існує, скажімо, другий із інтегралів (490.1), то будемо **довільним чином** наближати x_0 до b; при цьому $t_0 = \theta(x_0)$ прямуватиме до β, й ми отримаємо формулу (490.1), а заразом і доведення існування інтеграла в лівій частині рівності.

Наше міркування так само застосовне в разі **монотонно спадної** функції $\varphi(t)$, коли $\alpha > \beta$. Так само твердження справедливе й для інших розподілів особливих точок. Розставляючи межі інтегрування в перетворенім інтегралі, важливо пам'ятати, що нижня межа α має відповідати нижній межі a, а верхня межа β — верхній межі b, незалежно від того, $\alpha > \beta$ чи $\alpha < \beta$.

491. Приклади

1) Інтеграл

$$\int\limits_{x_0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-k^2)}}\quad (k^2 < 1 < x_0)$$

підстановкою $x = \frac{1}{t^2}$, $dx = -\frac{2}{t^3}\,dt$ зводимо до інтеграла

$$-2\int\limits_{1/\sqrt{x_0}}^{0}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 2\int\limits_0^{1/\sqrt{x_0}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Тут $a = x_0,\ b = \infty,\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{x_0}},\ \beta = 0$. Невласний інтеграл перетворено на власний.

2) Обчислити інтеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

підстановкою

$$x = a\,\cos^2\varphi + b\,\sin^2\varphi.$$

Вказівка. Тут $\alpha = 0,\ \beta = \frac{\pi}{2}$, і шуканий інтеграл зводимо до власного інтеграла

$$2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \pi.$$

3) Для доведення збіжності інтеграла

$$\int\limits_0^\infty \sin(x^2)\,dx$$

виконаємо у ньому заміну змінної: $x = \sqrt{t},\ dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}},\ a = \alpha = 0,\ b = \beta = \infty$. Ми отримаємо заздалегідь збіжний (розд. 476 або пр. 489.3) інтеграл

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt,$$

отже, збігається і запропонований інтеграл. Цікаво зазначити, що підінтегральна функція у ньому не прямує ні до якої границі, коли $x \to \infty$, вона коливається між -1 та $+1$.

Аналогічно вирішуємо питання про збіжність інтеграла $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\,dx$. У наступному прикладі отримано більш загальний результат.

4) Довести, що інтеграли

$$\int\limits_a^\infty \sin\left(f(x)\right)dx, \qquad \int\limits_a^\infty \cos\left(f(x)\right)dx$$

збігаються, якщо $f'(x)$ монотонно зростає і прямує до ∞, коли $x \to \infty$.

Передусім, $f'(x) > 0$ для досить великих x, та $f(x)$ монотонно зростає; будемо вважати, що це виконується вже починаючи з $x = a$. За допомогою формули скінченних приростів отримуємо

$$f(x+1) = f(x) + f'(x+\theta) \geqslant f(a) + f'(x),$$

відтак, сама функція $f(x) \to \infty$, коли $x \to \infty$. Введемо нову змінну $t = f(x)$, тому

$$x = g(t), \quad dx = g'(t)\,dt \quad (\alpha = f(a),\ \beta = \infty),$$

якщо через g позначити функцію, обернену до f. Але похідна $g'(t) = \dfrac{1}{f'(x)}$ монотонно спадає та прямує до 0, коли $t \to \infty$. Тому перетворені інтеграли

$$\int\limits_{f(a)}^{\infty} \sin t \cdot g'(t)\,dt \quad \int\limits_{f(a)}^{\infty} \cos t \cdot g'(t)\,dt$$

за ознакою Діріхлє збігаються, а з ними збігаються і запропоновані інтеграли.

5) Для обчислення інтеграла

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$$

(його збіжність ми з'ясували в пр. 483.5) розіб'ємо його на два: $\int\limits_0^{\infty} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{\infty}$. У другому з них зробимо підстановку $x = \frac{1}{t}$ $(a = 1,\ b = \infty,\ \alpha = 1,\ \beta = 0)$ та прийдемо до результату

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int\limits_1^{0} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = -\int\limits_0^{1} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx,$$

звідки випливає, що запропонований інтеграл дорівнює 0.

6) Нехай дано невласний інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

підстановкою $x = \sin t$ $\left(a = 0,\ b = 1, \alpha = 0,\ \beta = \frac{\pi}{2}\right)$ ми зводимо його до власного інтеграла

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{\sin t}\,dt.$$

7) Обчислення інтеграла

$$I = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

(порівняйте з пр. 472.2) може бути дуже спрощене застосуванням доцільних підстановок.

Передусім, до нього можна звести інтеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{1+x^4}$$

підстановкою $x = \frac{1}{t}$ $(a = 0,\ b = \infty,\ \alpha = \infty,\ \beta = 0)$, тому можна написати

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(1+x^2)\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(1+\frac{1}{x^2})\,dx}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,.$$

Якщо тепер вдатися до підстановки $x - \frac{1}{x} = z$ $(a = 0,\ b = +\infty,\ \alpha = -\infty,\ \beta = +\infty)$, то одразу отримаємо

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

8) Для обчислення інтеграла

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{tg}\theta}}$$

природно покласти $t = \sqrt{\operatorname{tg}\theta}$, тобто $\theta = \operatorname{arctg}(t^2)$ $(a = 0,\ b = \frac{\pi}{2},\ \alpha = 0,\ \beta = \infty)$; ми прийдемо до щойно обчисленого інтеграла:

$$2\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

9) Вивести формули:

а) $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(\alpha^2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}} \qquad (\alpha > 1);$$

б) $$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-\alpha^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{\arcsin\alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad (0 < \alpha < 1);$$

в) $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}} \qquad (\alpha > 0);$$

г) $$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}} \quad (\alpha>0);$$

ґ) $$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \dfrac{\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}} & (\alpha>1), \\ 1 & (\alpha=1), \\ \dfrac{\arccos\alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} & (0<\alpha<1). \end{cases};$$

Вказівка. У всіх випадках скористатися підстановкою Абеля (розд. 284).

10) Питання про збіжність інтегралів

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x\ln^\lambda x}, \quad \int\limits_A^\infty \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln^\lambda(\ln x)} \quad (\lambda>0,\ a>1,\ A>e)$$

одразу буде вирішене, якщо підстановкою

$$t=\ln x, \quad u=\ln(\ln x)$$

звести їх до інтегралів

$$\int\limits_{\ln a}^\infty \frac{dt}{t^\lambda}, \quad \int\limits_{\ln(\ln A)}^\infty \frac{du}{u^\lambda}$$

— обидва збігаються, коли $\lambda>1$, та розбігаються, коли $\lambda\leqslant 1$.

У наступних вправах $f(u)$ довільна неперервна функція визначена для $u\geqslant 0$.

11) Довести, що

$$\int\limits_0^\infty f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\ln x\,\frac{dx}{x} = \ln a\int\limits_0^\infty f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x} \quad (a>0),$$

якщо інтеграли збігаються.

Вказівка. Вдатися до підстановки $x=ae^u$ $(\alpha=-\infty,\ \beta=+\infty)$.

12) Довести, що (для $p>0$)

а) $$\int\limits_0^\infty f(x^p+x^{-p})\ln x\,\frac{dx}{x}=0,$$

б) $$\int\limits_0^\infty f(x^p+x^{-p})\ln x\,\frac{dx}{1+x^2}=0,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

якщо інтеграли збігаються.

Наприклад, для а) маємо: $\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty$, але $\int\limits_1^\infty = -\int\limits_0^1$; у цьому легко переконатися підстановкою $x = \frac{1}{t}$, і так далі.

13) Нехай інтеграл справа збіжний; довести формулу

$$\int\limits_0^\infty f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx = \frac{1}{A}\int\limits_0^\infty f(y^2)\,dy \quad (A,\ B > 0).$$

Підстановка $y = Ax - \frac{B}{x}$ $(a = -\infty,\ b = +\infty,\ \alpha = 0,\ \beta = +\infty)$ дає

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y^2)\,dy = \int\limits_0^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] \cdot \left(A + \frac{B}{x^2}\right) dx =$$

$$= A\int\limits_0^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx + B\int\limits_0^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] \cdot \frac{dx}{x^2}\,.$$

Але останній інтеграл підстановкою $x = -\frac{B}{At}$ $(a = 0,\ b = +\infty,\ \alpha = -\infty,\ \beta = 0)$ буде зведено до

$$A\int\limits_{-\infty}^0 f\left[\left(At - \frac{B}{t}\right)^2\right] dt,$$

тому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y^2)\,dy = A\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left[\left(Ax - \frac{B}{x}\right)^2\right] dx.$$

Звідси (зважаючи на парність підінтегральної функції) й витікає необхідна формула.

14) Нарешті, володіючи заміною змінної у невласних інтегралах, повернемося до одного незавершеного вище питання. У пр. 439.1 ми дослідили на неперервність функцію

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{x}{n^p + x^2 \cdot n^q},$$

але не з'ясували її поведінку в точці $x = 0$ в тому випадку, коли $0 \leqslant p < 1,\ q > 1$ та $p + q \leqslant 2$.

Скориставшись формулою (373.5), можна оцінити суму ряду **знизу** за допомогою інтеграла:

$$f(x) \geqslant \int\limits_1^\infty \frac{x\,dt}{t^p + t^q \cdot x^2}\,.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Вважаючи тут $t = x^{-\frac{2}{q-p}} \cdot v$, замінимо цю нерівність такою:

$$f(x) \geqslant x^{\frac{p+q-2}{q-p}} \int\limits_{\frac{2}{x^{q-p}}}^{+\infty} \frac{dv}{v^p + v^q}.$$

Цій інтеграл прямує до скінченної **додатної** границі, коли $x \to +0$:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dv}{v^p + v^q},$$

а множник при ньому або дорівнює 1 (якщо $p + q = 2$), або навіть прямує до ∞, коли $x \to +0$ (якщо $p + q < 2$). Оскільки $f(0) = 0$, то справа в точці $x = 0$ у будь-якому випадку очевидний **розрив**; те саме — і зліва.

Зауваження. Інтеграл з нескінченною межею $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **завжди** може бути зведений належною підстановкою до інтеграла з скінченними межами (власному чи ні). **Наприклад**, якщо $a > 0$, можна покласти $x = \frac{1}{t}$:

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_0^{1/a} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t^2}.$$

Навпаки, невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ з єдиною особливою точкою b **завжди** може бути зведений до інтеграла з нескінченною границею (без інших особливих точок). **Наприклад**, вважаючи $x = b - \frac{1}{t}$, отримаємо:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{dt}{t^2}.$$

13.4. Особливі способи обчислення невласних інтегралів

492. Деякі чудові інтеграли

Почнемо з обчислення деяких важливих інтегралів за допомогою штучних способів.

1) Інтеграл Ойлера:

$$J = \int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx.$$

У його існуванні ми вже переконалися. Обчислення інтеграла Ойлера використовує заміну змінної. Маємо, вважаючи $x = 2t$:

$$J = 2\int\limits_0^{\pi/4} \ln\sin 2t\,dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int\limits_0^{\pi/4} \ln\sin t\,dt + 2\int\limits_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt.$$

Підставляючи в останньому інтегралі $t = \frac{\pi}{2} - u$, зведемо його до виду $2\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin u\,du$, тому остаточно для визначення J отримуємо рівняння

$$J = \frac{\pi}{2}\cdot\ln 2 + 2J, \quad \text{звідки} \quad J = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

До цього ж інтеграла, з точністю до знака, зводяться й **власні** інтеграли (порівняйте з пр. 489.1 та пр. 489.2):

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\,dx, \qquad \int\limits_0^{1} \frac{\arcsin x}{x}\,dx.$$

2) Звернемося до обчислення інтеграла Ойлера – Пуассона:

$$K = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

що трапляється в теорії ймовірностей. Попередньо доведемо деякі нерівності.

Звичайними методами диференціального числення нескладно показати, що функція $(1+t)e^{-t}$ досягає свого найбільшого значення 1 в точці $t = 0$. Отже, для $t \gtrless 0$ буде

$$(1+t)e^{-t} < 1.$$

Вважаючи тут $t = \pm x^2$, ми отримаємо

$$(1-x^2)e^{x^2} < 1 \quad \text{та} \quad (1+x^2)e^{-x^2} < 1,$$

звідки

$$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2} \quad (x > 0).$$

Обмеживши у першій із цих нерівностей зміну x проміжком $(0,1)$ (так, що $1 - x^2 > 0$), а в другій, вважаючи x будь-яким, піднесемо ці вирази у степінь з будь-яким натуральним показником n (ми можемо це робити для нерівностей з **додатними** членами):

$$(1-x^2)^n < e^{-nx^2} \quad (0 < x < 1)$$

та

$$e^{-nx^2} < \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad (x > 0).$$

Інтегруючи першу нерівність на проміжку від 0 до 1, а другу — від 0 до $+\infty$, отримаємо

$$\int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx < \int\limits_0^1 e^{-nx^2}\,dx < \int\limits_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx < \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Але

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-nx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot K \quad (\text{підстановка } u = \sqrt{n}\,x),$$

$$\int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt = \frac{2n!!}{(2n+1)!!} \quad (\text{підстановка } x = \cos t),$$

і, нарешті,

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} t\,dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (\text{підстановка } x = \operatorname{ctg} t).$$

Ми скористалися тут відомими виразами (312.1) для

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx.$$

Отже, невідоме нам значення K може міститися між такими двома виразами:

$$\sqrt{n} \cdot \frac{2n!!}{(2n+1)!!} < K < \sqrt{n} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

nebayduzhi.math@gmail.com

тому, підносячи у квадрат і перетворюючи, отримаємо

$$\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{(2n!!)^2}{(2n-1!!)^2(2n+1)} < K^2 < \frac{n}{2n-1}\cdot\frac{(2n-3!!)^2(2n-1)}{(2n-2!!)^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Із формули Волліса (317.2):

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)}$$

тепер легко побачити, що обидва крайні вирази прямують до однієї і тієї ж границі $\frac{\pi}{4}$, коли $n\to\infty$, отже,

$$K^2 = \frac{\pi}{4} \quad \text{та} \quad K = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{оскільки } K > 0).$$

3) Розглянемо інтеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Ми вже знаємо, що він збігається (розд. 476, розд. 477, пр. 489.3). Представимо інтеграл у вигляді суми ряду

$$I = \sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{\nu\cdot\frac{\pi}{2}}^{(\nu+1)\cdot\frac{\pi}{2}}.$$

Поклавши $\nu = 2\mu$ або $2\mu-1$ і вдавшись, відповідно, до підстановки $x = \mu\pi + t$ або $x = \mu\pi - t$, матимемо:

$$\int_{2\mu\cdot\frac{\pi}{2}}^{(2\mu+1)\cdot\frac{\pi}{2}} = (-1)^{\mu}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\mu\pi + t}\,dt$$

та

$$\int_{(2\mu-1)\cdot\frac{\pi}{2}}^{2\mu\cdot\frac{\pi}{2}} = (-1)^{\mu-1}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\mu\pi - t}\,dt.$$

Звідси

$$I = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{t}\,dt + \sum_{\mu=1}^{\infty}\int_0^{\pi/2}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi} + \frac{1}{t-\mu\pi}\right)\sin t\,dt.$$

Оскільки ряд

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi} + \frac{1}{t-\mu\pi}\right)\sin t$$

на проміжку $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ збігається **рівномірно**, бо для нього існує збіжний мажорантний ряд

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2-\frac{1}{4}},$$

то його можна інтегрувати **почленно**.

Це дає нам можливість написати вираз для I у вигляді:

$$I=\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin t\cdot\left[\frac{1}{t}+\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu}\left(\frac{1}{t+\mu\pi}+\frac{1}{t-\mu\pi}\right)\right]dt.$$

Але вираз у квадратних дужках — це розклад на прості дроби функції $\dfrac{1}{\sin t}$ (пр. 441.9). Отже, остаточно,

$$I=\int\limits_{0}^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}\,.$$

Наведене витончене виведення належить Лобачевському (рос. Nikolai Lobachevsky, Нікола́й Лобаче́вський), який першим звернув увагу на нестрогість тих способів, за допомогою яких цей важливий інтеграл обчислювали раніше.

493. Обчислення невласних інтегралів за допомогою інтегральних сум. Випадок інтегралів зі скінченними межами

Якщо функція $f(x)$ на проміжку $[a,b]$ необмежена, то **довільними** інтегральними сумами (Рімана) користуватися для обчислення її інтегралів на цьому проміжку, звичайно ж, неможливо. Проте завжди можна так **обирати** ці суми, щоб вони — при дробленні проміжку — прямували до значення невласного інтеграла. Ми покажемо це для найпростішого випадку монотонної функції.

Отже, нехай функція $f(x)$ на проміжку $[0,a]$ $(a>0)$ додатна, монотонно спадає та прямує до $+\infty$, коли $x\to 0$; водночас, нехай для неї існує невласний інтеграл від 0 до a. Розділивши проміжок $[0,a]$ на n рівних частин, матимемо

$$\int\limits_{0}^{a}f(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{n-1}\int\limits_{\frac{\nu}{n}a}^{\frac{\nu+1}{n}a}f(x)\,dx<\int\limits_{0}^{\frac{a}{n}}f(x)\,dx+\sum_{\nu=1}^{n-1}f\left(\frac{\nu}{n}a\right)\cdot\frac{a}{n},$$

і тим паче

$$\int\limits_0^a f(x)\,dx < \int\limits_0^{\frac{a}{n}} f(x)\,dx + \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right) \cdot \frac{a}{n}.$$

У цей же час, очевидно,

$$\int\limits_0^a f(x)\,dx > \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right) \cdot \frac{a}{n},$$

тому, за сукупністю,

$$0 < \int\limits_0^a f(x)\,dx - \frac{a}{n} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right) < \int\limits_0^{\frac{a}{n}} f(x)\,dx.$$

Останній інтеграл — це різниця між невласним інтегралом $\int\limits_0^a$ та власним інтегралом $\int\limits_{\frac{a}{n}}^a$, він прямує до нуля, коли $n \to \infty$. Отже остаточно

$$\int\limits_0^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}a\right).$$

У разі додатної зростаючої функції $f(x)$, яка прямує до $+\infty$, коли $x \to a$, виходить аналогічно

$$\int\limits_0^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} f\left(\frac{\nu}{n}a\right).$$

Нарешті, змінюючи знак f, легко отримати такі ж формули і для монотонної від'ємної функції.

Розглянемо **приклади**.

1) Для обчислення інтеграла $\int\limits_0^1 \ln x\,dx$ (з особливою точкою 0) маємо:

$$\int\limits_0^1 \ln x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \ln \frac{\nu}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

Оскільки пр. 77.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$, то попередня границя дорівнює -1; таким у дійсності і є значення запропонованого інтеграла.

2) Розглянемо більш складний інтеграл:

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \ln \sin x \, dx.$$

У цьому випадку

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \ln \sin \frac{\nu\pi}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \ln \prod_{\nu=1}^{n-1} \sin \frac{\nu\pi}{2n}\,.$$

Бажаючи отримати простий вираз для останнього добутку, розглянемо цілий многочлен, отриманий від ділення $z^{2n}-1$ на z^2-1, та розкладемо його на лінійні множники, збираючи разом множники, що відповідають спряженим кореням. Ми отримаємо (для будь-якого дійсного z, відмінного від ± 1):

$$\frac{z^{2n}-1}{z^2-1} = \prod_{\nu=1}^{n-1} \left[\left(z - \cos \frac{\nu\pi}{n} \right)^2 + \sin^2 \frac{\nu\pi}{n} \right]$$

(дивіться (307.3)). Для $z \to 1$ звідси знаходимо:

$$n = \prod_{\nu=1}^{n-1} \left[\left(1 - \cos \frac{\nu\pi}{n} \right)^2 + \sin^2 \frac{\nu\pi}{n} \right] = 4^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n-1} \sin^2 \frac{\nu\pi}{2n}\,,$$

тому, нарешті,

$$\prod_{\nu=1}^{n-1} \sin \frac{\nu\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}\,.$$

Тому шуканий інтеграл дорівнює:

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}\ln n - (n-1)\ln 2}{n} = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

(порівняйте з пр. 492.1).

494. Інтеграли з нескінченними межами

Нехай функція визначена й інтегровна на проміжку від 0 до $+\infty$. Розкладаючи цей проміжок на нескінченну множину рівних проміжків довжини $h > 0$, складемо суму $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h) \cdot h$, яка нагадує за своєю будовою суму Рімана. Чи збігається цей ряд, чи буде його сума прямувати до невласного інтеграла $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$, коли $h \to 0$, — ось питання, якими ми займемося за деякими окремими припущеннями відносно $f(x)$.

Припустимо спочатку, що $f(x)$ додатна та, монотонно спадаючи, прямує до 0, коли $x \to +\infty$. Тоді

$$\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int\limits_{\nu h}^{(\nu+1)h} f(x)\,dx < h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h),$$

а з іншого боку, очевидно,

$$\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx > h \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu h) = h \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h) - h \cdot f(0),$$

тому

$$0 < h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h) - \int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx < h \cdot f(0)$$

і

$$\int\limits_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu h). \tag{494.1}$$

Приклади.

1)

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{h\to 0} h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{1-e^{-h}} = 1.$$

2) Знаючи значення інтеграла

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

з інших міркувань, ми все ж можемо застосувати виведену формулу та отримаємо, що

$$\lim_{h\to 0} h \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu^2 h^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Якщо покласти $e^{-h^2} = t$, то $h = \sqrt{\ln \frac{1}{t}} \sim \sqrt{1-t}$, коли $t \to 1$. Звідси — цікаве граничне співвідношення:

$$\lim_{t\to 1-0} \sqrt{1-t} \cdot (1 + t + t^4 + t^9 + t^{16} + \dots) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Може статися, що вимога монотонного спадання функції $f(x)$ виконується лише для $x \geqslant A > 0$. Ця обставина не заважає застосуванню вказаного для монотонних функцій способу; необхідно лише потурбуватися про те, щоб відношення $\frac{A}{h}$ було цілим. Тоді

$$\lim_{h\to 0} \sum_{\nu=0}^{\frac{A}{h}-1} f(\nu h)\cdot h = \int\limits_0^A f(x)\,dx \tag{494.2}$$

за означенням власного інтеграла, а

$$\lim_{h\to 0} \sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty} f(\nu h)\cdot h = \int\limits_A^\infty f(x)\,dx$$

— за доведеним вище.

3) Як **приклад** розглянемо $f(x) = xe^{-x}$; ця функція монотонно спадає, починаючи з $x = 1$. Однак

$$\int\limits_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{h\to 0} h^2(e^{-h} + 2e^{-2h} + 3e^{-3h} + \ldots) =$$

$$= \lim_{h\to 0} h^2 e^{-h}(1-e^{-h})^{-2} = \lim_{h\to 0} e^h\left(\frac{h}{e^h-1}\right)^2 = 1,$$

що легко перевірити інтегруванням частинами.

Перейдемо до більш загального випадку, не вимагаючи від $f(x)$ поки нічого, крім інтегровності. Маємо

$$\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \int\limits_0^A f(x)\,dx + \int\limits_A^\infty f(x)\,dx.$$

Для досить великого A останній інтеграл за абсолютною величиною буде довільно малим (він є різницею між невласним інтегралом $\int\limits_0^\infty$ та власним інтегралом $\int\limits_0^A$, що прямує до першого (невласного), коли $A \to \infty$). Яким би не було A, станемо і тут h брати таким, щоб $\frac{A}{h}$ було цілим. Тоді для $A = \text{const}$, як і щойно, виконуватиметься рівність (494.2).

Тепер зрозуміло, що для справедливості рівності (494.1) достатньо, щоб ще була виконана умова:

$$\lim_{\substack{A\to+\infty\\ h\to 0}} \sum_{\nu=\frac{A}{h}}^{\infty} f(\nu h)\cdot h = 0. \tag{494.3}$$

Справді, тоді всі доданки правої частини рівності

$$\int_0^\infty - \sum_{\nu=0}^\infty = \left[\int_0^A - \sum_{\nu=0}^{\frac{A}{h}-1}\right] + \int_A^\infty - \sum_{\nu=\frac{A}{h}}^\infty$$

для досить великому A та досить малому h будуть довільно малі.

Умову (494.3) автоматично виконано за раніше зроблених відносно $f(x)$ припущеннях, бо

$$0 < \sum_{\nu=\frac{A}{h}}^\infty f(\nu h)\cdot h < \int_A^\infty f(x)\,dx.$$

Її також виконано, якщо $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$, де $\varphi(x)$ (хоча б для $x \geqslant x_0 > 0$) задовольняє тим умовам, які вище були накладені на $f(x)$, а $\psi(x)$ обмежена: $|\psi(x)| \leqslant L$. У цьому випадку

$$\left|\sum_{\nu=\frac{A}{h}}^\infty \varphi(\nu h)\cdot\psi(\nu h)\cdot h\right| \leqslant L\cdot\sum_{\nu=\frac{A}{h}}^\infty \varphi(\nu h)\cdot h < L\cdot\int_A^\infty \varphi(x)\,dx,$$

і так далі.

4) Як **приклад**, розглянемо інтеграл

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx;$$

тут $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $\psi(x)=\sin^2 x$. Маємо

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \lim_{h\to 0} h\cdot\sum_{\nu=1}^\infty \frac{\sin^2 \nu h}{(\nu h)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\sum_{\nu=1}^\infty \frac{\sin^2 \nu h}{\nu^2}.$$

Для обчислення останньої суми збагнемо спочатку, що

$$\left\{\sum_{\nu=1}^\infty \frac{\sin^2 \nu h}{\nu^2}\right\}'_h = \sum_{\nu=1}^\infty \frac{\sin 2\nu h}{\nu} = \frac{\pi-2h}{2} = \frac{\pi}{2} - h$$

(пр. 461.6). Почленне диференціювання для $h \neq 0$ можливе за теор. 435.1, зважаючи на рівномірну збіжність ряду, складеного з похідних (за ознакою Діріхлє, теор. 430.3). Інтегруючи, знайдемо вираз для суми: $\dfrac{\pi-h}{2}\cdot h$. Звідси, нарешті,

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \lim_{h\to 0}\frac{\pi-h}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

В інших випадках виконання умови (494.3) доводиться перевіряти безпосередньо.

5) Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Обмежимося (на що ми, очевидно, маємо право) значеннями $h = \frac{\pi}{k}$ та $A = m\pi$, де k, m — натуральні числа.

Представимо суму, яка нас цікавить, у вигляді:

$$\sum_{n=km}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} \cdot h = \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} + \sum_{n=k(m+1)}^{k(m+2)-1} + \ldots .$$

Нескладно переконатися в тому, що доданки кожної скінченної суми справа будуть одного знака, який змінюється при переході до наступної суми. Взагалі, ряд справа задовольняє теорему Ляйбніца. Тому його сума за абсолютною величиною буде менше абсолютної величини першого доданку. З іншого боку, оскільки $kmh = m\pi = A$,

$$\left| \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} \frac{\sin nh}{nh} \cdot h \right| = \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} \frac{|\sin nh|}{nh} \cdot h < \frac{1}{A} \sum_{n=km}^{k(m+1)-1} |\sin nh| \cdot h = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^{k-1} \sin ih \cdot h.$$

Остання ж сума, як інтегральна сума для інтеграла $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx = 2$, для досить малих h буде менше будь-якого числа $C > 2$, а тоді

$$\left| \sum_{n=km}^{\infty} \frac{\sin nh}{nh} \cdot h \right| < \frac{C}{A},$$

звідки й витікає виконання умови (494.3).

Саме ж обчислення запропонованого інтеграла, виправдане викладеними міркуваннями, робити доволі просто (дивіться пр. 461.6):

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nh}{n} = \lim_{h\to 0} \frac{\pi - h}{2} = \frac{\pi}{2},$$

що вище (пр. 492.3) ми отримали іншим шляхом.

495. Інтеграли Фрулляні

Розглянемо питання щодо існування та обчислення одного окремого виду невласних інтегралів, що зазвичай називають інтегралами Фрулляні (іт. Giuliano Frullani, Джуліáно Фрулля́ні):

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx \quad (a,\ b>0).$$

Відносно функції $f(x)$ зробимо такі припущення:

1. $f(x)$ є визначеною та неперервною для $x \geqslant 0$ та
2. існує скінченна границя

$$f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

З припущення 1 зрозуміло, що для $0<\delta<\Delta<+\infty$ існує інтеграл

$$\int\limits_\delta^\Delta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int\limits_\delta^\Delta \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int\limits_\delta^\Delta \frac{f(bx)}{x}\,dx =$$

$$= \int\limits_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(z)}{z}\,dz - \int\limits_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\,dz = \int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}\,dz - \int\limits_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\,dz.$$

Запропонований інтеграл визначено рівністю

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \lim_{\delta\to0}\int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}\,dz - \lim_{\Delta\to+\infty}\int\limits_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\,dz.$$

Застосовуючи до останніх двох інтегралів окремо узагальнену теорему про середнє значення, отримаємо

$$\int\limits_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(z)}{z}\,dz = f(\xi)\int\limits_{a\delta}^{b\delta}\frac{dz}{z} = f(\xi)\cdot\ln\frac{b}{a} \quad (\text{де } a\delta\leqslant\xi\leqslant b\delta)$$

та аналогічно

$$\int\limits_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(z)}{z}\,dz = f(\eta)\cdot\ln\frac{b}{a} \quad (\text{де } a\Delta\leqslant\eta\leqslant b\Delta).$$

Оскільки очевидно, що $\xi\to0$ (коли $\delta\to0$), а $\eta\to+\infty$ (коли $\Delta\to+\infty$), то звідси

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \big[f(0)-f(+\infty)\big]\cdot\ln\frac{b}{a}\,. \tag{495.1}$$

Приклади.

1) Для інтеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$$

маємо:

$$f(x) = e^{-x}, \quad f(0) = 1, \quad f(+\infty) = 0,$$

отже, значення інтеграла буде $\ln\frac{b}{a}$.

2) Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_0^{\infty} \ln\frac{p + qe^{-ax}}{p + qe^{-bx}} \cdot \frac{dx}{x} \quad (p,\ q > 0).$$

Роблячи заміну логарифму частки на різницю логарифмів, можна отримати тут $f(x) = \ln(p + qe^{-x})$, отже $f(0) = \ln(p + q)$ та $f(+\infty) = \ln p$.

Відповідь:

$$\ln\left(1 + \frac{q}{p}\right) \cdot \ln\frac{b}{a}\,.$$

3) Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\, dx.$$

У цьому випадку

$$f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad f(0) = 0, \quad f(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь:

$$\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}\,.$$

Часом функція $f(x)$ не має скінченної границі для $x \to +\infty$, але зате існує інтеграл

$$\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(z)}{z}\, dz.$$

Замінюючи у наведеному вище міркуванні Δ одразу на $+\infty$, прийдемо, замість (495.1), до результату

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \cdot \ln\frac{b}{a}\,. \tag{495.2}$$

Приклад 4):

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx = \ln\frac{b}{a}$$

(бо інтеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\cos z}{z}\,dz$, як нам відомо, існує).

Аналогічно, якщо порушена неперервність функції $f(x)$ в точці $x = 0$, але існує інтеграл

$$\int\limits_0^A \frac{f(z)}{z}\,dz \quad (A < +\infty),$$

то

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = f(+\infty)\cdot \ln\frac{a}{b}\,. \tag{495.3}$$

Втім, цей випадок зводимо до попереднього заміною

$$x = \frac{1}{t}\,.$$

496. Інтеграли від раціональних функцій між нескінченними межами

Насамкінець розглянемо ще один окремий тип інтеграла з нескінченними межами:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx,$$

де $P(x)$ та $Q(x)$ — цілі многочлени. Припустимо, що многочлен $Q(x)$ не має **дійсних** коренів і що степінь $P(x)$ є принаймні на дві одиниці меншою за степінь $Q(x)$. За цих умов інтеграл існує (пр. 474.2); постає лише питання його обчислення.

Якщо $x_\lambda = \alpha_\lambda + i\beta_\lambda$ ($\beta_\lambda \gtrless 0$; $\lambda = 1,\ 2,\ \dots$) є різними коренями многочлена $Q(x)$, то дріб $P(x)/Q(x)$ розкладаємо на **прості** дроби так

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_\lambda \left[\frac{A_\lambda}{x - x_\lambda} + \frac{A'_\lambda}{(x - x_\lambda)^2} + \dots\right], \tag{496.1}$$

причому кількість дробів у кожних дужках дорівнює показнику кратності відповідного кореня. (В розд. 274 ми мали справу із схожим розкладанням, але там ми намагались уникнути уявних значень і, у випадку уявних коренів, розглядали дроби, знаменниками яких виступали степені квадратного тричлена вже із дійсними коефіцієнтами. Тут ми уявні корені трактуємо так само, як там дійсні.)

Поширюючи на випадок **комплексної** функції від **дійсної** змінної елементарні способи обчислення інтегралів, одразу бачимо, що, для $m > 0$,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x - x_\lambda)^{m+1}} = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{(x - x_\lambda)^m}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

отже,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{\lambda}\frac{A_\lambda}{x-x_\lambda}\,dx=\lim_{h\to+\infty}\int\limits_{-h}^{h}\sum_{\lambda}\frac{A_\lambda}{x-x_\lambda}\,dx.$$

З іншого боку,

$$\frac{1}{x-x_\lambda}=\frac{1}{x-\alpha_\lambda-\beta_\lambda i}=\frac{x-\alpha_\lambda}{(x-\alpha_\lambda)^2+\beta_\lambda^2}+i\frac{\beta_\lambda}{(x-\alpha_\lambda)^2+\beta_\lambda^2}$$

та

$$\int\limits_{-h}^{h}\frac{dx}{x-x_\lambda}=\left\{\frac{1}{2}\ln\left[(x-\alpha_\lambda)^2+\beta_\lambda^2\right]+i\operatorname{arctg}\frac{x-\alpha_\lambda}{\beta_\lambda}\right\}\Bigg|_{-h}^{h}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(h-\alpha_\lambda)^2+\beta_\lambda^2}{(h+\alpha_\lambda)^2+\beta_\lambda^2}+i\left[\operatorname{arctg}\frac{h-\alpha_\lambda}{\beta_\lambda}+\operatorname{arctg}\frac{h+\alpha_\lambda}{\beta_\lambda}\right].$$

Коли $h\to+\infty$, перший доданок у останньому виразі прямує до 0, а другий або до $+\pi i$ або до $-\pi i$ залежно від того, чи буде $\beta_\lambda>0$ або $\beta_\lambda<0$.

Отже приходимо до результату:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\pi i\cdot\sum_{\lambda}\pm A_\lambda,$$

де при A_λ стоїть знак плюс, якщо відповідне $\beta_\lambda>0$, та знак мінус у протилежному випадку. Цю формулу можна дещо видозмінити на основі наступних міркувань. Домножимо обидві частини рівності (496.1) на x. Коли $x\to\infty$, ліва частина буде прямувати до 0, оскільки степінь $x\cdot P(x)$ все ж нижча за степінь $Q(x)$. У правій частині при граничному переході знищаться всі члени з нелінійними знаменниками, отже і границя суми решти членів також буде 0. Звідси $\sum\limits_{\lambda}A_\lambda=0$, отже $\sum^{(+)}A_\lambda=-\sum^{(-)}A_\lambda$, якщо знаками $(+)$ та $(-)$ позначити суми тих A_λ, які відповідають $\beta_\lambda>0$ та $\beta_\lambda<0$. Тепер отриману формулу можна записати у вигляді

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=2\pi i\cdot\sum{}^{(+)}A_\lambda.\tag{496.2}$$

Щодо обчислення коефіцієнтів A_λ, то ми обмежимося вказівкою, що стосується випадку **простого** кореня x_λ, для якого $Q(x_\lambda)=0$, але $Q'(x_\lambda)\neq0$; йому у розкладі (496.1) відповідає тільки **один** член $\frac{A_\lambda}{x-x_\lambda}$. Якщо обидві частини рівності (496.1) домножити на $x-x_\lambda$, то її можна подати у вигляді

$$\frac{P(x)}{\dfrac{Q(x)-Q(x_\lambda)}{x-x_\lambda}}=A_\lambda+(x-x_\lambda)\cdot R(x),$$

де $R(x)$ означає групу членів, що залишаються скінченними, коли x наближається до x_λ. Переходячи до границі для $x \to x_\lambda$, отримаємо

$$A_\lambda = \frac{P(x_\lambda)}{Q'(x_\lambda)}. \tag{496.3}$$

Звернемося тепер до **прикладів** застосування формул (496.2) та (496.3).

1) Спершу розглянемо інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx,$$

де m та n — натуральні числа, причому $m < n$. Усі умови для застосування формули (496.2) тут виконані.

Коренями знаменника є числа

$$x_\lambda = \cos\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n}$$
$$(\lambda = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;\, n,\ \ldots,\ 2n-1),$$

але лише перші n із них мають додатні уявні частини. Очевидно, $x_\lambda = x_0^{2\lambda+1}$, де

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{2n} + i\sin\frac{\pi}{2n}.$$

Згідно з формулою (496.3), для $\lambda = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$,

$$A_\lambda = \frac{x_\lambda^{2m}}{2n\cdot x_\lambda^{2n-1}} = -\frac{1}{2n}x_\lambda^{2m+1} = -\frac{1}{2n}x_0^{(2m+1)(2\lambda+1)}$$

(з урахуванням того, що $x_\lambda^{2n} = -1$). Підсумовуючи прогресію, отримаємо:

$$\sum{}^{(+)} A_\lambda = -\frac{1}{2n}\sum_{\lambda=0}^{n-1} x_0^{(2m+1)(2\lambda+1)} = -\frac{1}{2n}\cdot\frac{x_0^{2m+1} - x_0^{(2m+1)(2n+1)}}{1 - x_0^{2(2m+1)}}$$

або, оскільки $x_0^{2n} = -1$,

$$\sum{}^{(+)} A_\lambda = -\frac{1}{n}\cdot\frac{x_0^{2m+1}}{1 - x_0^{2(2m+1)}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x_0^{2m+1} - x_0^{-(2m+1)}}.$$

Підставляючи

$$x_0^{\pm(2m+1)} = \cos\frac{2m+1}{2n}\pi \pm i\cdot\sin\frac{2m+1}{2n}\pi,$$

остаточно виразимо потрібну нам суму у вигляді

$$\frac{1}{2ni}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi}.$$

Звідси ж, згідно з формулою (496.2),

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx=\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi}\quad(m<n).\tag{496.4}$$

2) Дещо більш загальний приклад:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}-x^{2m'}}{1-x^{2n}}\,dx$$

де $m,\ m',\ n$ — натуральні числа і $m,\ m'<n$.

Умови виконані, за винятком того, що знаменник має дійсні корені ±1. Ця обставина тут не є суттєвою, бо ці корені має і чисельник, отже дріб можна було б скоротити на x^2-1. Надалі ці корені ми не будемо брати до уваги.

Решта коренів знаменника мають вигляд

$$x_\lambda=\cos\frac{\lambda\pi}{n}+i\cdot\sin\frac{\lambda\pi}{n}=x_1^\lambda$$

$$(\lambda=1,\ 2,\ \dots,\ n-1;\ n+1,\ \dots,\ 2n-1),$$

Серед них додатні уявні частини мають перші $n-1$. Згідно з формулою (496.3)

$$A_\lambda=\frac{x_\lambda^{2m'}-x_\lambda^{2m}}{-2n\cdot x_\lambda^{2n-1}}=\frac{1}{2n}\left(x_\lambda^{2m'+1}-x_\lambda^{2m+1}\right),$$

отже

$$\sum{}^{(+)}A_\lambda=\frac{1}{2n}\sum_{\lambda=1}^{n-1}\left(x_\lambda^{2m'+1}-x_\lambda^{2m+1}\right)=\frac{1}{2n}\sum_{\lambda=1}^{n-1}\left(x_1^{\lambda(2m'+1)}-x_1^{\lambda(2m+1)}\right).$$

Отриманий вираз послідовно перетворюємо так (враховуючи, що $x^n = -1$):

$$\begin{aligned}\sum{}^{(+)}A_\lambda &= \frac{1}{2n}\left[\frac{x_1^{n(2m'+1)} - x_1^{2m'+1}}{x_1^{2m'+1}-1} - \frac{x_1^{n(2m+1)} - x_1^{2m+1}}{x_1^{2m+1}-1}\right] = \\ &= \frac{1}{2n}\left[\frac{1+x_1^{2m'+1}}{1-x_1^{2m'+1}} - \frac{1+x_1^{2m+1}}{1-x_1^{2m+1}}\right] = \\ &= \frac{1}{2n}\left[\frac{x_1^{\frac{2m+1}{2}} + x_1^{-\frac{2m+1}{2}}}{x_1^{\frac{2m+1}{2}} - x_1^{-\frac{2m+1}{2}}} - \frac{x_1^{\frac{2m'+1}{2}} + x_1^{-\frac{2m'+1}{2}}}{x_1^{\frac{2m'+1}{2}} - x_1^{-\frac{2m'+1}{2}}}\right] = \\ &= \frac{1}{2ni}\left[\operatorname{ctg}\frac{2m+1}{2n}\pi - \operatorname{ctg}\frac{2m'+1}{2n}\pi\right].\end{aligned}$$

Остаточно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m} - x^{2m'}}{1-x^{2n}}\,dx = \frac{\pi}{n}\left[\operatorname{ctg}\frac{2m+1}{2n}\pi - \operatorname{ctg}\frac{2m'+1}{2n}\pi\right] \quad (m,\ m' < n). \tag{496.5}$$

Зазначимо, що із цієї формули легко можна було б отримати і попередній результат, якщо замінити n на $2n$ та прийняти $m' = m + n$ (при $m < n$).

3) Насамкінець, розглянемо інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n} + 2x^{2n}\cdot\cos\theta + 1}\,dx.$$

де $m < n$ та $-\pi < \theta < \pi$.

Зробимо заміну $\theta' = \pi - \theta,\ 0 < \theta' < 2\pi$ і перепишемо інтеграл так:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{4n} - 2x^{2n}\cdot\cos\theta' + 1}\,dx.$$

Для обчислення коренів знаменника приймемо $x^{2n} = z$, тоді z можна буде визначити з рівнянь $z^2 - 2z\cdot\cos\theta' + 1 = 0$, а саме $z = \cos\theta' \pm i\cdot\sin\theta'$. Для x отримаємо дві низки значень

$$\left.\begin{array}{ll} x_\nu = x_0\cdot\varepsilon^\nu, \quad \text{де} & x_0 = \cos\dfrac{\theta'}{2n} + i\cdot\sin\dfrac{\theta'}{2n}\\ & \varepsilon = \cos\dfrac{\pi}{n}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}\\ & \\ \overline{x}_\nu = \overline{x}_0\cdot\overline{\varepsilon}^\nu, \quad \text{де} & \overline{x}_0 = \cos\dfrac{\theta'}{2n} - i\cdot\sin\dfrac{\theta'}{2n}\\ & \overline{\varepsilon} = \cos\dfrac{\pi}{n}-i\cdot\sin\dfrac{\pi}{n} \end{array}\right\} \begin{array}{l}(\nu = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1;\\ \qquad n,\ \dots,\ 2n-1).\end{array}$$

При цьому додатну уявну частину матимуть **перші** n з $\{x_\nu\}$ та **останні** n з $\{\overline{x}_\nu\}$.

Коефіцієнти A_ν, що відповідають кореням x_ν $(\nu = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1)$, обчислюємо згідно з формулою (496.3):

$$A_\nu = \frac{x_\nu^{2m}}{4n(x_\nu^{4n-1} - x_\nu^{2n-1}\cdot\cos\theta')} = \frac{1}{4n}\cdot\frac{x_\nu^{2m+1}}{x_\nu^{2n}(x_\nu^{2n}-\cos\theta')} = \frac{1}{4n}\cdot\frac{x_0^{2m+1}\cdot\varepsilon^{(2m+1)\nu}}{(\cos\theta'+i\sin\theta')\cdot i\sin\theta'}.$$

Підсумовуючи ці коефіцієнти та домножуючи на $2\pi i$ отримаємо $(\varepsilon^n = -1)$:

$$\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\cos\left(\dfrac{2m+1}{2n}-1\right)\theta' + i\cdot\sin\left(\dfrac{2m+1}{2n}-1\right)\theta'}{\sin\theta'}\cdot\frac{1-(\varepsilon^n)^{2m+1}}{1-\varepsilon^{2m+1}} =$$

$$= \frac{\pi}{n}\cdot\frac{\cos\left(1-\dfrac{2m+1}{2n}\right)\theta' - i\cdot\sin\left(1-\dfrac{2m+1}{2n}\right)\theta'}{\sin\theta'}\times$$

$$\times\frac{1}{\left(1-\cos\dfrac{2m+1}{n}\pi\right) - i\cdot\sin\dfrac{2m+1}{n}\pi}.$$

Для другої групи коренів $\overline{x}_\nu$ $(\nu = n,\ n+1,\ \dots,\ 2n-1)$ аналогічно отримаємо вираз, спряжений із цим; їх сума дасть подвоєну дійсну частину. Після елементарних перетворень ця сума буде зведена до

$$\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\left[\left(1-\dfrac{2m+1}{2n}\right)\theta' + \dfrac{2m+1}{2n}\pi\right]}{\sin\theta'\cdot\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi}.$$

Повертаючись до кута $\theta = \pi - \theta'$, остаточно отримаємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{x^{4n}+2x^{2n}\cdot\cos\theta+1}\,dx = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\left(1-\dfrac{2m+1}{2n}\right)\theta}{\sin\theta\cdot\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi} \tag{496.6}$$

$$(m < n,\ -\pi < \theta < \pi).$$

nebayduzhi.math@gmail.com

497. Змішані приклади і вправи

1) Довести існування інтеграла

$$I=\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{dx}{x^2\cdot(\sin x)^{2/3}}.$$

Особливих точок є нескінченно багато: $x=n\pi$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$. На будь-якому скінченному проміжку їх є скінченне число, та інтеграл збігається. Відкритим залишається лише питання про збіжність інтеграла на нескінченному проміжку.

Маємо:

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dx}{(x+n\pi)^2\cdot(\sin x)^{2/3}}<\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dx}{(\sin x)^{2/3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}<+\infty.$$

2) Якщо у збіжному інтегралі (пр. 478.5)

$$\int\limits_{0}^{\infty}|\ln t|^{\lambda}\frac{\sin t}{t}\,dt\quad(\lambda>0)$$

зробити підстановку $t=e^x,\ x=\ln t$, прийдемо до інтеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^{\lambda}\cdot\sin e^x\,dx;$$

останній, отже, збігається, не зважаючи на те, що підінтегральна функція при необмеженому зростанні $|x|$ коливається між $-\infty$ та $+\infty$.

3) Ми щойно бачили, що для збіжності інтеграла

$$\int\limits_{a}^{\infty}f(x)\,dx \tag{497.1}$$

зовсім не є необхідним, щоб було

$$f(x)=o(1)\quad(\text{при } x\to\infty). \tag{497.2}$$

Втім, треба довести, що

а) **якщо** існує границя

$$\lim_{x\to\infty}f(x),$$

і інтеграл (497.1) збіжний, то ця границя необхідно дорівнює 0; більше того б) **якщо** існує границя

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot f(x),$$

то і ця границя **необхідно** дорівнює 0, тобто

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right), \tag{497.3}$$

в) якщо інтегровна на проміжку $[a,\infty)$ функція монотонно спадає, то ця умова (497.3) також **необхідно** виконується.

Доведення [для б) та в)] схоже на доведення аналогічних пропозицій для додатних рядів (пр. 375.3).

Зазначимо однак (також по аналогії із рядами), що навіть для монотонно спадної функції $f(x)$ виконання умови (497.3) не гарантує збіжності інтеграла (497.1): як приклад можна привести розбіжний інтеграл

$$\int\limits_a^\infty \frac{dx}{x\cdot\ln x} \quad (a>1).$$

4) Поширити твердження, доведене в пр. 478.6, на випадок, коли функція $f(x)$ на проміжку $[a,\ a+\omega]$ інтегровна у **невласному** сенсі (при виконанні усіх інших умов). За допомогою цього встановити, що — у припущенні, що $g(x)$ монотонно прямує до 0, коли $x\to\infty$, — інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \ln|\sin x|\cdot g(x)\,dx$$

збігається одночасно із інтегралом

$$\int\limits_0^\infty g(x)\,dx,$$

у той час як інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \ln|2\sin x|\cdot g(x)\,dx$$

збігається у будь-якому випадку.

5) Обчислити інтеграли

$$\text{а)}\ \int\limits_0^\pi x\cdot\ln\sin x\,dx, \quad \text{б)}\ \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \text{в)}\ \int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Вказівка. а) Шляхом підстановки $x = \pi - t$ переконуємося, що інтеграл можна звести до $\int\limits_0^{\pi} \ln \sin x \, dx = 2 \int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin t \, dt.$

б), в) Інтеграли зводимо до $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin t \, dt$ замінами $x = \sin t,\ \ x = \ln \frac{1}{\sin t}$.

6) Обчислити інтеграл

$$J = \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2} \cdot \ln \left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| dx.$$

Маємо (приймаючи $x = \sin \theta$)

$$J = 2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \cdot \ln \operatorname{ctg} \theta \, d\theta = \int\limits_0^{\pi/2} \cos 2\theta \cdot \ln \operatorname{ctg} \theta \, d\theta.$$

Інтегруючи частинами, отримаємо:

$$J = \frac{1}{2} \sin 2\theta \cdot \ln \operatorname{ctg} \theta \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\theta \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} \theta} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \, d\theta = \int\limits_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

7) Знайти інтеграл

$$K = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \left| \sin^2 \theta - a^2 \right| d\theta \quad (a^2 \leqslant 1).$$

Прийнявши $a = \sin \omega$ та скориставшись тотожністю

$$\sin^2 \theta - \sin^2 \omega = \sin(\theta - \omega) \sin(\theta + \omega),$$

отримаємо, що

$$K = \int\limits_{\omega - \frac{\pi}{2}}^{\omega + \frac{\pi}{2}} \ln |\sin \theta| \, d\theta = \int\limits_0^{\pi} \ln \sin \theta \, d\theta = -\pi \ln 2.$$

8) Обчислити інтеграл

$$L = \int\limits_0^{\infty} e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} \, dx \quad (a, b > 0).$$

Розв'язок. Скориставшись формулою (пр. 491.13), маємо

$$L = e^{-2\sqrt{ab}} \int\limits_0^\infty e^{-\left(\sqrt{a}\,x - \frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-2\sqrt{ab}} \int\limits_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}}.$$

(дивіться пр. 492.2).

9) Обчислити інтеграли

$$J_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\theta \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}}\, d\varphi, \quad J_1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\theta \frac{\cos\frac{3}{2}\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}}\, d\varphi.$$

Розв'язок. Позначимо $\cos\theta$ через x та зробимо підстановку $z = \cos\varphi$; тоді

$$\cos\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+z}{2}}, \quad \cos\frac{3}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+z}{2}} \cdot (2z-1)$$

та

$$J_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_x^1 \frac{dz}{\sqrt{(z-x)(1-z)}}, \quad J_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_x^1 \frac{(2z-1)\, dz}{\sqrt{(z-x)(1-z)}}.$$

Вводячи ще раз нову змінну t за формулою $\sqrt{(z-x)(1-z)} = t(1-z)$, отримаємо:

$$J_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} = 1,$$

$$J_1 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{t^2+2x-1}{(t^2+1)^2}\, dt = \frac{2}{\pi} \left\{ \int\limits_0^\infty \frac{dt}{t^2+1} + 2(x-1) \int\limits_0^\infty \frac{dt}{(t^2+1)^2} \right\} = x.$$

Отже, $J_0 = 1$ та $J_1 = \cos\theta$. Нижче (пр. 511.3) ми отримаємо більш загальний результат.

10) Інтегруванням частинами отримати такі результати:

$$\text{а)} \int\limits_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}(b-a),$$

$$\text{б)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x^2}\, dx = \sqrt{\pi}(b-a),$$

$$\text{в)} \int\limits_0^\infty \frac{\ln(1+a^2x^2) - \ln(1+b^2x^2)}{x^2}\, dx = \pi(a-b).$$

11) Легко побачити, що (пр. 492.3, пр. 494.5)

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо} \quad \alpha > 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad \alpha = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Звідси, оскільки

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\alpha+\beta)x}{x}\,dx + \int\limits_0^\infty \frac{\sin(\alpha-\beta)x}{x}\,dx\right\},$$

то, очевидно (якщо вважати для простоти α та $\beta > 0$),

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо} \quad \beta < \alpha, \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{якщо} \quad \beta = \alpha, \\ 0, & \text{якщо} \quad \beta > \alpha. \end{cases}$$

Цей інтеграл багаторазово застосовувався Діріхлє і відомий як *розривний множник Діріхлє*.

До нього зводиться багато інших інтегралів. Наприклад, (якщо $\alpha,\ \beta,\ \gamma > 0$ та α — найбільше серед них):

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x \cdot \sin \beta x \cdot \sin \gamma x}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & \text{якщо} \quad \alpha < \beta + \gamma, \\ \dfrac{\pi}{8}, & \text{якщо} \quad \alpha = \beta + \gamma, \\ 0, & \text{якщо} \quad \alpha > \beta + \gamma \end{cases}$$

(заміна добутку двох синусів різницею косинусів) або (знову вважаючи $\alpha,\ \beta > 0$):

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\beta, & \text{якщо} \quad \beta \leqslant \alpha, \\ \dfrac{\pi}{2}\alpha, & \text{якщо} \quad \beta \geqslant \alpha \end{cases}$$

(інтегрування частинами).

Останній результат можна узагальнити так.

Якщо $\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n > 0$ та $\alpha > \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, то

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \alpha_1 x}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin \alpha_n x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n\,.$$

Доведення проводиться по методу математичної індукції (інтегрування частинами!).

12) Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^\infty (\sin ax - \sin bx)^2 \frac{dx}{x^2}.$$

Вказівка. Проінтегрувати частинами; використати розривний множник Діріхлє.

Відповідь: $\frac{\pi}{2} \cdot |a-b|$.

13) Обчислити

$$V.p. \int\limits_0^\infty \frac{2x \cdot \sin \alpha x}{x^2 - r^2}\, dx \quad (\alpha,\ r > 0).$$

Розв'язок. Особлива точка $x = r$. Користуючись тотожністю

$$\frac{2x}{x^2 - r^2} = \frac{1}{x+r} + \frac{1}{x-r},$$

одразу виділяємо **збіжний** інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x+r}\, dx = \cos \alpha r \cdot \int\limits_r^\infty \frac{\sin \alpha y}{y}\, dy - \sin \alpha r \cdot \int\limits_r^\infty \frac{\cos \alpha y}{y}\, dy.$$

Потім, за допомогою легких перетворень, знаходимо

$$\left(\int\limits_0^{r-\varepsilon} + \int\limits_{r+\varepsilon}^\infty \right) \frac{\sin \alpha x}{x-r}\, dx = \cos \alpha r \cdot \int\limits_r^\infty \frac{\sin \alpha y}{y}\, dy + \sin \alpha r \cdot \int\limits_r^\infty \frac{\cos \alpha y}{y}\, dy + 2\cos \alpha r \cdot \int\limits_\varepsilon^r \frac{\sin \alpha y}{y}\, dy,$$

отже

$$V.p. \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x-r}\, dx$$

виходить, якщо в останньому інтегралі прийняти просто $\varepsilon = 0$.

Остаточно,

$$V.p. \int\limits_0^\infty \frac{2x \sin \alpha x}{x^2 - r^2}\, dx = 2\cos \alpha r \cdot \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{y}\, dy = \pi \cos \alpha r.$$

14) Нехай функція $f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ задовольняє умови

$$f(x+\pi) = f(x) \quad \text{та} \quad f(\pi - x) = f(x).$$

Припускаючи, що інтеграл зліва існує, довести формулу

$$\int_0^\infty f(x)\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx.$$

(Вона належить Лобачевському та доводиться розкладанням функції $\frac{1}{\sin x}$ на прості дроби так само, як і у окремому випадку, коли $f(x) \equiv 1$; дивіться пр. 492.3.)

Застосувати цю формулу для обчислення інтегралів:

а) $$\int_0^\infty \frac{\sin^{2\nu+1} x}{x}\,dx = \int_0^\infty \sin^{2\nu} x \cdot \frac{\sin x}{x}\,dx \quad (\nu = 1,\ 2,\ \dots);$$

б) $$\int_0^\infty \operatorname{arctg}(a \cdot \sin x)\frac{dx}{x} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(a \cdot \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}\,dx \quad (a > 0).$$

Інтеграл а) зводиться до вже відомого (312.1) інтеграла

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2\nu} x\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}.$$

Інтеграл б) заміною $t = \sin x$ зводиться до інтеграла

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} at}{t\sqrt{1-t^2}}\,dt;$$

Нижче ми покажемо (пр. 511.9), що він дорівнює

$$\frac{\pi}{2}\ln(a + \sqrt{1+a^2}).$$

15) За тих же умов щодо функції $f(x)$, довести формулу (знову ж — припускаючи існування інтеграла зліва):

$$\int_0^\infty f(x) \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx.$$

Вказівка. Тут також можна застосувати метод Лобачевського, однак з посиланням на розклад функції $\frac{1}{\sin^2 x}$ на прості дроби (пр. 441.9).

Для $f(x) \equiv 1$ звідси знову виходить відомий нам інтеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

(дивіться пр. 494.4).

16) Обчислити інтеграли $(a,\ b > 0)$

$$\text{а)} \int\limits_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x}\,dx, \quad \text{б)} \int\limits_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x}\cos bx\,dx, \quad \text{в)} \int\limits_0^1 \frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\ln x}\,dx.$$

Вказівка. Усі інтеграли зводяться до інтегралів Фрулляні; перші два інтеграли при $a = b$ **розбігаються**.

Відповідь: а) $\ln\sqrt{\frac{a+b}{|a-b|}}$, б) $\ln\frac{\sqrt{|a^2-b^2|}}{b}$, в) $\ln\frac{a}{b}$.

17) Обчислити інтеграли $(a,\ b > 0)$

$$\text{а)} \quad \int\limits_0^\infty \frac{b\cdot\sin ax - a\cdot\sin bx}{x^2}\,dx,$$

$$\text{б)} \quad \int\limits_0^\infty \frac{b\ln(1+ax) - a\ln(1+bx)}{x^2}\,dx,$$

$$\text{в)} \quad \int\limits_0^\infty \left(e^{-ax} - e^{-bx}\right)^2 \frac{dx}{x^2}\,.$$

Вказівка. Усі три зводяться до інтегралів Фрулляні інтегруванням частинами.

18) Знайти інтеграл $(a > 0)$

$$\int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x^2}\,.$$

Розв'язок. Маємо тотожність

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-e^{-x}} - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2x}(e^{-x} - e^{-2x}) + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}e^{-x}\right) - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^{2x}-1} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}\right).$$

Інтеграли від другого та третього виразів взаємно знищуються (у чому легко переконатися заміною змінної), і усе зводиться до інтеграла Фрулляні.

Відповідь: $-\frac{1}{2}\ln 2$.

19) Знайти інтеграл $(a,\ b>0)$

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}+x(a-b)e^{-bx}}{x^2}\,dx.$$

Розв'язок. Маємо (для $\eta>0$)

$$\int\limits_\eta^\infty = \int\limits_\eta^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x^2}\,dx + (a-b)\int\limits_\eta^\infty \frac{e^{-bx}}{x}\,dx$$

(ці інтеграли не збігаються для $\eta=0$.)

Перший з інтегралів справа перетворимо інтегруванням частинами:

$$\int\limits_\eta^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x^2}\,dx = -\left.\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right|_\eta^\infty + \int\limits_\eta^\infty \frac{be^{-bx}-ae^{-ax}}{x}\,dx,$$

отже, остаточно

$$\int\limits_\eta^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}+x(a-b)e^{-bx}}{x^2}\,dx = \frac{e^{-a\eta}-e^{-b\eta}}{\eta} + a\int\limits_\eta^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\,dx.$$

Перший вираз справа прямує до $b-a$, коли $\eta\to 0$, а другий до інтеграла Фрулляні:

$$a\int\limits_0^\infty \frac{e^{-bx}-e^{-ax}}{x}\,dx = a\cdot\ln\frac{a}{b}.$$

20) Довести формулу

$$\int\limits_0^\infty \frac{A\cos ax+B\cos bx+\ldots+K\cos kx}{x}\,dx = -\{A\ln a+b\ln b+\ldots K\ln k\}$$

припускаючи, що $a,\ b,\ \ldots,\ k>0$ та $A+B+\cdots+K=0$ (остання умова, очевидно, є **необхідною** для існування інтеграла).

Вказівка. Приймаючи $K=-A-B-\ldots$, скористатися формулою (495.2) або пр. 495.4:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax-\cos kx}{x}\,dx = -\ln a+\ln k.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Запропоновану формулу можна легко узагальнити на випадок довільної функції $f(x)$, що задовольняє умови розд. 495.

21) Знайти вираз для інтеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{sin^n x}{x^m}\,dx,$$

де n та m — натуральні числа та $n \geqslant m \geqslant 2$.

Розв'язок. Поширюючи на випадок нескінченного проміжку **узагальнену** формулу інтегрування частинами (розд. 311), одразу отримаємо (оскільки подвійна підстановка тут зникає):

$$\int\limits_0^\infty \frac{sin^n x}{x^m}\,dx = \frac{1}{(m-1)!}\int\limits_0^\infty \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} sin^n x \cdot \frac{dx}{x}. \tag{497.4}$$

Для обчислення останнього інтеграла зручно скористатися відомими нам розкладами $\sin^n x$ на синуси та косинуси кратних дуг (пр. 461.3).

Розглянемо різні випадки, що можуть трапитися тут.

а) $n = 2\nu + 1$, $m = 2\mu + 1$. Тоді

$$\frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}} \sin^{2\nu+1} x = \frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu}} \Big[(2\nu+1)^{2\mu} \sin(2\nu+1)x - \\ - (2\nu+1)(2\nu-1)^{2\mu} \sin(2\nu-1)x + \frac{(2\nu+1)2\nu}{1\cdot 2}(2\nu-3)^{2\mu} \sin(2\nu-3)x - \ldots \Big]$$

і, за формулою (497.4),

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2\nu+1} x}{x^{2\mu+1}}\,dx = \frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu}\cdot(2\mu)!}\cdot\frac{\pi}{2}\Big[(2\nu+1)^{2\mu} - \\ - (2\nu+1)(2\nu-1)^{2\mu} + \frac{(2\nu+1)2\nu}{1\cdot 2}(2\nu-3)^{2\mu} - \ldots\Big].$$

б) $n = 2\nu$, $m = 2\mu + 1$. У такому випадку:

$$\frac{d^{2\mu}}{dx^{2\mu}} \sin^{2\nu} x = \frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu-1}} \Big[(2\nu)^{2\mu} \cos 2\nu x - 2\nu\cdot(2\nu-2)^{2\mu}\cos(2\nu-2)x + \\ + \frac{2\nu(2\nu-1)}{1\cdot 2}(2\nu-4)^{2\mu}\cos(2\nu-4)x - \ldots\Big].$$

Легко помітити, що ліва частина (оскільки $\nu > \mu$) перетворюється на 0, коли $x = 0$, отже сума коефіцієнтів при косинусах дорівнює 0, і ми можемо скористатися формулою із пр. 497.20. Звідси

$$\int\limits_0^\infty \frac{sin^{2\nu}x}{x^{2\mu+1}}\,dx = \frac{(-1)^{\nu+\mu+1}}{2^{2\nu-1}(2\mu!)}\Bigg[(2\nu)^{2\mu}\ln 2\nu - 2\nu(2\nu-2)^{2\mu}\ln(2\nu-2)+ + \frac{2\nu(2\nu-1)}{1\cdot 2}(2\nu-4)^{2\mu}\ln(2\nu-4) - \ldots\Bigg].$$

Аналогічно можна отримати формули для випадків: в) $n = 2\nu+1$, $m = 2\mu$ та г) $n = 2\nu$, $m = 2\mu$. Зазначимо, що, зокрема, для будь-якого $n \geqslant 2$

$$\int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx = \frac{\pi}{2^n\cdot(n-1)!}\left[n^{n-1} - n(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-4)^{n-1} - \ldots\right].$$

22) За допомогою того ж розкладу пр. 461.3 легко отримати, що (для $p > 0$)

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2\nu+1}px}{x}\,dx = \frac{(-1)^\nu\pi}{2^{2\nu+1}}\Bigg[1-(2\nu+1)+\frac{(2\nu+1)2\nu}{1\cdot 2} - \ldots + + (-1)^\nu\frac{(2\nu+1)\cdot 2\nu\cdot\ldots\cdot(\nu+2)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot\nu}\Bigg].$$

Втім, за допомогою елементарних міркувань, цей вираз зводиться до простішого:

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}.$$

Інтеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2\nu}px}{x}\,dx$ розбігається. Інтеграл Фрулляні

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2\nu}px - \sin^{2\nu}qx}{x}\,dx \quad (p,\ q > 0)$$

не задовольняє умови розд. 495, але за допомогою розкладу пр. 461.3 легко показати, що він зводиться до другого випадку інтегралів Фрулляні, якщо $\sin^{2\nu}x$ замінити на

$$\sin^{2\nu}x - \frac{1}{2^\nu}\cdot\frac{2\nu(2\nu-1)\ldots(\nu+1)}{1\cdot 2\ldots\nu}.$$

Остаточно, згідно з формулою (495.2):

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^{2\nu}px - \sin^{2\nu}qx}{x}\,dx = \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\ln\frac{q}{p}.$$

Інтеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\cos^n x}{x}\,dx$ не збігається хоч би яке було натуральне n. Але для $n = 2\nu+1$ збігається $\int\limits_A^\infty$ і, згідно з формулою Фрулляні (495.2), одразу ж маємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos^{2\nu+1} px - \cos^{2\nu+1} qx}{x}\,dx = \ln\frac{q}{p}\,.$$

Для $n = 2\nu$, використовуючи розклад пр. 461.3, як і раніше у випадку синусів, отримаємо

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos^{2\nu} px - \cos^{2\nu} qx}{x}\,dx = \left(1 - \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!}\right)\ln\frac{q}{p}\,.$$

23) Довести такі формули:

а) $$\int\limits_0^\infty \cos\gamma x\,dx \int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\gamma}, & \text{якщо} \quad |\gamma| > 1, \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{якщо} \quad |\gamma| = 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad |\gamma| < 1; \end{cases}$$

б) $$\int\limits_0^\infty \sin\gamma x\,dx \int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\gamma}, & \text{якщо} \quad |\gamma| > 1, \\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{якщо} \quad |\gamma| = 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad |\gamma| < 1; \end{cases}$$

в) $$\int\limits_0^\infty \cos\gamma x\,dx \int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2\gamma}\ln\left|\dfrac{1+\gamma}{1-\gamma}\right|, & \text{якщо} \quad \gamma \ne 0,\ \pm 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad \gamma = 0, \\ \text{розбіжний}, & \text{якщо} \quad \gamma = \pm 1; \end{cases}$$

г) $$\int\limits_0^\infty \sin\gamma x\,dx\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}\ln|1-\gamma^2|, & \text{якщо} \quad \gamma\neq 0,\ \pm1,\\[2ex] 0, & \text{якщо} \quad \gamma = 0,\\[2ex] \text{розбіжний}, & \text{якщо} \quad \gamma=\pm1; \end{cases}$$

ґ) $$\int\limits_0^\infty e^{-\gamma x}\,dx\int\limits_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}\ln(1+\gamma), & \text{якщо} \quad \gamma>0,\\[2ex] 1, & \text{якщо} \quad \gamma=0; \end{cases}$$

(інтеграли $-\int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t}\,dx$ та $-\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$ — це “інтегральний синус” $\operatorname{si} x$ та “інтегральний косинус” $\operatorname{ci} x$, про які йшлося у розд. 289.)

Доведення. а) Припускаючи $\gamma \gtrless 0$, інтегруємо частинами:

$$\int\limits_0^\infty \cos\gamma x\,dx\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = \frac{1}{\gamma}\sin\gamma x\cdot\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\,\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{\gamma}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\gamma x}{x}\cos x\,dx.$$

Оскільки

$$\left|\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\right| \leqslant \left|\int\limits_1^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\right| + \left|\int\limits_x^1 \frac{dx}{x}\right| = c + |\ln x|,$$

то подвійна підстановка перетворюється на 0, і інтеграл зводиться до розривного множника Діріхле (пр. 497.11).

Окремо розглянемо випадок $\gamma = 0$. Для будь-якого $A>0$, повторно інтегруючи частинами, отримаємо

$$\int\limits_0^A dx\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = x\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\,\Bigg|_0^A + \int\limits_0^A \cos x\,dx = A\int\limits_A^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt + \sin A =$$

$$= A\frac{\sin t}{t}\Bigg|_A^\infty + A\int\limits_A^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt + \sin A = A\int\limits_A^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt.$$

Згідно з другою теоремою про середнє значення (теор. 487.2), останній вираз зводиться до вигляду: $\int\limits_A^{\overline{A}} \frac{\sin t}{t}\,dt$ $(\overline{A} > A)$, а цей інтеграл прямує до 0, коли $A\to\infty$,

nebayduzhi.math@gmail.com

зважаючи на умову Бользано – Коші (розд. 475), що може бути застосована до збіжного інтеграла $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$. Отже

$$\int\limits_0^\infty dx \int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = 0.$$

Доведення у решті випадків є аналогічними.

24) Довести наступні формули ($\alpha,\ \beta > 0$):

а) $$\int\limits_0^\infty dx \left\{ \int\limits_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \cdot \int\limits_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \right\} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\alpha}, & \text{якщо} \quad \alpha \geqslant \beta, \\ \dfrac{\pi}{2\beta}, & \text{якщо} \quad \alpha \leqslant \beta. \end{cases}$$

б) $$\int\limits_0^\infty dx \left\{ \int\limits_{\alpha x}^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \cdot \int\limits_{\beta x}^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \right\} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2\alpha}, & \text{якщо} \quad \alpha \geqslant \beta, \\ \dfrac{\pi}{2\beta}, & \text{якщо} \quad \alpha \leqslant \beta. \end{cases}$$

в) $$\int\limits_0^\infty dx \left\{ \int\limits_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \cdot \int\limits_{\beta x}^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \right\} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\alpha} \ln \left| \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \right| + \dfrac{1}{2\beta} \ln \dfrac{|\alpha^2-\beta^2|}{\alpha^2}, & \alpha \neq \beta \\ \dfrac{1}{\alpha} \ln 2, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

г) $$\int\limits_0^\infty dx \left\{ \int\limits_{\alpha x}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt \cdot \int\limits_{\beta x}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt \right\} = \ln \frac{(\alpha+\beta)^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}\beta^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Доведення. а) Інтегруванням частинами запропонований інтеграл зводиться до інтегралів того ж типу, як і розглянуті в пр. 497.23:

$$\int\limits_0^\infty dx \left\{ \int\limits_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \cdot \int\limits_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \right\} =$$

$$= x \cdot \int\limits_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \cdot \int\limits_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \Bigg|_{x=0}^{x=\infty} + \int\limits_0^\infty \cos\alpha x\,dx \int\limits_{\beta x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt + \int\limits_0^\infty \cos\beta x\,dx \int\limits_{\alpha x}^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\beta} \int\limits_0^\infty \cos\frac{\alpha}{\beta}x\,dx \int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt + \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^\infty \cos\frac{\beta}{\alpha}x\,dx \int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2\alpha} \quad \text{або} \quad \frac{\pi}{2\beta},$$

nebayduzhi.math@gmail.com

залежно від того, буде $\alpha \geqslant \beta$ чи $\alpha < \beta$.

Додатково пояснимо стосовно перетворення в 0 подвійної підстановки. Із уже знайомої нам оцінки

$$\left|\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\right| < c + |\ln x|$$

випливає, що вираз під знаком підстановки прямує до 0 разом із x. З іншого боку,

$$\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt = \frac{\sin t}{t}\Big|_x^\infty + \int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t^2}\,dt, \quad \left|\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt\right| < \frac{2}{x},$$

звідки випливає, що згаданий вираз прямує до 0, коли $x \to \infty$.

Доведення решти формул проводиться аналогічним шляхом, із посиланням на формули, доведені в пр. 497.23

13.5. Наближене обчислення невласних інтегралів

498. Інтеграли зі скінченними межами; виділення особливостей

Вище, в розд. 322 – розд. 328, ми вивчили різноманітні способи для наближеного обчислення визначених інтегралів у власному сенсі. До невласних інтегралів ці способи та вказані для них оцінки похибок безпосередньо застосовувати не можна. Іноді вдається, замінюючи змінну або інтегруючи частинами, звести невласний інтеграл до власного. Тоді й наближене обчислення невласного інтеграла зведемо до вже знайомої задачі.

В багатьох випадках наближене обчислення невласного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (зі скінченними межами) можна полегшити, виділивши деякі особливості (особливі точки). Канторович (рад. Leonid Kantorovich, Леоні́д Канторо́вич) запропонував цей спосіб. Він полягає в знаходженні такої функції $g(x)$ простого вигляду, яка "поглинає" особливості функції $f(x)$, і різниця $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ позбавлена особливостей, тобто інтегровна у власному сенсі. При цьому функцію $g(x)$ вибирають так, щоб інтеграл від $g(x)$ можна було виразити в скінченному вигляді, а функція $\varphi(x)$ мала потрібну кількість похідних, щоб при наближеному обчисленні інтеграла від неї можна було використати відомі формули для оцінювання похибки.

Функцію $g(x)$ вибирають по-різному, залежно від задачі. Як приклад вкажемо загальне правило побудови цієї функції для одного класу інтегралів, який трапляється доволі часто.

Нехай підінтегральна функція має вигляд

$$f(x) = (x - x_0)^{-\alpha} \cdot h(x) \quad (a \leqslant x_0 \leqslant b,\ 0 < \alpha < 1),$$

де $h(x)$ для $a \leqslant x \leqslant b$ можна розкласти в степеневий ряд

$$h(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots .$$

Тоді приймаємо

$$g(x) = (x - x_0)^{-\alpha} \cdot [c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n]$$

та

$$\varphi(x) = (x - x_0)^{-\alpha} \cdot [c_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \dots] = (x - x_0)^{n+(1-\alpha)} \cdot [c_{n+1} + \dots].$$

Інтеграл від $g(x)$ узяти легко; із іншого боку, $\varphi(x)$, вочевидь, має на $[a, b]$, включно з точкою x_0, n неперервних похідних.

nebayduzhi.math@gmail.com

499. Приклади

1) Нехай потрібно обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\int\limits_0^{1/2} x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx;$$

в останнім інтегралі єдиною особливою точкою є 0.

Розкладаючи $(1-x)^{-1/2}$ за степенями x, зупинимося на члені, що містить x^4, і приймемо

$$g(x) = x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4\right),$$
$$\varphi(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}-\left(1+\dots+\frac{35}{128}x^4\right)\right] = \frac{63}{256}x^{\frac{9}{2}}+\dots.$$

Тоді

$$I = \int\limits_0^{1/2} x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int\limits_0^{1/2} g(x)\,dx + \int\limits_0^{1/2}\varphi(x)\,dx = I_1 + I_2.$$

Значення I_1 обчислити легко:

$$I_1 = \frac{715801}{645120}\sqrt{2} = 1{,}569\,158\,5\dots$$

Щодо I_2, то його знайдемо за формулою Сімпсона, ділячи проміжок $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ на $2n=10$ частин і обчислюючи до 6 знака після коми:

$$\begin{aligned}
y_0 &= 0\\
y_{1/2} &= 0\\
2y_1 &= 0{,}000\,018\\
4y_{3/2} &= 0{,}000\,225\\
2y_2 &= 0{,}000\,431\\
4y_{5/2} &= 0{,}002\,496\\
2y_3 &= 0{,}003\,017\\
4y_{7/2} &= 0{,}012\,901\\
2y_4 &= 0{,}012\,632\\
4y_{9/2} &= 0{,}046\,350\\
y_5 &= 0{,}020\,239
\end{aligned}$$

$$= 0{,}098\,309 \qquad\qquad : 60 = 0{,}001\,638\,5$$

nebayduzhi.math@gmail.com

$$\begin{aligned} I_1 &\doteq 1{,}569\,158\,5 \\ I_2 &\doteq 0{,}001\,638\,5 \\ \hline I &\doteq 1{,}570\,797\,0 \end{aligned}$$

Справжнє значення I дорівнює, як це випливає з теорії функції "Бета" (529.7),

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}570\,796\,3\ldots$$

Оцінимо похибку (без використання, звісно, можливості отримати точне значення інтеграла). Маємо:

$$\varphi^{(4)}(x) = \frac{63}{256}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} + \ldots > 0,$$

і $\varphi^{(4)}(x)$ зростає разом із x, тож найбільшого значення вона досягає, коли $x = \frac{1}{2}$. Звідси легко отримати, що $\max\varphi^{(4)}(x) = 288$.

Похибку формули Сімпсона виразимо за відомою формулою (327.2):

$$R = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{10^4}\cdot\frac{\varphi^{(4)}(\zeta)}{180}.$$

Отже,

$$R < 0, \quad |R| < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{10^4}\cdot\frac{288}{180} = \frac{5}{10^6}.$$

Із іншого боку, абсолютна похибка отриманого для I_2 значення, що є наслідком округлень, значно менша: $\frac{5\cdot 10^{-6}}{60} < 10^{-7}$. Така сама абсолютна похибка значення I_1. Загальна похибка лежить між $-\frac{5{,}2}{10^6}$ і $\frac{0{,}2}{10^6}$, тому

$$1{,}570\,791\,8 < I < 1{,}570\,797\,2 \quad \text{або} \quad 1{,}570\,791 < I < 1{,}570\,798.$$

Остаточно,

$$I = 1{,}570\,79_{+0{,}000\,01}.$$

2) Для інтеграла

$$I = \int\limits_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-3/4}\,dx$$

обидві точки 0 і 1 є особливими; відповідно, розбиваємо цей інтеграл на два:

$$I = \int\limits_0^1 = \int\limits_0^{1/2} + \int\limits_{1/2}^1 = I_1 + I_2.$$

Для обчислення I_1 приймаємо

$$g(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{3}{4}x + \frac{31}{32}x^2 + \frac{77}{128}x^3 + \frac{1155}{2048}x^4\right),$$
$$\varphi(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left[(1-x)^{-\frac{3}{4}} - \left(1 + \dots + \frac{1155}{2048}x^4\right)\right],$$

тож

$$I_1 = \int\limits_0^{1/2} g(x)\,dx + \int\limits_0^{1/2} \varphi(x)\,dx = I_{11} + I_{12}.$$

Одразу знаходимо

$$I_{11} = \frac{576293}{491520}\sqrt{2} \doteq 1{,}658\,124\,8.$$

Інтеграл I_{12} обчислюємо за формулою Сімпсона, $2n = 10$, на шість знаків: $I_{12} \doteq 0{,}003\,813$. Звідси $I_1 = 1{,}661\,938$. Оцінюючи похибку, як було зроблено вище, знайдемо:

$$I_1 = 1{,}661\,93_{+0{,}000\,01}.$$

Аналогічним чином

$$I_2 = \int\limits_{1/2}^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{4}}\,dx = \int\limits_0^{1/2} x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \int\limits_0^{1/2} x^{-\frac{3}{4}}\left(1 + \frac{1}{2}x + \dots + \frac{35}{128}x^4\right)dx + \int\limits_0^{1/2} x^{-\frac{3}{4}}\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1 + \dots)\right]dx =$$
$$= I_{21} + I_{22}.$$

Отримаємо

$$I_{21} \doteq 3{,}580\,291, \qquad I_{22} \doteq 0{,}002\,033, \qquad I_2 \doteq 3{,}582\,324.$$

Якщо оцінити похибку тим самим способом, отримаємо

$$I_2 = 3{,}582\,32_{+0{,}000\,005}.$$

Отже,

$$I = 5{,}244\,25_{+0{,}000\,015} \quad \text{або} \quad I = 5{,}244\,26_{+0{,}000\,01}.$$

3) Розглянемо інтеграл

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx;$$

особлива точка $x = 0$.

Для її виділення застосуємо такий самий спосіб. Приймемо

$$I = \int_0^1 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)\ln x\,dx + \int_0^1 \frac{x^5 \ln x}{1-x}\,dx = I_1 + I_2.$$

Обчислюємо (інтегруючи частинами): $I_1 = -1{,}463\,61\ldots$ Інтеграл I_2 обчислюємо за формулою Сімпсона ($2n = 10$, на п'ять знаків); отримаємо: $I_2 \doteq 0{,}181\,35$. Отже, $I \doteq -1{,}644\,96$. Справжнє значення шуканого інтеграла (дивіться пр. 519.1) становить $-\frac{\pi^2}{6} = -1{,}644\,934\ldots$.

При оцінюванні похибки похідну $\varphi^{(4)}(x)$ обчислюємо за формулою Ляйбніца розд. 117. При цьому зручно скористатися формулою, яку нескладно довести:

$$\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]^{(k)} = \frac{1}{k+1} f^{(k+1)}(c)$$

(де c лежить між a та x), прийнявши $f(x) = \ln x$, $a = 1$. Грубе оцінювання дає $|\varphi^{(4)}(x)| < 200$, звідки

$$|R| < \frac{1}{10^4} \cdot \frac{200}{180} \doteq 0{,}000\,11.$$

Сумарна похибка становить ±0,000 13. Остаточно,

$$|I| = 1{,}645_{\pm 0{,}0002}\,.$$

4) Розглянемо тепер приклад іншого типу

$$I = \int_0^{\pi/2} \lg \sin x\,dx,$$

з особливою точкою $x = 0$.

Природно було би зіставити підінтегральну функцію з функцією $g(x) = \lg x$, для якої легко обчислити інтеграл. Літерою M нижче позначено модуль переходу від натуральних логарифмів до десяткових.

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \lg x\,dx = M \cdot \int_0^{\pi/2} \ln x\,dx = Mx(\ln x - 1)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\lg\frac{\pi}{2} - M\right) \doteq -0{,}374\,123.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Інтеграл I_2 від функції $\varphi(x) = \lg \frac{\sin x}{x}$ обчислимо за формулою Сімпсона, для $2n = 18$, на шість знаків. Матимемо

$$I_2 = \int\limits_0^{\pi/2} (\lg x - \lg \sin x)\, dx \doteq -\,0{,}098\,733.$$

Тому

$$I_1 + I_2 \doteq -\,0{,}472\,856.$$

Насправді, інтеграл I лише множником M відрізняється від уже відомого нам (дивіться пр. 492.1) інтеграла

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2,$$

і, як наслідок,

$$I = -\frac{\pi}{2} \cdot \lg 2 = -0{,}472\,856\,8\ldots;$$

бачимо, що в отриманому вище значенні всі шість знаків правильні.

Не знаючи справжнього значення, ми змушені були би скористатись оцінкою похибки формули Сімпсона. Тут

$$\varphi(x) = M(\ln x - \ln \sin x), \quad \varphi^{(4)}(x) = M \cdot \frac{6 \cdot (x^4 - \sin^4 x) - 4x^4 \sin^2 x}{x^4 \sin^4 x}.$$

Можна довести, що $0 < \varphi^{(4)}(x) < \frac{\pi^4}{12} \cdot M < 3{,}6$, звідки $R < 0$ і $|R| < 0{,}000\,002$. Враховуючи ще й похибку від округлення, ми могли б лише з'ясувати, що

$$|I| \doteq 0{,}472\,85_{+0{,}000\,01}\,.$$

500. Зауваження щодо наближеного обчислення власних інтегралів

Метод виділення особливостей може виявитися корисним і для обчислення **власних** інтегралів, якщо підінтегральна функція, навіть будучи неперервною, не має потрібної кількості неперервних похідних (що ускладнює оцінювання похибки). Пояснимо це прикладом.

Розглянемо інтеграл

$$I = \int\limits_0^1 \ln x \cdot \ln(1 + x)\, dx.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Легко бачити, що підінтегральна функція прямує до 0, коли $x \to 0$, тож цю функцію можна вважати неперервною на всьому проміжку інтегрування. Але вже перша похідна підінтегральної функції необмежено зростає, коли $x \to 0$. Скориставшись розкладом логарифму, запишемо нашу функцію як суму двох функцій

$$g(x) = \ln x \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$$

і

$$\varphi(x) = \ln x \cdot \left[\ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\right].$$

Інтеграл від першої функції легко взяти: його значення $-0{,}205\,28\ldots$. Інтеграл від другої функції (яка має чотири неперервні похідні) обчислимо за формулою Сімпсона, $2n = 10$, на п'ять знаків. Отримаємо $-0{,}003\,48$, тож загальний результат становитиме $-0{,}208\,76$.

Оскільки $|\varphi^{(4)}(x)| < 36$, то $|R| < 0{,}000\,02$. Остаточно

$$|I| = 0{,}208\,76_{\pm 0{,}000\,03} = 0{,}2087_{+0{,}0001}.$$

(Насправді в отриманому наближенні всі знаки правильні, бо справжнє значення I становить $-0{,}208\,761\,8\ldots$).

Цікаво, що якщо формулу Сімпсона (для того самого $2n = 10$, й обчислюючи так само на п'ять знаків) застосувати до підінтегральної функції без попереднього виділення особливості, то матимемо $I \doteq -0{,}2080$, тобто всього три правильних знаки.

Отже, *якщо не виділити особливість, то ми не лише відчуємо труднощі при оцінюванні похибки, але й можемо зіткнутися з фактичним зменшенням точності результату!*

501. Наближене обчислення невласних інтегралів з нескінченною межею

Нечасто вдається обчислити інтеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ лише на основі його означення, як границі власного інтеграла $\int\limits_a^A f(x)\,dx$, наближено вважаючи (за досить великих A) $\int\limits_a^\infty \doteq \int\limits_a^A$ й обчислюючи останній інтеграл за допомогою відомих способів. Це може допомогти лише в разі достатньо швидкого спадання підінтегральної функції зі зростанням x, щоб навіть для невеликого A написана приблизна рівність мала достатню точність.

1) Це, наприклад, стосується інтеграла

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Із нерівності $x^2 \geqslant 2Ax - A^2$ випливає, що

$$e^{-x^2} < e^{A^2} \cdot e^{-2Ax}$$

і

$$\int\limits_A^\infty e^{-x^2}\,dx \leqslant e^{A^2} \cdot \int\limits_A^\infty e^{-2Ax}\,dx = \frac{1}{2A}e^{-A^2}.$$

Для $A = 3$:

$$\int\limits_3^\infty e^{-x^2}\,dx < 0{,}000\,02.$$

Стосовно ж інтеграла $\int\limits_0^3 e^{-x^2}\,dx$, то його обчислимо за формулою Сімпсона, для $n = 30$, на п'ять знаків; це дасть 0,886 21. Нескладно отримати таку оцінку:

$$\left|\left(e^{-x^2}\right)^{(4)}\right| \leqslant 12, \quad |R| < 2 \cdot 10^{-5}.$$

Загальна похибка становить від $-0{,}000\,04$ до $0{,}000\,06$. Отже,

$$0{,}886\,17 < I < 0{,}886\,27, \quad I \doteq 0{,}8862_{\pm 0{,}0001}.$$

Точне значення I, як ми знаємо (дивіться пр. 492.2), становить $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0{,}886\,226\ldots$.

Частіше за все буває вигідно перетворити інтеграл $\int\limits_a^\infty$ на інтеграл зі скінченними межами, або ж розбити його на два: $\int\limits_a^A + \int\limits_A^\infty$, і другий перетворити на інтеграл зі скінченними межами.

2) Розглянемо той самий інтеграл

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

nebayduzhi.math@gmail.com

й запишемо його як суму:

$$\int\limits_0^\infty = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty = I_1 + I_2.$$

I_1 обчислимо за формулою Сімпсона, $2n = 10$, на п'ять знаків, $|R| < 0{,}000\,01$; $I_1 = 0{,}746\,83_{\pm 0{,}000\,02}$. I_2 заміною $x = \frac{1}{t}$ перетворюємо до вигляду:

$$I_2 = \int\limits_0^1 \frac{1}{t^2} \cdot e^{-\frac{1}{t^2}}\, dt.$$

Звичним способом отримаємо $I_2 \doteq 0{,}139\,45$ і $I \doteq 0{,}886\,28$.

Оцінкою похибки не займатимемось.

Якщо інтеграл із нескінченною верхньою межею має особливу точку і на скінченній відстані, тоді потрібно розбити інтеграл на дві частини, кожна з яких має лиш одну особливість.

3) Розглянемо (для $0 < a < 1$) інтеграл

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \int\limits_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx + \int\limits_1^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = I_1 + I_2.$$

Інтеграл I_1 знайдемо, виділивши особливість:

$$I_1 = \int\limits_0^1 (x^{a-1} - x^a + x^{a+1} - x^{a+2} + x^{a+3})\, dx - \int\limits_0^1 \frac{x^{a+4}}{1+x}\, dx = I_{11} - I_{12}\,.$$

$$I_{11} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} - \frac{1}{a+3} + \frac{1}{a+4},$$

I_{12} обчислимо за формулою Сімпсона.

Нехай, наприклад, $a = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707\,106\,8\ldots$; тоді $I_{11} = 1{,}140\,52\ldots$. Для I_{12} ($2n = 10$, на п'ять знаків) отримаємо значення $0{,}095\,18$. Отже, $I_1 \doteq 1{,}045\,34$.

Інтеграл I_2 заміною $x = \frac{1}{t}$ зводимо до вигляду

$$I_2 = \int\limits_0^1 \frac{t^{b-1}}{1+t}\, dt,$$

nebayduzhi.math@gmail.com

де $b = 1 - a = 0{,}292\,893\,1\ldots$. Аналогічно до попереднього, отримаємо $I_2 \doteq 2{,}902\,89$. Остаточно, $I \doteq 3{,}948\,23$. Згодом (пр. 522.1) ми дізнаємося, що дійсне значення I становить $\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} = 3{,}948\,246\ldots$

Іноді з інтегралу $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, який збігається "повільно", все-таки вдається виділити (наприклад, повторним інтегруванням частинами) члени, які легко обчислити, та щоб водночас залишковий інтеграл виявився досить малим.

4) Розглянемо інтеграл

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Запишемо його як суму двох інтегралів: $\int\limits_0^A + \int\limits_A^\infty$ (другий не повинен бути малим). Інтегруючи частинами, матимемо

$$\int\limits_A^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \left\{-\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2\frac{\cos x}{x^3} + \right.$$

$$\left. + 6\frac{\sin x}{x^4} - 24\frac{\cos x}{x^5} - 120\frac{\sin x}{x^6}\right\}\Bigg|_A^\infty + 720\int\limits_A^\infty \frac{\sin x}{x^7}\,dx.$$

Взяв, наприклад, $A = 2\pi$, отримаємо

$$\int\limits_{2\pi}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2\pi} - \frac{2}{(2\pi)^3} + \frac{24}{(2\pi)^5} + 720\int\limits_{2\pi}^\infty \frac{\sin x}{x^7}\,dx.$$

Сума проінтегрованих доданків становить $0{,}153\,54\ldots$. Далі

$$0 < 720\int\limits_{2\pi}^\infty \frac{\sin x}{x^7}\,dx < 720\int\limits_{2\pi}^\infty \frac{dx}{x^7} = \frac{120}{(2\pi)^6} < 0{,}002.$$

Обчислюючи інтеграл $\int\limits_0^{2\pi}$ за формулою Сімпсона ($2n = 40$, на чотири знаки), матимемо: 1,4182.

Оцінка похибки:

$$f(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}, \quad f^{(4)}(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!(2m+5)},$$

$$\left|f^{(4)}(x)\right| < \frac{1}{5}\operatorname{ch} 2\pi < 54, \quad |R| < 0{,}0012.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Звідси, враховуючи загальну похибку,

$$1{,}5702 < I < 1{,}5752, \quad I = 1{,}57_{+0{,}01}\,.$$

Як ми знаємо з пр. 492.3, насправді $I = \frac{\pi}{2} = 1{,}5707\ldots$.

502. Використання асимптотичних розкладів

При наближеному обчисленні інтегралів вигляду

$$\int\limits_x^{\infty} f(t)\,dt$$

часто вигідно скористатись асимптотичним розкладом. Пояснимо це на прикладах.

1) *Інтегральний логарифм.* Якщо $0 < a < 1$, інтегральний логарифм $\operatorname{li} a$ визначено як

$$\operatorname{li} a = \int\limits_0^a \frac{du}{\ln u}; \tag{502.1}$$

якщо $a > 1$, то інтеграл є розбіжним, і його сприймають у сенсі головного значення:

$$\operatorname{li} a = \text{V.p.} \int\limits_0^a \frac{du}{\ln u} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_0^{1-\varepsilon} + \int\limits_{1+\varepsilon}^a \right) \frac{du}{\ln u} \tag{502.2}$$

(дивіться розд. 484).

Нехай спершу $a < 1$. Приймемо $a = e^{-x}$ для $x > 0$ і зробимо в інтегралі заміну $u = e^{-t}$:

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = -\int\limits_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt. \tag{502.3}$$

Вважаючи, що $t = x + v$, ми прийдемо до інтеграла

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = -e^{-x} \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-v}}{x+v}\,dv. \tag{502.4}$$

Оскільки

$$\frac{1}{x+v} = \frac{1}{x} - \frac{v}{x^2} + \frac{v^2}{x^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{v^{n-1}}{x^n} + (-1)^n \frac{v^n}{x^n\cdot(x+v)},$$

то звідси (пр. 489.4)

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = -e^{-x}\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} + r_n(x)\right\}, \tag{502.5}$$

де додатковий член виражено інтегралом

$$r_n(x) = (-1)^n \int\limits_0^\infty \frac{v^n \cdot e^{-v}}{x^n \cdot (x+v)}\, dv. \tag{502.6}$$

Якщо відкинути його та продовжити розкладання до нескінченності:

$$\operatorname{li}(e^{-x}) \sim -e^{-x}\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} + \dots\right\}, \tag{502.7}$$

то матимемо розбіжний ряд, оскільки відношення наступного члена до попереднього

$$\frac{n}{x} \to \infty, \quad \text{коли} \quad n \to \infty.$$

Але з виразу (502.6) для додаткового члена видно, що він має знак першого відкинутого члену ряду й за абсолютною величиною менший за нього:

$$|r_n(x)| < \frac{1}{x^{n+1}} \int\limits_0^\infty e^{-v} \cdot v^n\, dv = \frac{n!}{x^{n+1}}\,.$$

(В розглянутому випадку $a < 1$ асимптотичний розклад (502.7) і вираз для додаткового членy можна отримати послідовним застосуванням до інтеграла (502.3) **інтегрування частинами**. Але цей спосіб недоступний в разі $a > 1$.) Отже, ряд (502.7) **обгортає** функцію $\operatorname{li}(e^{-x})$, і водночас є її **асимптотичним розкладом** (розд. 463). Із 12.6 читач уже знає, як подібний ряд можна застосувати для наближених обчислень; найкращий результат відповідає $n = E(x)$.

Якщо $a > 1$ і $x < 0$, то становище значно ускладнюється. В цьому разі також можна вивести формули (502.3) – (502.7), але всі інтеграли тут потрібно розуміти лише як їхні головні значення. Розклад (502.7) в цьому випадку **не є знакозмінним**, (адже $x < 0$); оцінка додаткового члену значно ускладнена. Завдяки ґрунтовному дослідженню, Стілтьєсу (нід. Thomas Joannes Stieltjes, То́мас Сті́лтьєс) вдалося з'ясувати, що для даного $x < 0$ для отримання найкращого наближення до числа $\operatorname{li}(e^{-x})$ також слід узяти $n = E(|x|)$, водночас порядок наближення оцінюють виразом $\sqrt{\dfrac{2\pi}{|x|}}$.

Для функції $\operatorname{li}(e^{-x})$ можна отримати розклад за цілими степенями x у порядку їх зростання, справедливе для всіх дійсних значень x. З цією метою перепишемо формулу (502.3) у вигляді

$$\operatorname{li}(e^{-x}) = \int\limits_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt - \int\limits_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt + \int\limits_1^x \frac{dt}{t} + \int\limits_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt.$$

Для $x < 0$ інтеграл $\int\limits_1^x \frac{dt}{t}$ розбігається, і потрібно взяти його головне значення; воно становить

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_1^{\varepsilon}+\int\limits_{-\varepsilon}^{x}\right)\frac{dt}{t}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln\varepsilon+\ln\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right]=\ln(-x)=\ln|x|.$$

Сума перших двох інтегралів є сталою C, яка не залежить від x. (Як ми побачимо нижче, вона тотожно дорівнює сталій Ойлера (пр. 538.3).) Залишилося останній інтеграл розкласти за степенями x, щоб отримати потрібний результат:

$$\operatorname{li}(e^{-x})=C+\ln|x|-x-\frac{x^2}{2!\cdot 2}-\frac{x^3}{3!\cdot 3}-\frac{x^4}{4!\cdot 4}-\ldots-\frac{x^n}{n!\cdot n}-\ldots \tag{502.8}$$

Однак цим розкладом невигідно користуватися для великих значень $|x|$, і розбіжний розклад (502.7) має у даному випадку суттєву перевагу. Так, Стілтьєс, взявши 23 члени ряду (502.7), визначив

$$\operatorname{li}10^{10}=455\,055\,614{,}586;$$

в ряді (502.8) знадобилося би понад 10^{10} членів, аби здійснити таку точність!

2) *Інтегральні косинус і синус*:

$$P=\operatorname{ci}x=-\int\limits_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt,\quad Q=\operatorname{si}x=-\int\limits_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Для спрощення викладок розглянемо інтеграл від **комплексної** функції **дійсної** змінної:

$$P+Qi=-\int\limits_x^{\infty}\frac{e^{it}}{t}\,dt=i\int\limits_x^{\infty}\frac{de^{it}}{t}.$$

Послідовно **інтегруючи частинами**, отримаємо формулу

$$P+Qi=\frac{e^{ix}}{ix}+\frac{e^{ix}}{(ix)^2}+2!\,\frac{e^{ix}}{(ix)^3}+3!\,\frac{e^{ix}}{(ix)^4}+\cdots+(n-1)!\,\frac{e^{ix}}{(ix)^n}+r_n(x),$$

де

$$r_n(x)=(-1)^{n-1}i^n\cdot n!\cdot\int\limits_x^{\infty}\frac{e^{it}}{t^{n+1}}\,dt.$$

Якщо виведену формулу розділити почленно на $-e^{ix}$, й окремо прирівняти дійсні й уявні частини, то отримаємо зручніші для обчислень формули:

$$\begin{aligned}\int\limits_x^{\infty}\frac{\cos(t-x)}{t}\,dt&=-P\cos x-Q\sin x=\\&=\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{x}-\frac{3!}{x^3}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{(2m-1)!}{x^{2m-1}}\right\}+r'_{2m-1}(x)\end{aligned}\tag{502.9}$$

та

$$\begin{aligned}\int\limits_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt &= P\sin x - Q\cos x = \\ &= \frac{1}{x}\left\{1 - \frac{2!}{x^2} + \dots + (-1)^{m-1}\frac{(2m-2)!}{x^{2m-2}}\right\} + r''_{2m-2}(x),\end{aligned} \tag{502.10}$$

де, відповідно,

$$r'_{2m-1}(x) = (-1)^m(2m+1)!\int\limits_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t^{2m+2}}\,dt$$

і

$$r''_{2m-2}(x) = (-1)^m(2m)!\int\limits_x^\infty \frac{\sin(t-x)}{t^{2m+1}}\,dt.$$

(Цікаво зазначити, що члени в $\{\dots\}$ виявляються як раз **оберненими величинами** до членів відомих степеневих рядів для синуса (404.4) й косинуса (404.5).)

Легко з'ясувати (наприклад, з використанням формули Бонне, (306.1)), що

$$\left|\int\limits_x^X \frac{\sin(t-x)}{t^n}\,dt\right| \leqslant \frac{2}{x^n}\,.$$

Здійснюючи граничний перехід для $X \to \infty$, з'ясуємо, що додаткові члени у формулах (502.9) і (502.10) за абсолютною величиною не перевищують кожного **подвоєного** члена відповідного розкладу, які розташовані за виписаними членами. Звідси випливає, що, продовживши розклади (502.9) і (502.10) до нескінченності, ми прийдемо до асимптотичних представлення інтегралів у лівих частинах.

Зокрема, наприклад, із (502.10), приймаючи там $x = k\pi$ ($k = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$), знайдемо

$$\varrho_k = \mathrm{si}(k\pi) = -\int\limits_{k\pi}^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt \simeq (-1)^{k+1}\left\{\frac{1}{k\pi} - \frac{2!}{(k\pi)^3} + \frac{4!}{(k\pi)^5} - \frac{6!}{(k\pi)^7} + \dots\right\}.$$

Для $k > 2$ звідси легко знайти наближені значення ϱ_k:

$$\varrho_3 = 0{,}1040, \quad \varrho_4 = -0{,}0786, \quad \varrho_5 = 0{,}0631, \quad \varrho_6 = -0{,}0528, \quad \dots.$$

Наприклад, для обчислення ϱ_4 достатньо трьох членів у дужках:

$$0{,}079\,58 - 0{,}001\,01 + 0{,}000\,08 = 0{,}078\,65;$$

оскільки похибка набагато менша за $2\cdot 0{,}000\,015 = 0{,}000\,003$, то $|\varrho_4|$ лежить між 0,078 62 і 0,078 68, і остаточно

$$\varrho_4 = -0{,}0786\dots.$$

Глава 14

ІНТЕГРАЛИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ПАРАМЕТРА

14.1. Елементарна теорія

503. Формулювання задачі

504. Рівномірне прямування до граничної функції

505. Перестановка двох граничних переходів

506. Граничний перехід під знаком інтеграла

507. Диференціювання під знаком інтеграла

$$I'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x, y)\,dx, \tag{507.1}$$

508. Інтегрування під знаком інтеграла

509. Випадок, коли і межі інтеграла залежать від параметра

510. Введення множника, що залежить лише від x

511. Приклади

512. Доведення Ґаусса основної теореми алгебри

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

14.2. Рівномірна збіжність інтегралів

513. Означення рівномірної збіжності інтегралів

514. Умова рівномірної збіжності. Зв'язок із рядами

515. Достатні ознаки рівномірної збіжності

516. Інший випадок рівномірної збіжності

517. Приклади

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

14.3. Використання рівномірної збіжності інтегралів

518. Граничний перехід під знаком інтеграла

519. Приклади

520. Неперервність і диференційовність інтеграла за параметром

Теорема 520.1.

$$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x, y)\, dx \tag{520.1}$$

Теорема 520.2.

$$\int\limits_a^\infty f'_y(x, y)\, dx \tag{520.2}$$

$$I'(y) = \int\limits_a^\infty f'_y(x, y)\, dx$$

521. Інтегрування інтеграла за параметром

522. Застосування для обчислення деяких інтегралів

523. Приклади диференціювання під знаком інтеграла

524. Приклади інтегрування під знаком інтеграла

Фейєр (угор. Lipót Fejér, Ліпóт Фейéр)
Френель (фр. Augustin-Jean Fresnel, Оґюстá Френéль)
Грін (англ. George Green, Джóрдж Грíн)
Ліпшиц (нім. Rudolf Lipschitz, Рýдольф Лíпшиц)

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:

14.4. Доповнення

525. Лема Арзеля

Арзеля (іт. Cesare Arzelà, Че́йзаре Арзеля́)

526. Граничний перехід під знаком інтеграла

527. Диференціювання під знаком інтеграла

528. Інтегрування під знаком інтеграла

Стілтьєс (нід. Thomas Joannes Stieltjes, То́мас Сті́лтьєс)

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

14.5. Інтеграли Ойлера

529. Інтеграл Ойлера першого роду

Так називається (за пропозицією Льожондра) інтеграл виду

$$\mathrm{B}(a,b)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx, \tag{529.1}$$

де $a,\ b>0$. Він представляє B-*функцію* (**"Бета"**) від **двох** змінних параметрів a і b.

Цей інтеграл, як ми знаємо (пр. 483.3), для додатних значень a і b (хоча би і менших за одиницю) збігається (і навпаки, якщо значення хоч одного з параметрів a, b буде $\leqslant 0$, то інтеграл розбігається) і, отже, може бути основою означення функції B. Наведемо деякі її властивості.

1. Насамперед, майже безпосередньо (підстановкою $x=1-t$) отримуємо:

$$\mathrm{B}(a,b)=\mathrm{B}(b,a),$$

тому функція **симетрична** щодо a і b.

2. За допомогою інтегрування частинами з формули (529.1) для $b>1$ знаходимо (використовуючи тотожність $x^a=x^{a-1}-x^{a-1}(1-x)$)

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(a,b)&=\int\limits_0^1 (a-x)^{b-1}\,d\frac{x^a}{a}=\\&=\frac{x^a(1-x)^{b-1}}{a}\Bigg|_0^1+\frac{b-1}{a}\int\limits_0^1 x^a(1-x)^{b-2}\,dx=\\&=\frac{b-1}{a}\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}\,dx-\frac{b-1}{a}\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx=\\&=\frac{b-1}{a}\cdot\mathrm{B}(a,\ b-1)-\frac{b-1}{a}\cdot\mathrm{B}(a,b),\end{aligned}$$

звідки

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}\cdot\mathrm{B}(a,\ b-1). \tag{529.2}$$

Цю формулу можна застосовувати з метою зменшення b, доки b залишається більше від 1; отже завжди можна досягти того, щоб другий аргумент став $\leqslant 1$.

Втім, того ж можна досягти і щодо першого аргументу, оскільки, зважаючи на симетричність B, справедлива й інша формула зведення ($a>1$)

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{a-1}{a+b-1}\cdot\mathrm{B}(a-1,\ b). \tag{529.3}$$

Якщо b дорівнює натуральному числу n, то, послідовно застосовуючи формулу (529.2), знайдемо:

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1} \cdot \frac{n-2}{a+n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a+1} \cdot B(a,1).$$

Але

$$B(a,1) = \int\limits_0^1 x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a}\,.$$

Тому для $B(a,n)$ і одночасно для $B(n,a)$ виходить остаточний вираз

$$B(n,a) = B(a,n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{a \cdot (a+1) \cdot (a+2) \cdot \ldots \cdot (a+n-1)}\,. \tag{529.4}$$

Якщо і a дорівнює натуральному числу m, то

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}\,.$$

Цю формулу можна застосовувати і коли $m = 1$ або $n = 1$, пам'ятаючи, що $0! = 1$.

3. Дамо для функції B інший аналітичний запис, який часто буває корисним. Саме, якщо в інтегралі (529.1) зробити заміну $x = \frac{y}{1+y}$, де y — нова змінна, що змінюється від 0 до ∞, то й отримаємо

$$B(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\,dy. \tag{529.5}$$

4. Покладемо у формулі (529.5) $b = 1 - a$, вважаючи, що $0 < a < 1$; ми отримаємо

$$B(a,\ 1-a) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{a-1}}{1+y}\,dy.$$

Вище ми вже обчислили цей інтеграл, який також пов'язаний з Ойлером (дивіться пр. 519.4 або (**??**)). Підставляючи його значення, приходимо до формули

$$B(a,\ 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1). \tag{529.6}$$

Якщо, зокрема, взяти $a = 1 - a = \dfrac{1}{2}$, то отримаємо:

$$B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = \pi. \tag{529.7}$$

Ми обмежимося цими небагатьма властивостями функції "Бета" тому, що, як побачимо зараз, вона дуже просто виражається через іншу функцію — **"Гама"**, яка і буде головним предметом нашого вивчення.

530. Інтеграл Ойлера другого роду

Так Льожондр назвав цей чудовий інтеграл:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx, \tag{530.1}$$

який збігається для будь-якого $a > 0$ (пр. 483.5) (для $a = 0$ інтеграл розбігається) і визначає функцію Γ (**“Гама”**). Функція Γ, після елементарних, є однією з найважливіших функцій для аналізу та його застосуваннях. Ґрунтовне вивчення властивостей функції Γ, виходячи з її інтегрального означення (530.1), буде одночасно і чудовим прикладом застосування викладеної вище теорії інтегралів, що залежать від параметра.

Вище (пр. 402.10, розд. 408, пр. 441.11) ми вже зустрічали функцію Γ, але давали інше означення (402.3); зараз, передусім, доведемо тотожність обох означень (звичайно для $a > 0$).

Вважаючи в (530.1) $x = \ln \frac{1}{z}$, знайдемо:

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{z}\right)^{a-1} dz.$$

Як відомо (77.2);

$$\ln \frac{1}{z} = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right),$$

причому вираз $n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)$ зростає, коли n зростає (у цьому можна переконатись методами диференціального числення, розглядаючи вираз $\frac{1-z^\alpha}{\alpha}$ як функцію від α). У такому разі, згідно з розд. 518, виправдана рівність

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^{a-1} \int_0^1 \left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1} dz$$

або, якщо зробити заміну $z = y^n$,

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}\, dy.$$

Але, згідно з (529.4),

$$\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{a-1}\, dy = \mathrm{B}(n,a) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)}{a\cdot(a+1)\cdot(a+2)\cdot \ldots \cdot (a+n-1)}.$$

Отже, остаточно, приходимо до знаменитої формули Ойлера – Ґаусса:

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \cdot \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)}{a\cdot (a+1)\cdot (a+2)\cdot \ldots \cdot (a+n-1)}, \tag{530.2}$$

яка вище послужила нам відправною точкою (402.3), (402.4). Надалі властивості функції Γ ми будемо отримувати з її інтегрального означення (530.1).

531. Найпростіші властивості функції Γ

1. Почнемо с такої властивості.

Властивість 531.1. *Функція* $\Gamma(a)$ *для всіх значеннях* $a > 0$ *неперервна і має неперервні похідні всіх порядків.*

Доведення. Достатньо довести лише існування похідних. Диференціюючи інтеграл (530.1) під знаком інтеграла, отримаємо

$$\Gamma'(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1}\cdot \ln x \cdot e^{-x}\,dx. \tag{531.1}$$

Застосування правила Ляйбніца (507.1) виправдане тим, що обидва інтеграли

$$\int\limits_0^1 x^{a-1}\cdot \ln x\cdot e^{-x}\,dx \quad \text{та} \quad \int\limits_1^\infty x^{a-1}\cdot \ln x\cdot e^{-x}\,dx$$

збігаються **рівномірно** відносно a: перший для $x = 0$ і для $a \geqslant a_0 > 0$ (мажорантна функція $x^{a_0-1}|\ln x|$), а другий для $x = \infty$ і $a \leqslant A < \infty$ (мажорантна функція $x^A e^{-x}$; для $x > 0$ очевидно $\ln x < x$).

Так само можна переконатися і в існуванні другої похідної

$$\Gamma''(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1}\cdot (\ln x)^2\cdot e^{-x}\,dx \tag{531.2}$$

та всіх подальших. □

2. З (530.1), інтегруванням частинами, відразу отримуємо:

$$a\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx = x^a e^{-x}\Big|_0^\infty + \int\limits_0^\infty x^a e^{-x}\,dx,$$

тобто (порівняйте з (402.5))

$$\Gamma(a+1) = a\cdot \Gamma(a). \tag{531.3}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Ця формула, повторно застосована, дає

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\dots(a+1)a\cdot\Gamma(a). \tag{531.4}$$

Таким способом обчислення Γ для будь-якого великого значення аргументу може бути зведено до обчислення Γ для аргументу < 1.

Якщо в (531.4) $a = 1$ і взяти до уваги, що

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^1 e^{-x}\,dx = 1, \tag{531.5}$$

то виявиться, що

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{531.6}$$

Функція Γ є природним поширенням функції факторіала n! на область будь-яких додатних значень аргументу.

3. **Зміна функції** Γ. Тепер ми можемо скласти собі загальне уявлення про поведінку функції $\Gamma(a)$, коли a зростає від 0 до ∞.

З (531.5) і (531.6) маємо: $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, тож, за теоремою Ролля, між 1 і 2 повинен лежати корінь a_0 похідної $\Gamma'(a)$. Ця похідна постійно зростає, бо друга похідна $\Gamma''(a)$, як видно з її виразу (531.2), завжди додатна. Отже, для $0 < a < a_0$ похідна $\Gamma'(a) < 0$, і функція $\Gamma(a)$ спадає; а для $a_0 < a < \infty$ буде $\Gamma'(a) > 0$, тож $\Gamma(a)$ зростає; для $a = a_0$ маємо **мінімум**. Обчислення, якого ми не наводимо, дає

$$a_0 = 1{,}4616\dots, \quad \min\Gamma(a) = \Gamma(a_0) = 0{,}8856\dots.$$

Цікаво з'ясувати ще границі, до яких прямує $\Gamma(a)$, коли a прямує до 0 або до ∞. Зважаючи на (531.5), (531.3) та вл. 531.1 ясно, що

$$\lim_{a\to+0}\Gamma(a) = \lim_{a\to+0}\frac{\Gamma(a+1)}{a} = +\infty.$$

З іншого боку, через (531.6)

$$\Gamma(a) > n!, \quad \text{якщо} \quad a > n+1,$$

тобто $\Gamma(a) \to +\infty$, і коли $a \to +\infty$.

Графік функції $\Gamma(a)$ зображений на рис. 531.1. (Зараз нам цікава та його частина, яка лежить у першому координатному куті.)

4. **Зв'язок між функціями** B **і** Γ. Для того щоб з'ясувати цей зв'язок, зробимо заміну $x = ty$ $(t > 0)$ в інтегралі (530.1), отримаємо:

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int\limits_0^\infty y^{a-1}e^{-ty}\,dy. \tag{531.7}$$

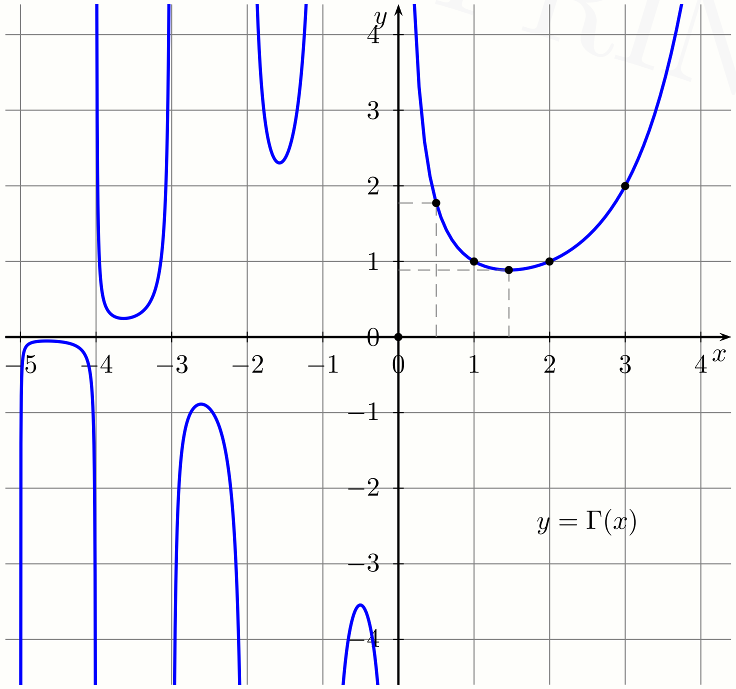


Рис. 531.1

Тепер водночас замінено тут a на $a+b$ та t на $1+t$, отримаємо:

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}\,dy.$$

Помножимо тепер обидві частини цієї рівності на t^{a-1} та проінтегруємо за t від 0 до ∞:

$$\Gamma(a+b)\cdot\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt = \int_0^1 t^{a-1}\,dt\int_0^1 y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}\,dy.$$

Інтеграл зліва — це функція $\mathrm{B}(a,b)$ (дивіться (529.5)); а справа переставимо інтеграли. В результаті отримаємо (враховуючи (531.7) та (530.1)):

$$\Gamma(a+b)\cdot\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 y^{a+b-1}e^{-y}\,dy\int_0^1 t^{a-1}e^{-ty}\,dt = \int_0^1 y^{a+b-1}e^{-y}\cdot\frac{\Gamma(a)}{y^a}\,dy =$$

$$= \Gamma(a)\cdot\int_0^1 y^{b-1}e^{-y}\,dy = \Gamma(a)\cdot\Gamma(b),$$

звідки, нарешті,

$$\mathrm{B}(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,. \tag{531.8}$$

Наведений витончений висновок цього співвідношення Ойлера належить Діріхлє. Втім, для обґрунтування його належить ще виправдати перестановку інтегралів.

Ми зробимо це, обмежуючись спочатку припущенням, що $a > 1,\ b > 1$. Тоді для функції

$$t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y}$$

виявляються виконаними всі умови насл. **??**: ця функція **неперервна** (та ще й додатна) для $y \geqslant 0$ і $t \geqslant 0$, а інтеграли

$$t^{a-1} \cdot \int\limits_0^1 y^{a+b-1} e^{-(1+t)y}\, dy = \Gamma(a+b) \cdot \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}$$

та

$$y^{a+b-1} e^{-y} \cdot \int\limits_0^1 t^{a-1} e^{-ty}\, dt = \Gamma(a) \cdot y^{b-1} e^{-y}$$

є **неперервними** функціями: перший — від t для $t \geqslant 0$, другий — від y для $y \geqslant 0$. Згаданий наслідок виправдовує перестановку інтегралів, а з нею й формулу (531.8) (у разі $a > 1$, $b > 1$).

Якщо відомо тільки, що $a > 0$ і $b > 0$, то, за доведеним, маємо

$$\mathrm{B}(a+1,\ b+1) = \frac{\Gamma(a+1) \cdot \Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}\,.$$

А звідси, використовуючи формули зведення (529.2), (529.3) для функції B і (531.3) для функції Γ, легко знову отримати формулу (531.8), але без непотрібних обмежень.

5. **Формула доповнення.** Якщо у формулі (531.8) покласти $b = 1 - a$ (вважаючи $0 < a < 1$), то, зважаючи на (529.6) і (531.5), отримаємо співвідношення (порівняйте з (408.6))

$$\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\,, \tag{531.9}$$

яке й називається **формулою доповнення**.

Для $a = \frac{1}{2}$ звідси знаходимо (оскільки $\Gamma(a) > 0$):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,. \tag{531.10}$$

Якщо в інтегралі

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\, dz = \sqrt{\pi}$$

зробити заміну $z = x^2$, то знову отримаємо значення інтеграла Ойлера – Пуассона

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

6. Як застосування формули доповнення обчислимо (разом з Ойлером) добуток (n — будь-яке натуральне число):

$$E = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Переписавши цей добуток у зворотному порядку:

$$E = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

перемножимо обидва вирази:

$$E^2 = \prod_{\nu=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{n}\right)$$

і до кожної пари множників $\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-\nu}{n}\right)$ застосуємо формулу доповнення. Ми отримаємо

$$E^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin 2\frac{\pi}{n}\cdot\ldots\cdot\sin(n-1)\frac{\pi}{n}}.$$

Тепер для обчислення добутку синусів (порівняйте з пр. 493.2), розглянемо тотожність

$$\frac{z^n-1}{z-1} = \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(z - \cos\frac{2\nu\pi}{n} - i\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right)$$

і спрямуємо в ньому z до 1. Отримаємо:

$$n = \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1 - \cos\frac{2\nu\pi}{n} - i\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right)$$

або, прирівнюючи модулі,

$$n = \prod_{\nu=1}^{n-1}\left|1 - \cos\frac{2\nu\pi}{n} - i\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right| = 2^{n-1}\prod_{\nu=1}^{n-1}\sin\frac{\nu\pi}{n},$$

тому

$$\prod_{\nu=1}^{n-1}\sin\frac{\nu\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Підставляючи це у вираз для E^2, остаточно отримуємо:

$$E = \prod_{\nu=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}. \tag{531.11}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

7. **Інтеграл Раабе.** З формулою доповнення пов'язане і обчислення важливого інтеграла:

$$R_0 = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(a)\,da,$$

який очевидно існує, оскільки (дивіться (531.3))

$$\ln\Gamma(a) = \ln\Gamma(a+1) - \operatorname{Ln} a.$$

Замінюючи a на $1-a$, можна написати

$$R_0 = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(1-a)\,da$$

і, додаючи:

$$2R_0 = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(a)\Gamma(1-a)\,da = \int\limits_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin a\pi}\,da = \ln\pi - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \ln\sin x\,dx = \ln\pi - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx.$$

Підставляючи сюди значення вже відомого нам інтеграла (пр. 492.1), знайдемо:

$$R_0 = \int\limits_0^1 \ln\Gamma(a)\,da = \ln\sqrt{2\pi}\,. \tag{531.12}$$

Раабе розглянув інтеграл (для $a > 0$)

$$R(a) = \int\limits_a^{a+1} \ln\Gamma(a)\,da = \int\limits_0^{a+1} - \int\limits_0^{a}.$$

Оскільки очевидно, що

$$R'(a) = \ln\Gamma(a+1) - \ln\Gamma(a) = \ln a$$

(дивіться (531.3)), то інтегруючи, знаходимо для $a > 0$

$$R(a) = a(\ln a - 1) + C.$$

Але $R(a)$ неперервна і в точці $a = 0$; спрямовуючи $a \to 0$, переконуємось, що $C = R_0$. Підставляючи значення (531.12), приходимо до *формули Раабе*:

$$R(a) = \int\limits_a^{a+1} \ln\Gamma(a)\,da = a(\ln a - 1) + \ln\sqrt{2\pi}\,. \tag{531.13}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

8. **Формула Льожондра.** Якщо в інтегралі

$$\mathrm{B}(a,a)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}\,dx=\int\limits_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx=2\int\limits_0^{1/2}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{a-1}dx$$

зробити підстановку $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{t}$, то отримаємо

$$\mathrm{B}(a,a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{a-1}\,dt=\frac{1}{2^{2a-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ a\right).$$

Замінимо з обох боків функцію B її виразом (531.8) через Γ:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}.$$

Скорочуючи на $\Gamma(a)$ і підставляючи замість $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ його значення $\sqrt{\pi}$ (531.10) прийдемо до *формули Льожондра*:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\cdot\Gamma(2a). \tag{531.14}$$

532. Однозначне означення функції Γ її властивостями

Ми знаємо, що функція Γ(a) неперервна разом зі своєю похідною для додатних значень аргументу. Крім того (дивіться (531.3), (531.14) та (531.9)), вона задовольняє функціональні рівняння:

$$\Phi(a+1)=a\,\Phi(a), \tag{I}$$

$$\Phi(a)\Phi\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\,\Phi(2a), \tag{II}$$

$$\Phi(a)\Phi(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}. \tag{III}$$

Ми покажемо, що *ці властивості разом характеризують функцію* Γ (тож, кожна функція, що має ці властивості, тотожна з Γ).

Тільки властивостей (I) і (II) для цього недостатньо, оскільки існує ще одна функція, що задовольняє ці дві властивості:

$$\Phi(a)=\Gamma(a)\cdot\left[4\sin^2 a\pi\right]^{\mu}\quad(\mu>0).$$

Так само недостатньо і властивостей (II) і (III), бо існує ще одна функція, що задовольняє ці дві властивості:

$$\Phi(a) = \Gamma(a) \cdot z^{a-\frac{1}{2}} \quad (z > 0).$$

Нарешті, властивості (I) і (III) явно залишають довільними значення функції $\Phi(a)$ для $0 < a < \frac{1}{2}$. Інша річ, якщо розглядати всі три властивості. Втім, властивість (III) може бути замінена слабкішою вимогою, щоб функція $\Phi(a)$ для $a > 0$ не дорівнювала 0, що як раз і випливає з (III). (А саме для $0 < a < 1$, бо виконання цієї вимоги для інших значень a випливає з (I).)

Теорема 532.1. *Нехай функція $\Phi(a)$ для $a > 0$ неперервна разом зі своєю похідною, відмінна від 0 і задовольняє функціональні рівняння (I) та (II).*

Доведемо, що тоді $\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$.

Доведення. Нехай $\Phi(a) = M(a) \cdot \Gamma(a)$; очевидно, функція $M(a)$ також неперервна разом зі своєю похідною і відмінна від 0. Крім того, оскільки $\Phi(a)$ і $\Gamma(a)$ обидві задовольняють умови (I) і (II), то $M(a)$ задовольняє такі рівняння:

$$M(a+1) = M(a), \tag{I$'$}$$

$$M(a)M\left(a + \frac{1}{2}\right) = M(2a). \tag{II$'$}$$

З (I′) випливає, що для $a \to +0$ для $M(a)$ існує скінченна границя. Якщо прийняти це значення за значення $M(0)$, то $M(a)$ буде неперервною разом зі своєю похідної й в точці $a = 0$.

Зауважимо, що з (II′) для $a = \frac{1}{2}$ випливає, що $M\left(\frac{1}{2}\right) = 1$; отже, $M(a) > 0$ для всіх $a \geqslant 0$. Це дає нам право розглядати функцію

$$L(a) = \ln M(a),$$

яка також неперервна разом зі своєю похідною для $a \geqslant 0$, але задовольняє умови

$$L(a+1) = L(a), \tag{I$''$}$$

$$L(a) + L\left(a + \frac{1}{2}\right) = L(2a). \tag{II$''$}$$

Зрештою, введемо ще неперервну функцію

$$\Delta(a) = L'(a);$$

вона задовольняє рівняння:

$$\Delta(a+1) = \Delta(a), \tag{I$'''$}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

$$\Delta(a) + \Delta\left(a + \frac{1}{2}\right) = 2\Delta(2a). \tag{II'''}$$

З (II‴), замінюючи a на $\frac{a}{2}$, отримаємо

$$\frac{1}{2}\left[\Delta\left(\frac{a}{2}\right) + \Delta\left(\frac{a+1}{2}\right)\right] = \Delta(a).$$

Якщо тут знову замінити a спочатку на $\frac{a}{2}$, а потім на $\frac{a+1}{2}$ і додати отримані рівності, то отримаємо

$$\frac{1}{4}\left[\Delta\left(\frac{a}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+1}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+2}{4}\right) + \Delta\left(\frac{a+3}{4}\right)\right] = \Delta(a).$$

Методом математичної індукції легко довести загальне рівняння

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{2^n-1}\Delta\left(\frac{a+\nu}{2^n}\right) = \Delta(a).$$

Але, для будь-якого a, суму зліва можна розглядати як інтегральну суму для інтеграла

$$\int\limits_0^1 \Delta(x)\,dx$$

(враховуючи при цьому **періодичність** функції $\Delta(a)$, зважаючи на (I‴)).

Тому

$$\Delta(a) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{2^n-1}\Delta\left(\frac{a+\nu}{2^n}\right) = \int\limits_0^1 \Delta(x)\,dx = L(1) - L(0) = 0$$

(зважаючи (I″)). У такому разі $L(a) = \text{const}$, отже й $M(a) = \text{const}$. Але ми бачили, що $M\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, отже $M(a) \equiv 1$ і $\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$, що й потрібно було довести. □

Насамкінець зазначимо ще, що вимога диференційовності відіграє при цьому істотну роль і не може бути відкинута. Якщо, наприклад, покласти

$$L(a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin(2^n\pi a),$$

то $L(a)$ буде неперервною функцією, яка задовольняє умови (I″) та (II″). Але $L(0) = 0$, а $L\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, отже $L(a)$ не стала!

533. Інша функціональна характеристика функції Γ

У попередньому розділі була дана характеристика функції $\Gamma(a)$, як єдиної неперервної разом зі своєю похідною функції, що задовольняє функціональні рівняння (I) та (II) і не дорівнює 0 (для $a > 0$). Тут ми дамо більш просту характеристику функції $\Gamma(a)$, використовуючи лише одне функціональне рівняння (I), але накладаючи на функцію ще вимогу “логарифмічної опуклості”, зміст якої ми зараз з’ясуємо.

У розд. 141 було дано означення **опуклої** функції $f(x)$. *Додатна функція $f(x)$, задана на проміжку $\mathcal{X}$, називається **логарифмічно опуклою** на цьому проміжку, якщо її логарифм $\ln f(x)$ є опуклою функцією.* Оскільки

$$f(x) = e^{\ln f(x)},$$

то, зважаючи на теор. 142.3, з логарифмічної опуклості функції $f(x)$ випливає її опуклість; зворотний висновок, взагалі, неправильний. Отже, логарифмічно опуклі функції становлять лише частину всього класу опуклих функцій.

Користуючись теор. 143.2, можна отримати умову логарифмічної опуклості.

Теорема 533.1. *Нехай додатна функція $f(x)$ неперервна разом зі своєю похідною $f'(x)$ на проміжку $\mathcal{X}$ і має **всередині** проміжку скінченну другу похідну $f''(x)$; тоді для логарифмічної опуклості функції $f(x)$ на $\mathcal{X}$ необхідно і достатньо, щоб всередині $\mathcal{X}$ виконувалась нерівність*

$$f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2 \geqslant 0.$$

Доведення полягає у застосуванні згаданої теореми до функції $\ln f(x)$.

Повернемося тепер до функції $\Gamma(x)$. Її перша та друга похідні виражаються формулами (531.1) та (531.2). Застосовуючи нерівність Буняковського (321.6), маємо:

$$\int\limits_a^b [\varphi(x)]^2\,dx \cdot \int\limits_a^b [\psi(x)]^2\,dx - \left[\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right]^2 \geqslant 0,$$

якщо покласти тут (пр. 483.7)

$$a = 0, \quad b = \infty; \quad \varphi(x) = \sqrt{x^{a-1}e^{-x}}, \quad \psi(x) = \sqrt{x^{a-1}e^{-x}} \cdot \ln x,$$

отримаємо:

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma''(x) - [\Gamma'(x)]^2 \geqslant 0.$$

Звідси, за щойно наведеною умовою, функція $\Gamma(a)$ *на проміжку* $(0, \infty)$ *виявляється логарифмічно опуклою*. Ось цією властивістю і рівнянням (I), функція Γ і визначається **з точністю до сталого множника**. Іншими словами.

Теорема 533.2.
Якщо:

1) на проміжку $(0, \infty)$ *функція* $\Phi(a)$ *задовольняє рівняння* (I):

$$\Phi(a+1) = a\,\Phi(a),$$

2) $\Phi(a)$ *логарифмічно опукла та*

3) $\Phi(1) = 1$,

то $\Phi(a) \equiv \Gamma(a)$.

Доведення. Припустимо, що для $\Phi(a)$ виконані всі ці три умови.

Повторно застосовуючи рівняння (I), прийдемо до загальної рівності

$$\Phi(a+n) = (a+n-1)\cdot(a+n-2)\cdot\ldots\cdot(a+1)\cdot a\cdot\Phi(a), \tag{533.1}$$

де n — будь-яке натуральне число; звідси, вважаючи $a = 1$ (дивіться умову 3) і замінюючи n на $n-1$, знайдемо:

$$\Phi(n) = (n-1)! \tag{533.2}$$

Зазначимо, що досить довести збіг $\Phi(a)$ з $\Gamma(a)$ на проміжку $(0,1]$, бо, внаслідок (529.1), ці функції будуть тотожні і всюди. Тож, нехай $0 < a < 1$.

Згадаємо нерівність (143.3)

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

що виконується для опуклої функції $f(x)$ за єдиної умови: $x_1 < x_2$ (правда, у теор. 143.1 було припущено, що $x_1 < x < x_2$, але нескладно переконатися, що написана нерівність справедлива за будь-якого положення точки x, аби тільки вона не збігалася з x_1 або x_2). Застосувавши двічі цю нерівність до опуклої, зважаючи на умову 2, функції $\ln\Phi(a)$ для будь-кого $n \geqslant 2$, отримаємо

$$\frac{\ln\Phi(-1+n)-\ln\Phi(n)}{(-1+n)-n} \leqslant \frac{\ln\Phi(a+n)-\ln\Phi(n)}{(a+n)-n} \leqslant \frac{\ln\Phi(1+n)-\ln\Phi(n)}{(1+n)-n}$$

або, зважаючи на (533.2),

$$\ln(n-1) \leqslant \frac{\ln\Phi(a+n)-\ln(n-1!)}{a} \leqslant \ln n.$$

Звідси випливає

$$\ln(n-1)^a\cdot(n-1)! \leqslant \ln\Phi(a+n) \leqslant \ln n^a\cdot(n-1)!$$

та

$$(n-1)^a \cdot (n-1)! \leqslant \Phi(a+n) \leqslant n^a \cdot (n-1)!$$

Переходячи тепер, за допомогою формули (533.1), до самого значення $\Phi(a)$, прийдемо до нерівностей

$$\frac{(n-1)^a \cdot (n-1)!}{a(a+1) \cdot \ldots \cdot (a+n-1)} \leqslant \Phi(a) \leqslant \frac{n^a \cdot (n-1)!}{a(a+1) \cdot \ldots \cdot (a+n-1)}.$$

Нарешті, замінюючи у першому з них n на $n+1$, перепишемо отримані нерівності у вигляді:

$$\Phi(a) \leqslant n^a \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{a(a+1) \cdot \ldots \cdot (a+n-1)} \leqslant \Phi(a) \cdot \frac{a+n}{n}.$$

Звідси вже ясно, що

$$\Phi(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{a(a+1) \cdot \ldots \cdot (a+n-1)} = \Gamma(a)$$

— через формулу Ойлера – Ґаусса (530.2). ☐

534. Приклади

1) Знайти інтеграл

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\,dx \quad (p,\ q,\ m > 0).$$

Вказівка. Зробимо заміну $x^m = y$ і зводимо його до інтеграла Ойлера першого роду.

Відповідь:

$$\frac{1}{m}\mathrm{B}\left(\frac{p}{m},\ q\right) = \frac{1}{m}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{m}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{p}{m}+q\right)}.$$

Пропонуємо читачеві за допомогою цього результату довести, наприклад, що для будь-якого натурального n

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{\pi}{2n} \quad \text{(Ойлер)}.$$

2) Обчислити інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{[\alpha x + \beta(1-x)+\gamma]^{p+q}}\,dx \quad (\alpha,\ \beta \geqslant 0;\ \gamma,\ p,\ q > 0).$$

За допомогою підстановки

$$\frac{(\alpha+\gamma)x}{\alpha x+\beta(1-x)+\gamma}=t, \quad \frac{(\beta+\gamma)(1-x)}{\alpha x+\beta(1-x)+\gamma}=1-t, \quad \frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}{[\alpha x+\beta(1-x)+\gamma]^2}=dt$$

запропонований інтеграл зводиться до вигляду

$$\frac{1}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q}\int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt=\frac{\mathrm{B}(p,q)}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q}\,.$$

3) Обчислити інтеграли

а) $$\int\limits_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{(x+p)^{a+b}}\,dx \quad (a,\ b,\ p>0).$$

Вказівка. Заміна

$$y=(1+p)\frac{x}{x+p}\,.$$

Відповідь:

$$\frac{1}{(1+p)^a p^b}\,\mathrm{B}(a,b).$$

б) $$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}\,dx \quad (m,\ n>0).$$

Вказівка. Заміна

$$u=\frac{1}{2}\,\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,.$$

Відповідь:

$$2^{m+n-2}\mathrm{B}(m,n).$$

Звідси можна отримати низку цікавих інтегралів. Наприклад, якщо в останньому взяти $n=1-m$ та $2m-1=\cos 2\alpha$ і зробити заміну $x=\operatorname{tg}\varphi$, то знайдемо:

$$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}\right)^{\cos 2\alpha} d\varphi=\frac{\pi}{2\sin(\pi\cos^2\alpha)}\,.$$

4) Обчислити інтеграли

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{a-1}\varphi \cos^{b-1}\varphi\, d\varphi \quad (a,\ b > 0).$

Розв'язок. Вважаючи $x = \sin\varphi$, зведемо запропонований інтеграл до інтеграла

$$\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x^2)^{\frac{b}{2}-1}\, dx,$$

тож, використовуючи пр. 534.1, матимемо

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{a-1}\varphi \cos^{b-1}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}\,.$$

Зокрема, для $b = 1$, отримаємо такий інтеграл.

б) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{a-1}\varphi\, d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{a-1}\varphi\, d\varphi \quad (a > 0).$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{a-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}$$

(Легко перевірити, що в цій формулі як окремі випадки містяться обидві формули (312.1).) За допомогою формули Льожондра цей результат може бути переписаний у вигляді:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{a-1}\varphi\, d\varphi = 2^{a-2}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(a)} = 2^{a-2}\,\mathrm{B}\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right).$$

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^c\varphi\, d\varphi \quad (|c| < 1).$

Нарешті, вважаючи в а) $a = 1 + c$ і $b = 1 - c$, де $|c| < 1$, знайдемо (використовуючи формулу доповнення):

$$\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^c\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{\pi}{2\cos\frac{c\pi}{2}}\,.$$

5) Визначити площу P фігури, обмеженою кривою

$$r^4 = \sin^3\theta\cos\theta.$$

Розв'язок. Крива має дві петлі — в першому та в третьому координатному кутах; досить подвоїти площу однієї з них. За формулою для площі в полярних координатах (338.3) маємо:

$$P = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{3/2}\theta\cos^{1/2}\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\cdot\Gamma(2)} = \frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{8\cdot\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

(дивіться пр. 534.4 та формули (531.3), (531.6), (531.9)).

6) Обчислити площу P фігури, обмеженою одним витком кривої (m — натуральне число)

$$r^m = a^m\cos m\theta,$$

та довжину S цього витка. (для $m=1$ маємо полярне рівняння кола розд. 226; для $m=2$ — лемніскату Я. Бернуллі, рис. 226.8)

Розв'язок.

$$P = 2\cdot\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2m}}\cos^{2/m}m\theta\,d\theta = \frac{a^2}{m}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2/m}\varphi\,d\varphi = \frac{a^2}{m}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)} = \frac{\pi a^2}{\sqrt[m]{4}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\right]^2}$$

(дивіться пр. 534.4 та формули (531.3), (531.14)).

S обчислюємо за формулою для довжини дуги в полярних координатах (329.7):

$$S = 2a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2m}}\cos^{\frac{1}{m}-1}m\theta\,d\theta = \frac{2a}{m}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{\frac{1}{m}-1}\varphi\,d\varphi = \frac{a}{m}\,2^{\frac{1}{m}-1}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}$$

(дивіться пр. 534.4)

7) Обчислити інтеграли

а) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}.$

Вказівка. Заміна:

$$\cos\theta = 1-2\sqrt{x}\,.$$

Відповідь:

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2.$$

б) $$\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}\right)^{a-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi}\quad (a>0,\ 0<k<1).$$

Вказівка. Заміна:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\,\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\,.$$

Відповідь:

$$\frac{2^{a-1}}{(1-k^2)^{a/2}}\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(a)}\,.$$

8) Довести, що

$$\int\limits_{-\infty}^{1}(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\sqrt{3}\int\limits_{1}^{\infty}(x^3-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Розв'язок. Позначимо

$$\int\limits_0^1(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx=I_1,\qquad \int\limits_1^{\infty}(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx=I_2,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0}(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\int\limits_0^{\infty}(1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx=I_3$$

Потрібно довести рівність

$$I_1+I_3=\sqrt{3}\,I_2\,.$$

Застосовуючи до цих інтегралів підстановки (відповідно)

$$x=t^{\frac{1}{3}},\quad x=t^{-\frac{1}{3}},\quad x=(t^{-1}-1)^{\frac{1}{3}},$$

зведемо їх до інтегралів Ойлера першого роду. Потім буде потрібно лише кілька разів використати формулу доповнення.

9) Довести формулу (що належить Діріхлє)

$$\Gamma(r)=\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-fx}x^{s-1}}{(g+x)^r}\,dx=\Gamma(s)\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-gy}y^{r-1}}{(f+y)^s}\,dy\quad (f,\ s,\ g,\ r>0).$$

Вказівка. Підставити

$$\frac{\Gamma(r)}{(g+x)^r}=\int\limits_0^{\infty}e^{-(g+x)y}y^{r-1}\,dy,\qquad \frac{\Gamma(s)}{(f+x)^s}=\int\limits_0^{\infty}e^{-(f+y)x}x^{s-1}\,dx$$

nebayduzhi.math@gmail.com

і використовувати перестановку інтегралів по x і по y (випадок **додатної** функції).

10) У пр. 511.2 ми довели тотожність

$$EK' + E'K - Kk' = c = \text{const}\,.$$

Потім, за допомогою деякого граничного переходу було доведено, що $c = \frac{\pi}{2}$. Цей результат можна було б отримати, обчисливши величину лівої частини для якогось часткового значення k.

Нехай $k = \frac{1}{2}$; тоді $k' = k$, $E' = E$, $K' = K$, і тотожність набуває вигляду

$$2EK - K^2 = (2E - K) \cdot K = c.$$

Інтеграли

$$K = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}}, \quad E = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

послідовними замінами $\cos\varphi = t$, $t^4 = x$ зводяться до інтегралів Ойлера першого роду:

$$K = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int\limits_0^1 x^{-\frac{3}{4}} (1-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$E = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\int\limits_0^1 x^{-\frac{3}{4}} (1-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx + \int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{4}} (1-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx \right),$$

так, що

$$2E - K = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{4}} (1-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx.$$

Звідси шукана константа

$$c = \frac{1}{8} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\pi}{2}.$$

11) Розкласти в ряди інтеграли:

а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx \quad (s > 1).$

Розв'язок.

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx=\int\limits_0^\infty x^{s-1}\sum_{n=1}^\infty e^{-nx}\,dx=\sum_{n=1}^\infty\int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-nx}\,dx=\Gamma(s)\cdot\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}=\Gamma(s)\cdot\zeta(s),$$

якщо через $\zeta(s)$ (функція “дзета” Рімана], як завжди, позначити суму останнього ряду. Ми скористалися тут теоремою про інтегрування додатного ряду теор. **??** та формулою (531.7).

б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x+1}\,dx \quad (s>0).$

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x+1}\,dx=\Gamma(s)\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\,.\quad \text{Мажоранта: }\frac{2x^{s-1}}{e^x+1}\,.$$

Якщо $s>1$, то цей результат можна записати у вигляді

$$\Gamma(s)(1-2^{1-s})\cdot\zeta(s),$$

бо

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}(1-s^{1-s})=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^s}-2\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2n)^s}=\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\,.$$

12) Деяке узагальнення попереднього прикладу становлять розклади:

а) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx=\Gamma(s)\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(a+n)^s}\quad (s>1,\ a>0).$

(якщо $a=1$, то маємо пр. 534.11).

б) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{zx^{s-1}\,dx}{e^x-z}=\Gamma(s)\cdot\sum_{n=1}^\infty\frac{z^n}{n^s}\quad (-1\leqslant z<1s>1,\ s>0\quad \text{або}\quad z=1,\ s>1).$

(якщо $z=\pm1$, то маємо рівняння з пр. 534.11).

13) Розглянемо суму **гіпергеометричного** ряду (дивіться пр. 441.6)

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^\infty\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1\cdot2\dots n\cdot\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}x^n$$

Довести формулу:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\beta)}$$

(Ґаусс).

Вважаючи $\alpha > 0$ та $\gamma - \alpha > 0$, розглянемо інтеграл

$$I(x) = \int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}(1-zx)^{-\beta}\, dz$$

для $0 < x < 1$. Оскільки ряд

$$(1-zx)^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\dots n} x^n z^n$$

збігається (для фіксованого x) **рівномірно** відносно z на проміжку $[0, 1]$, то, помножуючи на інтегровну на цьому проміжку функцію $z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1}$, отриманий ряд можемо інтегрувати почленно. Ми прийдемо до розкладу

$$I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(x) \cdot x^n,$$

де

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\dots n} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)} = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \cdot \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\dots n\cdot\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \end{aligned}$$

(дивіться (531.4)).

Отже,

$$I(x) = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \cdot F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Щоб отримати формулу Ґаусса залишається лише перейти тут до границі для $x \to 1$ (вважаючи $\gamma - \alpha - \beta > 0$). Для ряду цей перехід можна виконати почленно за теоремою Абеля (теор. 437.6). А в інтегралі можна перейти до границі під знаком інтеграла, зважаючи на наявність мажорантної функції:

$$z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-1} \quad (\beta \leqslant 0) \quad \text{або} \quad z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta-1} \quad (\beta > 0).$$

Тому (дивіться (531.8))

$$\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} \cdot F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

звідки і випливає рівняння, яке потрібно було довести.

З нього, зокрема, для $\gamma = 1$, $\beta = -\alpha$ виходить (з урахуванням (531.5), (531.3), (531.9)), цікавий розклад ($0 < \alpha < 1$).

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi} = 1 - \frac{\alpha^2}{1} + \frac{\alpha^2(\alpha^2-1)}{(1\cdot 2)^2} - \frac{\alpha^2(\alpha^2-1)(\alpha^2-4)}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} + \dots\,.$$

(Втім, цей розклад може бути виведений й перетворенням відомого нескінченного добутку, що виражає синус (розд. 408).)

535. Логарифмічна похідна функції Γ

Продовжуючи вивчення властивостей функції Γ, звернемося до розгляду її логарифмічної похідної, тобто виразу

$$\frac{d\ln\Gamma(a)}{da} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\,.$$

Різні форми цього виразу у вигляді інтегралів можна одержати і з формули (531.1). Але простіше виходити з наступних міркувань. Маємо

$$\Gamma(b) - \mathrm{B}(a,b) = \Gamma(b) - \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{\Gamma(b)\cdot b}{\Gamma(a+b)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b} = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)-\Gamma(a)}{b}$$

тому, якщо перейти тут до границі, коли $b \to 0$, отримаємо

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b\to 0}[\Gamma(b) - \mathrm{B}(a,b)].$$

Візьмемо спочатку (дивіться (530.1) та (529.5)):

$$\Gamma(b) = \int\limits_0^\infty x^{b-1}e-x\,dx, \quad \mathrm{B}(a,b) = \int\limits_0^\infty \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx.$$

Тоді

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{b\to +0}\int\limits_0^\infty x^{b-1}\left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right]dx$$

і, виконуючи граничний перехід під знаком інтеграла, отримаємо *формулу Коші*:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int\limits_0^\infty \left[e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^{a}}\right]\frac{dx}{x}\,. \tag{535.1}$$

Для обґрунтування граничного переходу зауважимо, що поблизу $x=0$, $b=0$ вираз

$$\frac{1}{x}\left[e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^{a+b}}\right]$$

буде неперервною функцією від x та b, а $x^b<1$. Для досить великих x та $b\leqslant b_0$ існує мажорантна функція

$$x^{b_0-1}\left[\frac{1}{(1+x)^a}-e^{-x}\right].$$

Якщо ж у виразі (529.1) для B спочатку зробити підстановку $x=e^{-t}$:

$$\mathrm{B}(a,b)=\int\limits_0^\infty e^{-at}(1-e^{-t})^{b-1}\,dt,$$

то можна написати

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\lim_{b\to+0}\int\limits_0^\infty\left[e^{-x}x^{b-1}-e^{-ax}(1-e^{-x})^{b-1}\right]dx.$$

Переходячи тут до границі під знаком інтеграла (що обґрунтовується так само), прийдемо до іншої формули

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}=\int\limits_0^\infty\left(\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right)dx. \tag{535.2}$$

Навпаки, можна зовсім усунути показникові вирази з підінтегральної функції. Для цього покладемо в (535.1) $a=1$:

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=\Gamma'(1)=\int\limits_0^\infty\left[e^{-x}-\frac{1}{1+x}\right]\frac{dx}{x}=-\mathbf{C},$$

де $\mathbf{C}$ є так звана стала Ойлера. (У пр. 367.10 ми мали інше означення цієї константи. Нижче ми переконаємося у тотожності обох означень.) Віднімаючи почленно цю рівність з (535.1), отримаємо

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\mathbf{C}=\int\limits_0^\infty\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^a}\right]\frac{dx}{x}.$$

Зрештою, заміна $t=\dfrac{1}{1+x}$ приведе нас до **формули Ґаусса**:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\mathbf{C}=\int\limits_0^1\frac{1-t^{a-1}}{1-t}\,dt. \tag{535.3}$$

536. Теорема множення для функції Γ

Спираючись на формулу (535.3) для логарифмічної похідної, спробуємо отримати тепер таку чудову формулу, що також належить Ґауссу.

Теорема 536.1 (Теорема множення для функції Γ)**.**

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{na-\frac{1}{2}}}\Gamma(na) \tag{536.1}$$

(n — будь-яке натуральне число).

Доведення. Вважаючи в (535.3) $t=u^n$, отримаємо

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\mathbf{C}=n\int\limits_0^1\frac{u^{n-1}-u^{na-1}}{1-u^n}\,du,$$

звідки, замінюючи a на $a+\frac{\nu}{n}$ $(\nu=0,\ 1,\ \dots,\ n-1)$,

$$\frac{\Gamma'\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}+\mathbf{C}=n\int\limits_0^1\frac{u^{n-1}-u^{na+\nu-1}}{1-u^n}\,du$$

і, підсумовуючи за ν від 0 до $n-1$,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}+n\mathbf{C}=n\int\limits_0^1\left[\frac{nu^{n-1}}{1-u^n}-\frac{u^{na-1}}{1-u}\right]du.$$

Порівняємо цю рівність з такою:

$$\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)}+\mathbf{C}=\int\limits_0^1\frac{1-u^{na-1}}{1-u}\,du.$$

Помноживши останню рівність на n і віднімаючи з попередньої, знайдемо:

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\Gamma'\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{\nu}{n}\right)}-n\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)}=n\int\limits_0^1\left[\frac{nu^{n-1}}{1-u^n}-\frac{1}{1-u}\right]du=-n\ln\frac{1-u^n}{1-u}\Bigg|_0^1=-n\ln n,$$

що можна написати у вигляді:

$$\frac{d}{da}\ln\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}=-n\ln n.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Звідси, інтегруючи, отримаємо

$$\ln \frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = -an\ln n + \ln C$$

(передбачаючи потенціювання, ми заздалегідь беремо довільну сталу як $\ln C$) або

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)} = \frac{C}{n^{na}}\,.$$

Для знаходження сталої C покладемо тут $a = \frac{1}{n}$. Очевидно, $C = nE$, де E є добуток Ойлера, який ми обчислювали в розд. 531. Підставляючи його значення (531.11), прийдемо до формули (536.1). □

Частковим випадком формули Ґаусса є раніше виведена незалежно формула Льожондра (531.14). Справді, якщо в (536.1) взяти $n = 2$, то отримаємо формулу

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{2a-\frac{1}{2}}}\Gamma(2a),$$

яка рівносильна (531.14).

537. Деякі розклади в ряди і добутки

Джерелом їх є та сама формула (535.3). Розкладемо підінтегральний вираз у ряд:

$$\frac{1-t^{a-1}}{1-t} = (1-t^{a-1})\sum_{\nu=0}^{\infty} t^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(t^{\nu} - t^{a+\nu-1}),$$

всі члени якого мають один і той самий знак. Почленне інтегрування дає

$$D\ln\Gamma(a) + \mathbf{C} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{a+\nu}\right). \tag{537.1}$$

Ряд цей збігається рівномірно для $0 < a \leqslant a_0$, бо для нього існує мажорантний ряд

$$(a_0+1)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}\,.$$

Якщо формулу (537.1) почленно продиференціювати за a, то отримаємо чудовий простий розклад

$$D^2\ln\Gamma(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(a+\nu)^2}\,. \tag{537.2}$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Оскільки цей ряд збігається рівномірно для $a > 0$ (існує мажорантний ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$, то почленне диференціювання обґрунтоване.

Проінтегрувавши почленно ряд (537.1) за a від 1 до $a > 0$ (ми можемо це зробити, зважаючи на рівномірну збіжність ряду), отримаємо

$$\ln \Gamma(a) + \mathbf{C}(a-1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{a-1}{\nu+1} - \ln \frac{a+\nu}{\nu+1} \right). \tag{537.3}$$

Замінюючи тут a на $a+1$ (для $a > -1$), запишемо розклад у вигляді

$$\ln \Gamma(a+1) + \mathbf{C}a = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n} - \ln \frac{a+n}{n} \right)$$

або

$$\ln \frac{1}{\Gamma(a+1)} = \mathbf{C}a + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{a}{n} \right) - \frac{a}{n} \right].$$

Звідси, потенціюючи, приходимо до вже відомої *формули Ваярштрасса* (порівняйте з (402.6)), що дає розклад в нескінченний добуток:

$$\frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{\mathbf{C}a} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right) \cdot e^{-\frac{a}{n}} \quad (a > -1). \tag{537.4}$$

Повертаючись до (537.3), покладемо тут $a = 2$. Оскільки $\ln \Gamma(2) = \ln 1 = 0$, то отримаємо:

$$\mathbf{C} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu+1} - \ln \frac{\nu+2}{\nu+1} \right). \tag{537.5}$$

Зауважимо, що звідси

$$\mathbf{C} = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right],$$

і ми приходимо до вже знайомого нам означення сталої Ойлера (367.2). Нарешті, помножуючи (537.5) на $a-1$ і віднімаючи почленно з (537.3), ми виключимо $\mathbf{C}$:

$$\ln \Gamma(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[(a-1) \ln \frac{\nu+2}{\nu+1} - \ln \frac{a+\nu}{\nu+1} \right] = \lim_{n\to\infty} \ln \left[n^{a-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)}{a(a+1) \cdot \ldots \cdot (a+n-2)} \right]$$

nebayduzhi.math@gmail.com

або, що те саме,

$$\ln\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \ln\left[n^a \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (n-1)}{a(a+1)\cdot \ldots \cdot (a+n-1)}\right].$$

Звідси, потенціюючи, ми знову знаходимо формулу (530.2) Ойлера – Ґаусса, вище отриману іншим способом.

538. Приклади і доповнення

1) Користуючись тим, що

$$e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n,$$

довести, що (для $a > 0$)

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n t^{a-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt,$$

і вивести звідси формулу (530.2)

Вказівка. Гранична рівність доводиться так само, як це було зроблено раніше в пр. 519.10 та пр. 519.11. Підстановкою $\tau = t/n$ перетворимо інтеграл

$$\int\limits_0^n t^{a-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = n^a\int\limits_0^1 \tau^{a-1}(1-\tau)^n\,d\tau = n^a\cdot \mathrm{B}(a,\ n+1)$$

і використовуємо формулу (529.4).

2) З формули (535.1)

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int\limits_0^\infty\left(e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}\right)\frac{dx}{x},$$

безпосередньо вивести формулу (535.2)

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int\limits_0^\infty\left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\right)du.$$

Зауважимо, що проблема тут у тому, що не можна інтеграл (535.2) розглядати як різницю двох інтегралів (інакше питання було б вичерпано перетворенням другого підстановкою $x = e^u - 1$). Тому, обходячи її, напишемо:

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-x}\,dx}{x} - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dx}{(1+x)^a\cdot x}\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-u}\,du}{u} - \int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{\infty}\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\,du\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\right)du = \int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\right)du,$$

оскільки

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{\varepsilon}\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}\,du = 0.$$

Це видно з того, що інтеграл оцінюється виразом

$$\frac{\varepsilon - \ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon(1+\varepsilon)^{a-1}} < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)^{a-1}}\,.$$

3) Виходячи з означення сталої Ойлера рівністю

$$\mathbf{C} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} - \ln n\right),$$

довести інтегральні формули

$$\text{а)}\quad \mathbf{C} = \int\limits_0^1 (1-e^{-x})\frac{dx}{x} - \int\limits_1^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}, \qquad \text{б)}\quad \mathbf{C} = \int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+u} - e^{-u}\right)\frac{du}{u}.$$

Оскільки

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu} = \int\limits_0^1\sum_{\nu=1}^{n} t^{\nu-1}\,dt = \int\limits_0^1\frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \int\limits_0^1\frac{1-(1-s)^n}{s}\,ds,$$

та

$$\ln n = \int\limits_1^n\frac{ds}{s},$$

то

$$\mathbf{C} = \lim_{n\to\infty}\left\{\int\limits_0^1\frac{1-(1-s)^n}{s}\,ds - \int\limits_1^n\frac{ds}{s}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\int\limits_0^n\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\frac{dx}{x} - \int\limits_1^n\frac{dx}{x}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\int\limits_0^1\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]\frac{dx}{x} - \int\limits_1^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\frac{dx}{x}\right\}.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Граничний перехід у другому інтегралі робиться, як і в пр. 538.1. Щодо перетворення а) в б), дивіться пр. 538.2.

4) Вважаючи (для $a > 0$ та $s > 1$)

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s}\,,$$

довести, що

$$\lim_{s\to 1+0} \left[\zeta(s, a) - \frac{1}{s-1}\right] = -\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\,.$$

Ми мали (пр. 534.12)

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx.$$

Тому

$$\zeta(s, a) - \frac{1}{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx - \Gamma(s-1) \right\} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} \left[\frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x}\right] dx.$$

Граничний перехід для $s \to 1$ можна робити під знаком інтеграла, оскільки підінтегральний вираз, на проміжках $[0, 1]$ і $[1, +\infty)$, прямує до своєї границі монотонно (розд. 518). Потім використовувати формулу (535.2). Для $a = 1$ зокрема, виходить

$$\lim_{\varepsilon\to 1+0} \left[\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right] = \mathbf{C}$$

(порівняйте з (375.1)).

5) Обчислити значення нескінченного добутку

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} u_n\,,$$

де

$$u_n = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\cdot\ldots\cdot(n+a_k)}{(n+b_1)(n+b_2)\cdot\ldots\cdot(n+b_k)} \quad (a_i,\ b_i > -1)$$

(Ойлер).

Оскільки

$$u_n = \left(1+\frac{a_1}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{a_k}{n}\right)\left(1+\frac{b_1}{n}\right)^{-1}\ldots\left(1+\frac{b_k}{n}\right)^{-1} =$$
$$= 1 + \frac{(a_1+\cdots+a_k)-(b_1+\cdots+b_k)}{n} + \frac{A_n}{n^2}$$
$$(|A_n| \leqslant A < +\infty),$$

nebayduzhi.math@gmail.com

то нескінченний добуток буде збіжний лише за умови

$$a_1 + \dots + a_k = b_1 + \dots + b_k;$$

за цією умовою і пропонується обчислити P.

Вказівка. Перетворивши u_n до вигляду

$$u_n = \frac{\left(1 + \frac{a_1}{n}\right) e^{-\frac{a_1}{n}} \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{a_k}{n}\right) e^{-\frac{a_k}{n}}}{\left(1 + \frac{b_1}{n}\right) e^{-\frac{b_1}{n}} \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{b_k}{n}\right) e^{-\frac{b_k}{n}}},$$

використати формулу Ваярштрасса (537.4)

Відповідь:

$$P = \frac{\Gamma(1+b_1)\Gamma(1+b_2)\ldots\Gamma(1+b_k)}{\Gamma(1+a_1)\Gamma(1+a_2)\ldots\Gamma(1+a_k)}.$$

6) Вважаючи $9 < |a_i|,\ |b_i| < 1$ і використовуючи пр. 538.5, отримати інший результат Ойлера:

$$\prod_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \frac{\sin b_1\pi \cdot \sin b_2\pi \cdot \ldots \cdot \sin b_k\pi}{\sin a_1\pi \cdot \sin a_2\pi \cdot \ldots \cdot \sin a_k\pi}$$

Вказівка. Скористатися формулою

$$\Gamma(1+c) \cdot \Gamma(1-c) = \frac{\pi c}{\sin \pi c} \quad (0 < |c| < 1),$$

яка випливає з (531.3) та (531.9).

7) Повернемося до формули Ґаусса:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \cdot \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \cdot \Gamma(\gamma - \beta)}$$

яка в пр. 534.13 була доведена за умови, що

$$\alpha > 0, \quad \gamma - \alpha > 0 \quad \text{та} \quad \gamma - \alpha - \beta > 0.$$

Зараз пропонується довести її іншим шляхом, припускаючи лише додатніми аргументи функції Γ у правій частині формули та **відкинувши непотрібну умову** $\alpha > 0$.

Вкажемо план доведення. Позначимо, відповідно, через a_n, b_n, c_n загальні члени гіпергеометричних рядів

$$A = F(\alpha, \beta, \gamma, 1), \quad B = F(\alpha - 1, \beta, \gamma, 1), \quad C = F(\alpha, \beta, \gamma + 1, 1).$$

Безпосередньо перевіряються співвідношення

$$a_n - a_{n+1} = \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) c_n - b_{n+1}\,.$$

$$(\gamma - \alpha)(a_n - b_n) = \beta a_{n-1} + (n-1)a_{n-1} - na_n$$

і доводиться, що $na_n \to 0$. Додаючи ці співвідношення для індексів від 1 до n і переходячи до границі, отримаємо:

$$\gamma B = (\gamma - \beta)C, \quad (\gamma - \alpha)(A - B) = \beta A,$$

звідки

$$A = \frac{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma - \alpha - \beta)}\, C.$$

Розглянемо тепер вираз

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) \cdot \frac{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}; \tag{538.1}$$

попереднє співвідношення (зважаючи на (531.3)) показує, що значення цього виразу не зміниться, якщо замінити γ на $\gamma + 1$. Отже,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) \cdot \frac{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)} = F(\alpha, \beta, \gamma + m, 1) \cdot \frac{\Gamma(\gamma + m - \alpha)\Gamma(\gamma + m - \beta)}{\Gamma(\gamma + m)\Gamma(\gamma + m - \alpha - \beta)},.$$

Перейдемо тут праворуч до границі для $m \to \infty$. З рівномірної, відносно m, збіжності ряду $F(\alpha, \beta, \gamma + m, 1)$ витікає (розд. 433), що його сума прямує до 1. Такою самою буде й границя множника

$$\frac{\Gamma(\gamma + m - \alpha)\Gamma(\gamma + m - \beta)}{\Gamma(\gamma + m)\Gamma(\gamma + m - \alpha - \beta)}\,,$$

оскільки він є **залишковим** добутком для збіжного (зважаючи на пр. 538.5) добутку

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma - \alpha + n)(\gamma - \beta + n)}{(\gamma + n)(\gamma - \alpha - \beta + n)}\,.$$

У такому разі вираз (538.1) **дорівнює** 1, а це рівносильно формулі Ґаусса.

З цієї формули тепер можна, для $\gamma = 1, \ \alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, отримати розклад

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2} = \frac{4}{\pi}\,.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Можна довести і загальніший результат, що сума біноміальних коефіцієнтів, що відповідають показнику m бінома, для $m > -\frac{1}{2}$, дорівнює

$$\frac{\Gamma(1+2m)}{[\Gamma(1+m)]^2} \quad (\gamma = 1,\ \alpha = \beta = -m).$$

Раніше ми цього зробити не могли через обмеження $\alpha > 0$.

8) *Поширення* $\Gamma(a)$ *у разі від'ємних* a. За формулою (531.3),

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}\,,$$

тому значення $\Gamma(a)$ визначається через значення $\Gamma(a+1)$. Якщо $-1 < a < 0$, то $a+1 > 0$, та $\Gamma(a+1)$ має сенс. **Означимо** $\Gamma(a)$ за попередньою формулою; отже, означення функції $\Gamma(a)$ поширене і у разі $-1 < a < 0$. Взагалі, якщо $-n < a < -(n-1)$, то, поширюючи на цей випадок формулу (531.4), **означимо** $\Gamma(a)$ рівністю

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+n)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}\,. \tag{538.2}$$

Якщо для більшої чіткості вважати тут $a = -n + \alpha$, де $0 < \alpha < 1$, то означення це перепишеться так:

$$\Gamma(\alpha - n) = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}\,. \tag{538.3}$$

Звідси відразу видно, що знак $\Gamma(a)$ для $-n < a < -(n-1)$ визначається множником $(-1)^n$. Коли a наближається до $-n$ або $-(n-1)$ (тобто коли α наближається до 0 або 1) $\Gamma(a)$ дорівнює ∞ (першого порядку!).

9) Пропонується, ґрунтуючись на 8), узагальнити на випадок будь-яких дійсних значень аргументів формули (530.2), (531.3), (531.9), (531.14), (536.1), (537.4) (уникаючи лише цілих від'ємних та нульових значень аргументів).

Вказівка. При поширенні формули (537.4) врахувати рівність (538.2).

Якщо скористатися поширенням $\Gamma(a)$ у разі від'ємних a, то і формула Ґаусса, про яку йшлося в 7), виявиться вірною при єдиному припущенні: $\gamma - \alpha - \beta > 0$, яке необхідне для збіжності самого ряду $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ (пр. 378.4).

10) Ґрунтуючись на формулі (538.3), довести, що, коли α змінюється від 0 до 1, $\Gamma'(a)$ один раз (скажімо в точці $\alpha = \alpha_n$) проходить через 0, змінюючи знак з $(-1)^n$ на $(-1)^n$. В відповідній точці $a = \alpha_n - n$ функція $\Gamma(a)$ має додатний мінімум (для непарного n) або від'ємний максимум (для непарного n). Дивіться графік функції Γ, зображений на рис. 531.1.

Пропонується довести також, що, в міру зростання n, α_n і $\Gamma_n = |\Gamma(\alpha_n - n)|$, монотонно спадаючи, прямують до 0.

Вказівка. Підставою цих висновків є рівності ($0 < \alpha < 1$):

$$|\Gamma(\alpha - n + 1)| = \frac{|\Gamma(\alpha - n)|}{n + 1 - \alpha}, \quad |\Gamma(\alpha - n + 1)|' = \frac{|\Gamma(\alpha - n)|'}{n + 1 - \alpha} + \frac{|\Gamma(\alpha - n)|}{(n + 1 - \alpha)^2}$$

та

$$\frac{\Gamma'(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_n)} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu - \alpha_n}.$$

11) Довести, що для $-n < a < -(n-1)$ функція $\Gamma(a)$ виражається інтегралом

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{\infty} x^{a-1} \left(e^{-x} - 1 + \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) dx.$$

Вказівка. Застосувати інтегрування частинами; дивіться пр. 538.8.

12) У пр. 402.10, виходячи з означення функції $\Gamma(a)$ формулою Ойлера – Ґаусса (530.2) й до того ж відразу для будь-яких дійсних значень аргументу (за винятком нуля і цілих від'ємних чисел) ми встановили деякі найпростіші властивості цієї функції (дивіться також розд. 408). Те саме можна зробити і для інших вивчених властивостей.

Так само відправною точкою для вивчення функції $\Gamma(a)$ для будь-яких дійсних a (за тими самими винятками) може бути ряд

$$D^2 \ln \Gamma(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2},$$

за додаткових умов, що $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

13) Нарешті, зазначимо, що функція $\Gamma(a)$ може бути означена, як однозначна аналітична функція, на всій площині **комплексної** змінної a. (Це зауваження про поширення функції Γ можуть зрозуміти ті, хто вже знайомий з основними поняттями і термінами теорії функцій комплексної змінної.) Це може бути зроблено, виходячи з інтегрального означення (530.1), якщо розбити

$$\int\limits_0^{\infty} \quad \text{на два} \quad \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{\infty} = P(a) + Q(a).$$

Тоді функція

$$P(a) = \int\limits_0^1 x^{a-1} e^{-x}\, dx = \int\limits_0^1 x^{a-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^1 x^{a+n-1}\, dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{a+n}$$

природно поширюється на всю площину комплексної змінної як мероморфна функція з простими полюсами в точках $0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ -n,\ \ldots$, яким відповідають лишки $1,\ -1,\ \frac{1}{2!},\ \ldots,\ (-1)^n\frac{1}{n!},\ \ldots$.

Функція ж

$$Q(a)=\int\limits_1^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

має сенс й для комплексних значень a і представляється цілою функцією. Властивості функції $\Gamma(a)$, доведені для додатних дійсних значень аргументу, автоматично поширюються на всю площину, за відомою теоремою про аналітичні функції (ми маємо на увазі властивості, що виражаються рівностями між аналітичними функціями). Зокрема, із формули доповнення (531.9), яку можна написати так:

$$\frac{1}{\Gamma(1-a)}=\frac{1}{\pi}\sin a\pi\cdot\Gamma(a)=\frac{1}{\pi}\sin a\pi\cdot[P(a)+Q(a)],$$

виявляється, що $1/\Gamma(a)$ голоморфна на всій площині. Отже, $\Gamma(a)$ не має коренів. (У тих точках, де $P(a)$ має полюс, $\sin a\pi$ дорівнює нулю.)

Насамкінець згадаємо, що формула Ойлера – Ґаусса (530.2) і формула Ваярштрасса (537.4) з успіхом можуть бути покладені в основу означення функцій $\Gamma(a)$ відразу на всій площині.

539. Обчислення деяких визначених інтегралів

Розглянемо деякі інтеграли, для обчислення яких використовується функція $\Gamma(a)$ та її властивості.

1) Диференціюючи за a формулу

$$\Gamma(a)=\int\limits_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx,$$

ми отримали формулу (531.1):

$$\Gamma'(a)=\int\limits_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\ln x\,dx.$$

Вважаючи тут $a=1$, і оскільки $\Gamma'(1)=-\mathbf{C}$, отримаємо:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx=-\mathbf{C}.$$

Заміна $x = -\ln u$ зводить інтеграл до цікавого інтеграла

$$\int\limits_0^1 \ln(-\ln u)\,du = -\mathbf{C}.$$

Якщо взяти $a = \frac{1}{2}$ і вважати $x = t^2$, то знайдемо:

$$\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\ln t\,dt = \frac{1}{4}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}(\mathbf{C} + 2\ln 2),$$

як це легко виходить з розкладу (537.1) з урахуванням логарифмічного ряду.

Повторюючи диференціювання за a, ми дійшли рівності (531.2):

$$\Gamma''(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\ln^2 x\,dx.$$

Для $a = 1$ маємо:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\ln^2 x\,dx = \Gamma''(1) = \mathbf{C}^2 + \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Останній результат виходить із (537.2), якщо скористатися відомим рядом

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Нарешті, вважаючи тут $a = \frac{1}{2}$, за допомогою заміни $x = t^2$, отримаємо ще такий інтеграл:

$$\int\limits_0^\infty e^{-t^2}\ln^2 t\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{8}\left[(\mathbf{C} + 2ln2)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right]$$

і так далі.

2) Обчислити інтеграл

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{\sin^p x}{x}\,dx,$$

де p є раціональний дріб з непарним чисельником і знаменником.

Вказівка. Скористайтеся формулою Лобачевського пр. 497.14; тоді

$$J = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{p-1} x\,dx.$$

Дивіться пр. 532.4. *Відповідь:*

$$J = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} = 2^{p-2} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(p)}.$$

3) Обчислити інтеграли ($b > 0$):

$$A = \int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^s}\,dx \quad (0 < s < 1),$$

$$B = \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^s}\,dx \quad (0 < s < 2),$$

Маємо (дивіться (531.7)):

$$A = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty z^{s-1} e^{-zx}\,dz, \quad \text{тож} \quad A = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \cos bx\,dx \int_0^\infty z^{s-1} e^{-zx}\,dz.$$

Переставивши інтегрування, отримаємо

$$A = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty z^{s-1}\,dz \int_0^\infty e^{-zx} \cos bx\,dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{z^s\,dz}{z^2+b^2}$$

або, вважаючи $b^2 t = z^2$,

$$A = \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{s-1}{2}}}{1+t}\,dt = \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} \mathrm{B}\left(\frac{s+1}{2}, \frac{1-s}{2}\right) = \frac{b^{s-1}}{2\Gamma(s)} \frac{\pi}{\sin \frac{s+1}{2}\pi} = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s) \cdot \cos \frac{s\pi}{2}}$$

(дивіться (529.5), (529.6)). Аналогічно,

$$B = \frac{\pi b^{s-1}}{2\Gamma(s) \cdot \sin \frac{s\pi}{2}}$$

Обґрунтування перестановки інтегралів проводиться так само, як і для інтеграла $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ в пр. 524.11.

4) Обчислити інтеграли

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln x\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \ln^2 x\,dx.$$

Згідно з пр. 539.3, інтеграл $(0 < s < 2)$

$$J = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^s}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}}\,.$$

Диференціюючи його за параметром s (користуючись правилом Ляйбніца), знайдемо:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^s}\ln x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\left[\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}\right]^2}\left\{\Gamma'(s)\sin\frac{s\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\right\}.$$

Застосування правила Ляйбніца обґрунтовується рівномірною збіжністю отриманого інтеграла відносно s як для $x = \infty$ (для $s \geqslant s_0 > 0$, дивіться теор. **??**), так і для $x = 0$ (для $s \leqslant s_1$, мажорантна функція $\dfrac{|\ln x|}{x^{s_1-1}}$). Продиференціювавши отриману рівність ще раз (що обґрунтовується аналогічно), знайдемо:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x^s}\ln^2 x\,dx = \frac{\pi}{\left[\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}\right]^3}\left\{\Gamma'(s)\sin\frac{s\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\Gamma(s)\cos\frac{s\pi}{2}\right\}^2 -$$

$$-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\left[\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}\right]^2}\left\{\Gamma''(s)\sin\frac{s\pi}{2} + \pi\Gamma'(s)\cos\frac{s\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}\right\}..$$

Вважаючи в обох рівностях $s = 1$, знайдемо значення шуканих інтегралів

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ln x\,dx = \frac{\pi}{2}\Gamma'(1),$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ln^2 x\,dx = \pi\left[\Gamma'(1)\right]^2 - \frac{\pi}{2}\cdot\Gamma''(1) + \frac{\pi^3}{8}\,.$$

Враховуючи, що (порівняйте з пр. 539.1) $\Gamma'(1) = -\mathbf{C}$, $\Gamma''(1) = \mathbf{C}^2 + \frac{\pi^2}{6}$, остаточно матимемо:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ln x\,dx = -\frac{\pi}{2}\mathbf{C},$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ln^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\mathbf{C}^2 + \frac{\pi^3}{24}\,.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

5) Ми мали вже (дивіться пр. 534.4) формулу

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} \quad (a>0).$$

Диференціюючи за a (застосовуючи правило Ляйбніца, теор. 520.2), отримаємо

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2a-1}\varphi\cdot\ln\sin\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}\cdot\left[D\,\ln\Gamma(a) - D\,\ln\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)\right].$$

Якщо скористатися формулою Ґаусса (535.3), вираз у дужках перепишеться так:

$$\int_0^1 \frac{t^{a-\frac{1}{2}} - t^{a-1}}{1-t}\, dt.$$

Нехай тепер $2a-1=2n$, де n — будь-яке натуральне число або нуль, і зробимо заміну $t=u^2$. Тоді отримаємо

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\varphi\cdot\ln\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}\cdot\int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u}\, du.$$

Для $n=0$ ця формула дає відомий результат:

$$\int_0^{\pi/2} \ln\sin\varphi\, d\varphi = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Для $n\geqslant 1$ ми приходимо до нового інтеграла

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\varphi\cdot\ln\sin\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n}-\ln 2\right).$$

6) Обчислити інтеграли $(a>,\ p>0)$

$$u=\int_0^\infty e^{-ax}x^{p-1}\cos bx\, dx \qquad v=\int_0^\infty e^{-ax}x^{p-1}\sin bx\, dx.$$

Розв'язок проводиться аналогічно до пр. 523.8. Для функції $w=u+vi$, як і там, маємо диференціальне рівняння

$$\frac{dw}{db} = -\frac{p}{a^2+b^2}(b-ai)w,$$

яке можна переписати у вигляді:

$$\frac{dw}{db} = pw \cdot \frac{i}{a - bi}\,.$$

Легко перевірити, що

$$w \cdot (a - bi)^p = c = \text{const}\,.$$

(Тут і нижче $a \pm bi$ означає ту гілку степеневої функції, яка для $b = 0$ дорівнює додатному дійсному числу a^p.) Вважаючи тут $b = 0$, бачимо, що $c = \Gamma(p)$. Отже,

$$w = \frac{\Gamma(p)}{(a-bi)^p} = \frac{\Gamma(p)}{(a^2+b^2)^p}(a+bi)^p = \frac{\Gamma(p)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}}\left\{\cos\left(p\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right) + i\sin\left(p\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)\right\}.$$

Прирівнюючи порізно дійсні та уявні частини, отримаємо, нарешті:

$$u = \frac{\Gamma(p)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}}\cos p\theta, \quad v = \frac{\Gamma(p)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}}\sin p\theta,$$

де для стислості вважаємо: $\theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Замінюючи $\sqrt{a^2+b^2}$ на $\frac{b}{\sin\theta}$ або на $\frac{a}{\cos\theta}$ можна переписати результат так:

$$u = \frac{\Gamma(p)}{b^p}\sin^p\theta\cos p\theta = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\theta\cos p\theta,$$

$$v = \frac{\Gamma(p)}{b^p}\sin^p\theta\sin p\theta = \frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\theta\sin p\theta.$$

Пропонується отримати звідси інтеграли A і B пр. 539.3, вважаючи $p = 1 - s$ і спрямовуючи a до 0 (для $b > 0$ кут $\theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$ буде тоді прямувати до $\frac{\pi}{2}$).

Диференціюючи за p інтеграли u, v, можна отримати ряд нових інтегралів; залишаємо це читачеві.

7) Знайдені для інтегралів u, v значення дозволять нам обчислити інші цікаві інтеграли. Помножимо обидві частини рівності

$$\frac{\Gamma(p)}{a^p}\cos^p\theta\cos p\theta = \int\limits_0^\infty e^{-ax}x^{p-1}\cos bx\,dx$$

на

$$a^q \cdot \operatorname{tg}^{q-1}\theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = b^{q-1}\,db$$

(вважаючи $0 < q < p$ і $q < 1$) і проінтегруємо зліва по θ від 0 до $\frac{\pi}{2}$, а справа по b від 0 до ∞ ($b = a \cdot \operatorname{tg}\theta$). В результаті отримаємо

$$J_1 = \int\limits_0^{\pi/2}\cos^{p-q-1}\theta \cdot \sin^{q-1}\theta \cdot \cos p\theta\,d\theta = \frac{a^{p-q}}{\Gamma(p)}\int\limits_0^\infty b^{q-1}\,db\int\limits_0^\infty e^{-ax}x^{p-1}\cos bx\,dx.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Якщо переставити праворуч інтеграли, то це одразу приведе до обчислення інтеграла

$$J_1 = \frac{a^{p-q}}{\Gamma(p)} \int\limits_0^\infty e^{-ax} x^{p-1}\, dx \int\limits_0^\infty \frac{\cos bx}{b^{1-q}}\, db.$$

З пр. 539.3 легко отримати, що значення внутрішнього інтеграла буде $\Gamma(q)\cos\frac{q\pi}{2}x^{-q}$, тому

$$J_1 = \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(p)} a^{p-q} \cos\frac{q\pi}{2} \int\limits_0^\infty e^{-ax} x^{p-q-1}\, dx$$

і, остаточно,

$$J_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{p-q-1}\theta \cdot \sin^{q-1}\theta \cdot \cos p\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p-q)}{\Gamma(p)} \cos\frac{q\pi}{2}\,.$$

Аналогічно можна вивести:

$$J_2 = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{p-q-1}\theta \cdot \sin^{q-1}\theta \cdot \sin p\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(q)\Gamma(p-q)}{\Gamma(p)} \sin\frac{q\pi}{2}\,.$$

Покажемо тепер, як обґрунтувати перестановку інтегралів, без чого, зрозуміло, результат не може вважатися встановленим. Оскільки інтеграл

$$\int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \cos bx\, dx$$

збігається рівномірно для $0 < b_0 \leqslant b \leqslant B < +\infty$, то

$$\int\limits_{b_0}^B b^{q-1}\, db \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-ax} \cos bx\, dx = \int\limits_0^\infty e^{-ax} x^{p-1}\, dx \int\limits_{b_0}^B b^{q-1} \cos bx\, db =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-ax} x^{p-q-1}\, dx \int\limits_{b_0 x}^{Bx} u^{q-1} \cos u\, du.$$

Зважаючи на існування інтеграла $\int\limits_0^\infty u^{q-1} \cos u\, du$, внутрішній інтеграл прямує до нього, коли $b_0 \to 0,\ B \to +\infty$, і залишається обмеженим:

$$\left| \int\limits_{b_0 x}^{Bx} u^{q-1} \cos u\, du \right| \leqslant L;$$

тому для всього підінтегрального виразу існує мажорантна функція

$$L \cdot e^{-ax} x^{p-q-1},$$

і граничний перехід для $b_0 \to 0,\ B \to +\infty$ може бути зроблений під знаком інтеграла і так далі.

8) Нехай

$$\psi(t) = D \ln \Gamma(t) = \int\limits_0^1 \frac{1 - x^{t-1}}{1 - x}\, dx - \mathbf{C}$$

(дивіться (535.3)). Тоді

$$\int\limits_0^1 \frac{x^p - x^q}{1 - x}\, dx = \psi(q+1) - \psi(p+1) \quad (p + 1 > 0,\ q + 1 > 0).$$

Помітивши це, розглянемо інтеграл

$$J = \int\limits_0^1 \frac{(1 - x^\alpha)(1 - x^\beta)}{(1 - x) \ln x}\, dx \quad (\alpha > -1,\ \beta > -1,\ \alpha + \beta > -1).$$

Його похідна за α

$$\frac{dJ}{d\alpha} = -\int\limits_0^1 \frac{x\alpha(1 - x^\beta)}{1 - x}\, dx = \psi(\alpha + 1) - \psi(\alpha + \beta + 1) = \frac{d}{d\alpha} \ln \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}\,.$$

Тому

$$J = \ln \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} + C.$$

Оскільки $J = 0$ для $\alpha = 0$, то необхідно $C = \ln \Gamma(\beta + 1)$, отже

$$J = \ln \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}.$$

Аналогічно обчислюються інтеграли

$$K = \int\limits_0^1 \frac{x^\alpha (1 - x^\beta)(1 - x^\gamma)}{(1 - x) \ln x}\, dx = \ln \frac{\Gamma(\alpha + \gamma + 1)\Gamma(\beta + \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + 1)}$$

$$(\alpha > -1,\ \alpha + \beta > -1,\ \alpha + \gamma > -1,\ \alpha + \beta + \gamma > -1),$$

$$L = \int\limits_0^1 \frac{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)(1-x^\gamma)}{(1-x)\ln x}\,dx = \ln\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\beta+\gamma+1)}$$

$$(\alpha > -1 \qquad \text{і так далі}).$$

Якщо в інтегралі K взяти $\gamma = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{a}{2} - 1$, $\beta = \frac{b-a}{2}$ і зробити заміну $x = t^2$, то прийдемо до інтеграла

$$\int\limits_0^1 \frac{t^{a-1} - t^{b-1}}{(1+t)\ln t}\,dt = \ln\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)} \quad (a,\ b > 0).$$

Якщо $b = 1 - a$, то звідси виходить цікавий інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{t^{a-1} - t^{-a}}{(1+t)\ln t}\,dt = \ln\operatorname{tg}\frac{a\pi}{2} \quad (0 < a < 1).$$

Наведених прикладів досить, щоб показати, наскільки розширюються наші можливості представлення інтегралів скінченною формулою завдяки введенню функції Γ. Навіть у тих випадках, коли скінченна формула не містить інших функцій, крім елементарних, отримання її все ж таки часто полегшується використанням функції Γ хоча б у проміжних викладках.

540. Формула Стьорліна

Звернемося тепер до виводу зручних наближених формул для $\ln\Gamma(a)$ та до питання про обчислення значень цього логарифму (і самої функції Γ).

Відправною точкою буде формула (535.2) для логарифмічної похідної Γ:

$$D\ln\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right)dx.$$

Оскільки підінтегральний вираз є неперервною функцією від обох аргументів x і a для $x \geqslant 0$ і $a > 0$ (для $x = 0$ у цьому можна переконатися розкладанням в ряд), а для $x = \infty$ інтеграл збігається рівномірно відносно a для $a \geqslant a_0 > 0$ — мажорантна функція

$$\frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-a_0 x}}{1-e^{-x}},$$

— можна проінтегрувати по a від 1 до a під знаком інтеграла:

$$\ln\Gamma(a)=\int\limits_0^\infty\left[(a-1)e^{-x}-\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{1-e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}\quad (a>0).$$

Змінюючи знак змінної інтегрування, перейдемо до проміжку $(-\infty,0]$:

$$\ln\Gamma(a)=\int\limits_{-\infty}^0\left[\frac{e^{ax}-e^{x}}{e^{x}-1}-(a-1)e^{x}\right]\frac{dx}{x}\,. \tag{540.1}$$

І цей інтеграл збігається рівномірно для $x=-\infty$ і $0<a_0\leqslant a\leqslant A<+\infty$; проінтегруємо знову по a від a до $a+1$ під знаком інтеграла

$$R(a)=\int\limits_a^{a+1}\ln\Gamma(a)\,da=\int\limits_{-\infty}^0\left[\frac{e^{ax}}{x}-\frac{e^{x}}{e^{x}-1}-\left(a-\frac{1}{2}\right)e^{x}\right]\frac{dx}{x}\,. \tag{540.2}$$

Ми використовуємо отриманий інтеграл, так само як і елементарний інтеграл Фрулляні (розд. 495):

$$\frac{1}{2}\ln a=\int\limits_0^\infty\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\int\limits_{-\infty}^0\frac{e^{ax}-e^{x}}{2}\cdot\frac{dx}{x}\,, \tag{540.3}$$

для спрощення виразу (540.1). Саме, віднімаючи з нього (540.2) і додаючи (540.3), отримаємо:

$$\ln\Gamma(a)-R(a)+\frac{1}{2}\ln a=\int\limits_{-\infty}^0\left[\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right]\frac{e^{ax}\,dx}{x}\,,$$

Вважаючи, для зручності,

$$\omega(a)=\int\limits_{-\infty}^0\left[\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right]\frac{e^{ax}\,dx}{x} \tag{540.4}$$

і підставляючи замість $R(a)$ відомий вже нам вираз (531.13) інтеграла Раабе, отримаємо

$$\ln\Gamma(a)=\ln\sqrt{2\pi}+\left(a-\frac{1}{2}\right)\ln a-a+\omega(a). \tag{540.5}$$

У пр. 441.10 ми мали розклад на прості дроби гіперболічного котангенсу

$$\operatorname{cth}x=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2+k^2\pi^2}\,,$$

справедливий для всіх значень $x \neq 0$. Замінюючи тут x на $x/2$, можна перетворити його на вигляд (порівняйте з розд. 449):

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4k^2\pi^2}$$

або, нарешті,

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4k^2\pi^2}.$$

А ця функція $f(x)$ є частиною підінтегрального виразу (540.4).

Фіксуємо будь-яке невід'ємне ціле число m і замінимо кожен член ряду тотожною йому сумою

$$\frac{1}{x^2 + 4k^2\pi^2} = \frac{1}{4k^2\pi^2} - \frac{x^2}{(4k^2\pi^2)^2} + \frac{x^4}{(4k^2\pi^2)^3} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(4k^2\pi^2)^m} +$$
$$+ (-1)^m \frac{x^{2m}}{(4k^2\pi^2)^{m+1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4k^2\pi^2}}\,.$$

Додамо окремі доданки виду

$$(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(4k^2\pi^2)^n} \quad (1 \leqslant n \leqslant m,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Вважаючи, як завжди,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = s_{2n},$$

отримаємо результат:

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{(2\pi)^{2n}} \cdot s_{2n} \cdot x^{2n-2}.$$

Якщо ввести числа Бернуллі (розд. 449):

$$B_n = \frac{2 \cdot (2n)!}{(2\pi)^{2n}} \cdot s_{2n}\,, \tag{540.6}$$

то цей результат перепишеться так:

$$(-1)^{n-1}\frac{B_n}{2 \cdot (2n)!} \cdot x^{2n-2}.$$

Що ж до останніх доданків, з множниками $\left(1 + \frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right)^{-1}$, що представляють додатні правильні дроби, то, підсумовуючи їх, прийдемо до члена

$$(-1)^m \cdot \tilde{\theta} \cdot \frac{B_{m+1}}{2(2m+2)!} \cdot x^{2m},$$

де $\tilde{\theta}$ також є додатний правильний дріб.

Остаточно отримаємо такий вираз для $f(x)$:

$$f(x) = \frac{B_1}{2!} - \frac{B_2}{4!}x^2 + \frac{B_3}{6!}x^4 - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{B_m}{2m!}x^{2m-2} + (-1)^m \cdot \tilde{\theta} \cdot \frac{B_{m+1}}{(2m+2)!}x^{2m}$$

$$(0 < \tilde{\theta} < 1).$$

Підставивши це в (540.2), проінтегруємо почленно. Оскільки

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{ax}x^{2n}\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax}x^{2n}\,dx = \frac{2n!}{a^{2n+1}}$$

та

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{ax} \cdot \tilde{\theta} \cdot x^{2m}\,dx = \theta \cdot \int\limits_{-\infty}^{0} e^{ax}x^{2m}\,dx = \theta \cdot \frac{2m!}{a^{2m+1}} \quad (0 < \theta < 1)$$

(звертаємо увагу читача на те, що $\tilde{\theta}$ залежить від x, а θ — ні), то знаходимо, що

$$\omega(a) =$$

Нарешті, якщо у (540.5), замість $\omega(a)$ підставити отриманий вираз, ми прийдемо до формули:

$$\begin{aligned}\ln\Gamma(a) = \ln\sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right)\ln a - a +{}\\ + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{a^3} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m-1)2m} \cdot \frac{1}{a^{2m-1}} +{}\\ + (-1)^m \cdot \theta \cdot \frac{B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)} \cdot \frac{1}{a^{2m+1}} \quad (0 < \theta < 1),\end{aligned} \tag{540.7}$$

що названа на честь Стьорліна.

У найпростішому випадку для $m = 0$ формула набуває вигляду

$$\ln\Gamma(a) = \ln\sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right)\ln a - a + \frac{\theta}{12a} \quad (0 < \theta < 1).$$

Якщо, відкинувши **додатковий член** (що містить множник θ), продовжити ряд членів у формулі до нескінченності, то вийде так званий *ряд Стьорліна*:

$$\begin{aligned}\ln\Gamma(a) \sim \ln\sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right)\ln a - a +{}\\ + \frac{B_1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{B_2}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{a^3} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{B_m}{(2m-1)2m} \cdot \frac{1}{a^{2m-1}} + \ldots .\end{aligned}$$

Цей ряд буде розбіжним. Справді, зважаючи на (540.6), абсолютна величина загального члена ряду Стьорліна

$$\frac{B_n}{(2n-1)2n}\cdot\frac{1}{a^{2n-1}}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(2n-2)!}{(2\pi a)^{2n-1}}s_{2n}\to\infty,$$

коли $n\to\infty$.

Але, цей ряд дуже корисний для наближеного обчислення функції $\ln\Gamma(a)$, оскільки є її **асимптотичним розкладом** і водночас **обгортаючи** її. Ми вже стикалися як із формулою, так і з рядом Стьорліна для $\ln(n!)$ (дивіться (469.1) та (469.2)). Щойно отримані розклади мають загальніший характер. Якщо побажати вивести з них попередні результати, то слід покласти $a=n$ і, крім того, додати ще $\ln n$, оскільки $\Gamma(n)=(n-1)!$, а не $n!$ І в даному випадку також, потенціюючи (вл. 464.3), можна отримати асимптотичний розклад самої функції Γ(a) (дивіться розд. 469).

541. Обчислення сталої Ойлера

Повернемося до формули (540.5), яку продиференціюємо за a:

$$D\ln\Gamma(a)=\ln a-\frac{1}{2a}+\omega'(a),\quad \text{де}\quad \omega'(a)=\int\limits_{-\infty}^{0}xeaxf(x)\,dx.$$

Повторюючи колишні викладки, отримаємо

$$\omega'(a)=-\frac{B_1}{2}\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{B_2}{4}\cdot\frac{1}{a^4}-\ldots+(-1)^m\frac{B_m}{2m}\cdot\frac{1}{a^{2m}}+(-1)^{m+1}\cdot\theta\cdot\frac{B_{m+1}}{2m+2}\cdot\frac{1}{a^{2m+2}}\qquad(541.1)$$

Звідси й приходимо до асимптотичного розкладу

$$D\ln\Gamma(a)\sim\ln a-\frac{1}{2a}-\frac{B_1}{2}\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{B_2}{4}\cdot\frac{1}{a^4}-\ldots+(-1)^n\frac{B_n}{2n}\cdot\frac{1}{a^{2n}}+\ldots.$$

Формально він може бути отриманий почленним диференціюванням ряду Стьорліна. Отже, в даному випадку виявилося допустимим почленне диференціювання асимптотичного розкладу (порівняйте з зауваження в розд. 464).

З отриманої формули (541.1) можна отримати зручний спосіб для обчислення сталої Ойлера **C**.

Вважаючи у формулі Ґаусса (535.3) a рівним натуральному числу k, знайдемо

$$\mathbf{C}=\int\limits_0^1\frac{1-t^{k-1}}{1-t}\,dt-D\ln\Gamma(k).$$

Але

$$\frac{1-t^{k-1}}{1-t} = 1 + t + \dots + t^{k-2},$$

тому

$$\int_0^1 \frac{1-t^{k-1}}{1-t} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k-1}\,.$$

Використовуючи формулу (541.1) для $a = k$, остаточно отримаємо

$$\begin{aligned}\mathbf{C} =& 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k-1} - \ln k + \frac{1}{2k} + \frac{1}{12k^2} - \frac{1}{252k^6} - \frac{1}{240k^8} + \ldots + \\ &(-1)^n \frac{B_n}{2n} \cdot \frac{1}{k^{2n}} + (-1)^{n+1} \cdot \theta \cdot \frac{B_{n+1}}{2n+2} \cdot \frac{1}{k^{2n+2}} \qquad (0 < \theta' < 1).\end{aligned}$$

За цією формулою, взявши $k = 10$ і обчислюючи члени до того, що містить $k^{1}2$, Ойлер обчислив значення $\mathbf{C}$ з 15 знаками:

$$\mathbf{C} = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\ldots.$$

542. Складання таблиці десяткових логарифмів функції Γ

Вкажемо коротко шлях для складання згаданої таблиці.

Повернемося до формули (537.1), яку, замінюючи a на $1 + a$, напишемо у вигляді

$$\frac{d \ln \Gamma(1+a)}{da} = -\mathbf{C} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{a+k} \right).$$

Послідовним диференціюванням прийдемо до формули для n-ї похідної

$$\frac{d^n \ln \Gamma(1+a)}{da^n} = (-1)^n (n-1)! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a+k)^n}$$

(рівномірна збіжність одержуваних рядів виправдовує почленне диференціювання).

Отже, знаходимо коефіцієнти ряду Тейлора:

$$\frac{1}{n!} \left[\frac{d^n \ln \Gamma(1+a)}{da^n} \right]_{a=0} = (-1)^n \frac{s_n}{n}, \quad \text{де} \quad s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}\,.$$

Тоді для $|a| < 1$ матимемо:

$$\ln \Gamma(1+a) = -\mathbf{C}a + \frac{1}{2} s_2 a^2 + \frac{1}{3} s_3 a^3 + \frac{1}{4} s_4 a^4 - \ldots.$$

nebayduzhi.math@gmail.com

Оскільки числа s_k (особливо для великих k) близькі до 1, то вигідно додати почленно розклад, що також справедливий для $|a| < 1$)

$$\ln(1+a) = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^4 + \ldots .$$

Це дає нам

$$\ln\Gamma(1+a) = -\ln(1+a) + (1-\mathbf{C})a + \frac{1}{2}(s_2-1)a^2 - \frac{1}{3}(s_3-1)a^3 + \ldots .$$

Помноживши на модуль M і вважаючи

$$M(1-\mathbf{C}) = C_1, \quad \frac{1}{2}M(s_2-1) = C_2, \quad \frac{1}{3}M(s_3-1) = C_3, \quad \ldots ,$$

отримаємо

$$\ln\Gamma(1+a) = -\ln(1+a) + C_1a + C_2a^2 - C_3a^3 + C_4a^4 - \ldots . \tag{542.1}$$

Замінимо a на $-a$:

$$\ln\Gamma(1-a) = -\ln(1-a) - C_1a + C_2a^2 + C_3a^3 + C_4a^4 + \ldots ;$$

віднімемо цей розклад з попереднього. Оскільки, за формулою доповнення,

$$\Gamma(1-a)\Gamma(1+a) = \frac{a\pi}{\sin a\pi}$$

та

$$\ln\Gamma(1-a) = -\ln\Gamma(1+a) + \ln\frac{a\pi}{\sin a\pi},$$

то знайдемо:

$$\ln\Gamma(1+a) = \frac{1}{2}\ln\frac{a\pi}{\sin a\pi} - \frac{1}{2}\ln\frac{1+a}{1-a} + C_1a - C_3a^3 + C_5a^5 - \ldots . \tag{542.2}$$

Льожондр дав значення коефіцієнтів C_n (для $n \leqslant 15$) та їх логарифми і обчислив за допомогою формул (542.1) і (542.2) десяткові логарифми $\Gamma(a)$ для a від 1 до 2 через 0,001, спочатку з 7, а потім і з 12 десятковими знаками.

Закінчуючи цим вивчення функції “Гама”, бачимо, що, з її означення за допомогою інтеграла, що містить параметр a, ми не тільки ознайомилися з глибокими її властивостями, але й навчилися обчислювати її. Тож ми освоїли цю функцію так само, як і елементарні функції.

Том
3

Глава 15

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ. ІНТЕГРАЛ Стілтьєса

15.1. Криволінійні інтеграли першого типу

543. Означення криволінійного інтеграла першого типу

544. Зведення до звичайного визначеного інтеграла

545. Приклади

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

15.2. Криволінійні інтеграли другого типу

546. Означення криволінійних інтегралів другого типу

547. Існування та обчислення криволінійного інтеграла другого типу

548. Випадок замкненого контуру. Орієнтація площини

549. Приклади

550. Наближення за допомогою інтеграла, взятого по ламаній

551. Обчислення площ за допомогою криволінійних інтегралів

552. Приклади

553. Зв'язок між криволінійними інтегралами обох типів

554. Фізичні задачі

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

15.3. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху

555. Формулювання задачі, зв’язок із питанням щодо точного диференціала

556. Диференціювання інтеграла, що не залежить від шляху

557. Обчислення криволінійного інтеграла через первісну

558. Ознака точного диференціала та знаходження первісної у випадку прямокутної області

559. Узагальнення на випадок довільної області

560. Остаточні результати

561. Інтеграли по замкненому контуру

562. Випадок неоднозв’язної області або наявності особливих точок

563. Інтеграл Ґаусса

564. Тримірний випадок

565. Приклади

566. Застосування до фізичних задач

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

15.4. Функції з обмеженою зміною

567. Означення функції з обмеженою зміною

568. Класи функцій з обмеженою зміною

569. Властивості функцій з обмеженою зміною

570. Критерії для функцій з обмеженою зміною

571. Неперервні функції з обмеженою зміною

572. Спрямні криві

Теорема 572.1 (Теорему Жордана)**.**

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

15.5. Інтеграл Стілтьєса

573. Означення інтеграла Стілтьєса

574. Загальні умови існування інтеграла Стілтьєса

575. Класи випадків існування інтеграла Стілтьєса

576. Властивості інтеграла Стілтьєса

577. Інтегрування частинами

578. Зведення інтеграла Стілтьєса до інтеграла Рімана

579. Обчислення інтегралів Стілтьєса

580. Приклади

581. Геометрична ілюстрація інтеграла Стілтьєса

582. Теорема про середнє, оцінки

583. Граничний перехід під знаком інтеграла Стілтьєса

584. Приклади та додатки

585. Зведення криволінійного інтеграла другого типу до інтеграла Стілтьєса

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

Глава 16

ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

16.1. Означення та найпростіші властивості подвійного інтеграла

586. Задача про об'єм циліндричного бруса

587. Зведення подвійного інтеграла до повторного

588. Означення подвійного інтеграла

589. Умови існування подвійного інтеграла

590. Класи інтегровних функцій

591. Нижній та верхній інтеграли як границі

592. Властивості інтегровних функцій та подвійних інтегралів

593. Інтеграл, як адитивна функція області; диференціювання по області

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:

16.2. Обчислення подвійного інтеграла

594. Зведення подвійного інтеграла до повторного у випадку прямокутної області

595. Приклади

596. Зведення подвійного інтеграла до повторного у випадку криволінійної області

597. Приклади

598. Механічні застосування

599. Приклади

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

16.3. Формула Гріна

600. Виведення формули Гріна

601. Застосування формули Гріна до дослідження криволінійних інтегралів

602. Приклади та додатки

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

16.4. Заміна змінних у подвійному інтегралі

603. Перетворення плоских областей

604. Приклади

605. Вираження площі у криволінійних координатах

606. Додаткові зауваження

607. Геометричне виведення

608. Приклади

609. Заміна змінних у подвійних інтегралах

610. Аналогія із простим інтегралом. Інтеграл по орієнтованій області

611. Приклади

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

16.5. Невласні подвійні інтеграли

612. Інтеграли, поширені на необмежену область

613. Теорема про абсолютну збіжність невласного подвійного інтеграла

614. Зведення подвійного інтеграла до повторного

615. Інтеграли від необмежених функцій

616. Заміна змінних у невласних інтегралах

617. Приклади

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

Глава 17

ПЛОЩА ПОВЕРХНІ. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

17.1. Двохсторонні поверхні

618. Сторона поверхні

619. Приклади

620. Орієнтація поверхонь та простору

621. Вибір знака у формулах для напрямних косинусів нормалі

622. Випадок кусково-гладкої поверхні

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

17.2. Площа кривої поверхні

623. Приклад Шварца

624. Означення площі кривої поверхні

625. Зауваження

626. Існування площі поверхні та її обчислення

627. Підхід через вписані многогранні поверхні

628. Особливі випадки означення площі

629. Приклади

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

17.3. Поверхневі інтеграли першого типу

630. Означення поверхневого інтеграла першого типу

631. Зведення до звичайного подвійного інтеграла

632. Механічні застосування поверхневих інтегралів першого типу

633. Приклади

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

17.4. Поверхневі інтеграли другого типу

634. Означення поверхневого інтеграла другого типу

635. Найпростіші окремі випадки

636. Загальний випадок

637. Деталь доведення

638. Вираження об'єму тіла за допомогою поверхневого інтеграла

639. Формула Стокса

640. Приклади

641. Застосування формули Стокса до дослідження криволінійних інтегралів у просторі

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

Глава 18

ПОТРІЙНІ ТА БАГАТОКРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

18.1. Потрійний інтеграл та його обчислення

642. Задача обчислення маси тіла

643. Потрійний інтеграл та умови його існування

644. Властивості інтегровних функцій та потрійних інтегралів

645. Обчислення потрійного інтеграла, поширеного на паралелепіпед

646. Обчислення потрійного інтеграла по довільній області

647. Невласні потрійні інтеграли

648. Приклади

649. Механічні застосування

650. Приклади

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:

nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

18.2. Формула Ґаусса – Остроградського

651. Формула Остроградського

652. Застосування формули Остроградського для дослідження поверхневих інтегралів

653. Інтеграл Ґаусса

654. Приклади

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

18.3. Заміна змінних у потрійних інтегралах

655. Перетворення просторів та криволінійні координати

656. Приклади

657. Вираження об’єму у криволінійних координатах

658. Додаткові зауваження

659. Геометричне виведення

660. Приклади

661. Заміна змінних у потрійних інтегралах

662. Приклади

663. Притягання зі сторони тіла та потенціал на внутрішню точку

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

18.4. Елементи векторного аналізу

664. Скаляри та вектори

665. Скалярне та векторне поля

666. Градієнт

667. Потік вектора через поверхню

668. Формула Остроградського. Дивергенція

669. Циркуляція вектора. Формула Стокса. Вихор

670. Спеціальні поля

671. Обернена задача векторного аналізу

672. Приклади застосування

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу: nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті: https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

18.5. Багатократні інтеграли

673. Задача про тяжіння та потенціал двох тіл

674. Об’єм n-мірного тіла, n-кратний інтеграл

675. Заміна змінних у n-кратному інтегралі

676. Приклади

Глава 19

РЯДИ Фур’є

19.1. Вступ

677. Періодичні величини та гармонічний аналіз

678. Визначення коефіцієнтів за методом Ойлера – Фур’є

679. Ортогональні системи функцій

680. Тригонометрична інтерполяція

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

19.2. Розкладання функцій у ряд Фур’є

681. Формулювання питання. Інтеграл Діріхлє

682. Перша основна лема

683. Принцип локалізації

684. Ознаки Діні та Ліпшица збіжності рядів Фур’є

685. Друга основна лема

686. Ознака Діріхлє – Жордана

687. Випадок неперіодичної функції

688. Випадок довільного проміжку

689. Розкладання лише по синусам або лише по косинусам

690. Приклади

691. Розкладання $\ln \Gamma(x)$

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

19.3. Додатки

692. Ряди із спадаючими коефіцієнтами

693. Підсумовування тригонометричних рядів за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної

694. Приклади

695. Комплексна форма рядів Фур'є

696. Спряжений ряд

697. Кратні ряди Фур'є

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

19.4. Характер збіжності рядів Фур'є

698. Деякі доповнення до основних лем

699. Ознаки рівномірної збіжності рядів Фур'є

700. Поведінка ряду Фур'є поблизу точки розриву; окремий випадок

701. Випадок довільної функції

702. Особливості рядів Фур'є; попередні зауваження

703. Побудова особливостей

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

19.5. Оцінка залишку залежно від диференціальних властивостей функції

704. Зв'язок між коефіцієнтами Фур'є функції та її похідних

705. Оцінка часткової суми у випадку обмеженої функції

706. Оцінка залишку у випадку функції із обмеженою k-тою похідною

707. Випадок функції, що має k-ту похідну з обмеженою зміною

708. Вплив розривів функції та її похідних на порядок малості коефіцієнтів Фур'є

709. Випадок функції, заданої на проміжку $[0, \pi]$

710. Метод виділення особливостей

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

19.6. Інтеграл Фур'є

711. Інтеграл Фур'є як граничний випадок ряду Фур'є

712. Попередні зауваження

713. Достатні ознаки

714. Видозміна основного припущення

715. Різноманітні види формули Фур'є

716. Перетворення Фур'є

717. Деякі властивості перетворень Фур'є

718. Приклади та додатки

719. Випадок функції двох змінних

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

19.7. Приклади застосування

720. Вираження ексцентричної аномалії планети через її середню аномалію

721. Задача про коливання струни

722. Задача про поширення тепла у скінченному стержні

723. Випадок нескінченного стержня

724. Видозміна граничних умов

725. Поширення тепла в круглій пластині

726. Практичний гармонічний аналіз. Схема для дванадцяти ординат

727. Приклади

728. Схема для двадцяти чотирьох ординат

729. Приклади

730. Порівняння наближених та точних значень коефіцієнтів Фур’є

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

Глава 20

РЯДИ Фур’є (продовження)

20.1. Операції над рядами Фур’є. Повнота та замкненість

731. Почленне інтегрування ряду Фур’є

732. Почленне диференціювання ряду Фур’є

733. Повнота тригонометричної системи

734. Рівномірна апроксимація функцій. Теореми Вайрштрасса

735. Апроксимація функцій у середньому. Екстремальні властивості відрізків ряду Фур’є

736. Замкненість тригонометричної системи. Теорема Ляпунова

737. Узагальнене рівняння замкнености

738. Множення рядів Фур’є

739. Деякі застосування рівняння замкнености

Ляпунов (рос. Aleksandr Lyapunov, Олекса́ндр Ляпуно́в)

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

20.2. Застосування методів узагальненого підсумовування до рядів Фур'є

740. Основна лема

741. Підсумовування рядів Фур'є методом Пуассона – Абеля

742. Розв'язок задачі Діріхлє для кола

743. Підсумовування рядів Фур'є методом Чезаро – Фейєра

744. Деякі застосування узагальненого підсумовування рядів Фур'є

745. Почленне диференціювання рядів Фур'є

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

20.3. Єдиність тригонометричного розкладу функції

746. Допоміжні зауваження щодо узагальнених похідних

747. Метод Рімана підсумовування тригонометричних рядів

748. Лема про коефіцієнти збіжного ряду

749. Єдиність тригонометричного розкладу

750. Завершальні теореми щодо рядів Фур'є

751. Узагальнення

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

Глава 21

ДОДАТОК

21.1. Загальна точка зору на границю

752. Різні види границь, що зустрічаються в аналізі

753. Впорядковані множини (у власному сенсі)

754. Впорядковані множини (в узагальненому сенсі)

755. Впорядкована змінна та її границя

756. Приклади

757. Зауваження щодо границі функції

758. Поширення теорії границь

759. Однаково впорядковані змінні

760. Впорядкування за допомогою числового параметра

761. Зведення до варіанти

762. Найбільша та найменша границі впорядкованої змінної

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:

nebayduzhi.math@gmail.com

Глава 22

ВИДАТНІ ВЧЕНІ

22.1. Видатні вчені

763. Видатні вчені

1. Abel
https://en.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel
норв. Niels Abel, 1802
Нільс Абель (вимова: Ні́льс А́бель)
https://forvo.com/word/niels_henrik_abel/#no
https://forvo.com/word/abel/#no

2. Arbogast
https://en.wikipedia.org/wiki/Louis_François_Antoine_Arbogast
фр. Louis Arbogast, 1759
Луі Арбоґаст (вимова: Луі́ Арбоґа́ст)
заст. Луї Арбогаст
https://forvo.com/word/louis_françois_antoine_arbogast/#fr

3. Archimedes
https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedes
гр. Αρχιμήδης ο Συρακούσιος, 287 до н. е.
Архімедес (вимова: Архіме́дес)
заст. Архімед
https://forvo.com/word/αρχιμήδης_ο_συρακούσιος/#el
https://forvo.com/word/αρχιμήδης/#el

nebayduzhi.math@gmail.com

4. Arzelà

https://en.wikipedia.org/wiki/Cesare_Arzelà
іт. Cesare Arzelà, 1847
Чейзаре Арзеля (вимова: Че́йзаре Арзеля́)
заст. Чезаре Арцела
https://forvo.com/word/cesare_arzelà/#it

5. Barrow

https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Barrow
англ. Isaac Barrow, 1630
Айзек Берроу (вимова: А́йзек Бе́рроу)
заст. Ісаак Барроу
https://forvo.com/word/isaac_barrow/#en

6. Jakob Bernoulli

https://en.wikipedia.org/wiki/Jacob_Bernoulli
швейц. Jakob Bernoulli, 1655
Якоб Бернуллі (вимова: Я́коб Берну́ллі)
https://forvo.com/word/jakob_bernoulli/#gsw
https://forvo.com/word/bernoulli/#gsw

7. Johann Bernoulli

https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Bernoulli
швейц. Johann Bernoulli, 1667
Йоханн Бернуллі (вимова: Йо́ханн Берну́ллі)
заст. Йоганн Бернуллі
https://forvo.com/word/bernoulli/#gsw

8. Bertrand

https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Bertrand
фр. Joseph Bertrand, 1822
Жозеф Бертрон (вимова: Жозе́ф Бертро́н)
заст. Жозеф Бертран
https://forvo.com/word/joseph_bertrand/#fr
https://forvo.com/word/bertrand/#fr

9. Bessel

https://en.wikipedia.org/wiki/Friedrich_Bessel
нім. Friedrich Bessel, 1784
Фрідріх Бессель (вимова: Фрі́дріх Бе́ссель)
https://forvo.com/word/friedrich_bessel/#de
https://forvo.com/word/friedrich_wilhelm_bessel/#de

10. Biot
https://en.wikipedia.org/wiki/Jean-Baptiste_Biot
фр. Jean-Baptiste Biot, 1774
Жан-Батіст Біо (вимова: Жа́н-Баті́ст Біó)
https://forvo.com/word/jean-baptiste_biot/#fr

11. Bolzano
https://en.wikipedia.org/wiki/Bernard_Bolzano
чех. Bernard Bolzano, 1781
Бернард Бользано (вимова: Берна́рд Больза́но)
заст. Бернард Больцано
https://forvo.com/word/bernard_bolzano/#cs

12. Bonnet
https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_Ossian_Bonnet
фр. Pierre-Ossian Bonnet, 1819
Оссиан Бонне (вимова: Осcиа́н Бонне́)
https://forvo.com/word/pierre-ossian_bonnet/#fr

13. Borel
https://en.wikipedia.org/wiki/Émile_Borel
фр. Émile Borel, 1871
Еміль Борель (вимова: Емі́ль Боре́ль)
https://forvo.com/word/émile_borel/#fr

14. Boyle
https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Boyle
англ. Robert Boyle, 1627
Роберт Бойл (вимова: Ро́берт Бо́йл)
заст. Роберт Бойль
https://forvo.com/word/robert_boyle/#en

15. Bunyakovsky
https://uk.wikipedia.org/wiki/Буняковський_Віктор_Якович
укр. Віктор Буняковський, 1804
Віктор Якович Буняковський (вимова: Ві́ктор Я́кович Буняко́вський)
https://forvo.com/word/віктор_буняковський/#uk

16. Bézout
https://en.wikipedia.org/wiki/Étienne_Bézout
фр. Étienne Bézout, 1730
Етьєн Бєзу (вимова: Етьє́н Бєзу́)
заст. Етьєн Безу
https://forvo.com/word/étienne_bézout/#fr

17. Bürgi
https://en.wikipedia.org/wiki/Jost_Bürgi
швейц. Jost Bürgi, 1552
Йост Бюрґі (вимова: Йо́ст Бю́рґі)
заст. Йост Бюргі
https://forvo.com/word/jost_bürgi/#de

18. Cantor
https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor
нім. Georg Cantor, 1845
Ґеорґ Кантор (вимова: Ґео́рґ Ка́нтор)
заст. Георг Кантор
https://forvo.com/word/georg_cantor/#de

19. Cassini
https://en.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Domenico_Cassini
іт. Giovanni Domenico Cassini, 1625
Джованні Кассіні (вимова: Джова́нні Кассі́ні)
https://forvo.com/word/giovanni_domenico_cassini/#it
https://forvo.com/word/giovanni_cassini/#it

20. Catalan
https://en.wikipedia.org/wiki/Eugène_Charles_Catalan
фр. Eugène Catalan, 1814
Ужен Катальо (вимова: Ужє́н Катальо́)
заст. Ежен Каталан
https://forvo.com/word/eugene_charles_catalan/#fr
https://forvo.com/word/catalan/#fr

21. Cauchy
https://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Louis_Cauchy
фр. Augustin-Louis Cauchy, 1789
Оґюста Коші (вимова: Оґюста́ Коші́)
заст. Огюстен Коші
https://forvo.com/word/augustin_cauchy/#fr
https://forvo.com/word/augustin_louis_cauchy/#fr

---

22. Cesàro
https://en.wikipedia.org/wiki/Ernesto_Cesàro
іт. Ernesto Cesàro, 1859
Ернесто Чезаро (вимова: Ерне́сто Чеза́ро)
https://forvo.com/word/ernesto_cesàro/#it

---

23. Chebyshov
https://en.wikipedia.org/wiki/Pafnuty_Chebyshev
рос. Pafnuty Chebyshov, 1821
Пафнутій Львович Чебишов (вимова: Пафну́тій Чебишо́в)
https://forvo.com/word/пафнутий_чебышев/#ru

---

24. Clapeyron
https://en.wikipedia.org/wiki/Benoît_Paul_Émile_Clapeyron
фр. Émile Clapeyron, 1799
Еміль Кляпейрон (вимова: Емі́ль Кляпейро́н)
заст. Еміль Клапейрон
https://forvo.com/word/émile_clapeyron/#fr
https://forvo.com/word/clapeyron/#fr

---

25. Condorcet
https://en.wikipedia.org/wiki/Marquis_de_Condorcet
фр. Marquis de Condorcet, 1743
Ніколя де Кондорсе (вимова: Ніколя́ де Кондорсе́)
https://forvo.com/word/nicolas_de_condorcet/#fr

---

26. Coulomb
https://en.wikipedia.org/wiki/Charles-Augustin_de_Coulomb
фр. Charles-Augustin de Coulomb, 1736
Шарль Кульом (вимова: Ша́рль Кульо́м)
заст. Шарль Кулон
https://forvo.com/word/de_coulomb/#fr
https://forvo.com/word/charles_coulomb/#fr

---

27. Cramer
https://en.wikipedia.org/wiki/Gabriel_Cramer
швейц. Gabriel Cramer, 1704
Ґабрієль Крамер (вимова: Ґабріє́ль Краме́р)
заст. Габрієль Крамер
https://forvo.com/word/gabriel_cramer/#fr

---

28. d’Alembert
https://en.wikipedia.org/wiki/Jean_le_Rond_d’Alembert
фр. Jean le Rond d’Alembert, 1717
Жан д’Аламбер (вимова: Жа́н д’Аламбе́р)
заст. Жан Даламбер
https://forvo.com/word/d’alembert/#fr
https://forvo.com/word/jean_le_rond_d’alembert/#fr

---

29. Darboux
https://en.wikipedia.org/wiki/Jean_Gaston_Darboux
фр. Jean-Gaston Darboux, 1842
Жан Дарбу (вимова: Жа́н Дарбу́)
https://forvo.com/word/jean-gaston_darboux/#fr

---

30. Dedekind
https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Dedekind
нім. Richard Dedekind, 1831
Річард Дідікінд (вимова: Рі́чард Дідікі́нд)
заст. Ріхард Дедекінд
https://forvo.com/word/richard_dedekind/#de
https://forvo.com/word/dedekind/#de

---

31. Descartes
https://en.wikipedia.org/wiki/René_Descartes
фр. René Descartes, 1596
Рене Декарт (вимова: Рене́ Дека́рт)
https://forvo.com/word/rené_descartes/#fr

---

32. Dini
https://en.wikipedia.org/wiki/Ulisse_Dini
іт. Ulisse Dini, 1845
Улісе Діні (вимова: Улі́се Ді́ні)
заст. Уліс Діні
https://forvo.com/word/ulisse_dini/#it

---

33. Dirichlet
https://en.wikipedia.org/wiki/Peter_Gustav_Lejeune_Dirichlet
нім. Peter Dirichlet, 1805
Піта Дірíхлє (вимова: Пі́та Дірихле́)
заст. Петер Діріхле
https://forvo.com/word/dirichlet/#de
https://forvo.com/word/peter_gustav_lejeune_dirichlet/#de

---

34. Ermakov
https://uk.wikipedia.org/wiki/Єрмаков_Василь_Петрович
бел.-укр. Василь Єрмаков, 1845
Василь Петрович Єрмаков (вимова: Васи́ль Петро́вич Єрмако́в)
https://forvo.com/word/василь_петрович_єрмаков/#uk

---

35. Euler
https://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
швейц. Leonhard Euler, 1707
Леонард Ойлер (вимова: Леона́рд О́йлер)
заст. Леонард Ейлер
https://forvo.com/word/euler/#gsw
https://forvo.com/word/leonhard_euler/#de

---

36. Faber
https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Faber
нім. Georg Faber, 1877
Ґеорґ Фабар (вимова: Ґео́рґ Фа́бар)
заст. Георг Фабер
https://forvo.com/word/georg_faber/#de
https://forvo.com/word/faber/#de

---

37. Fejér
https://en.wikipedia.org/wiki/Lipót_Fejér
угор. Lipót Fejér, 1880
Ліпот Фейер (вимова: Ліпо́т Фейе́р)
https://forvo.com/word/fejér_lipót/#hu
https://forvo.com/word/fejér/#hu

---

38. Fermat
https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat
фр. Pierre de Fermat, 1607
П'єр де Ферма (вимова: П'є́р де Ферма́)
https://forvo.com/word/pierre_de_fermat/#fr

---

39. Fikhtengol'ts
https://uk.wikipedia.org/wiki/Фіхтенгольц_Григорій_Михайлович
укр. Григорій Фіхтенгольц, 1888
Григорій Михайлович Фіхтенгольц (вимова: Григо́рій Миха́йлович Фіхтенго́льц)
https://forvo.com/word/григорій_фіхтенгольц/#uk

nebayduzhi.math@gmail.com

40. Fourier
https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier
фр. Joseph Fourier, 1768
Жозеф Фур’є (вимова: Жозе́ф Фур’є́)
https://forvo.com/word/joseph_fourier/#fr
https://forvo.com/word/jean_baptiste_joseph_fourier/#fr

41. Fresnel
https://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Jean_Fresnel
фр. Augustin-Jean Fresnel, 1788
Оґюста Френель (вимова: Оґюста́ Френе́ль)
заст. Огюстен Френель
https://forvo.com/word/augustin-jean_fresnel/#fr

42. Frobenius
https://en.wikipedia.org/wiki/Ferdinand_Georg_Frobenius
нім. Georg Frobenius, 1849
Ґеорґ Фробеніус (вимова: Ґео́рґ Фробе́ніус)
заст. Георг Фробеніус
https://forvo.com/word/ferdinand_georg_frobenius/#de

43. Frullani
https://it.wikipedia.org/wiki/Giuliano_Frullani
іт. Giuliano Frullani, 1795
Джуліано Фрулляні (вимова: Джуліа́но Фрулля́ні)
заст. Джуліано Фруллані
https://forvo.com/word/giuliano_frullani/#it

44. Gauß
https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss
нім. Carl Friedrich Gauß, 1777
Карл Ґаусс (вимова: Ка́рл Ґа́усс)
заст. Карл Гаусс
https://forvo.com/word/carl_friedrich_gauß/#de

45. Goldbach
https://en.wikipedia.org/wiki/Christian_Goldbach
нім. Christian Goldbach, 1690
Хрістіан Ґольдбах (вимова: Хрі́стіан Ґо́льдбах)
https://forvo.com/word/christian_goldbach/#de
https://forvo.com/word/goldbach/#de

nebayduzhi.math@gmail.com

---

46. Green
https://en.wikipedia.org/wiki/George_Green_(mathematician)
англ. George Green, 1793
Джордж Грін (вимова: Джóрдж Грíн)
https://forvo.com/word/green/#en

---

47. Guldin
https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Guldin
швейц. Paul Guldin, 1577
Пауль Ґульдін (вимова: Пáуль Ґýльдін)
заст. Пауль Гульдін
https://forvo.com/word/guldin/#de

---

48. Hadamard
https://en.wikipedia.org/wiki/Jacques_Hadamard
фр. Jacques Hadamard, 1865
Жак Адамар (вимова: Жáк Адамáр)
https://forvo.com/word/jacques_hadamard/#fr
https://forvo.com/word/jacques_salomon_hadamard/#fr

---

49. Hardy
https://en.wikipedia.org/wiki/G._H._Hardy
англ. Godfrey Hardy, 1877
Ґодфрі Харді (вимова: Ґóдфрі Хáрді)
заст. Годфрі Харді
https://forvo.com/word/g._h._hardy/#en

---

50. Hermite
https://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Hermite
фр. Charles Hermite, 1822
Шарль Ерміт (вимова: Шáрль Ермíт)
https://forvo.com/word/charles_hermite/#fr

---

51. Heron
https://en.wikipedia.org/wiki/Hero_of_Alexandria
гр. Ἥρων ο Αλεξανδρεύς, 10
Герон (вимова: Герóн)
https://forvo.com/word/ήρων_ο_αλεξανδρεύς/#el
https://forvo.com/word/ήρων/#el

---

52. Hestenes
https://en.wikipedia.org/wiki/Magnus_Hestenes
ам. Magnus Hestenes, 1906
Маґнус Хестінс (вимова: Ма́ґнус Хе́стінс)
заст. Магнус Хестінс
https://www.howtopronounce.com/magnus-hestenes

---

53. Huygens
https://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens
нід. Christiaan Huygens, 1629
Крістіан Хаґенс (вимова: Крі́стіан Ха́ґенс)
заст. Християн Гюйгенс
https://forvo.com/word/christiaan_huygens/#nl

---

54. Hölder
https://en.wikipedia.org/wiki/Otto_Hölder
нім. Otto Ludwig Hölder, 1859
Отто Хьольдар (вимова: О́тто Хьо́льдар)
заст. Отто Гельдер
https://forvo.com/word/hölder/#de

---

55. Jacobi
https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Gustav_Jacob_Jacobi
нім. Carl Jacobi, 1804
Карл Якобі (вимова: Ка́рл Яко́бі)
https://forvo.com/word/carl_jacobi/#de
https://forvo.com/word/carl_gustav_jacob_jacobi/#de

---

56. Jensen
https://en.wikipedia.org/wiki/Johan_Jensen_(mathematician)
дан. Johan Jensen, 1859
Йохен Єнсен (вимова: Йохе́н Є́нсен)
заст. Йохан Єнсен
https://forvo.com/word/johan_jensen/#da
https://forvo.com/word/johan_ludvig_william_valdemar_jensen/#da

---

57. Jordan
https://en.wikipedia.org/wiki/Camille_Jordan
фр. Camille Jordan, 1838
Каміль Жордан (вимова: Камі́ль Жорда́н)
https://forvo.com/word/camille_jordan/#fr

nebayduzhi.math@gmail.com

58. Joule
https://en.wikipedia.org/wiki/James_Prescott_Joule
англ. James Joule, 1818
Джеймс Джул (вимова: Дже́ймс Джу́л)
заст. Джеймс Джоуль
https://forvo.com/word/james_prescott_joule/#en

59. Kantorovich
https://en.wikipedia.org/wiki/Leonid_Kantorovich
рад. Leonid Kantorovich, 1912
Леонід Віталійович Канторович (вимова: Леоні́д Канторо́вич)
https://forvo.com/word/канторович/#ru

60. Kepler
https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler
нім. Johannes Kepler, 1571
Йоханес Кеплар (вимова: Йоха́нес Ке́плар)
заст. Йоганн Кеплер
https://forvo.com/word/johannes_kepler/#de

61. Kronecker
https://en.wikipedia.org/wiki/Leopold_Kronecker
нім. Leopold Kronecker, 1823
Леопольд Кронекар (вимова: Леопо́льд Кро́некар)
заст. Леопольд Кронекер
https://forvo.com/word/leopold_kronecker/#de
https://forvo.com/word/kronecker/#de

62. Kummer
https://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Kummer
нім. Ernst Kummer, 1810
Ернст Куммар (вимова: Е́рнст Ку́ммар)
заст. Ернст Куммер
https://forvo.com/word/ernst_kummer/#de
https://forvo.com/word/kummer/#de

63. L’Hôpital
https://en.wikipedia.org/wiki/Guillaume_de_l’Hôpital
фр. Guillaume François Antoine de L’Hôpital, 1661
Ґійом де Льопіталь (вимова: Ґійо́м де Льопіта́ль)
заст. Гійом де Льопіталь
https://forvo.com/word/guillaume_françois_antoine_de_l’hôpital/#fr
https://forvo.com/word/l’hôpital/#fr

nebayduzhi.math@gmail.com

---

64. Lagrange
https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange
фр. Joseph-Louis Lagrange, 1736
Жозеф Лаґранж (вимова: Жозе́ф Лаґра́нж)
заст. Жозеф Лагранж
https://forvo.com/word/joseph-louis_lagrange/#fr
https://forvo.com/word/joseph_lagrange/#fr

---

65. Laguerre
https://en.wikipedia.org/wiki/Edmond_Laguerre
фр. Edmond Laguerre, 1834
Едмон Лаґерр (вимова: Едмо́н Лаґе́рр)
https://forvo.com/word/laguerre/#fr

---

66. Lambert
https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Heinrich_Lambert
швейц. Johann Lambert, 1728
Йоханн Ламберт (вимова: Йо́ханн Ламбе́рт)
заст. Йоганн Ламберт
https://forvo.com/word/johann_heinrich_lambert/#gsw
https://forvo.com/word/lambert/#de

---

67. Edmund Landau
https://en.wikipedia.org/wiki/Edmund_Landau
нім. Едмунд Ландау, 1877
Едмунд Ландау (вимова: Е́дмунд Ланда́у)
https://forvo.com/word/edmund_landau/#de
https://forvo.com/word/landau/#de

---

68. Landen
https://en.wikipedia.org/wiki/John_Landen
англ. John Landen, 1719
Джон Ленден (вимова: Джо́н Ле́нден)
заст. Джон Ланден
https://forvo.com/word/john_landen/#en

---

69. Laplace
https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace
фр. Pierre-Simon Laplace, 1749
П’єр Лаплас (вимова: П’є́р Лапла́с)
https://forvo.com/word/pierre-simon_laplace/#fr

nebayduzhi.math@gmail.com

---

70. Lebesgue
https://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Lebesgue
фр. Henri Lebesgue, 1875
Анрі Льобеґ (вимова: Анрí Льобéґ)
заст. Анрі Лебег
https://forvo.com/word/henri_lebesgue/#fr
https://forvo.com/word/lebesgue/#fr

---

71. Legendre
https://en.wikipedia.org/wiki/Adrien-Marie_Legendre
фр. Adrien-Marie Legendre, 1752
Адрієн Льожондр (вимова: Адріє́н Льожóндр)
заст. Адрієн Лежандр
https://forvo.com/word/legendre/#fr
https://forvo.com/word/adrien-marie_legendre/#fr

---

72. Leibniz
https://en.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz
нім. Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646
Ґотфрід Ляйбніц (вимова: Ґóтфрід Ля́йбніц)
заст. Готфрід Лейбніц
https://forvo.com/word/gottfried_leibniz/#de
https://forvo.com/word/leibniz/#de

---

73. Lindemann
https://en.wikipedia.org/wiki/Ferdinand_von_Lindemann
нім. Ferdinand von Lindemann, 1852
Фердинанд фон Ліндеман (вимова: Фéрдинанд фон Лíндеман)
https://forvo.com/word/ferdinand_von_lindemann/#de

---

74. Liouville
https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Liouville
фр. Joseph Liouville, 1809
Жозеф Ліувілль (вимова: Жозéф Ліувíлль)
https://forvo.com/word/joseph_liouville/#fr

---

75. Lipschitz
https://en.wikipedia.org/wiki/Rudolf_Lipschitz
нім. Rudolf Lipschitz, 1832
Рудольф Ліпшиц (вимова: Рýдольф Лíпшиц)
https://forvo.com/word/rudolf_lipschitz/#de
https://forvo.com/word/lipschitz/#de

nebayduzhi.math@gmail.com

---

76. Lobachevsky
https://en.wikipedia.org/wiki/Nikolai_Lobachevsky
рос. Nikolai Lobachevsky, 1792
Ніколай Іванович Лобачевський (вимова: Ніколáй Лобачéвський)
заст. Микола Іванович Лобачевський
https://forvo.com/word/николай_иванович_лобачевский/#ru

---

77. Lyapunov
https://en.wikipedia.org/wiki/Aleksandr_Lyapunov
рос. Aleksandr Lyapunov, 1857
Олександр Михайлович Ляпунов (вимова: Олексáндр Ляпунóв)
https://forvo.com/word/александр_михайлович_ляпунов/#ru

---

78. Machin
https://en.wikipedia.org/wiki/John_Machin
англ. John Machin, 1686
Джон Мечін (вимова: Джóн Мéчін)

---

79. Maclaurin
https://en.wikipedia.org/wiki/Colin_Maclaurin
шот. Colin Maclaurin, 1698
Колін Маклорен (вимова: Кóлін Маклóрен)
https://forvo.com/word/maclaurin/#en

---

80. Marcinkiewicz
https://en.wikipedia.org/wiki/Józef_Marcinkiewicz
пол. Józef Marcinkiewicz, 1910
Юзеф Марчинкевич (вимова: Ю́зеф Марчинкéвич)
заст. Юзеф Марцинкевич
https://forvo.com/word/józef_marcinkiewicz/#pl

---

81. Mariotte
https://en.wikipedia.org/wiki/Edme_Mariotte
фр. Edme Mariotte, 1620
Едме Маріотт (вимова: Е́дме Маріóтт)
заст. Едм Маріотт
https://forvo.com/word/edme_mariotte/#fr

---

82. Markov
https://en.wikipedia.org/wiki/Andrey_Markov
рос. Andrey Markov, 1856
Андрій Андрійович Марков (вимова: Андрíй Мáрков)
https://forvo.com/word/андрей_марков/#ru

---

83. Mascheroni
https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenzo_Mascheroni
іт. Lorenzo Mascheroni, 1750
Лоренцо Маскероні (вимова: Лоре́нцо Маскеро́ні)
https://forvo.com/word/lorenzo_mascheroni/#it

---

84. Mertens
https://en.wikipedia.org/wiki/Franz_Mertens
пол. Franz Mertens, 1840
Франц Мертенс (вимова: Фра́нц Ме́ртенс)
https://forvo.com/word/franz_mertens/#de

---

85. Minkowski
https://en.wikipedia.org/wiki/Hermann_Minkowski
нім. Hermann Minkowski, 1864
Херман Мінковській (вимова: Хе́рман Мінко́вській)
заст. Герман Мінковський
https://forvo.com/word/hermann_minkowski/#de

---

86. Moivre
https://en.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre
фр. Abraham de Moivre, 1667
Абрахам де Муавр (вимова: Абраха́м де Муа́вр)
https://forvo.com/word/abraham_de_moivre/#fr

---

87. Méray
https://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Méray
фр. Charles Méray, 1835
Шарль Мере (вимова: Ша́рль Мере́)
https://forvo.com/word/charles_méray/#fr

---

88. Napier
https://en.wikipedia.org/wiki/John_Napier
шот. John Napier, 1550
Джон Нейпіа (вимова: Джо́н Не́йпіа)
заст. Джон Непер
https://forvo.com/word/john_napier/#en

---

89. Newton

https://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

англ. Isaac Newton, 1642

Айзек Ньютен (вимова: А́йзек Нью́тен)

заст. Ісаак Ньютон

https://forvo.com/word/isaac_newton/#en

---

90. Ohm

https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Ohm

нім. Georg Simon Ohm, 1789

Ґеорг Ом (вимова: Ґео́рг О́м)

заст. Георг Ом

https://forvo.com/word/georg_simon_ohm/#de

---

91. Ostrogradskiy

https://uk.wikipedia.org/wiki/Остроградський_Михайло_Васильович

укр. Михайло Остроградський, 1801

Михайло Васильович Остроградський (вимова: Миха́йло Васи́льович ОстроҐра́дський)

https://forvo.com/word/михайло_остроградський/#uk

---

92. Pascal

https://en.wikipedia.org/wiki/Étienne_Pascal

фр. Étienne Pascal, 1588

Етьєн Паскаль (вимова: Етьє́н Паска́ль)

https://forvo.com/word/étienne_pascal/#fr

https://forvo.com/word/pascal/#fr

---

93. Peano

https://en.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano

іт. Giuseppe Peano, 1858

Джузеппе Пеано (вимова: Джузе́ппе Пеа́но)

https://forvo.com/word/giuseppe_peano/#it

---

94. Poincaré

https://en.wikipedia.org/wiki/Henri_Poincaré

фр. Henri Poincaré, 1854

Анрі Пуанкаре (вимова: Анрі́ Пуанкаре́)

https://forvo.com/word/henri_poincaré/#fr

---

95. Poisson
https://en.wikipedia.org/wiki/Siméon_Denis_Poisson
фр. Siméon Denis Poisson, 1781
Сімеон Пуассон (вимова: Сімео́н Пуассо́н)
https://forvo.com/word/siméon-denis_poisson/#fr

---

96. Pythagoras
https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras
гр. Πυϑαγόρας, 570 до н. е.
Пітагорас (вимова: Пітаго́рас)
заст. Піфагор
https://forvo.com/word/πυϑαγόρας/#grc
https://forvo.com/word/πυϑαγόρας/#grc

---

97. Raabe
https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Ludwig_Raabe
укр.-швейц. Joseph Ludwig Raabe, 1801
Йозеф Раабе (вимова: Йо́зеф Раа́бе)
https://forvo.com/word/йозеф_раабе/#uk

---

98. Riemann
https://en.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann
нім. Bernhard Riemann, 1826
Бернхард Ріман (вимова: Бе́рнхард Рі́ман)
заст. Бернард Ріман
https://forvo.com/word/georg_friedrich_bernhard_riemann/#de
https://forvo.com/word/bernhard_riemann/#de

---

99. Roche
https://en.wikipedia.org/wiki/Édouard_Roche
фр. Édouard Roche, 1820
Едуард Рош (вимова: Едуа́рд Ро́ш)
https://forvo.com/word/édouard_roche/#fr

---

100. Rolle
https://en.wikipedia.org/wiki/Michel_Rolle
фр. Michel Rolle, 1652
Мішель Ролль (вимова: Міше́ль Ро́лль)
https://forvo.com/word/michel_rolle/#fr

---

101. Sapogov

рос. Nikolai Sapogov, 1915
Ніколай Олександрович Сапоґов (вимова: Ніколáй Сапоґóв)
заст. Микола Олександрович Сапогов
https://forvo.com/word/сапогов/#ru

---

102. Savart
https://en.wikipedia.org/wiki/Félix_Savart
фр. Félix Savart, 1791
Фелікс Савар (вимова: Фелíкс Савáр)
https://forvo.com/word/félix_savart/#fr

---

103. Schlömilch
https://en.wikipedia.org/wiki/Oskar_Schlömilch
нім. Oskar Schlömilch, 1823
Оскар Шльомільх (вимова: Óскар Шльóмільх)

---

104. Schwarz
https://en.wikipedia.org/wiki/Hermann_Schwarz
нім. Hermann Schwarz, 1843
Херман Шварц (вимова: Хéрман Швáрц)
заст. Герман Шварц
https://forvo.com/word/hermann_schwarz/#de
https://forvo.com/word/schwarz/#de

---

105. Seidel
https://en.wikipedia.org/wiki/Philipp_Ludwig_von_Seidel
нім. Philipp von Seidel, 1821
Філіп фон Зайдель (вимова: Фíліп фóн Зáйдель)
заст. Філіп фон Зейдель
https://forvo.com/word/philipp_ludwig_von_seidel/#de
https://forvo.com/word/seidel/#de

---

106. Simpson
https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Simpson
англ. Thomas Simpson, 1710
Томас Сімпсон (вимова: Тóмас Сíмпсон)
https://forvo.com/word/thomas_simpson/#en

---

107. Steiner
https://en.wikipedia.org/wiki/Jakob_Steiner
швейц. Jakob Steiner, 1796
Якоб Штайнер (вимова: Я́коб Шта́йнер)
заст. Якоб Штейнер
https://forvo.com/word/jakob_steiner/#gsw

---

108. Stieltjes
https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Joannes_Stieltjes
нід. Thomas Joannes Stieltjes, 1856
Томас Стілтьєс (вимова: То́мас Сті́лтьєс)
https://forvo.com/word/thomas_joannes_stieltjes/#nl

---

109. Stirling
https://en.wikipedia.org/wiki/James_Stirling_(mathematician)
шот. James Stirling, 1692
Джеймс Стьорлін (вимова: Дже́ймс Стьо́рлін)
заст. Джеймс Стірлінг
https://forvo.com/word/james_stirling/#en

---

110. Stokes
https://en.wikipedia.org/wiki/Sir_George_Stokes
ірл. George Stokes, 1819
Джордж Стокс (вимова: Джо́рдж Сто́кс)
https://forvo.com/word/sir_george_stokes/#en

---

111. Stolz
https://en.wikipedia.org/wiki/Otto_Stolz
австр. Otto Stolz, 1842
Отто Штольц (вимова: О́тто Што́льц)
https://forvo.com/word/otto_stolz/#de
https://forvo.com/word/stolz/#de

---

112. Sylvester
https://en.wikipedia.org/wiki/James_Joseph_Sylvester
англ. James Sylvester, 1814
Джеймс Сильвестар (вимова: Дже́ймс Сильве́стар)
заст. Джеймс Сильвестр
https://forvo.com/word/james_joseph_sylvester/#en
https://forvo.com/word/sylvester/#en

113. Tauber
https://en.wikipedia.org/wiki/Alfred_Tauber
словац. Alfred Tauber, 1866
Альфред Таубер (вимова: Альфре́д Та́убер)
https://forvo.com/word/alfred_tauber/#sk

114. Taylor
https://en.wikipedia.org/wiki/Brook_Taylor
англ. Brook Taylor, 1685
Брук Тейлор (вимова: Бру́к Те́йлор)
https://forvo.com/word/brook_taylor/#en

115. Töplitz
https://en.wikipedia.org/wiki/Otto_Toeplitz
нім. Otto Töplitz, 1881
Отто Тьопліц (вимова: О́тто Тьо́пліц)
https://forvo.com/word/toeplitz/#de

116. Torricelli
https://en.wikipedia.org/wiki/Evangelista_Torricelli
іт. Evangelista Torricelli, 1608
Еванджеліста Торрічеллі (вимова: Еванджелі́ста Торріче́ллі)
https://forvo.com/word/evangelista_torricelli/#it
https://forvo.com/word/torricelli/#it

117. Vandermonde
https://en.wikipedia.org/wiki/Alexandre-Théophile_Vandermonde
фр. Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735
Александер Вондермонд (вимова: Алекса́ндер Вондермо́нд)
заст. Александр Вандермонд
https://forvo.com/word/alexandre-théophile_vandermonde/#fr

118. Viviani
https://en.wikipedia.org/wiki/Vincenzo_Viviani
іт. Vincenzo Viviani, 1622
Вінченцо Вівіані (вимова: Вінче́нцо Вівіа́ні)
https://forvo.com/word/vincenzo_viviani/#it

---

119. Viète
https://en.wikipedia.org/wiki/François_Viète
фр. François Viète, 1540
Франсуа В’єт (вимова: Франсуа́ В’є́т)
заст. Франсуа Вієт
https://forvo.com/word/francois_viete/#fr

---

120. Voronyi
https://en.wikipedia.org/wiki/Georgy_Voronoy
укр. Георгій Вороний, 1868
Георгій Феодосійович Вороний (вимова: Ге́оргій Феодо́сійович Верони́й)
https://forvo.com/word/георгій_вороний/#uk

---

121. Waerden
https://en.wikipedia.org/wiki/Bartel_Leendert_van_der_Waerden
нід. Van der Waerden, 1903
Бартель ван дер Варден (вимова: Ба́ртель ван дер Ва́рден)
https://forvo.com/word/van_der_waerden/#nl
https://forvo.com/word/bartel_van_der_waerden/#nl

---

122. Wallis
https://en.wikipedia.org/wiki/John_Wallis
англ. John Wallis, 1616
Джон Волліс (вимова: Джо́н Во́лліс)
заст. Джон Валліс
https://forvo.com/word/wallis/#en

---

123. Weierstraß
https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass
нім. Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815
Карл Ваярштрасс (вимова: Ка́рл Ва́ярштрасс)
заст. Карл Веєрштрасс
https://forvo.com/word/Weierstraß/#de
https://forvo.com/word/karl_theodor_wilhelm_weierstraß/#de

---

124. Wheatstone
https://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Wheatstone
англ. Charles Wheatstone, 1802
Чарлз Вітстон (вимова: Ча́рлз Ві́тстон)
заст. Чарльз Вітстон
https://forvo.com/word/wheatstone/#en

---

125. Whitney
https://en.wikipedia.org/wiki/Hassler_Whitney
ам. Hassler Whitney, 1907
Хасслер Вітні (вимова: Хáсслер Вíтні)
https://forvo.com/word/whitney/#en

---

nebayduzhi.math@gmail.com

Глава 23

ПІДТРИМКА

23.1. Потрібна

764. Дуже

Бажаєте долучитися до перекладу наступної сторінки, розділу або тільки формули — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Бажаєте підтримати проєкт — завітайте до нашої сторінки в інтернеті:
https://nebayduzhi-math.azurewebsites.net

Знайшли помилку — пишіть на адресу:
nebayduzhi.math@gmail.com

Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 336 с. ISBN 978-617-656-897-1.

> Математичний термін множина (і пов'язані з ним множення, множник, многочлен та ін.) походить від давньоукраїнського слова много. І. Франко писав: «Якби ти знав, як много важить слово...»

Oxford English Dictionary

> Although some people of this name call themselves (dʒaʊl), and others (dʒəʊl) [the OED format
> for /dʒoʊl/], it is almost certain that James Prescott Joule (and at least some of his relatives) used (dʒuːl).