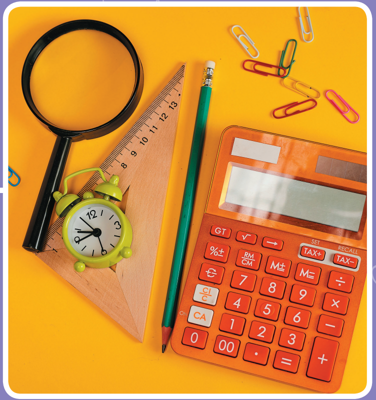
ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

ЛІЛІЯ БЄЛОВА, МАРИНА КОРНІЄНКО, ЛЮДМИЛА ПОЛЯКОВА

МАТЕМАТИКА
НАВКОЛО НАС

ШКІЛЬНА 5-9 БІБЛІОТЕКА

ЛЮДМИЛА ПОЛЯКОВА

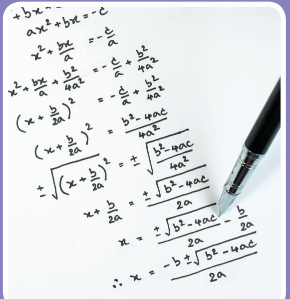


Усе впорядковується відповідно до чисел.

Піфагор

Щойно симетрія порушується, щось важливе втрачається.

Еммі Нетер



Математика — справа не тільки розуму, але й фантазії…

Фелікс Кляйн

Тільки неперервний рух уперед, угору — до нових вершин істини — така формула прекрасного в науці. І саме математика вносить цю красу в будь-яку науку.

Ніна Вірченко

Цілі числа — першоджерело математики.

Герман Мінковський

Гра в шахи — це немовби насвистування математичних мелодій.

Ґодфрі Гарольд Гарді

ЛІЛІЯ БЄЛОВА, МАРИНА КОРНІЄНКО, ЛЮДМИЛА ПОЛЯКОВА

МАТЕМАТИКА НАВКОЛО НАС

Посібник серії «Шкільна бібліотека»
для 5–9 класів закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків
Видавництво «Ранок»
2020

УДК 51:37.016(076)
Б43

Серія «Шкільна бібліотека»

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист Міністерства освіти і науки України
від 13.10.2020 № 1/11-7018)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Бєлова Л. П.
Б43 Математика навколо нас : посіб. серії «Шкільна бібліотека» для 5–9 кл. закл. загал. серед. освіти / Л. П. Бєлова, М. М. Корнієнко, Л. Ю. Полякова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2020. — 160 с. : іл. — (Серія «Шкільна бібліотека»).
ISBN 978-617-09-6796-1

Видання покликане допомогти читачеві поглянути уважно навкруги, зрозуміти, що математика дійсно навколо нас. У посібнику запропоновано логічні задачі, математичні ігри й фокуси, подано необхідні теоретичні відомості, наведено цікаві факти з історії математики.

Призначено для учнів 5–9 класів закладів загальної середньої освіти, учителів математики та інформатики.

УДК 51:37.016(076)

Інтернет-підтримка

ISBN 978-617-09-6796-1

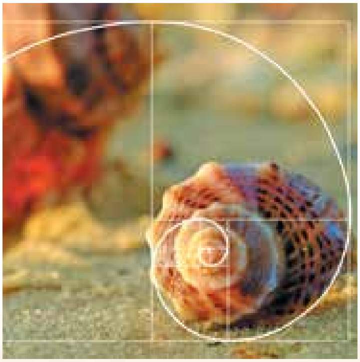
Друзі!

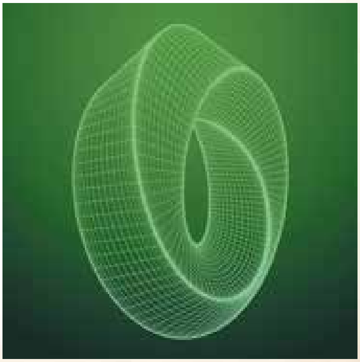
Для допитливого розуму навколишній світ цікавий і різноманітний. Навіть повсякденні справи можуть викликати такі запитання, відповіді на які знають лише науковці — математики, фізики, хіміки, економісти тощо.

Чому комп'ютер називають комп'ютером, тобто обчислювачем? Чи виконує він арифметичні дії так само, як і ми? Виявляється, у комп'ютерах застосовується двійкова система числення, яка, на відміну від звичної, має не десять, а лише дві цифри.

Як саме банк захищає кошти на вашому рахунку? Чому лише вам легко знімати гроші із власної картки? Зрозуміти це допоможе розділ математики, який називається криптографією (наука про шифрування). Сучасна криптографія базується на властивостях звичайних натуральних чисел.

Як діють комп'ютерні програми-архіватори? Що дозволяє їм стискати інформацію? Виявляється, існує зв'язок між цими







питаннями та завданнями на пошук фальшивої монети з-поміж справжніх, а також деякими фокусами про відгадування чисел. Цей зв'язок вивчає розділ математики, який називається теорією інформації.

Як поділити спадщину? Як нараховувати прибуток на банківський внесок? Який податок мають сплачувати робітники і підприємці? На ці питання неможливо відповісти, якщо не розумітися на частках і дробах.

Чи насправді математика — це лише формули і нічого цікавого? Сподіваємося, відповідь ви знайдете самі, читаючи цей посібник, розв'язуючи запропоновані задачі, граючи в логічні ігри, демонструючи математичні фокуси своїм друзям.

Допомогти вам поглянути уважно навкруги, зрозуміти, що математика дійсно навколо нас, і покликане видання, яке ви тримаєте в руках.

Автори

Цифри та системи числення

Поняття системи числення

Система числення — це спосіб запису чисел за допомогою заданого набору символів (цифр) і правила виконання дій над цими числами.

Системи числення поділяються на непозиційні та позиційні.

Непозиційні системи числення

У **непозиційних** системах числення внесок цифри в число не залежить від позиції цифри в записі цього числа. Саме́ число визначається як сума цифр, з яких воно складається. Розглянемо деякі непозиційні системи числення.

Єгипетська система числення

У III тисячолітті до нашої ери давні єгиптяни придумали свою систему числення. У ній для позначення чисел використовувалися спеціальні значки — ієрогліфи.

Цифри в єгипетській системі числення

Ієрогліф							
Назва ієрогліфа	Жердина	Дуга	Пальмовий листок	Квітка лотоса	Палець	Пуголовок	Людина, що молиться
Десяткове число	1	10	100	1000	10000	100000	1000000

Різними ієрогліфами позначалися не всі числа, а лише деякі — основні. Для запису інших чисел ієрогліфи повторювалися потрібну кількість разів.

Єгипетська система числення непозиційна, яка разом із тим була десятковою, оскільки ієрогліфи позначали такі основні числа, як 1, 10, 100, 1000 і т. д.

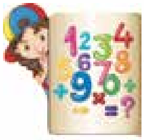
Задача. Проаналізуйте числа в таблиці. Складіть свої приклади чисел.

Цікавий факт

Один із найдавніших математичних текстів — папірус Ахмеса — написаний у Стародавньому Єгипті близько 2 тис. років тому і містить 25 задач. Довжина папіруса понад 5 м, а ширина близько 33 см.

Єгипетська система	Десяткова система
	2341
	332
	2410203

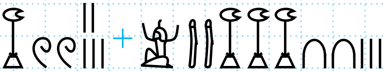
Давні єгиптяни додавали, дописуючи до ієрогліфів першого доданка ієрогліфи другого, а віднімали — викреслюючи однакові ієрогліфи.

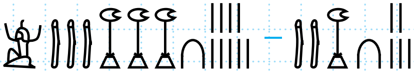


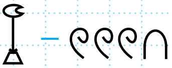
Задачі

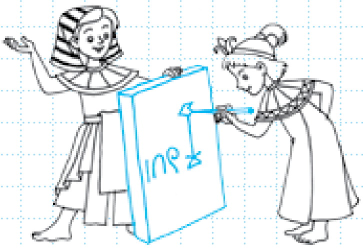
Обчислення єгиптян

Виконайте дії над числами, записаними в єгипетській системі числення. Перевірте обчислення, записавши результати в десятковій системі числення.

а) 

б) 

в) 



Римська система числення

Римська система числення застосовувалась понад 2,5 тисячі років тому в Стародавньому Римі. Цю систему використовують також і в наші дні. Відповідність цифр римської нумерації і десяткових чисел наведено в таблиці.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Щоб записати число, римляни подавали його у вигляді суми тисяч, півтисяч, сотень, півсотень, десятків, п’ятірок, одиниць. Наприклад:

12 = 10 + 1 + 1 = XII;

27 = 20 + 5 + 1 + 1 = XXVII;

538 = 500 + 30 + 5 + 1 + 1 + 1 = DXXXVIII.

Пізніше для запису чисел почали застосовувати такі правила.

1) Значення кожної меншої цифри, що стоїть праворуч від більшої, додається до значення більшої цифри.
   Наприклад: VI = V + I = 5 + 1 = 6.
2) Значення меншої цифри, що стоїть ліворуч від більшої, віднімається від значення більшої цифри.
   Наприклад: IV = V − I = 5 − 1 = 4.

1	I	11	XI	30	XXX
2	II	12	XII	40	XL
3	III	13	XIII	50	L
4	IV	14	XIV	60	LX
5	V	15	XV	70	LXX
6	VI	16	XVI	80	LXXX
7	VII	17	XVII	90	XC
8	VIII	18	XVIII	100	C
9	IX	19	XIX	500	D
10	X	20	XX	1000	M

Зверніть увагу!

У римській системі числення:

- поспіль можуть стояти не більше ніж три однакові цифри;
- ліворуч від більшої цифри може стояти тільки одна менша цифра.

Задачі

1. Записуємо числа

1) Запишіть римські числа арабськими цифрами:
а) XVII; б) CLXVI; в) MCDVIII.

2) Запишіть числа римськими цифрами:
а) 46; б) 99; в) 816; г) 1359.

2. Обчислення римлян

Визначте, у якій системі числення записано вирази, і виконайте дії. Результат запишіть у вихідній і десятковій системах числення.

а) XVI + VIII; б) CIX + XV; в) XXVI − XVIII.

3. Чарівні палички

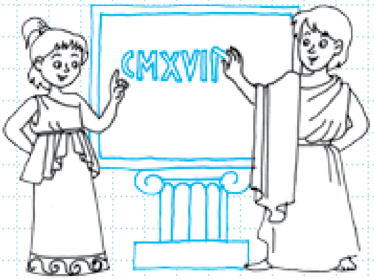
Із паличок складено хибні рівності з римськими числами. У кожній рівності перекладіть одну паличку так, щоб рівності стали істинними.

а) 

б) 

в) 

г) 



Позиційні системи числення

У **позиційних** системах числення внесок цифри в число залежить від позиції цієї цифри в записі числа. Позицію цифри в числі називають **розрядом.**

Позиційну систему числення характеризують такі поняття, як основа й алфавіт.

Основа системи числення — це кількість одиниць, які об'єднуються в одну одиницю наступного розряду.

Алфавіт системи числення — набір символів (цифр), які використовуються для записування чисел у цій системі числення. Кількість символів в алфавіті дорівнює основі системи.

Десяткова система числення

Основою десяткової системи числення є число 10, а її **алфавітом** — набір із десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Звичні нам арабські цифри араби запозичили в давніх індійців. Індійська десяткова позиційна система числення поширилася в Європі завдяки книгам відомого арабського математика Аль-Хорезмі, який жив у IX столітті. Ось чому цю систему числення в Європі назвали арабською.

Обговорюємо задачу

Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр, зображених на малюнку, якщо використати кожну цифру один раз? Знайдіть мінімальне й максимальне з цих чисел.

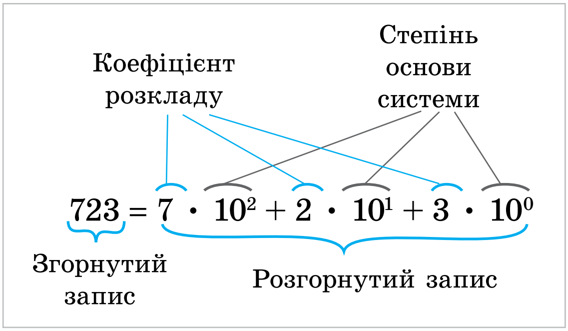
Підказка. Зверніть увагу на позиції цифр у числі.

Запис числа в десятковій системі числення

Число можна записати у згорнутому і розгорнутому вигляді.

Розгорнутим записом числа називають розклад числа за степенями основи системи числення.

Згорнутим записом числа називають запис, що складається тільки з коефіцієнтів розкладу.



Запис $7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$ називають **розкладом числа 723 за степенями числа 10**, а цифри 7, 2, 3 — **коефіцієнтами розкладу**.

Будь-яке число в нульовому степені дорівнює 1 ($10^0 = 1$).

Задача 1. Дано числа в десятковій системі числення. Запишіть розклад кожного з чисел за степенями числа 10, опускаючи пропущені розряди.

а) 4087; б) 2308; в) 50004.

Розв'язання пункту а

$4087 = 4 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$.

Задача 2. Запишіть числа в десятковій системі числення, якщо відомі їхні розклади за степенями числа 10.

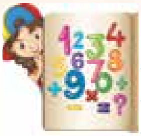
а) $7 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 = 76026$;

б) $2 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 10^2 + 5 \cdot 10^1 = 20039150$;

в) $10^6 + 7 \cdot 10^4 + 10^3 + 10^2 + 2 \cdot 10^0 = ?$

Задача 3. Чому може дорівнювати цифра десятків суми й різниці чисел B і A, якщо в числі A сім десятків, а в числі B вісім десятків? Наведіть приклади для кожного випадку.

Підказка. У ході додавання двох чисел із розряду одиниць у розряд десятків може перейти не більш ніж одна одиниця.



Задачі

1. Розклад числа

Розкладіть десяткові числа за степенями числа 10. Там, де можливо, запишіть розклад, опускаючи пропущені розряди.

а) 38; б) 9085; в) 24 707; г) 3 021 221.

2. Цифри й слова

Знайдіть трицифрове число, усі цифри якого різні, а всі слова в назві числа починаються з тієї самої літери.

3. Тільки непарні цифри

Марійка записала на дошці трицифрове число, а Петрик переставив у ньому цифри у зворотному порядку.

Чи може сума отриманих чисел записуватись тільки непарними цифрами? Якщо так, то яке число могла записати Марійка?

4. Мінімальне можливе

Настя записала на дошці всі натуральні числа від 1 до 30 без пробілів і одержала величезне число 123456789101112131415161718192021222324252627282930.

Викресліть із цього числа 20 цифр так, щоб вийшло число, найменше з можливих (воно не має починатися нулем).

5. Збільшити в п’ять разів без множення

Відомо, що перша цифра шестицифрового числа — 1, а остання — 7. Якщо останню цифру переставити на перше місце, то вийде число, в 5 разів більше за початкове.

Знайдіть початкове число.

6. Число-паліндром

Відомо, що в чотирицифрового числа-паліндрома сума цифр дорівнює числу, утвореному першими двома цифрами. Знайдіть це число.

Паліндромом називають слово, фразу або число, які читаються однаково зліва направо і справа наліво. Наприклад, слова ОКО, РАДАР; числа 131, 2662 — паліндроми.

7. Подорож потягом

Уздовж залізничної колії розставлені покажчики відстаней від початкового пункту до певного місця. Подорожуючи потягом, Петрик помітив покажчик відстані із двоцифровим числом. Рівно за годину Петрик знову поглянув у вікно й побачив другий покажчик. На ньому було двоцифрове число, записане тими самими цифрами, що й першого разу, але у зворотному порядку.

Ще за годину Петрик побачив третій покажчик, на якому було трицифрове число, причому його крайні цифри збіглися із цифрами першого покажчика, а середня була 0.

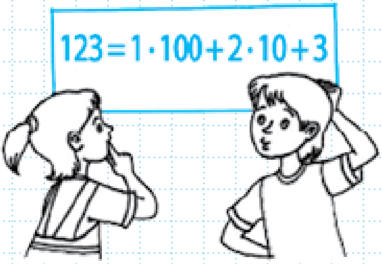
Які числа побачив Петрик на покажчиках і якою була швидкість потяга, якщо він рухався рівномірно?

8. Кругла сума

Скільки цифр у найменшому натуральному числі, сума цифр якого дорівнює 1 000 000?

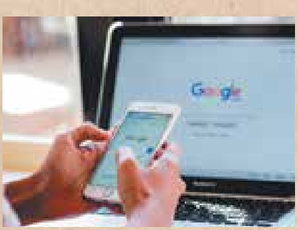
9. Цифра сотень

Відомо, що цифра сотень деякого числа А дорівнює 6. Визначте, чому може дорівнювати цифра сотень числа: а) 2А; б) 3А.



Що означає ім’я пошукової системи

Сьогодні пошукова система Google є першою за популярністю у світі. Напевно, кожному відомий її логотип: кольорові літери Google на білому тлі. А з’явилася ця назва так. Винахідники пошукової системи Ларрі Пейдж і Сергій Брін хотіли, щоб її назва вказувала на величезну кількість інформації, яку нова система може обробити. Їхній колега запропонував слово «гугол» — так у математиці називається число, що складається з одиниці зі ста нулями. Доменне ім’я виявилося вільним і було відразу зареєстроване. Щоправда, у його написанні було зроблено помилку: замість правильного «googol.com» уведено «google.com». Однак Ларрі Пейджу винайдене слово сподобалось, і його залишили як назву пошукової системи.



Десятковий час

На десятковій системі числення ґрунтується метрична система одиниць, прийнята в більшості країн світу. У ній для кожної фізичної величини існують одна основна одиниця й набір кратних і частинних одиниць. Кожна наступна одиниця в 10 разів більша за попередню. Винятком став, наприклад, час, де година складається не з 10, а з 60 часток (хвилин).

Усунути цю невідповідність спробували під час Великої французької революції. Так, 1793 року було запроваджено десятковий час. Добу поділили на 10 частин, ці частини — знову на 10. Рік мав складатися з 10 місяців, для яких придумали нові назви. Однак ця ідея виявилася нежиттєздатною.

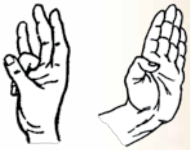
У Франції наприкінці XVIII століття навіть виготовили кишеньковий золотий годинник, який показував час у десятковій системі. Годинник показував тиждень із 10 діб, добу з 10 годин, годину зі 100 хвилин і хвилину з 10 секунд.

- 1 десяткова година = 0,1 доби = 2,4 години;
- 1 десяткова хвилина = 0,001 доби = 1,44 хвилини;
- 1 десяткова секунда = 0,00001 доби = 0,864 секунди.

Недесяткові позиційні системи числення

У повсякденному житті ми користуємося не тільки десятковою системою числення. Доба складається з 24 годин, хвилина з 60 секунд. І зараз штучний товар у деяких країнах пакують не по 10, а по 12.

У давнину вельми поширеною була дванадцяткова система числення. Її походження пов’язане з лічбою на пальцях: за одиницю брали фаланги пальців, а великий палець був лічильним інструментом. Розряди у дванадцятковій системі мали спеціальні назви.



Дюжина — міра лічби однорідних предметів, яка дорівнює 12.
Грос — міра лічби, що дорівнює дюжині дюжин, тобто 12 · 12 = 144.
Маса — міра лічби, що дорівнює дюжині гросів, тобто 12 · 144 = 1728.

Обговорюємо задачу

Марійка має терези та важки: два важки по 1 граму, два важки по 3 грами і два важки по 9 грамів. Важки можна класти тільки на одну шальку терезів. Чи зможе Марійка за їхньою допомогою відміряти будь-яке ціле число грамів від 1 до 26? Скільки важків кожної маси знадобиться, щоб відміряти потрібне число грамів? Продовжте таблицю.

Маса, г	Кількість важків		
	 9 г ($9 = 3^2$)	 3 г ($3 = 3^1$)	 1 г ($1 = 3^0$)
1	0	0	1
2	0	0	2
3	0	1	0

Подання чисел у позиційних системах числення з основою менше 10

Розглянемо трійкову систему числення. **Основою** трійкової системи числення є число 3, **алфавітом** — набір цифр: 0, 1, 2.

Записати число в трійковій системі числення — означає розкласти це число за степенями числа 3.

Наприклад:

Основа системи числення

Коефіцієнт розкладу

Степінь основи системи числення

$$\underbrace{12_3}_{\text{Згорнутий запис}} = \underbrace{1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0}_{\text{Розгорнутий запис}}$$

У згорнутому записі після числа зазначають основу системи числення. Для чисел, записаних у десятковій системі, зазвичай основу не вказують.

Користуючись розв'язанням попередньої задачі про терези й важки, запишемо числа від 1 до 10 у трійковій системі числення.

Десяткова система	Трійкова система		Десяткова система	Трійкова система	
	розгорнутий запис	згорнутий запис		розгорнутий запис	згорнутий запис
1	$1 \cdot 3^0$	1_3	6	$2 \cdot 3^1$	20_3
2	$2 \cdot 3^0$	2_3	7	$2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$	21_3
3	$1 \cdot 3^1$	10_3	8	$2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$	22_3
4	$1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$	11_3	9	$1 \cdot 3^2$	100_3
5	$1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$	12_3	10	$1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^0$	101_3

Задача 1. Петрик обчислив суму всіх трійкових чисел у діапазоні від 10_3 до 100_3. Яке число отримав Петрик? Відповідь подайте у трійковій системі числення.

Підказка. Випишіть усі трійкові числа, які належать до зазначеного діапазону.

Основою позиційної системи числення може бути будь-яке натуральне число p, відмінне від одиниці. **Алфавітом** p-кової системи є набір цифр: 0, 1, ..., p–1.

Записати число в p-ковій системі числення — означає розкласти це число за степенями числа p.

Наприклад: $213_p = 2 \cdot p^2 + 1 \cdot p^1 + 3 \cdot p^0$;

$$1232_4 = 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0.$$

Розкладання за степенями основи системи числення називають **розгорнутим записом числа,** наприклад:

$$12_3 = 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0,\ 12_{10} = 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0.$$

Задача 2. Запишіть у розгорнутому вигляді числа:

а) 1002200_3; б) 224031_5; в) 21004507_8.

Розв'язання пункту а

$$1002200_3 = 1 \cdot 3^6 + 0 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0.$$

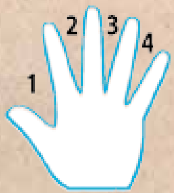
Цікаві факти

«Військова» система числення

У військових частинах найчастіше використовується ділення на чотири підрозділи. Зазвичай у полку чотири батальйони, у батальйоні — чотири роти, у роті — чотири взводи і так далі. Виходить, у військових на кожній «позиції» може бути до чотирьох одиниць! Військові мислять немовби в системі числення з основою 4.

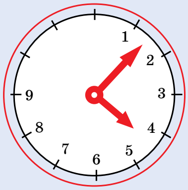
Як рахують індіанці юкі

Четвіркову систему з давніх-давен використовують індіанці юкі в Каліфорнії й споріднене з ними плем'я в Південній Америці — вони рахують на проміжках між пальцями.



Подання чисел у позиційних системах числення з основою більше 10

Обговорюємо задачу



Задача «Циферблат». Ви знаєте, що одна з деталей годинника називається циферблатом. Однак 10, 11 і 12 — не цифри, а числа. А чи можна зробити так, щоб на циферблаті використовувалися тільки цифри?

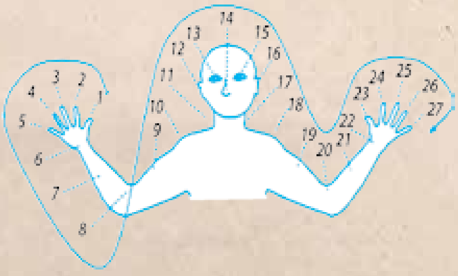
Підказка. Придумайте позначки для трьох нових цифр.

У системах числення, в яких основа *p* більша за 10, для позначення цифр використовують десять десяткових цифр і букви латинського алфавіту: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C і т. д. Наприклад, алфавіт 16-кової системи числення складається з 16 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Цікавий факт

27-кова система числення

Оксапмін — народ з Нової Гвінеї, який славиться своєю 27-ковою системою числення. Подивіться на малюнок. Починаючи з великого пальця на правій руці й закінчуючи великим на лівій тіло людини утворює 27 точок, за ними і рахують оксапмінці. А що далі? А далі йде друга людина… І все повторюється…



Задача 1. Визначте, яку мінімальну основу повинна мати система числення, якщо в ній записані числа:

а) 35, 984, 1010, A219, 678;
б) 5112, 346, 1035, 645;
в) A3, BC15, 2C0, B46, 789;
г) F14, BC25, 3A098, 6DE, AA7.

Розв'язання пункту а

1) Визначимо максимальну цифру, яка використовується для запису чисел у цій системі числення. Це цифра A.
2) Порахуємо, скільки цифр містить алфавіт цієї системи числення. Це всі цифри від 0 до 9 і символ A. Усього 11 цифр.
3) Кількість цифр в алфавіті системи числення дорівнює основі системи. Отже, мінімальна основа цієї системи — 11.

Задача 2. Запишіть у розгорнутому вигляді числа:

а) 14351_{16}; б) 143511_8; в) $1A35C1_{16}$.

Розв'язання пункту а

$14351_{16} = 1 \cdot 16^4 + 4 \cdot 16^3 + 3 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0$.

Задача 3. Запишіть у згорнутому вигляді числа:

а) $1 \cdot 11^5 + 4 \cdot 11^3 + A \cdot 11^2 + 9 \cdot 11^1 = 104A90_{11}$
б) $B \cdot 16^4 + C \cdot 16^3 + 5 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + E \cdot 16^0 = ?$
в) $C \cdot 16^5 + A \cdot 16^3 + 8 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16^1 = ?$

Арифметичні операції в недесяткових позиційних системах числення

Арифметичні операції додавання та множення в усіх позиційних системах числення виконуються за допомогою спеціальних таблиць, аналогічних тим, які ми використовуємо в десятковій системі. Віднімання й ділення — операції, обернені відносно додавання та множення.

Дії над числами виконуються за звичайними правилами додавання, віднімання, множення та ділення у стовпчик. Для всіх систем числення справджуються такі арифметичні закони, як переставний, сполучний і розподільний.

Користуючись таблицями додавання та множення для трійкової системи числення, виконаємо дії в трійковій системі числення (мал. *а*–*в*).

а)

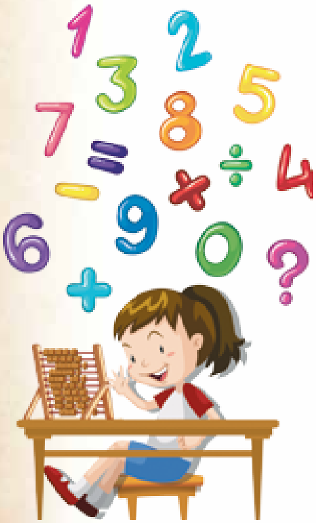
$$\begin{array}{r} 212_3 \\ +\quad 12_3 \\ \hline 1001_3 \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{r} 210_3 \\ -\quad 12_3 \\ \hline 121_3 \end{array}$$

в)

$$\begin{array}{r} 212_3 \\ \times\quad 12_3 \\ \hline 1201 \\ +\quad 212 \\ \hline 11021_3 \end{array}$$



Таблиці для трійкової системи числення

додавання

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

множення

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Задача 1. Заповніть математичні килимки так, щоб були правильними дії, виконані:

а) у п’ятірковій системі числення;

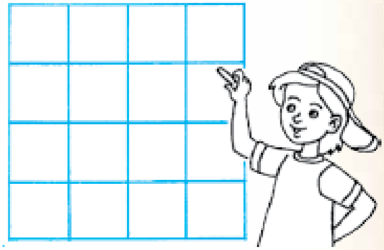
б) у трійковій системі числення.

3	+	2	=	
+				−
				4
=				=
11	−		=	

	×	2	=	11
+				+
=				=
12	×		=	101

Задача 2. Знайдіть у таблиці недопустимі записи чисел. Поясніть свій вибір.

26_9	145_5	200_3	$AA92_{11}$
128_8	2105_6	102_2	560_{11}
BA_{16}	2611_7	3210_4	222_3
7760_7	$A2E_{14}$	$290A_{10}$	102_{48}



Підказка. Визначте максимальну цифру, яка використовується для запису чисел у певній системі числення.

Задачі

1. Арифметичні дії

З’ясуйте, у якій системі числення виконано такі арифметичні дії:

а) 23 + 14 = 42;　　в) 5 · 5 = 41;

б) 51 − 15 = 33;　　г) 72 : 5 = 14.

2. Які числа?

Запишіть у порядку спадання всі десяткові натуральні числа, не більші за 26, запис яких у трійковій системі числення закінчується двома однаковими цифрами.

3. День народження

Марійка написала твір: «Нещодавно мій друг Петрик запросив мене на день народження — йому виповнилося 110 років. На святі зібралося 112 дітей, і всі з одного класу. Ми дуже любимо математику й порахували, що в нас разом 1001 рука.

Мама Петрика спекла 10 тортів, а Петрик з татом прикрасили кімнату 1100 повітряними кульками. Було дуже весело, і ми розійшлися по домівках тільки о 101 годині вечора».

Розшифруйте Марійчину розповідь. Яку систему числення використала в ній Марійка?

4. Точно, як в аптеці

Запропонуйте набір із чотирьох важків різної маси, за допомогою яких можна відміряти на шалькових аптекарських терезах будь-яку цілу кількість грамів від 1 до 40.

5. Фокус «Угадування числа»

Попросіть кого-небудь із друзів задумати число від 1 до 15 і дайте йому або їй набір із 4 «чарівних» карток, на кожній з яких написано свій набір чисел.

№ 1	1	3	5	7	9	11	13	15
№ 2	2	3	6	7	10	11	14	15
№ 3	4	5	6	7	12	13	14	15
№ 4	8	9	10	11	12	13	14	15

Нехай вам повернуть ті картки, які містять задумане число. Це число ви можете миттєво знайти, складаючи перші числа повернених карток. Розгадайте секрет фокуса.

6. Транспортна задача

Розшифруйте ребуси, записані у вісімковій системі числення.

а)
$$\begin{array}{ccccc} & \text{П} & \text{О} & \text{Р} & \text{Т} \\ + & \text{П} & \text{О} & \text{Р} & \text{Т} \\ + & \text{П} & \text{О} & \text{Р} & \text{Т} \\ \hline & \text{М} & \text{О} & \text{Р} & \text{Е} \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{ccccc} & \text{А} & \text{В} & \text{Т} & \text{О} \\ + & \text{А} & \text{В} & \text{Т} & \text{О} \\ + & \text{А} & \text{В} & \text{Т} & \text{О} \\ \hline \text{Г} & \text{А} & \text{Р} & \text{А} & \text{Ж} \end{array}$$

7. Математичні ребуси

Визначте, у якій системі числення виконано дії. Відновіть їх, замінивши зірочки цифрами.

а)
$$\begin{array}{r} 1*01 \\ +\quad 1** \\ \hline 10100 \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r} 21*02 \\ +\quad *1212 \\ \hline *2*021 \end{array}$$

Переведення чисел з однієї системи числення в іншу

Обговорюємо задачу

Уявіть, що у вас є дві коробки сірників по 25 сірників у кожній, три коробки по 5 сірників у кожній і ще один сірник. Скільки всього сірників?

Запишемо розв'язок у вигляді арифметичного виразу:

$$2 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 1 = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 66.$$

Що вам нагадує запис?

Переведення чисел із *p*-кової системи числення в десяткову

На підставі розглянутої задачі сформулюємо **алгоритм переведення чисел з *p*-кової системи числення в десяткову.**

1. Записати розклад числа за степенями основи системи числення.
2. Обчислити значення отриманого виразу в десятковій системі.

Вільям Джордж Го́рнер (1786–1837)

Англійський математик Вільям Горнер вигадав оригінальний алгоритм, що використовується для переведення чисел з однієї позиційної системи в іншу. Цей алгоритм називають схемою Горнера.

Задача 1. Визначте, яким десятковим числам відповідає число 10101, записане в системі числення: а) двійковій; б) трійковій; в) четвірковій; г) п'ятірковій.

Задача 2. Запишіть числа, подані в різних системах числення, у порядку зростання.

а) 35_{10}, 36_8, 54_6, 100101_2;

б) 111001_2, 10012_3, 50_6, 25_{10}.

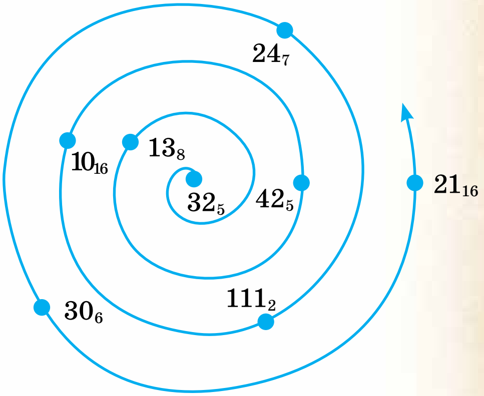
Підказка. Переведіть усі числа в десяткову систему числення й порівняйте їх.

Задача 3. Марійка накреслила трикутник, довжини сторін якого дорівнюють 11011_2, 12_8 і 35_6. Знайдіть периметр цього трикутника.

Підказка. Переведіть усі числа в десяткову систему числення.

Задача 4. **«Числова спіраль»**

Переведіть числа, записані в різних системах числення, в десяткову систему (починаючи від центра спіралі). Десяткові числа замініть буквами українського алфавіту, які мають відповідні порядкові номери, і запишіть отримане слово.



Переведення чисел із десяткової системи числення в систему з іншою основою

Обговорюємо задачу

Задача-фокус

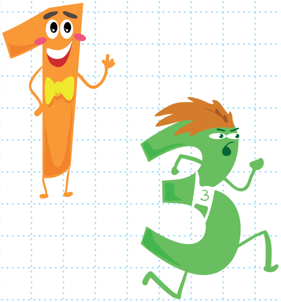
Задумайте чотирицифрове число, що складається з різних цифр. Поділіть це число на 10. Запишіть остачу. Неповну частку знову поділіть на 10 з остачею. Продовжуйте ділення, доки в неповній частці не одержите нуль. Запишіть остачі в порядку, оберненому до порядку їх одержання. Що ви отримали?

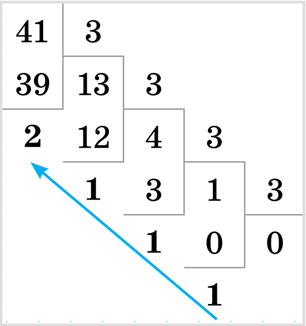
Задача 5. За аналогією до попередньої задачі виконайте послідовне ділення на 3 із остачею для чисел: а) 41; б) 607. Запишіть остачі в порядку, оберненому до порядку їх одержання. Перевірте, чи є отримані числа записами вихідних чисел у трійковій системі числення.

Розв'язання пункту а

Число 41.

1) Поділимо дане число на 3 із остачею і продовжимо ділення, доки в неповній частці не одержимо 0.





2) Запишемо остачі в порядку, оберненому до порядку їх одержання: 1112.
3) Запишемо отримане число в згорнутому вигляді в трійковій системі числення: 1112_3.
4) Виконаємо перевірку:
$1112_3 = 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 27 + 9 + 3 + 2 = 41$.

Сформулюємо **алгоритм переведення числа з десяткової системи в *p*-кову систему числення.**

1. Число поділити з остачею на число *p*.
2. Неповну частку від ділення знову поділити на *p*.
3. Продовжувати ділення, доки неповна частка не стане дорівнювати 0.
4. Записати всі одержані остачі в порядку, оберненому до порядку їх одержання.

Задачі

1. Переводимо число

Переведіть число 138 з десяткової системи числення: а) у трійкову; б) у п’ятіркову; в) у вісімкову.

2. З десяткової у сімкову

Переведіть із десяткової системи числення у сімкову числа: а) 35; б) 79; в) 268; г) 1000.

3. Обчислення добутку

Обчисліть добуток чисел 1122_3 і 1235_6. Результат подайте в п’ятірковій системі числення.

4. Переводимо числа

Переведіть: а) числа 11_6; 255_6; 1024_6 у десяткову систему числення; б) число 204 з десяткової системи числення у двійкову, одинадцяткову й сімкову.

5. Числа за спаданням

Запишіть числа, подані в різних системах числення, за спаданням:

а) 11001_4, 122_8, 221_7, 32_{10}; б) 144_8, 104_{10}, 110010_2.

6. Найбільше двоцифрове число

Визначте, якому десятковому числу відповідає найбільше двоцифрове число в заданій системі числення:

а) двійковій;
б) трійковій;
в) п’ятірковій;
г) вісімковій.

7. Зашифрована розповідь

Петрик записав у своєму зошиті: «Мені 102 роки, я навчаюсь у 20-му класі. З математики я найкращий учень у класі, одержую оцінки, не нижчі за 101». Розшифруйте розповідь Петрика.

Двійкова система числення

Усі ви чули, що комп'ютери працюють із двійковою системою числення. Як виникла ця система? Невже тільки завдяки комп'ютерам?

Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716)

Видатний німецький філософ, математик Готфрід Вільгельм Лейбніц першим описав двійкову систему числення й запропонував проєкт обчислювальної машини, що працює в цій системі. Ця ідея Лейбніца виявилася затребуваною лише через 250 років.

Обговорюємо задачу

У центрі озера виріс один лотос. Щодня кількість лотосів подвоювалась, і на десятий день уся поверхня озера була вкрита лотосами.

1) Скільки днів знадобилося, щоб лотосами вкрилася половина озера?
2) Полічіть, скільки лотосів виросло на десятий день.

Дні	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кількість лотосів	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

3) Що можна сказати про числа, записані в другому рядку таблиці?

Подання чисел у двійковій системі числення

Запишемо основу й алфавіт двійкової системи числення та наведемо приклади двійкових чисел, записавши їх у згорнутому й розгорнутому вигляді.

Основою двійкової системи числення є число 2. **Алфавіт** двійкової системи — 0, 1.

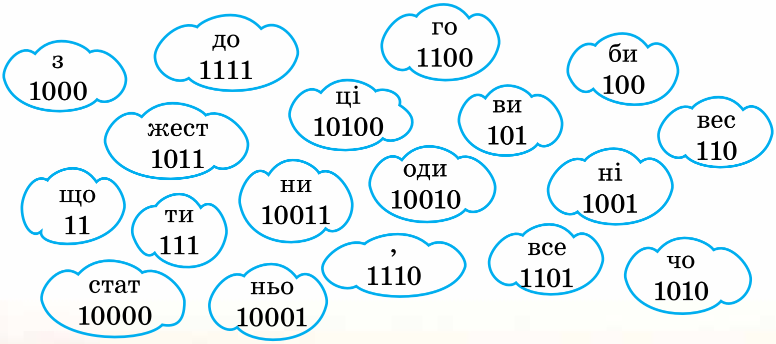
Приклад запису числа у двійковій системі числення:

$$1001_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0.$$

Розгляньте таблицю відповідності перших п'ятнадцяти чисел десяткової і двійкової систем числення. Скільки у двійковій системі числення одноцифрових, двоцифрових, трицифрових чисел? А скільки п'ятицифрових чисел?

Система числення			
десяткова	двійкова	десяткова	двійкова
0	0	8	1000
1	1	9	1001
2	10	10	1010
3	11	11	1011
4	100	12	1100
5	101	13	1101
6	110	14	1110
7	111	15	1111

На початку XVIII століття на прохання Г. Лейбніца було виготовлено медаль, присвячену двійковій системі числення. По краю медалі було вибито напис. Прочитайте цей напис, розташувавши в порядку зростання двійкові числа, зображені на малюнку.



Арифметичні дії у двійковій системі числення

Обговорюємо задачу

Згадайте правила, за якими виконуються арифметичні дії в позиційних системах числення.

Розгляньте таблиці додавання та множення для двійкової системи числення.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

За якими правилами виконуються дії додавання та множення у двійковій системі числення?

Задача 1. Виконайте арифметичні дії у двійковій системі числення.

а) $10010_2 + 1010_2$;

б) $11101_2 + 11011_2$;

в) $11011_2 \cdot 1101_2$;

г) $11010101_2 - 1110_2$.

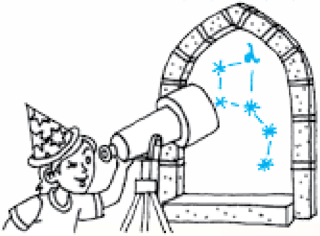
Розв'язання пункту а

Виконаємо додавання в стовпчик.

$$\begin{array}{r} 10010 \\ +\;\;1010 \\ \hline 11100 \end{array}$$

Задача 2. Марійка й Петрик замінили деякі цифри в рівності зірочками. Відновіть рівність, якщо відомо, що додавання виконано у двійковій системі числення.

$$\begin{array}{r} 11*1*1*0*00 \\ +\;\;1000110 \\ \hline 111001001 1* \end{array}$$



Зв'язок між системами числення з основою 2^n

Обговорюємо задачу

У дворі лежали 3 в'язки дров по 4 полінця в кожній. Скільки можна зробити в'язок дров по 2 полінця в кожній? Чи доведеться перелічувати всі полінця і збирати їх у в'язки по 2 або є інший спосіб для підрахунку в'язок?

Переводити числа із систем числення з основою $p = 2^n$ у двійкову і навпаки можна, не використовуючи десяткової системи числення.

Переведення чисел із системи числення з основою 2^n у двійкову

Задача 3. Переведіть у двійкову систему числення числа: а) 23_4; б) 47_8.

Розв'язання пункту а. Переведення числа 23_4

1) Основа четвіркової системи числення: $p = 4 = 2^2$.
2) Алфавіт четвіркової системи числення складається з цифр: 0, 1, 2, 3.
3) У двійковій системі числення одноцифрові числа подаються в такому вигляді:

$$0_4 — 0_2 \qquad 1_4 — 1_2 \qquad 2_4 — 10_2 \qquad 3_4 — 11_2$$

Отже, будь-яка цифра в четвірковій системі числення подається двійковим кодом (групою) з двох цифр:

$$0 — 00 \qquad 1 — 01 \qquad 2 — 10 \qquad 3 — 11$$

Таким чином, для системи числення з основою 2^2 двійковий код складатиметься із двох цифр, з основою 2^3 — із трьох цифр, з основою 2^n — із n цифр.

4) Замінимо кожну цифру числа 23_4 її двійковим кодом і отримаємо: $23_4 = 1011_2$.

5) Виконаємо перевірку: $23_4 = 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 8 + 3 = 11_{10}$;
$1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11_{10}$.

Відповідь: 1011_2.

Розв'язання пункту б. Переведення числа 47_8

1) Основа вісімкової системи числення: $p = 8 = 2^3$.

2) Алфавіт вісімкової системи числення складається з цифр:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

3) У двійковій системі числення одноцифрові числа подаються в такому вигляді:

0_8 — 0_2 2_8 — 10_2 4_8 — 100_2 6_8 — 110_2
1_8 — 1_2 3_8 — 11_2 5_8 — 101_2 7_8 — 111_2

Отже, будь-яка цифра у вісімковій системі числення подається двійковим кодом (групою) з трьох цифр:

0 — 000 2 — 010 5 — 101 6 — 110
1 — 001 3 — 011 4 — 100 7 — 111

4) Замінимо кожну цифру числа 47_8 її двійковим кодом.

5) Виконаємо перевірку.

Цікавий факт

Комп'ютери і системи числення

Під час вивчення комп'ютерів особливий інтерес становлять двійкова, вісімкова та шістнадцяткова системи числення. Переведення чисел з однієї цієї системи в іншу відбувається досить легко. А коди, які у двійковій системі є довгими, у шістнадцятковій подаються доволі компактно. Широкого застосування шістнадцяткова система набула для запису кодів помилок, що виникають під час виконання програмних продуктів. Також ця система використовується для кодування кольорів у комп'ютері. У вигляді шістнадцяткового коду записуються номери символів у стандарті Юнікод. Ці коди стандартизовані, за допомогою спеціальних кодових таблиць можна визначити, яка помилка відбулася в системі, який колір застосовано, який символ введено.

Сформулюємо **алгоритм переведення числа із системи числення з основою 2^n у двійкову.**

1. Подати основу вихідної системи числення у вигляді степеня 2^n і знайти n.
2. Замінити кожну цифру вихідного числа n-розрядним двійковим кодом (групою з n двійкових цифр).

Переведення чисел із двійкової системи числення в систему числення з основою 2^n

Задача 4. Переведіть число 1101101_2 із двійкової системи числення: а) у четвіркову систему; б) у вісімкову систему.

Розв'язання пункту а

Переведення в четвіркову систему.

1) Подамо основу шуканої системи числення у вигляді степеня 2^n: $p = 4 = 2^2$.
2) Будь-яка цифра в системі числення з основою 2^n подається двійковим кодом з n цифр. Отже, у нашому випадку двійковий код міститиме дві двійкові цифри.
3) Розіб'ємо справа наліво цифри числа 1101101_2 на групи, що складаються з двох двійкових цифр:
   1 10 11 01 = 01 10 11 01
4) Замінимо одержані групи двійкових цифр відповідними цифрами четвіркової системи:
   1 2 3 1.
5) Маємо: $1101101_2 = 1231_4$.
6) Виконаємо перевірку:
   $1101101_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$
   $= 64 + 32 + 8 + 4 + 1 = 109_{10}$;
   $1231_4 = 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 =$
   $= 64 + 32 + 12 + 1 = 109_{10}$.

Відповідь: 1231_4.

Розв'язання пункту б

Переведення у вісімкову систему.

1) Подамо основу шуканої системи числення у вигляді степеня 2^n: $p = 8 = 2^3$.
2) Будь-яка цифра в системі числення з основою 2^n подається двійковим кодом з n цифр. Отже, у нашому випадку двійковий код міститиме три двійкові цифри.
3) Розіб'ємо справа наліво цифри числа 1101101_2 на групи, що складаються з трьох двійкових цифр:

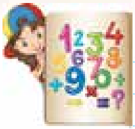
   $1\quad 101\quad 101 = 001\quad 101\quad 101$
4) Замінимо одержані групи двійкових цифр відповідними цифрами вісімкової системи: 1 5 5.
5) Маємо: $1101101_2 = 155_8$.
6) Виконаємо перевірку: $1101101_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 32 + 8 + 4 + 1 = 109_{10}$; $155_8 = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 64 + 40 + 5 = 109_{10}$.

Відповідь: 155_8.

Сформулюємо **алгоритм переведення числа з двійкової системи числення в систему числення з основою 2^n.**

1. Подати основу шуканої системи числення у вигляді степеня 2^n.
2. Розбити цифри двійкового числа справа наліво на групи по n цифр у кожній.
3. Якщо в останній групі зліва цифр виявиться менше, ніж n, то групу необхідно доповнити зліва нулями до n.
4. Замінити кожну групу цифр відповідною цифрою в системі числення з основою 2^n.

Задача 5. Переведіть число 163_8 у двійкову, а потім у четвіркову систему числення.



Задачі

1. За спаданням

Запишіть за спаданням числа, подані у двійковій системі числення.

11_2 1001_2 111_2 100001_2 10_2

1101_2 100_2 110000_2 10001_2

2. Арифметичні дії

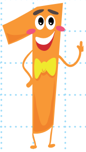
Виконайте дії у двійковій системі числення:

а) $101001_2 + 1011_2$; в) $1111101_2 - 1101101_2$;

б) $1110_2 + 111_2$; г) $10101101_2 \cdot 101_2$.

3. Двійковий ребус

Додавання виконано у двійковій системі числення. Відновіть рівність, замінивши зірочки цифрами.



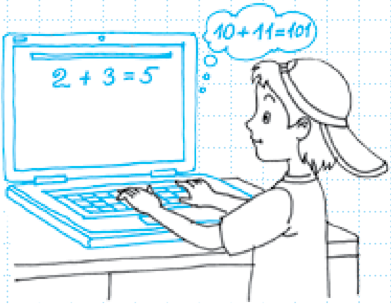
$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & * \\ + & & & 1 & * & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 1 \end{array}$$

4. Переведення чисел

Переведіть:

а) число 22533_8 у двійкову, а потім четвіркову систему числення;

б) число 1001010111100_2 у четвіркову й вісімкову системи числення.

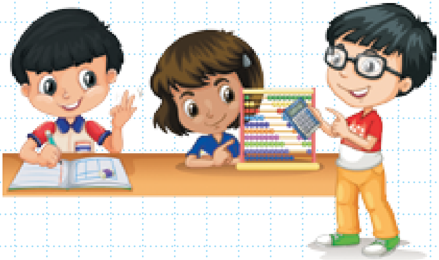


5. Магічний квадрат

Подайте значення наведених виразів у десятковій системі числення і впишіть їх у клітинки квадрата. Чим цікавий квадрат, який ви отримали?

1) $100_2 - 10_2$;
2) $101_2 + 10_2$;
3) $110_2 + 0_2$;
4) $4_{16} + 101_2$;
5) $12_8 - 101_2$;
6) $300_4 : 300_4$;
7) $2_8 \cdot 2_{16}$;
8) $F_{16} - C_{16}$;
9) $10_8 - 0_8$.

1	2	3
4	5	6
7	8	9



Магічний квадрат — це клітинковий квадрат, у якому суми чисел кожного ряду (рядка, стовпця, діагоналі) є рівними.

6. Сигнальний пристрій

Сигнальний пристрій складається з ламп, кожна з яких може бути в одному з двох положень — «увімкнено» або «вимкнено». Петрик хоче зібрати пристрій, за допомогою якого можна передавати 200 різних сигналів. Яка мінімальна кількість ламп знадобиться Петрикові?

7. Творче завдання

Напишіть невелике оповідання, у якому б зустрічалися різні числа, подані в системах числення з основами 2^n.

Задачі з натуральними числами в різних системах числення

Обговорюємо задачу

Марійка склала трійкове число з двох однакових цифр. А Петрик склав із цих самих цифр число в п'ятірковій системі числення. У скільки разів Марійчине й Петрикове числа більші за кожну зі своїх цифр?

Підказка. Згадайте, які цифри використовуються для запису чисел у трійковій системі числення.

Розв'язування задач за допомогою розкладу числа за степенями основи системи числення

Задача 1. У саду посадили 63 кущі троянд. На 30 кущах розцвіли жовті троянди, на 21 кущі — білі троянди, на 5 кущах — червоні, а на 4 кущах — бордові. У якій системі числення ведеться лічба? Скільки посадили кущів троянд кожного кольору (в десятковій системі числення)?

Розв'язання

1) Нехай p — основа системи числення, у якій ведеться лічба. Тоді за умовою задачі: $63_p = 30_p + 21_p + 5_p + 4_p$.
2) Запишемо числа, що входять до цієї рівності, в розгорнутому вигляді: $6 \cdot p^1 + 3 \cdot p^0 =$
$= (3 \cdot p^1 + 0 \cdot p^0) + (2 \cdot p^1 + 1 \cdot p^0) + 5 \cdot p^0 + 4 \cdot p^0;$
$6 \cdot p + 3 = 3 \cdot p + 2 \cdot p + 1 + 5 + 4.$
3) Розв'яжіть отримане рівняння і знайдіть p.

4) Переведіть числа, подані в умові задачі, з вихідної системи числення в десяткову:

$30_p = ?$ $21_p = ?$ $5_p = ?$ $4_p = ?$

5) Виконайте перевірку.

Задача 2. Визначте, у якій системі числення число 527 буде записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку, тобто виконуватиметься рівність: $527 = 725_p$.

Числа у загальному вигляді записують так: цифри позначають буквами, над якими ставлять риску.

Якщо число, що записане в загальному вигляді, розкласти за степенями основи системи числення і спростити вираз, то отримаємо алгебраїчний запис числа. Наприклад:

$$\overline{abc}_{10} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0 = 100a + 10b + c.$$

Задача 3. Подайте в алгебраїчному записі трицифрові десяткові числа, у яких:

а) збігаються перша й остання цифри;

б) усі цифри однакові;

в) друга цифра на одиницю більша за третю;

г) третя цифра дорівнює потроєній другій.

Розв'язання пункту а

$$\overline{aba} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a = 101a + 10b.$$

Евклід
(III століття до н. е.)

Давньогрецький математик, автор перших теоретичних трактатів із математики, що дійшли до нас. Евклід уперше довів, що найбільшого натурального числа не існує. Доведення було дуже простим: до будь-якого числа завжди можна додати одиницю й одержати більше число.

Задача 4. Трицифрове десяткове число складене з трьох послідовних цифр, записаних у порядку зростання. Знайдіть це число, якщо воно у 26 разів більше за суму своїх цифр.

Розв'язання

1) Шукане число має вигляд: $\overline{a(a+1)(a+2)}$.

2) Тоді його алгебраїчний запис:

$$\overline{a(a+1)(a+2)} = 100a + 10(a+1) + a + 2 = 111a + 12.$$

3) Знайдіть суму цифр шуканого числа.

4) Складіть рівняння, знайдіть a та шукане число.

5) Виконайте перевірку.

Задача 5. У двоцифровому натуральному десятковому числі сума цифр дорівнює 6, а кількість десятків у 2 рази більша за кількість одиниць. Знайдіть це число.

Знаходження чисел за допомогою рівнянь

Задача 6. Сума двох п'ятіркових чисел дорівнює 314_5. Одне з чисел закінчується нулем. Якщо нуль закреслити, то отримаємо друге число. Знайдіть ці числа.

Підказка. Якщо закреслити нуль, яким закінчується п'ятіркове число, то воно зменшиться в 5 разів.

Задача 7. На дошці в порядку зростання записано вісім послідовних натуральних чисел. Сума перших п'яти чисел дорівнює сумі трьох інших. Знайдіть ці числа.

Задачі

1. Птахи біля годівниці

Юннати побудували велику годівницю для птахів. Одного ранку діти нарахували біля годівниці 1021 птаха. Серед них були: 101 синиця, 102 снігурі та 111 горобців. У якій системі числення ведеться лічба? Знайдіть кількість птахів кожного виду в десятковій системі числення.

2. Ті самі цифри

Визначте, у якій системі числення число 489 буде записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку?

3. Два числа

Сума двох натуральних чисел дорівнює 407. Одне з чисел закінчується нулем. Якщо нуль закреслити, отримаємо друге число. Знайдіть ці числа.

4. Сума чотирьох чисел

Сума чотирьох послідовних натуральних десяткових чисел дорівнює 498. Знайдіть ці числа.

5. Цифри числа

Перша цифра двоцифрового десяткового числа на 2 більша за другу, а друга — на 2 більша за третю. Знайдіть це число, якщо воно в 48 разів більше за суму своїх цифр.

Подільність чисел

Прості і складені числа

Обговорюємо задачу

Розподілимо числа 1, 5, 7, 9, 10, 18 на три групи за вказаною в таблиці ознакою.

Числа, що мають		
один дільник	два дільники	більш ніж два дільники
1	5, 7	9, 10, 18

Чим відрізняються числа в першому стовпчику таблиці від чисел у другому й третьому стовпчиках? Які назви мають ці числа?

Просте число — це натуральне число, яке має рівно два різних натуральних дільники (лише 1 і саме число). Решту натуральних чисел, окрім одиниці, називають **складеними**. Таким чином, всі натуральні числа, більші від одиниці, поділяють на прості і складені.

Решето Ератосфена

Ератосфен (близько 275–194 рр. до н. е.)

Давньогрецький математик, один із найбільш різнобічних учених античності. Ще сучасники Ератосфена, визнаючи його видатну вченість, дали йому прізвисько Пентатл, тобто Багатоборець. Ератосфен першим обчислив довжину великого кола Землі, винайшов метод знаходження простих чисел, який одержав назву решето Ератосфена.

Решето Ератосфена — алгоритм знаходження всіх простих чисел у діапазоні від 1 до *N*.

Розглянемо цей алгоритм.

1. Запишемо всі натуральні числа від 1 до N ($N = 10$).
   1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
2. Розглянемо перше число. Число 1 не є простим. Закреслимо його.
   $\cancel{1}$ 2 3 4 5 6 7 8 9 10
3. Розглянемо друге число. Число 2 є простим. Обведемо його і закреслимо всі наступні числа, кратні 2.
   $\cancel{1}$ ② 3 $\cancel{4}$ 5 $\cancel{6}$ 7 $\cancel{8}$ 9 $\cancel{10}$
4. Розглянемо наступне незакреслене число. Воно просте. Обведемо його і закреслимо всі кратні йому числа.
   $\cancel{1}$ ② ③ $\cancel{4}$ 5 $\xcancel{6}$ 7 $\cancel{8}$ $\bcancel{9}$ $\cancel{10}$
5. Будемо повторювати ці дії, доки всі числа не будуть або обведені, або закреслені. Обведені числа є простими.
   $\cancel{1}$ ② ③ $\cancel{4}$ ⑤ $\xcancel{6}$ ⑦ $\cancel{8}$ $\bcancel{9}$ $\xcancel{10}$

Задача 1. Використовуючи алгоритм «решето Ератосфена», знайдіть усі прості числа в діапазоні від 1 до 50 (див. таблицю).

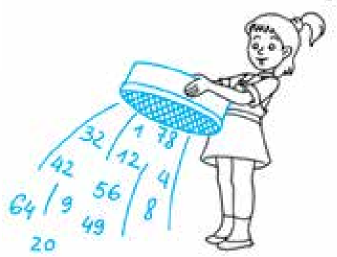
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35
36	37	38	39	40
41	42	43	44	45
46	47	48	49	50

Задача 2. Знайдіть усі пари простих чисел, що відрізняються одне від одного на 17. Скільки ви отримали таких пар?

Підказка. Числа в парі повинні мати різну парність.

Задача 3. Прості числа мають тільки два різні дільники. Поміркуйте, а які числа мають тільки три різні дільники?

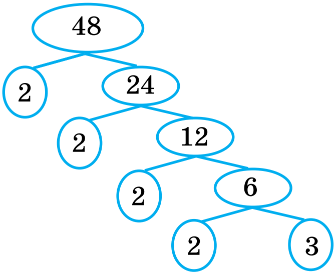
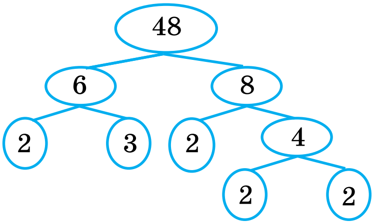
Підказка. Якщо число b — дільник числа A, то число $c = A/b$ теж є дільником числа A.



Основна теорема арифметики

Обговорюємо задачу

На схемах зображено два способи розкладання числа 48 на прості множники. Який можна зробити висновок?

Спосіб 1	Спосіб 2
 Прості множники: 2, 2, 2, 2, 3	 Прості множники: 2, 3, 2, 2, 2

Будь-яке натуральне число, більше за одиницю, можна подати у вигляді добутку простих чисел, причому це подання єдине з точністю до порядку множників. Таке подання називають **розкладом числа на прості множники.**

Алгоритм розкладання чисел на прості множники

1. Записати число у вигляді добутку двох множників, відмінних від одиниці.
2. Повторювати дію, описану в пункті 1, для кожного з одержаних множників, доки не виявиться, що всі множники є простими числами.

Найдавніший відомий запис про дослідження простих чисел належить до математики Стародавньої Греції. Евклід у своїй роботі «Начала» (близько 300 р. до н. е.) довів нескінченність простих чисел.

Задача 1. Розкладіть задані числа на прості множники. Запишіть розклади за допомогою степенів чисел. Які прості множники можуть входити в розклади складених дільників цих чисел на прості множники?

а) 36; б) 720; в) 1 000; г) 2 560; ґ) 5 040.

Розв'язання пункту а

1) $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$.

2) У розклади на прості множники складених дільників числа 36 можуть входити тільки множники 2 і 3, кожен не більш ніж двічі:

$4 = 2 \cdot 2$; $6 = 2 \cdot 3$; $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$;

$9 = 3 \cdot 3$; $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$.

Задача 2. Добуток двох натуральних чисел, для кожного з яких число 10 не є дільником, дорівнює 1 000. Знайдіть суму цих чисел.

Підказка. Розкладіть число 1 000 на прості множники.

На основі розглянутих задач сформулюємо **правило кратності двох чисел.**

Натуральне число A кратне натуральному числу B, якщо розклад числа A на прості множники містить усі прості множники з розкладу числа B у кількості не меншій, ніж у розкладі числа B.

Задача 3. Перевірте за допомогою розкладання на множники, чи є кратними числа:

а) 60 і 12; б) 60 і 6.

Розв'язання

а) $A = 60$; $B = 12$

$60 = \boxed{2 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 5$

$12 = \boxed{2 \cdot 2 \cdot 3}$

$\Downarrow$

60 кратне 12.

б) $A = 60$; $B = 6$

$60 = 2 \cdot \boxed{2 \cdot 3} \cdot 5$

$6 = \boxed{2 \cdot 3}$

$\Downarrow$

60 кратне 6.

Задача 4. Запишіть усі двоцифрові числа, розклад яких на прості множники складається:

а) з двох однакових множників;
б) трьох однакових множників;
в) чотирьох однакових множників.

Взаємно прості числа. Подільність на складені числа

Два натуральні числа називаються **взаємно простими**, якщо вони не мають спільних простих множників.

Задача 5. Знайдіть серед чисел 9, 14, 15, 27 три пари взаємно простих чисел.

Розв'язання

$9 = 3 \cdot 3$; $14 = 2 \cdot 7$; $15 = 3 \cdot 5$; $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$.

Відповідь: 9 і 14, 14 і 15, 14 і 27.

Якщо число ділиться на два взаємно простих числа, то воно ділиться і на їх добуток.

Задача 6. Петрик написав на дошці парне число. Марійка стверджує, що якщо помножити це число на 3, то результат буде кратний 6. Чи має рацію Марійка?

Підказка. Парні числа діляться на 2.

Задачі

1. Близнюки і сусіди

Два простих числа, які відрізняються одне від одного на 1, називають **сусідніми.** А два простих числа, які відрізняються одне від одного на 2, називають **близнюками.**

а) Прості числа 2 і 3 є сусідніми. Чи існують інші пари сусідніх простих чисел?

б) Знайдіть усі числа-близнюки в діапазоні від 1 до 40. Скільки пар ви отримали?

2. Площа прямокутника

Довжини сторін прямокутника виражені натуральними числами. Чи може значення площі цього прямокутника бути виражене простим числом?

3. Трицифрові числа

Запишіть усі трицифрові числа, розклад яких на прості множники складається:

а) з двох однакових множників;

б) трьох однакових множників;

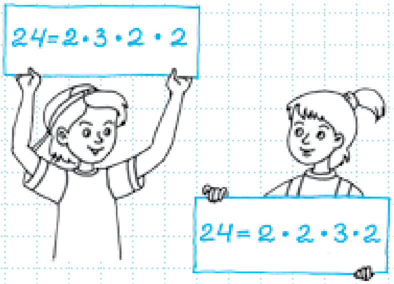
в) чотирьох однакових множників.

4. Складені дільники

Чи ділиться число $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ на 3? на 6? на 8? на 25? Поясніть чому.

5. Кратний добуток

Доведіть, що якщо добуток двох чисел кратний простому числу, то хоча б один зі співмножників кратний цьому числу.



Ознаки подільності

Обговорюємо задачу

Під час прибирання Петрик розклав усі свої книжки в стоси по 4 книжки і по 8 книжок. Чи може в Петрика бути 250 книжок? 300 книжок?

Ознака подільності — алгоритм, що дозволяє визначити, чи є число кратним заздалегідь заданому, без виконання дії ділення.

Задача 1. Дано числа: 146, 257, 1872, 4335, 7500, 89, 150. Не виконуючи ділення, визначте числа, які діляться на 2; на 3; на 5; на 10. Які ознаки подільності ви використали? Які числа відрізняються від усіх інших? Чому?

Блез Паскаль (1623–1662)

Значний внесок у вивчення ознак подільності зробив Блез Паскаль — французький релігійний мислитель, математик і фізик, один із визначних діячів XVII сторіччя. Роботи Паскаля у сфері точних наук належать до раннього періоду його творчості (1640–1650 рр.). За ці 10 років учений зробив дуже багато, зокрема склав алгоритм для визначення ознак подільності будь-якого цілого числа на будь-яке інше ціле число.

Ознака Паскаля — метод, що дозволяє визначити ознаки подільності на будь-яке число. Це своєрідна «універсальна ознака подільності».

Властивості подільності

- Якщо кожний доданок ділиться на деяке число, то й сума ділиться на це число.
- Якщо в добутку хоча б один із множників ділиться на деяке число, то й добуток ділиться на це число.

Ознаки подільності на 4 і 8

Задача 2. Використовуючи властивості подільності, з'ясуйте, чи ділиться число 123 456: а) на 4; б) на 8. Сформулюйте ознаки подільності на 4 і на 8.

Підказка. Число 100 ділиться націло на 4; число 1000 ділиться націло на 8.

Розв'язання пункту а. Подільність на 4

1) Спробуємо подати число 123 456 у вигляді суми двох доданків, кожен із яких ділиться на 4.
2) Зручно виділити в числі 123 456 кількість сотень (оскільки 100 ділиться націло на 4): $C = 1234$.
3) Подамо число 123 456 у вигляді суми: $123\,456 = 1\,234 \cdot 100 + 56$.
4) У загальному вигляді цю суму можна записати таким чином: $C \cdot 100 + r$, де $C = 1\,234$, $r = 56$.
5) Розглянемо перший доданок, поданий у вигляді добутку: $C \cdot 100 = 1\,234 \cdot 100$. Оскільки в цьому добутку один із множників — число 100 — ділиться на 4, то за властивістю подільності число 123 400 теж ділиться на 4.
6) Розглянемо другий доданок, який дорівнює: $r = 56$. Число 56 ділиться на 4. Отже, обидва доданки 123 400 і 56 діляться на 4. Таким чином, за властивістю подільності їх сума 123 456 ділиться на 4.

7) Зробимо висновок. Щоб дізнатися, чи ділиться число на 4, його потрібно подати у вигляді: $C \cdot 100 + r$. Добуток $C \cdot 100$ завжди ділиться на 4. Отже, якщо r ділиться на 4, то число ділиться на 4.

Сформулюємо **ознаку подільності на 4:** число ділиться на 4, якщо воно закінчується двома нулями або якщо число, утворене його двома останніми цифрами, ділиться на 4.

Підказка до пункту б. Подайте число 123 456 у вигляді: $D \cdot 1000 + k$. Перевірте кратність доданків числу 8.

Задача 3. Використовуючи метод, описаний у попередній задачі, з'ясуйте, чи ділиться число 245 250: а) на 25; б) на 125. Сформулюйте ознаки подільності на 25 і на 125.

Задача 4. З'ясуйте, чи є число 6 дільником чисел 732, 237, 235, використовуючи розклад дільника на прості множники. Сформулюйте ознаку подільності на 6.

Підказка. Розкладіть число 6 на прості множники. Перевірте, чи діляться задані числа на кожний з цих множників.

Задача 5. Складіть із цифр 1, 2, 6 усі можливі трицифрові числа, які діляться: а) на 4; б) на 8. Цифри можна використовувати кілька разів.

Підказка. Спочатку складіть із цих цифр усі двоцифрові числа, які діляться на 4. Числа, кратні 8, слід вибирати з чисел, кратних 4.

Задачі

1. Подільність на 8

Оля стверджує, що кожне число, яке складається з однакових цифр, відмінних від вісімки, не ділиться на 8. Чи має рацію Оля?

2. Дрібні шматочки

Аркуш паперу розрізали на 5 частин, потім одну із частин знову розрізали на 5 частин і так зробили ще кілька разів. Чи могло врешті вийти рівно 2020 шматочків паперу?

3. Цифри з боків

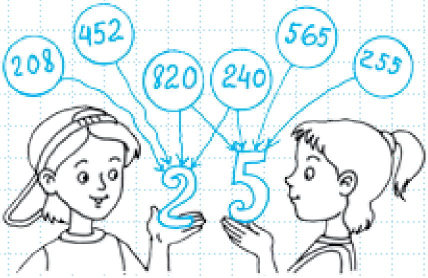
До числа 38 припишіть ліворуч і праворуч по одній цифрі так, щоб отримане чотирицифрове число ділилося на 36. Знайдіть усі варіанти.

4. Чотирицифрові конструкції

Складіть із цифр 1, 3, 6, 8 усі можливі чотирицифрові числа, які діляться: а) на 4; б) на 8. Цифри в числі не мають повторюватися.

5. Солодка покупка

Марійка купила в кондитерській 3 тістечка безе, кілька пакетиків цукерок по 45 грн кожен, 6 порцій морозива і торт за 210 грн. Чи могла Марійка заплатити 500 грн?



Властивості числа 1001

Обговорюємо задачу

З'ясуємо, чи діляться числа 5412, 2901, 9196, 3782 на 11 без остачі. Для кожного з чисел знайдемо суму цифр, що стоять на парних місцях (число А), і суму цифр, що стоять на непарних місцях (число В). Обчислимо різницю А і В (або В і А).
Який висновок можна зробити?

Число	Чи ділиться число на 11 (+/−)	A	B	Різниця A і B (B і A)	Чи ділиться різниця A і B (B і A) на 11 (+/−)
5412	+	6	6	0	+
2901	–	10	2	8	–
9196	+	7	18	11	+
3782	–	9	11	3	–

Пафнутій Львович Чебишов
(1821–1894)

Видатний російський математик і механік. За відкриття в галузі простих чисел знаменитий англійський математик Джеймс Джозеф Сильвестр назвав П. Л. Чебишова переможцем простих чисел.

Ознака подільності на 11

Натуральне число ділиться на 11 тоді й тільки тоді, коли різниця суми його цифр, що стоять на парних місцях, і суми цифр, що стоять на непарних місцях, ділиться на 11.

Задача 1. Використовуючи ознаку подільності на 11, визначте, які з чисел діляться на 11:

а) 795; в) 8173; ґ) 10 101;
б) 3091; г) 2890; д) 49 203.

Задача 2. Складіть із цифр 1, 2, 3 усі трицифрові числа, які діляться на 11. Цифри в числі можуть повторюватися.

Підказка. Сума першої та останньої цифр має дорівнювати другій цифрі.

Обговорюємо задачу

Задача «Число Шахерезади»

Ви, напевне, знаєте, що знаменита Шахерезада щоночі розповідала казки. І це тривало цілий рік, потім ще рік, потім пів року й половину пів року.

1) Чи знаєте ви, скільки днів у році?
2) А скільки повних тижнів у році?
3) Вважаючи, що рік дорівнює цілому числу тижнів, визначте, скільки ночей розповідала казки Шахерезада?

Задача 3 (фокус). Задумайте трицифрове число, запишіть його двічі поспіль, отримане число поділіть на 7, потім на 13, а потім ще на 11. Яке число ви отримали?

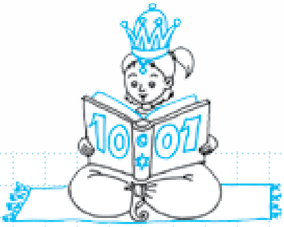
Чудові властивості числа 1001

Будь-яке трицифрове число, помножене на 1001, повторюється в записі отриманого числа двічі. Наприклад: $462 \cdot 1001 = 462\,462$; $597 \cdot 1001 = 597\,597$.

Запам'ятайте: $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Ознака подільності на 7, 11, 13

На властивостях числа 1001 базується метод визначення подільності чисел на 7, на 11 і на 13.



Задача 4. З'ясуйте, чи ділиться число:

а) 125 125 на 13; в) 348 348 на 7;

б) 125 138 на 13; г) 348 565 на 7.

Розв'язання (подільність на 13)

а) Число 125 125.

1) Подамо число 125 125 у такому вигляді:
$125\,125 = 125\,000 + 125 = 125\,(1000 + 1) = 125 \cdot 1001.$

2) За властивістю подільності добуток $125 \cdot 1001$ ділиться на 13, тому що 1001 ділиться на 13.

Відповідь: число 125 125 ділиться на 13.

б) Число 125 138.

1) Подамо число 125 138 у вигляді суми:
$125\,138 = 125\,000 + 138 = 125\,000 + 125 + (138 - 125) =$
$= 125 \cdot 1001 + 13.$

2) За властивістю подільності перший доданок — добуток $125 \cdot 1001$ — ділиться на 13, тому що 1001 ділиться на 13.

3) Другий доданок — число 13 — теж ділиться на 13.

4) *Висновок*: обидва доданки — $125 \cdot 1001$ і 13 — діляться на 13. Отже, за властивістю подільності їх сума 125 138 ділиться на 13.

Відповідь: число 125 138 ділиться на 13.

Скориставшись наведеним розв'язанням, сформулюємо правило, що дозволяє з'ясувати, чи ділиться натуральне число на 7 (на 13), якщо в цьому числі не більш ніж 6 знаків.

Нехай у числі N не більше ніж 6 цифр. Утворимо два числа A і B: A — число, утворене з N шляхом відкидання останніх трьох цифр; B — число, утворене трьома останніми цифрами числа N.

Число N ділиться на 7 (на 13) тоді й тільки тоді, коли різниця чисел A і B ділиться на 7 (на 13).

Задача 5. Петрик купив 7 однакових зошитів і розплатився купюрою в 20 грн. Чи міг продавець дати Петрикові 50 копійок решти? Відповідь обґрунтуйте.

Задача 6. В один із днів у шкільному буфеті 39 першокласників купили по пиріжку, кілька учнів купили по ватрушці вартістю 2 грн 60 к., кожний учень 5-го класу купив бутерброд із сиром вартістю 3 грн 90 к., а 65 одинадцятикласників купили по 2 бутерброди з ковбасою. Інших покупок того дня не було. Чи міг виторг у буфеті скласти 570 грн? Відповідь обґрунтуйте.

Задачі

1. Математичні ребуси

У записі числа замініть зірочки такими цифрами, щоб одержане число ділилося на 11. Знайдіть хоча б два таких числа для кожного випадку.

а) 5 * 3 * 1; б) * * 4 6; в) * 2 5 * 7.

2. Чотирицифрові числа

Складіть із цифр 0, 1, 2 усі чотирицифрові числа, які діляться на 11. Цифри в числі можуть повторюватися.

3. Подільність на 7, 11, 13

Дано числа: 32 172, 37 840, 35 048, 417 599, 517 690, 490 776, 855 008, 536 704. Які з них діляться на 7? на 11? на 13?

4. Десять цифр

Використовуючи всі десять цифр, кожну по одному разу, складіть число, яке ділиться:

а) на 4 і на 5;
б) на 11;
в) на 8 і на 11;
г) на 125 і на 11.

5. Найменша сума цифр

Визначте, яку найменшу суму цифр може мати число, яке ділиться:

а) на 55;
б) на 33.

6. Диктант

У класі за кожною партою сидять хлопчик і дівчинка. Під час диктанту кожний хлопчик припустився або удвічі більшої, або удвічі меншої кількості помилок, ніж його сусідка. Чи могли всі діти класу припуститись рівно 200 помилок?

7. Подільність на 21

Ганнуся записала на дошці двоцифрове число, а Тимофій приписав до нього таке саме число ще двічі. Доведіть, що отримане шестицифрове число кратне 21. Яким ще числам кратне це число?

8. Варя й телефон

Варя забула пін-код свого телефону — число, що складається з 4 цифр — двійок і трійок. Вона пам’ятає, що код ділиться і на 3, і на 4. Допоможіть Варі згадати пін-код.

НСД і НСК

Найбільший спільний дільник (НСД) двох натуральних чисел — найбільше натуральне число, на яке ці числа діляться без остачі.

Найменше спільне кратне (НСК) двох натуральних чисел — найменше натуральне число, яке є кратним обох цих чисел.

$$\text{НСД}(a,\ b) = \text{НСД}(b,\ a);\quad \text{НСК}(a,\ b) = \text{НСК}(b,\ a)$$

Обговорюємо задачу

Використовуючи розклад числа на прості множники, знайдемо:

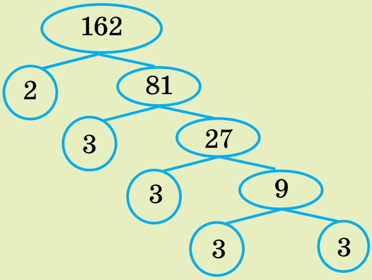
а) НСК (162, 36) = 324

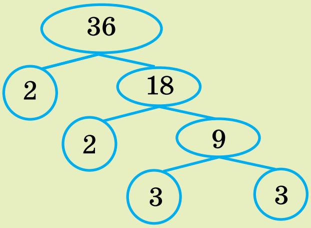
б) НСД (162, 36) = 18.

в) НСД (162, 36) • НСК (162, 36) = 3832

г) 162 • 36 = 3832

Який можна зробити висновок?





Зв'язок НСК і НСД

Для двох натуральних чисел a і b справджується рівність:

$$\text{НСД}(a, b) \cdot \text{НСК}(a, b) = ab.$$

Із цієї рівності випливає, що

$$\text{НСК}(a, b) = ab : \text{НСД}(a, b);\quad \text{НСД}(a, b) = ab : \text{НСК}(a, b).$$

Задача 1. Знайдіть НСД заданих чисел. Користуючись наведеними формулами, знайдіть НСК цих чисел.

а) 18 і 24; б) 20 і 35; в) 15 і 25; г) 32 і 40.

Розв'язання пункту а

1) Розкладемо на прості множники числа 18 і 24:
$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$.
2) Знайдемо найбільший спільний дільник чисел 18 і 24:
$\text{НСД}(18, 24) = 2 \cdot 3 = 6$.
3) За формулою $\text{НСК}(a, b) = ab : \text{НСД}(a, b)$ знайдемо найменше спільне кратне чисел 18 і 24:
$\text{НСК}(18, 24) = 18 \cdot 24 : 6 = 18 \cdot 4 = 72$.

Відповідь: а) $\text{НСД}(18, 24) = 6$; $\text{НСК}(18, 24) = 72$.

Задача 2. У маленький лоток уміщується 6 яєць, а у великий — 10 яєць. Яку найменшу кількість яєць можна розкласти як у маленькі лотки, так і у великі?

Підказка. Знайдіть НСК чисел 6 і 10.

Задача 3. Виконайте завдання в таблиці та отримайте коди букв. Скориставшись шифрувальним ключем, визначте букви за кодами й прочитайте вислів Піфагора про числа.

Завдання	Буква	Завдання	Буква	Завдання	Буква
1) НСД (120, 180) =		7) НСД (20, 60) =		13) НСД (70, 15) =	
2) НСК (45, 30) =		8) НСК (12, 18) =		14) НСК (20, 16) =	
3) НСД (720, 160) =		9) НСД (72, 16) =		15) НСД (24, 160) =	
4) НСК (6, 4) =		10) НСД (48, 60) =		16) НСК (42, 15) =	
5) НСД (72, 108) =		11) НСД (15, 16) =		17) НСД (96, 48) =	
6) НСК (9, 14) =		12) НСК (24, 16) =		18) НСК (144, 36) =	
				19) НСК (32, 24) =	

Шифрувальний ключ

Код букви	1	5	8	12	20	36	48	60	80	90	96	126	144	210
Буква	Я	Ь	В	Л	Р	А	Т	Ч	С	И	М	П	О	І

Алгоритм Евкліда

Обговорюємо задачу

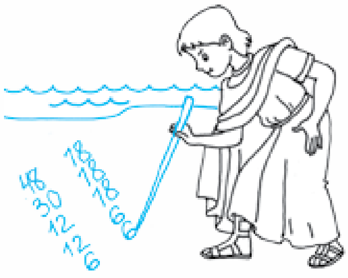
Марійка записала на дошці числа 18 і 48 та знайшла їхні спільні дільники. Петрик обчислив різницю Марійчиних чисел і записав її замість більшого числа, а менше число записав без змін. Потім Петрик знайшов спільні дільники отриманих чисел. Дайте відповіді на запитання.

1) Які спільні дільники чисел 18 і 48 знайшла Марійка?
2) Які два числа записав Петрик?
3) Чи збігаються спільні дільники, знайдені Петриком і знайдені Марійкою?
4) Якщо Марійка й Петрик і далі записуватимуть числа, щоразу заміняючи більше з чисел їх різницею, чи зміняться їхні спільні дільники?
5) Який результат отримали діти?
6) Зробіть висновок: як можна знайти найбільший спільний дільник двох чисел.

Спосіб знаходження найбільшого спільного дільника двох натуральних чисел, яким ви скористалися в задачі, називають **алгоритмом Евкліда**. Цей спосіб застосовують у тому випадку, коли розкласти числа на прості множники дуже важко або взагалі здається неможливим.

Для того щоб знайти найбільший спільний дільник двох натуральних чисел за алгоритмом Евкліда, необхідно:

1) замінити в парі чисел більше число різницею більшого і меншого чисел;
2) виконувати цю дію, доки числа не стануть рівними.



Задача 1. Знайдіть за допомогою алгоритму Евкліда найбільший спільний дільник чисел:

а) 377 і 247; б) 943 і 287.

Розв'язання

а) Числа 377 і 247.

НСД (377, 247) =	377 − 247 = 130
= НСД (247, 130) =	247 − 130 = 117
= НСД (130, 117) =	130 − 117 = 13
= НСД (117, 13) =	117 − 13 = 104
= НСД (104, 13) =	104 − 13 = 91
= НСД (91, 13) =	91 − 13 = 78
= НСД (78, 13) =	78 − 13 = 65
= НСД (65, 13) =	65 − 13 = 52
= НСД (52, 13) =	52 − 13 = 39
= НСД (39, 13) =	39 − 13 = 26
= НСД (26, 13) =	26 − 13 = 13
= НСД (13, 13) = 13	13 − 13 = 0

Відповідь: НСД (377, 247) = 13.

Цікаві факти

Найвідоміший математичний алгоритм

Давньогрецький математик Евклід відомий насамперед завдяки своїй праці «Начала», яка протягом більш ніж двох тисячоліть залишалася базовим підручником геометрії.

У «Началах» Евкліда в геометричній формі викладено один із найвідоміших математичних алгоритмів — алгоритм знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел. Цей алгоритм назвали на честь Евкліда.

Обговорюємо задачу

Марійка й Петрик визначили найбільший спільний дільник чисел 62 і 12 за допомогою алгоритму Евкліда. Повторіть їхні обчислення й дайте відповіді на запитання.

1) Скільки разів довелося віднімати число 12?
2) Яке число залишилося в результаті? Це число є остачею від ділення чисел.
3) Зробіть висновок: як «прискорити» алгоритм Евкліда?
4) Чому дорівнює НСД (62, 12)?

Прискорений алгоритм Евкліда

Для того щоб знайти найбільший спільний дільник двох чисел, необхідно:

1) замінити в парі чисел більше число остачею від ділення більшого числа на менше;
2) виконувати цю дію, поки не стане зрозуміло, чому дорівнює НСД чисел (наприклад, поки числа не будуть рівними або одне з чисел не стане дорівнювати нулю).

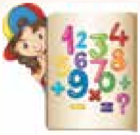
Задача 2. Знайдіть за допомогою прискореного алгоритму Евкліда найбільший спільний дільник чисел:

а) 595 і 217;
в) 1363 і 435;
б) 506 і 154;
г) 1463 і 2812.

Розв'язання пункту а

НСД (595, 217) =	595 : 217 = 2 (ост. 161)
= НСД (217, 161) =	217 : 161 = 1 (ост. 56)
= НСД (161, 56) =	161 : 56 = 2 (ост. 49)
= НСД (56, 49) =	56 : 49 = 1 (ост. 7)
= НСД (49, 7) = 7	оскільки 49 = 7 · 7

Відповідь: а) НСД (595, 217) = 7.



Задачі

1. Особисті дані

За допомогою прискореного алгоритму Евкліда знайдіть найбільший спільний дільник:

а) свого року народження і поштового індексу;

б) свого номера домашнього телефону і номера мобільного телефону.

2. Порівнюємо алгоритми

Знайдіть найбільший спільний дільник заданих чисел двома способами — за допомогою розкладення на прості множники і за допомогою алгоритму Евкліда: а) 1073 і 1189; б) 1829 і 2773. Який спосіб виявився швидшим?

3. Скоротні та нескоротні дроби

Визначте, чи є нескоротним дріб:

а) $\frac{231}{315}$; б) $\frac{259}{741}$.

Підказка. Дріб нескоротний у тому випадку, коли його чисельник і знаменник є взаємно простими числами.

4. Пошук *a* і *b*

Відомо, що НСД (a, b) = 6, а НСК (a, b) = 420. Чому можуть дорівнювати a і b? Знайдіть усі варіанти.

5. НСД чисел із двійок

Знайдіть НСД (22...22, 22...22), якщо перше число містить 100 двійок, а друге — 60 двійок.

6. НСД чисел з одиниць

Знайдіть найбільший спільний дільник чисел:

а) 11 111 111 і 111 111;

б) 11...11 і 11...11, якщо перше число містить 20 одиниць, а друге — 15.

7. Знайти числа за НСК і НСД

Знайдіть усі пари натуральних чисел a і b, такі що НСД$(a, b) = 12$, а НСК$(a, b) = 180$.

8. Планети НСК і НСД

Жителі двох дружніх планет НСК і НСД ділять добу на години, години на хвилини, а хвилини на секунди. При цьому в їхній добі 77 хвилин, а в годині — 91 секунда. Скільки секунд у добі на планетах НСК і НСД?

9. Командні методи

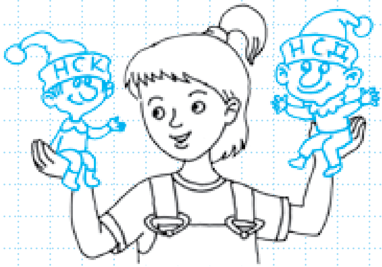
Учитель фізкультури Семен Іванович вишикував усіх учнів школи в колону по 4, але Петрик виявився при цьому зайвим. Тоді Семен Іванович вишикував усіх учнів у колону по 5, але Петрик знову виявився зайвим. І в результаті шикування в колону по 6 Петрик був зайвим. Нарешті, вишикувавшись по 7, Петрик й усі інші учні школи опинились у колоні. Яка мінімальна кількість учнів може бути в Петриковій школі?

10. Важкий день Мауглі

Мауглі кожного другого дня вчиться полювати, кожного третього дня вчиться лазити по ліанах і кожного п’ятого дня вивчає закони джунглів із Балу. Сьогодні в Мауглі важкий день: він повинен робити всі три справи. Коли в Мауглі буде наступний важкий день?

11. НСД п’ятицифрових чисел

Знайдіть найбільший спільний дільник усіх п’ятицифрових чисел, що складаються із цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторень.



Властивості подільності

Обговорюємо задачу

- Знайдіть ті з чисел, які діляться на 4, але не діляться на 8:
  5124, 4090, 8386, 6654, 7236, 3572, 9238, 4444.
- Знайдіть ті з чисел, які діляться на 5, але не діляться на 25:
  150, 745, 265, 400, 875, 615.

Поміркуйте: якщо подати число у вигляді суми, різниці або добутку (наприклад, 265 = 250 + 15), як це допоможе спростити розв'язання?

Основні властивості подільності натуральних чисел

- Якщо числа a і b діляться на число c, то $a+b$ і $a-b$ діляться на c.
- Якщо число a ділиться на число c, а число b не ділиться на c, то ні $a+b$, ні $a-b$ не діляться на c.
- Якщо число a ділиться на число c, то добуток ab ділиться на c.
- Якщо число a ділиться на взаємно прості числа b і c, то a ділиться також і на їх добуток.
- Якщо добуток ab ділиться на просте число p, то або a, або b, або обидва цих числа діляться на p.

Іван Матвійович Виноградов (1891–1983)

Видатний математик. Довів для непарних чисел гіпотезу Християна Ґольдбаха про те, що будь-яке число, більше за 5, може бути подане у вигляді суми трьох простих чисел. Для парних чисел гіпотезу Ґольдбаха, як і раніше, не доведено і не спростовано.

Задача 1. Допишіть цифри і знайдіть усі варіанти розв'язків.

а) До числа 37 допишіть зліва і справа по одній цифрі так, щоб отримане число ділилося на 45.

б) До числа 42 допишіть зліва і справа по одній цифрі так, щоб отримане число ділилося на 88.

Розв'язання пункту а

1) Число кратне 45, якщо воно ділиться на 5 і на 9.
2) Шукане число має ділитися на 5. Отже, його останньою цифрою повинна бути цифра 0 або 5.
3) Сума цифр шуканого числа має бути кратною 9. Маємо два варіанти: 8370 і 3375.

Задача 2. У записі числа 25*13* замініть зірочки такими цифрами, щоб отримане число ділилося: а) на 30; б) на 36; в) на 55; г) на 72. Знайдіть усі варіанти.

Факторіал

Факторіалом натурального числа n називається добуток усіх натуральних чисел від 1 до n. Факторіал позначається так: $n!$ Вважають, що $0! = 1$.

$$\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$$

Обчислимо факторіали чисел від 1 до 8:

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

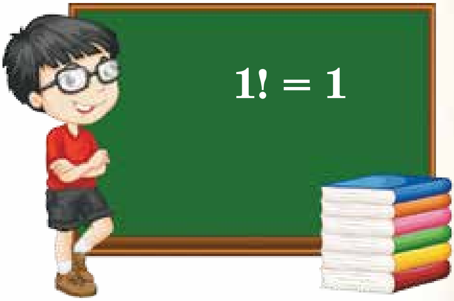
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$



Задача 3. Число 20! розклали на прості множники. Скільки різних простих чисел входить у цей розклад? Який із простих множників входить у розклад у найбільшому степені?

Задача 4. Визначте, скількома нулями закінчується число:
а) 10!; б) 30!; в) 100!.

Підказка. Число закінчується стількома нулями, скільки пар чисел 2 і 5 входять у його розклад на прості множники.

Використання ознак подільності під час розв'язування задач

Задача 5. Чи є число 123 456 789 простим? Відповідь обґрунтуйте.

Підказка. Скористайтесь ознакою подільності на 9.

Задача 6. Всезнайко обчислив 100!. Потім він знайшов суму цифр отриманого числа, після чого знайшов суму цифр нового числа і т. д. Всезнайко продовжував виконувати цю дію, доки не отримав одноцифрове число. Яке?

Підказка. Скористайтесь ознакою подільності на 9.

Задача 7. Доведіть, що ребус АБ · ВГ = ДДЕЕ не має розв'язків.

Підказка. Скористайтесь ознакою подільності на 11.

Задачі

1. Допишіть цифри

Допишіть цифри і знайдіть усі варіанти розв’язків.

а) До числа 65 допишіть зліва і справа по одній цифрі так, щоб отримане число ділилося на 55.

б) До числа 15 допишіть зліва і справа по одній цифрі так, щоб отримане число ділилося на 36.

2. Десять цифр

Знайдіть найбільше натуральне число, кратне 36, у записі якого зустрічаються всі 10 цифр по одному разу.

3. Таємне двоцифрове число

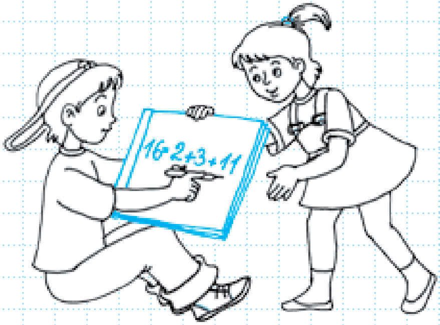
Якщо деяке двоцифрове число помножити на 2, на 3, на 4, ..., на 9, то сума цифр кожного з добутків дорівнюватиме сумі цифр вихідного числа. Визначте вихідне число. Знайдіть усі варіанти.

4. Ознака подільності від Петрика

Петрик придумав нову ознаку подільності: якщо сума цифр числа кратна 27, то само́ число кратне 27. Чи є Петрикова ознака правильною?

5. Трамвайний квиток

Шестицифровий номер трамвайного квитка будемо вважати щасливим, якщо сума його цифр, що стоять на парних місцях, дорівнює сумі цифр, що стоять на непарних місцях. Чи правильно, що щасливих квитків менш ніж 100 000?



Розкладання на прості множники

Обговорюємо задачу

До приходу гостей Марійка зібралася напекти пирогів. Вона вирішила, що в кожний другий пиріг покладе полуницю, у кожний третій — малину, а в кожний сьомий — вишню. Чи знайдеться пиріг із полуницею, малиною й вишнею, якщо тісто було замішене для 25 пирогів?

Марен Мерсенн
(1588–1648)

Французький математик, фізик, філософ. Відомий як дослідник простих чисел вигляду $2^n - 1$, де n — натуральне число. Такі числа називають числами Мерсенна. Найбільше відоме на сучасний момент просте число — це число Мерсенна, у якого $n = 82\,589\,933$.

Задача 1. Знайдіть два взаємно простих числа, якщо відомо, що їх добуток дорівнює:

а) 864; б) 1125.

Розв'язання пункту а

1) Розкладемо число 864 на прості множники: $864 = 2^5 \cdot 3^3$.

2) Взаємно простими будуть числа: $2^5 = 32$ і $3^3 = 27$.

Відповідь: 32 і 27.

Задача 2. Доведіть, що ребус не має розв'язків.

$$К \cdot І \cdot Т = В \cdot Ч \cdot Е \cdot Н \cdot И \cdot Й$$

Підказка. Усі букви в ребусі різні. Отже, у ребусі використано 9 різних цифр. Доведіть, що жодна з цифр не може дорівнювати 0. Проаналізуйте рівність, знаючи, що під однією з букв ховається цифра 7.

Задача 3. Різниця двох простих двоцифрових чисел є повним квадратом. Якщо в одному з чисел поміняти місцями цифри, то отримаємо друге число. Знайдіть ці числа.

Підказка. Пригадайте, що таке алгебраїчний запис числа. Позначте шукані числа через $\overline{ab}$ і $\overline{ba}$ та знайдіть їх різницю.

Число 24

Чи знаєте ви, чим особливе число 24? Наприклад, у добі 24 години. У кінематографі кадри змінюються з частотою 24 кадри за секунду. А ще 24 — це дві дюжини (12 + 12).

Обговорюємо задачу

Визначте, скільки дільників має число 24. Знайдіть дільники числа 24, які:

- не кратні 2;
- кратні 2, але не кратні 4;
- кратні 4, але не кратні 8;
- кратні 8.

Які закономірності можна помітити? Як їх пояснити?

Формула кількості дільників натурального числа

Нехай натуральне число n подане у вигляді добутку простих чисел: $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{a_s}$, де степені a_1, a_2, ..., a_s показують, скільки разів відповідні числа p_1, p_2, ..., p_s входять у добуток.

Тоді число n має точно $(a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_s + 1)$ дільників.

Задача 4. Знайдіть кількість дільників числа 36.

Розв’язання

1) Розкладемо число 36 на прості множники: $36 = 2^2 \cdot 3^2$.
2) Заповнивши таблицю, знайдемо всі дільники числа 36, які являють собою різні комбінації простих множників із цього розкладу.

Дільники числа 36		
які не містять множника 2 (2^0)	які містять множник 2 один раз (2^1)	які містять множник 2 двічі (2^2)
1 3 $3^2 = 9$	2 $2 \cdot 3 = 6$ $2 \cdot 3^2 = 18$	$2^2 = 4$ $2^2 \cdot 3 = 12$ $2^2 \cdot 3^2 = 36$

3) Ми визначили, що число 36 має 9 дільників: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
4) Знаючи розклад числа 36 на прості множники, обчислимо кількість дільників за формулою: $(2 + 1)(2 + 1) = 3 \cdot 3 = 9$ (дільників).

Відповідь: число 36 має 9 дільників.

Задача 5. Знайдіть кількість дільників числа:
а) 360; б) 9216.

Розв’язання пункту а

1) Розкладемо число 360 на прості множники: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.
2) Обчислимо за формулою кількість дільників числа 360: $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ (дільники).

Відповідь: число 360 має 24 дільники.

Задача 6. Знайдіть число, кратне 12, яке має рівно 14 різних дільників.

Задача 7. Відомо, що p і q — різні прості числа. Визначте, скільки дільників має число: а) pq; б) p^2q^2.

Розв'язання

а) Число pq

1) Заповнивши таблицю, знайдіть усі дільники заданого числа.

Дільники числа pq	
які містять p^0	які містять p^1
1	p
q	pq

2) Порахуйте кількість дільників числа pq.
3) Знайдіть кількість дільників заданого числа, скориставшись формулою кількості дільників натурального числа: $(1 + 1)(1 + 1) = 2 \cdot 2 = 4$ (дільники).

б) Число p^2q^2

1) Заповнивши таблицю, знайдіть усі дільники заданого числа.

Дільники числа p^2q^2		
які містять p^0	які містять p^1	які містять p^2

2) Порахуйте кількість дільників числа p^2q^2.
3) Знайдіть кількість дільників заданого числа, скориставшись формулою кількості дільників натурального числа.

Задачі

1. Число 217

Подайте число 217 у вигляді суми кількох натуральних чисел, добуток яких теж дорівнює 217.

2. Сума чисел

Марійка помножила деяке натуральне число на 2, а Петрик помножив це саме число на 5. Доведіть, що сума чисел, які отримали Марійка й Петрик, кратна 7.

3. Кількість дільників

Знайдіть кількість дільників числа:

а) 2450; б) 4050;

в) p^2q^3, де p і q — різні прості числа.

4. 30 і 30

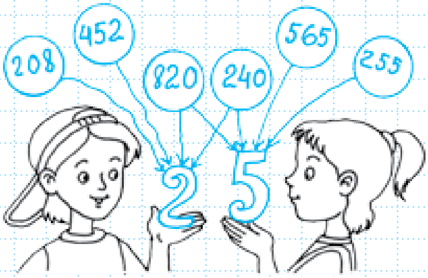
Знайдіть число, яке ділиться на 30 і має рівно 30 різних дільників.

5. Прості дільники

Знайдіть усі трицифрові числа, у яких кожна цифра є їхнім простим дільником, при цьому інших простих дільників ці числа не мають.

6. Квадрати чисел

Знайдіть усі прості числа, квадрат яких на одиницю більший, ніж деяке просте число.



Задачі на поділи, зважування і переливання

Частки і поділи

Потреба знаходити частини цілого з’явилася у давніх людей ще тоді, коли необхідно було ділити здобич після полювання. Крім того, вимірюючи земельні ділянки, масу тих чи інших предметів тощо, люди не завжди отримували в результаті цілі числа. Доводилося враховувати і їхні частини.

Першим дробом, із яким познайомилися люди, була половина. У розрахунках зустрічалася також третина. Тому і єгиптяни, і вавилоняни мали спеціальні позначення для дробів 1/3 та 2/3, які не збігалися з позначеннями для інших дробів. Окрім 2/3, єгиптяни використовували лише дроби з чисельниками, що дорівнювали одиниці, тобто частки. Будь-яку частину єгиптяни подавали у вигляді суми різних часток.

Частка — це одна з рівних частин цілого.

Запис $\frac{1}{n}$ означає, що одиницю поділили на n рівних частин і взяли одну таку частину.

Для деяких часток використовують певні назви.

Наприклад: $\frac{1}{2}$ — половина; $\frac{1}{3}$ — третина; $\frac{1}{4}$ — чверть.

У задачах на частки й поділи необхідно знайти ціле за його частиною або частинами чи здійснити правильний поділ.

Обговорюємо задачу

Марійка побачила в магазині, як продавець розділив круглу голівку сиру на 8 рівних частин, зробивши тільки 3 розрізи. Вона розповіла про це Петрику. Петрик замислився, а потім сказав, що зрозумів, як це зробити. А чи зрозуміли ви?

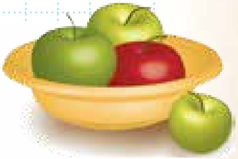
Способи ділення цілого на частки

Задача 1 (*стародавня задача єгиптян*). Як розділити 7 хлібів між 8 людьми?

Розв’язання

1. Для того щоб один хліб розділити на 8 частин, потрібно зробити 1 горизонтальний і 2 вертикальні розрізи, а для 7 хлібів — 21 розріз.

2. Давні єгиптяни не стали розрізати кожний із 7 хлібів на 8 частин. Спробуйте розділити хліб, зробивши якомога менше розрізів. Скільки отримали розрізів?



Задача 2. Хто одержав більше яблук — кожний Петриків приятель або кожна Марійчина подруга, якщо відомо, що:

1) Петрик поділив порівну 5 яблук між 6 приятелями;
2) Марійка поділила 7 яблук порівну між 12 подругами.

Задача 3 (*стародавня задача*). Три брати успадкували від батька 17 верблюдів. Старшому батько заповів половину стада, середньому — третину, а молодшому — дев’яту частину. Брати спробували поділити спадщину, але не змогли. Тоді вони попросили допомоги в мудреця, що проїжджав повз них на своєму верблюді. Мудрець допоміг братам поділити спадщину. А брати замислилися: чому ж кожен одержав більше верблюдів, ніж передбачалося? Чи зможете ви пояснити, що відбулося?

Знаходження цілого за відомими частками

Обговорюємо задачу

У двох коробках лежить порівну цукерок. Коли з першої коробки взяли чверть усіх цукерок, а з другої — дві цукерки, у коробках залишилося порівну цукерок. Скільки цукерок було в коробках спочатку?

Задача 1. Королівський садівник зібрав у саду яблука. Щоб вийти із саду, йому довелося пройти повз чотири пости з вартовими. На кожному посту в садівника відбирали половину яблук. На королівську кухню він приніс лише 10 яблук. Скільки яблук зібрав садівник і скільки дісталося вартовим?

Розв'язання

Відновимо порядок подій з кінця. Після проходження кожного поста кількість яблук зменшувалась у 2 рази. Перед проходженням четвертого поста яблук було 10 · 2 = 20, третього поста — 40, другого — 80, першого — 160.

Найдовершеніші методи виконання дій із дробами було винайдено в Індії. У рукописах IV століття до нашої ери вже зустрічаються не лише частки, а й дроби з чисельниками, більшими за одиницю. У Західній Європі остаточно сформовану й зрозумілу теорію звичайних дробів дав 1585 року фламандський інженер Симон Стевін.

Симон Стевін
(1548–1620)

Задача 2. До господині додому прийшли переночувати 3 солдати. Добра жінка зварила служивим казанок картоплі. Перший солдат прокинувся й з'їв третину картоплі. Другий солдат прокинувся, подумав, що він прокинувся першим, і з'їв теж третину картоплі. Прокинувся третій, подумав, що він прокинувся першим, і з'їв третину картоплі. У результаті залишилося 8 картоплин. Скільки картоплі наварила господиня?

Розв'язання

1) Розгляньте ситуацію для третього солдата. З малюнка видно, що 8 картоплин — це $\frac{2}{3}$, таким чином, 4 картоплини — це $\frac{1}{3}$.

Висновок: третій солдат взяв 4 картоплини з 12.

2) Розгляньте ситуацію для другого солдата, використовуючи результат попереднього кроку.
3) Розгляньте ситуацію для першого солдата.

Цікавий факт

Дроби в Стародавньому Римі

Цікава система дробів була в Стародавньому Римі. Вона ґрунтувалась на діленні на 12 часток одиниці ваги, яку називали ас. Дванадцяту частку аса називали унцією. Для дробів, які отримували діленням унції на менші частки, також були особливі назви. Зараз іноді кажуть: «Він скрупульозно вивчив це питання». Це означає, що питання вивчене до кінця, що нічого незрозумілого не залишилось. А походить дивне слово «скрупульозно» від римської назви 1/288 аса — «скрупулус».

Задачі

1. Сума дробів

З наведених чисел виберіть такі, щоб їх сума дорівнювала одиниці. Знайдіть кілька варіантів.

$$\frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{7},\ \frac{6}{7}$$

2. Ваза із цукерками

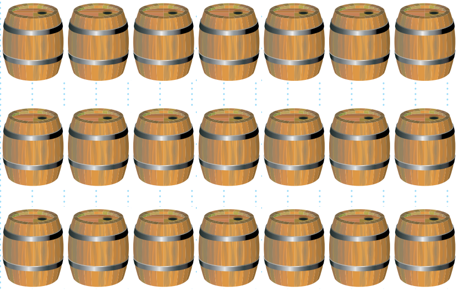
У вазі лежить менше ніж 100 цукерок. Їх можна розділити порівну між двома, трьома або п'ятьма дітьми, але не можна розділити порівну між чотирма дітьми. Скільки цукерок у вазі? Скільки варіантів відповіді має ця задача?

3. Стародавня задача

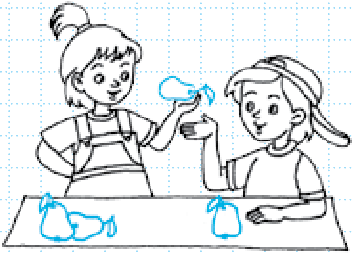
Зустрілися два пастухи. Перший каже другому: «Віддай мені одну вівцю, тоді в мене буде овець рівно вдвічі більше, ніж у тебе». А другий відповідає: «Ні! Краще ти мені віддай одну вівцю, тоді в нас буде овець порівну». Скільки овець у кожного пастуха?

4. Бочки на вантажівках

Чи можна завантажити на 3 вантажівки 7 бочок із квасом, 7 порожніх бочок і 7 бочок, заповнених наполовину, щоб на кожній вантажівці було по 7 бочок і порівну квасу?



5. Що це за число?



Знайдіть число, якщо:

а) половина від його чверті дорівнює 6;

б) третина від його половини дорівнює 8.

6. Знайдіть масу бочки

Маса бочки із квасом 34 кг. Коли шосту частину квасу випили, бочка із рештою квасу стала важити 29 кг. Скільки важить порожня бочка? Скільки важив увесь квас?

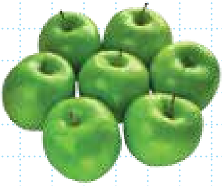
7. Петрикова покупка

Петрик заплатив за книжку половину своїх грошей, а третину решти витратив на покупку зошитів. Скільки грошей мав Петрик, якщо в нього залишилося 28 грн?

8. Торт на двох

Карлсон може з’їсти великий-превеликий торт за дві години, а Малюк — за чотири. За який час вони з’їдять торт, якщо візьмуться за нього удвох?

9. Важкий поділ



Як поділити 7 яблук між дванадцятьма дітьми, якщо не можна розрізати яблука більш ніж на 4 частини?

10. Мисливець і пастухи

Мисливець зустрів двох пастухів. Усі разом вони пообідали кашею, причому перший пастух усипав у спільний казан три мірки пшона, а другий — п’ять мірок. Мисливець віддав пастухам за обід 8 монет. Як їм слід поділити ці гроші?

Переливання рідини

До введення метричної системи мір наші предки користувалися мірами об'єму рідин, як-от відро (10–12 л), бочка (40–60 відер). На різних територіях для вимірювання об'ємів використовувалося понад десяток інших мір.

Перехід на метричну систему мір спростив вимірювання й розрахунки. Зараз ми використовуємо такі одиниці об'єму: кубічні сантиметри, кубічні дециметри (літри), кубічні метри.

1 м^3 — об'єм куба, ребро якого дорівнює 1 м

1 м^3 = 1000 дм^3 = 1000 л

1 дм^3 = 1 л = 1000 см^3

Історично назва «літр» походить від старофранцузької одиниці об'єму «літрон» (фр. *litron*), яка дорівнює 0,831018 сучасного літра. А слово «літрон», у свою чергу, утворилося від спільного греко-латинського кореня *litra*.

Обговорюємо задачу

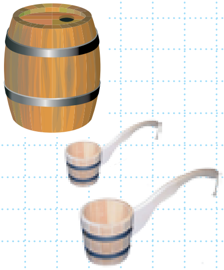
Два десятилітрові відра повністю наповнені водою. З першого відра спочатку виливають $\frac{1}{2}$ всієї води, а потім $\frac{1}{5}$ решти води. З другого відра, навпаки, спочатку виливають $\frac{1}{5}$ всієї води, а потім $\frac{1}{2}$ решти води. У якому відрі води залишиться більше?

Відмірювання певного об'єму рідини

У задачах на переливання потрібно, як правило, відміряти певний об'єм рідини або розділити наявний запас рідини на задані частини, маючи посудини певної ємності.

Задача 1. У потайній печері стоїть величезна бочка з водою й лежать два черпаки — на 3 л і 5 л. Якщо в спеціальну ємність налити 4 л води, дверцята печери відчиняться. Як за допомогою черпаків відміряти 4 л води, щоб вибратися з печери?

Розв'язання



Наповнимо трилітровий черпак і перелллємо воду в п'ятилітровий. Знову наповнимо трилітровий черпак і переллємо 2 л води в п'ятилітровий. Виллємо воду з п'ятилітрового черпака, а потім переллємо в нього 1 л води з трилітрового черпака. Залишилося виконати дві дії.

Розв'язання можна подати в такому вигляді.

Номер кроку	1	2	3	4	5	6	7	8
5 л	0	3	3	5	0	1	1	4
3 л	3	0	3	1	1	0	3	0

Задача 2. Як за допомогою трилітрової банки та п'ятилітрового бідона відміряти: а) 2 л води; б) 1 л води?

а)

Номер кроку	1	2
5 л	5	2
3 л	0	3

б)

Номер кроку	1	2	3	4
5 л	0	3	3	5
3 л	3	0	3	1

Задача 3. Маючи два відра ємністю 4 л і 9 л, необхідно набрати з річки 6 л води. Знайдіть два способи розв’язання задачі. З’ясуйте, який з них коротший.

Розв’язання

Спосіб 1 (починаємо з наповнення меншого відра)

Номер кроку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	11	12	13	14	15	16
4 л	4	0	4	0	4	3	3	0	4	0	4	2	2	0	4	0
9 л	0	4	4	8	8	9	0	3	3	7	7	9	0	2	2	6

Спосіб 2 (починаємо з наповнення більшого відра)

Номер кроку	1	2	3	4	5	6	7	8
4 л	0	4	0	4	0	1	1	4
9 л	9	5	5	1	1	0	9	6

Цікавий факт

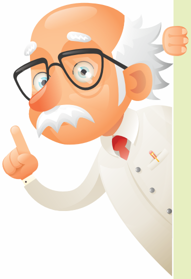
Що таке літр?

Будь-хто з вас відповість: це міра об’єму рідин. Із терміном «літр» пов’язана незвичайна історія. У 1978 році Кеннет Вулнер, співробітник Університету Ватерлоо, вигадав неіснуючу персону — Клода Еміля Жан-Батиста Літра, з метою затвердити офіційне позначення літра у вигляді великої латинської L. Річ у тім, що, за правилами системи СІ, великими буквами позначають лише ті одиниці виміру, які утворено від власних імен. Але в країнах, де використовують латинський алфавіт, позначення літра як «*l*» часто плутають із цифрою 1 або з великою буквою «I».

Вулнер опублікував неправдиву статтю в журналі для шкільних учителів хімії. У ній стверджувалося, що Клод Літр народився 12 лютого 1716 року в родині виробника винних пляшок. Літру було приписано першість у виробництві лабораторного посуду. Літр запропонував вимірювати об’єми рідин за допомогою одиниці, названої літром. Однак шахрайство було викрито.

Розподіл рідини на задані частини

Обговорюємо задачу



Є трилітрова банка соку. Як, маючи літрову й дволітрову банки, розділити сік на три рівні частини?

Номер кроку	1	2	3
3 л	3	1	1
2 л	0	2	1
1 л	0	0	1

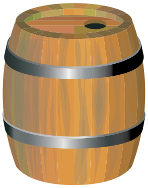
Задача 1. Бочка місткістю 12 відер наповнена молоком. Як, використовуючи бочки місткістю 5 і 8 відер, розлити молоко на дві частини: а) 3 відра і 9 відер; б) рівні між собою?

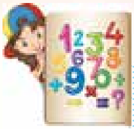
Підказка. Якщо джерелом рідини слугує третя посудина, то переливання слід виконувати як зазвичай, а рідину виливати з «робочих» посудин назад у посудину-«джерело».

Номер кроку	1	2	3	4	5	6	7	8
12 відер	12	4	4	9	9	1	1	6
8 відер	0	8	3	3	0	8	6	6
5 відер	0	0	5	0	3	3	5	0

Задача 2. Є три бочонки місткістю 6 л, 3 л і 7 л. У першому і третьому бочонках міститься відповідно 4 л і 6 л квасу. Потрібно розділити квас на дві рівні частини.

Номер кроку	1	2	3	4	5	6
7 л	6	3				
6 л	4	4				
3 л	0	3				





Задачі

1. Два відра

Є два відра ємністю 5 л і 8 л. Як, перебуваючи на березі річки, відміряти за допомогою цих відер 7 л води?

2. Відмірюємо один літр

Як, користуючись посудинами ємністю 7 л і 12 л, відміряти 1 л води?

3. Відмірюємо половину

Відро ємністю 10 л наповнене водою. Як за допомогою семилітрового бідона й трилітрової банки відміряти 5 л води?

4. Бочка з квасом

У бочці міститься 13 відер квасу. Як відлити з неї 8 відер квасу за допомогою дев'ятивідерної та п'ятивідерної бочок?

5. Сік порівну

У бочці міститься 18 л виноградного соку. Є два відра по 7 л кожне і черпак ємністю 4 л. Як в обидва відра налити по 6 л соку?

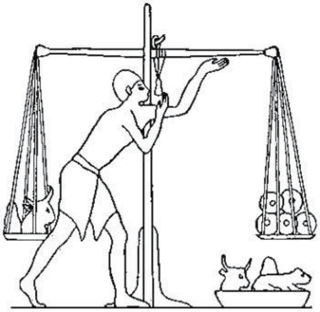
6. Беремо воду з річки

Є два відра ємністю 17 і 15 л. Як за їх допомогою набрати з річки рівно 11 л води?

7. Допоможи Марійці

У Марійки є дві посудини: одна ємністю 5 л, а друга — чи то 3, чи то 4 літри. Марійка стоїть біля річки. Допоможіть їй визначити ємність другої посудини.

Зважування на терезах



Терези — один із найдавніших приладів, винайдених людиною для визначення маси тіл. Уперше терези згадуються у II тисячолітті до нашої ери.

Найпростіші терези у вигляді рівноплечого коромисла з підвішеними шальками були поширені в II тисячолітті до нашої ери в Давньому Вавилоні та Єгипті (2 тисячі років до нашої ери).

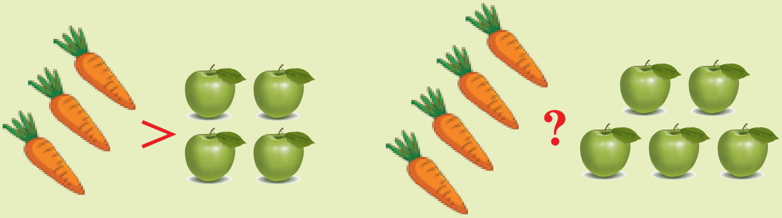
Незважаючи на те, що перші терези були дуже примітивним пристроєм, їхня конструкція збереглася й до наших днів. Саме вони є прообразом важільних терезів.

За типом обладнання, яке використовується, задачі на зважування можна розподілити на три типи:

1) зважування на шалькових терезах без гир;
2) зважування на шалькових терезах з гирями;
3) зважування на терезах зі шкалою.

Обговорюємо задачу

Що важче — 4 морквини чи 5 яблук, якщо 3 морквини важчі, ніж 4 яблука?



Пошук предмета з особливими властивостями за допомогою шалькових терезів без гир

Залежно від мети, якої потрібно досягнути, можна виділити такі основні типи задач на зважування за допомогою шалькових терезів без гир:

- пошук предметів з особливими властивостями (наприклад, фальшивих монет);
- упорядкування предметів за зростанням (спаданням) їхньої маси;
- відмірювання вантажів заданої маси.

У задачах цього типу, як правило, потрібно за обмежену кількість зважувань знайти один або декілька «фальшивих» предметів, які відрізняються за масою від усіх інших — «справжніх».

Розв'язуючи такі задачі, необхідно враховувати три можливі варіанти положення шалькових терезів під час зважування: легша ліва шалька; легша права шалька; терези зрівноважені.

Цікавий факт

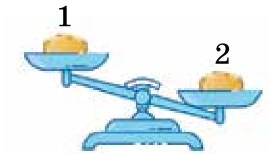
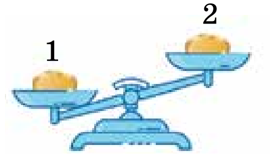
У 1669 році французький математик Жиль де Роверба́ль запропонував розміщувати вантаж на бруску. Так з'явилися терези у вигляді рівноплечого важеля, точка опори якого розташовувалась на підставці.

Розвиток промисловості й транспорту зумовив появу нових видів терезів. У 1830 році Таддеус Фейрнбекс винайшов платформні терези, які є прообразом сучасних терезів.

Задача 1. З трьох однакових на вигляд монет одна фальшива, її маса менша від маси справжньої. Як за одне зважування знайти цю монету?

Розв'язання

Пронумеруємо монети: 1, 2 і 3. Покладемо на терези монети 1 і 2 та проаналізуємо всі можливі варіанти.

		
Якщо монета 1 легша (1 < 2), то фальшивою є монета 1	Якщо терези зрівноважені (1 = 2), то фальшивою є монета 3	Якщо монета 2 легша (1 > 2), то фальшивою є монета 2

Це розв'язання можна подати у вигляді таблиці.

Зважування № 1	1 і 2 (3)		
Результат	<	=	>
Висновок: фальшива монета	1	3	2

Задача 2. Із дев'яти однакових на вигляд монет одна фальшива, її маса менша за масу справжньої. Знайдіть за два зважування цю монету. Подайте розв'язання у вигляді таблиці.

Підказка. Цю задачу можна звести до попередньої. Для цього потрібно розподілити монети на три рівні групи й з'ясувати під час першого зважування, у якій із груп фальшива монета.

Зважування № 1	1, 2, 3 і 4, 5, 6 (7, 8, 9)								
Результат	<			=			>		
Висновок: фальшива монета	серед 1, 2, 3			серед 7, 8, 9			серед 4, 5, 6		
Зважування № 2	1 і 2 (3)			7 і 8 (9)			4 і 5 (6)		
Результат	<	=	>	<	=	>	<	=	>
Висновок: фальшива монета	1	3	2	7	9	8	4	6	5

Задача 3. З трьох монет одна фальшива, причому невідомо, вона легша чи важча від справжніх. Як знайти цю монету за два зважування й визначити, легша вона чи важча?

Підказка. У цій задачі 6 варіантів відповіді, оскільки кожна з трьох монет може бути легшою або важчою.

Зважування № 1	1 і 2 (3)								
Результат	<			=			>		
Висновок: фальшива монета	1, причому легша за справжню, або 2, причому важча за справжню			3			1, причому важча за справжню, або 2, причому легша за справжню		
Зважування № 2	1 і 3 (2)			1 і 3 (2)			1 і 3 (2)		
Результат	<	=	>	<	=	>	<	=	>
Висновок: фальшива монета (легша чи важча)	1, л.	2, в.	Неможливо	3, в.	Неможливо	3, л.	Неможливо	2, л.	1, в.

1. У випадку якщо при першому зважуванні маси двох монет виявляться рівними, це дозволить визначити фальшиву монету, а друге зважування — легша вона чи важча.
2. У випадку якщо при першому зважуванні маси двох монет виявляться нерівними, то знайти фальшиву монету дозволить друге зважування, а за результатами першого зважування можна буде визначити, легша вона чи важча.

Задача 4. Серед дорогоцінних каменів, кількість яких дорівнює 101 і які є однаковими на вигляд, один камінь фальшивий, він відрізняється від інших за масою. Як за допомогою шалькових терезів без гир за два зважування визначити, легший чи важчий фальшивий камінь? Знаходити фальшивий камінь не потрібно.

Підказка. Розподіліть камені на три групи: 33, 33 і 35. Зваживши дві групи по 33 камені, розгляньте два варіанти: 1) рівність; 2) нерівність.

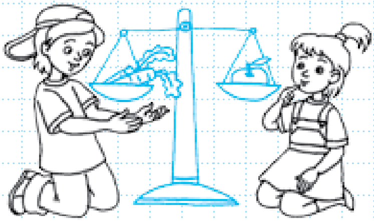
Задачі

1. Важка фальшива монета

Відомо, що із 7 однакових на вигляд монет одна фальшива — її маса більша від маси справжньої. Як за два зважування знайти цю монету?

2. Легка фальшива монета

Відомо, що з 25 однакових на вигляд монет одна фальшива — її маса менша від маси справжньої. Як за три зважування знайти цю монету?



3. Коробка з діамантами

У коробці лежить 26 діамантів, з яких один природного походження, а решта — штучні. Маси штучних діамантів однакові, маса природного — трохи менша. Складіть план дій для знаходження природного діаманта за три зважування на шалькових терезах без гир.

4. Фальшивомонетники

Із двох фальшивомонетників перший виготовляє монети, важчі від справжніх, а другий — легші за справжні. Є 15 однакових за зовнішнім виглядом монет, серед них одна — фальшива. Як за два зважування можна визначити, хто виготовив фальшиву монету — перший підроблювач чи другий?

5. Чотири монети

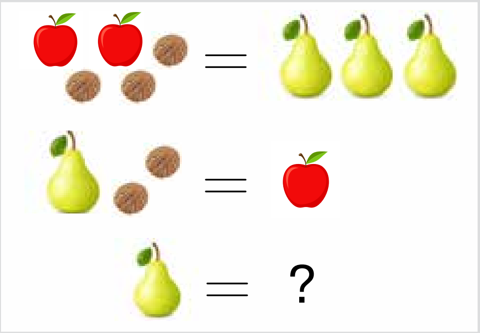
Серед чотирьох монет одна фальшива — її маса відрізняється від маси інших. Як знайти цю монету за два зважування? Чи можна при цьому з'ясувати, легша вона за справжні монети чи важча?

Зважування на шалькових терезах без гир

Обговорюємо задачу

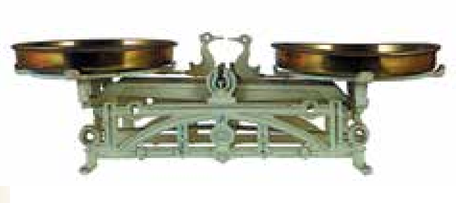
Є 4 монети. Скільки потрібно зважувань, щоб кожну монету зважити з кожною? Чи можна після всіх зважувань визначити найлегшу й найважчу монети? Чи можна упорядкувати монети за зростанням (спаданням) їхньої маси?

Задача. Два яблука й три горіхи важать стільки ж, скільки три груші. Груша й два горіхи зрівноважують одне яблуко. Скільки потрібно горіхів, щоб зрівноважити грушу?



Цікавий факт

У Русі-Україні існували такі міри ваги, як камінь, зерно, пуз тощо. Монети виконували функцію як грошових одиниць, так і мір маси. У 996 році князь Володимир звелів запровадити єдині міри ваги та наказав забезпечити верховний нагляд за терезами й мірами.



Терези є одним з найвизначніших винаходів людства. Над їх удосконаленням працювали французький математик Жиль де Роберваль, швейцарський математик і фізик Леонард Ейлер, російський хімік Дмитро Менделєєв.

Пошук предметів з особливими властивостями методом половинного ділення

Для того щоб знайти серед монет найлегшу, слід розподілити монети на пари і, зваживши кожну пару, знайти в ній легшу монету. Отримані легші монети, у свою чергу, розподілити на пари і знову зважити й т. д., доки не знайдеться найлегша монета. Такий метод називають **методом половинного ділення**.

Задача 1. Є 4 монети. Скільки потрібно зважувань, щоб знайти серед монет найлегшу?

Розв'язання

1. Розподілимо монети на пари.
2. У кожній парі визначимо легшу монету.
3. Порівняємо між собою легші монети з кожної пари.
4. Запишемо розв'язання у вигляді таблиці.

Зважування № 1 і № 2	1 і 2, 3 і 4							
Результат	<	<	<	>	>	<	>	>
Висновок: найлегша монета	серед 1 і 3		серед 1 і 4		серед 2 і 3		серед 2 і 4	
Зважування № 3	1 і 3		1 і 4		2 і 3		2 і 4	
Результат	<	>	<	>	<	>	<	>
Висновок: найлегша монета	1	3	1	4	2	3	2	4

Задача 2. Є 8 різних за масою кульок. Як за 10 зважувань визначити найважчу і найлегшу кульки? Запишіть розв'язання у вигляді таблиці.

За яку кількість зважувань можна визначити найлегшу і найважчу кульки серед 32 кульок?

Упорядкування предметів за допомогою шалькових терезів без гир

Задача 3. Коваль викував 4 мечі для чотирьох лицарів. Але мечі виявилися різними за масою. Коваль вирішив, що найважчий меч отримає найсильніший. Коваль зумів, використовуючи шалькові терези без гир, не більш ніж за 5 зважувань упорядкувати мечі за зростанням маси. Спробуйте й ви.

Підказка. Пронумеруйте мечі: 1, 2, 3, 4. Порівняйте мечі 1 і 2, потім 3 і 4 (два зважування). Порівняйте між собою важчі й легші мечі.

Відмірювання вантажу заданої маси за допомогою шалькових терезів без гир

Під час розв’язування задач на відмірювання вантажу заданої маси часто використовують метод половинного ділення.

Задача 4. Правитель вирішив подарувати своєму зятеві земельні угіддя й побудувати там замок. Майстри сказали, що для цього їм знадобиться 9 кг цвяхів. У коморах правителя знайшли мішок із цвяхами масою 24 кг. Як за допомогою шалькових терезів без гир відміряти 9 кг цвяхів?

Розв’язання

1. Розділимо цвяхи на дві купки так, щоб при зважуванні терези зрівноважились. У кожній купці цвяхів буде по 12 кг.
2. Одну з купок знову розділимо навпіл. Одержимо 2 купки по 6 кг.
3. Одну з цих купок розділимо навпіл. Одержимо купки по 3 кг.
4. Складемо 9 кг цвяхів із купок в 3 кг і 6 кг.

Задача 5. Як за допомогою шалькових терезів без гир розділити:

а) 16 кг крупи на дві частини в 7 кг і 9 кг;

б) 56 кг крупи на дві частини у 21 кг і 35 кг?

Скільки для цього знадобиться зважувань?

Задача 6. У королівстві карбують монети вартістю 1, 2, 3, 5 галерів, які важать відповідно 1, 2, 3, 5 г. Серед 4 монет різної вартості є одна фальшива, яка відрізняється від справжньої за масою. Як за допомогою зважувань на шалькових терезах без гир визначити фальшиву монету? Подайте розв'язання у вигляді таблиці.

Задача 7. Бабуся запропонувала Марійці розсипати 7 кг крупи в 3 мішечки так, щоб за їх допомогою можна було зважити будь-який вантаж вагою в ціле число кілограмів від 1 до 7. Допоможіть Марійці впоратися із завданням.

Задача 8. На шістьох зовні однакових картонних картках, маси яких становлять 1 г, 2 г, ..., 6 г, зробили написи «1 г», «2 г», ..., «6 г». Як на шалькових терезах за два зважування визначити, чи правильно зроблено написи?

Задача 9. Серед 40 монет є дві фальшиві, які зовні нічим не відрізняються від справжніх. Фальшиві монети важать однаково, причому є легшими за справжні. За два зважування на шалькових терезах без гир відберіть 20 справжніх монет.

Задача 10. Серед 12 монет одна є фальшивою, вона відрізняється за вагою від справжніх, однак невідомо, вона легша чи важча за справжні. За три зважування на шалькових терезах без гир визначте фальшиву монету.

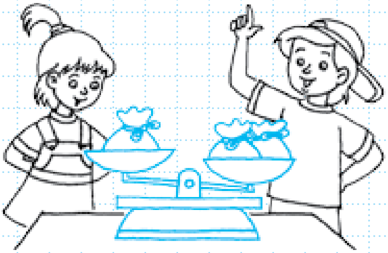
Задачі

1. Різні монети

Є 16 різних за масою монет. Як за 22 зважування визначити найважчу та найлегшу монети?

2. Розділяємо крупу

Як без гир розділити 48 кг крупи на дві частини — 27 кг і 21 кг?



3. Знайди справжні монети

На столі в ряд лежить 4 монети. Серед них є і справжні, і фальшиві (вони легші від справжніх). Відомо, що будь-яка справжня монета лежить зліва від будь-якої фальшивої. Як за одне зважування відокремити справжні монети від фальшивих?

4. Геолог і каміння

Геолог має шалькові терези без гир і 8 різних за масою каменів. Він хоче знати, чи правда, що два камені завжди важчі від одного. Як йому з’ясувати це за 13 зважувань?

Підказка. Потрібно з’ясувати, чи важчі в сумі два найлегші камені, ніж найважчий камінь.

5. Чотири золотих

Фальшивомонетники виготовили чотири монети вартістю 1, 3, 4 і 7 золотих, які мають важити відповідно 1, 3, 4 і 7 г. Але одна з цих монет виявилася «неправильної» маси. Як за два зважування на шалькових терезах без гир визначити «неправильну» монету?

Зважування на шалькових терезах з гирями

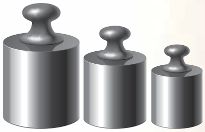
Гирі — це міри маси, які застосовують під час зважування вантажів і для перевірки терезів.

За основу найпершої в історії системи вагових одиниць, давньовавилонської, було взято вагу одного хлібного зерна — грана. Пізніше з'явилися гирі, виготовлені людьми. Відомі давні вавилонські, єгипетські, грецькі, римські та інші гирі різноманітної форми (зокрема такі, що мають вигляд фігур і голів священних тварин).

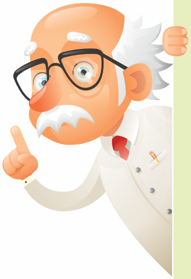
У країнах, які прийняли метричну систему мір, маса гир виражається в кілограмах, грамах і міліграмах.

За допомогою шалькових терезів з гирями можна визначати не будь-які маси предметів, а тільки деякі — залежно від набору гир. Основні типи задач на зважування за допомогою шалькових терезів з гирями:

- пошук предметів з особливими властивостями (наприклад, фальшивих монет);
- відмірювання речовин заданої маси;
- зрівноважування вантажів за допомогою даного набору гир, а також конструювання цих наборів.



Обговорюємо задачу



На виставці кондитерських виробів Марійці й Петрику дуже сподобався один торт. Кондитер пообіцяв пригостити тортом усіх, хто зможе визначити його масу. І підказав, що якщо на одну шальку терезів покласти цілий торт, а на іншу — гирю в $\frac{3}{5}$ кг і $\frac{2}{3}$ такого самого торта, то терези зрівноважаться. Марійка й Петрик таки спробували торт — вони розв'язали задачу. А ви зможете?

Пошук предметів з особливими властивостями за допомогою шалькових терезів з гирями

Задача 1. Одна з п'яти монет є фальшивою, причому невідомо, легша вона за справжню чи важча. Маса справжньої монети 5 г. Як за допомогою однієї гирі масою 5 г і двох зважувань на шалькових терезах визначити фальшиву монету?

Розв'язання

Зважування № 1	1, 2 і 3, 5 г (4, 5)								
Результат	<			=			>		
Висновок: фальшива монета	серед 1 і 2 (легша за справжню) або 3 (важча за справжню); 4 і 5 — справжні			серед 4 і 5			серед 1, 2 (важча за справжню), або 3 (легша за справжню)		
Зважування № 2	1, 3 і 4, 5			4 і 5 г					
Результат	<	=	>	<	=	>	<	=	>
Висновок: фальшива монета	1	2	3	4	5	4	3	2	1

Задача 2. Є 10 мішечків з монетами. В одному мішечку всі монети фальшиві, масою 9 г кожна. Маса інших монет — по 10 г кожна. Є шалькові терези й гирки, які дозволяють зрівноважувати будь-який вантаж масою в ціле число грамів від 1 до 1000. Як за одне зважування встановити, у якому мішечку фальшиві монети?

Розв'язання

Пронумеруйте мішечки від 1 до 10. Візьміть із кожного таку кількість монет, яка відповідає номеру мішечка, і покладіть на одну шальку. Різниця між ідеальною масою монет і фактичною й буде відповіддю.

Відмірювання речовин заданої маси

Під час розв'язування задач на відмірювання речовин певної маси допомагають такі прийоми:

- подвоєння: на другу шальку терезів кладуть вантаж такої самої маси, як і вантаж на першій шальці терезів;
- половинне ділення: якщо сипучу речовину відомої маси насипати на дві шальки терезів так, щоб терези зрівноважилися, то ми відміряємо половину всієї маси речовини.

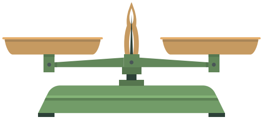
Обговорюємо задачу

Марійка з Петриком на ярмарку спостерігали, як продавець вправно зважує фрукти. Побачивши дітей, продавець запропонував їм спробувати свої сили. Він дав їм шалькові терези й дві гирі в 3 кг і 5 кг. Друзі зважили: а) 2 кг яблук; б) 4 кг груш; в) 16 кг слив. Як вони це зробили?

Задача 3. Господиня має шалькові терези й гирю масою 100 г. Як їй відміряти 700 г крупи за три зважування?

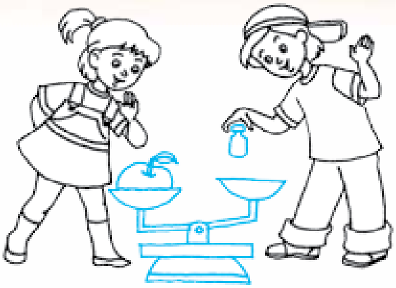
Розв'язання

1. Відміряємо 100 г крупи й пересиплемо її в мішечок.
2. Потім за допомогою мішечка й гирі відміряємо 200 г крупи. Досиплемо 200 г крупи в мішечок. У результаті отримаємо 300 г крупи.
3. За допомогою мішечка в 300 г і гирі відміряємо ще 400 г крупи. Досиплемо її в мішечок і отримаємо 700 г крупи.

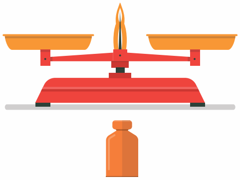


Задача 4. У ящику 25 кг яблук. Як за допомогою шалькових терезів і однієї гирі в 1 кг за два зважування відміряти 19 кг яблук?

Підказка. Гирю можна поставити на одну із шальок терезів і зрівноважити шальки, докладаючи на них яблуки.



Задача 5. У пакеті 3 кг 600 г цукрової пудри. Як, маючи одну гирю в 200 г, розподілити пудру на три частини: дві по 800 г і одну — 2 кг, зробивши три зважування на шалькових терезах?



Цікавий факт

Стандартний набір гир

Наприкінці XVIII століття було затверджено стандартний набір чавунних гир кулястої форми: 2 і 1 пуд; 27, 9, 3 і 1 фунт; 81, 27, 9, 3 і 1 золотник. Застосування гир із такими найменуваннями збереглося до запровадження у 1875 році метричної системи мір. У цій системі маса гир виражається в кілограмах, грамах, міліграмах.

Задача 6. Як розважити 20 г чаю в 10 пакетиків по 2 г у кожний за дев'ять зважувань за допомогою лише гирок в 5 г і 9 г?

Використовуються звичайні терези з двома шальками.

Задачі

1. На селі

Марійка приїхала в село до бабусі й дідуся. Вона вирішила пригостити їх пирогом, приготованим власноруч. У коморі дівчинка знайшла мішок, який містив 9 кг борошна, і шалькові терези з гирями в 50 г і 200 г. Як Марійці за три зважування відміряти 2 кг борошна?

2. Пакетики з мармеладом

Як 2 кг мармеладу розфасувати в десять 200-грамових пакетиків, маючи шалькові терези й гирю в 900 г?

3. За три зважування

У пакеті 4 кг 200 г порошку какао. Як, маючи одну гирю в 100 г, розділити какао на три частини: дві по 1 кг і одну — 2 кг 200 г, зробивши три зважування на шалькових терезах?

4. Мішок крупи

Є мішок крупи, шалькові терези й гирка в 1 г. Чи можна за 10 зважувань відміряти 1 кг крупи?

5. Одна серед чотирьох

Серед чотирьох монет одна фальшива. Вона відрізняється від справжніх масою, але невідомо, легша вона чи важча. Маса справжньої монети 5 г.

Як за два зважування на шалькових терезах знайти фальшиву монету, якщо є одна гиря масою 5 г? Чи можна при цьому визначити, легша фальшива монета чи важча?

Зважування на терезах з гирями або зі шкалою

У Давніх Греції й Римі поряд із шальковими терезами з набором гир застосовувалися й важільні терези з пересувним вантажем. Шкала цих терезів дозволяла безпосередньо зчитувати покази. Ці прилади були надзвичайно популярними в наших предків, а вагарів поважали й шанували.

Обговорюємо задачу

Серед 21 монети — 10 справжніх і 11 фальшивих. Фальшиві монети на 1 г легші за справжні. Як за одне зважування на терезах зі шкалою дізнатися, чи фальшива певна монета?
Підказка. Потрібно покласти на кожну шальку терезів по 10 монет і знайти різницю мас цих монет.

Пошук предметів з особливими властивостями за допомогою терезів із градуйованою шкалою

Терези з градуйованою шкалою дозволяють визначити точну масу вантажу. Одна поділка шкали, як правило, відповідає 1 г або 1 кг.

Задача 1. На столі лежать 10 пронумерованих капелюхів, у кожному капелюсі — по 10 золотих монет. В одному з капелюхів містяться фальшиві монети. Справжня монета важить 10 г, а фальшива — 9 г. Як за допомогою терезів зі шкалою за одне зважування визначити, у якому капелюсі лежать фальшиві монети?

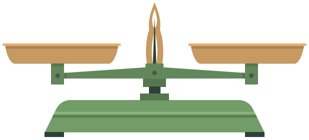
Підказка. З кожного капелюха потрібно взяти таку кількість монет, яка відповідає номеру капелюха, і зважити їх.

Зрівноважування вантажів за допомогою заданого набору гир

Обговорюємо задачу

Петрик вирішив перевірити, чи можна, використовуючи замість гир необмежену кількість справжніх і фальшивих монет, зрівноважити будь-який вантаж, маса якого дорівнює цілому числу грамів від 1 до 10. Маса справжньої монети 10 г, а фальшивої — 9 г. Як ви вважаєте, чи вийшло це в нього?

Підказка. Складіть із монет масою 10 г і 9 г комбінації, що дозволяють зрівноважити будь-яке ціле число грамів від 1 до 10.

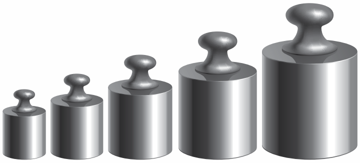


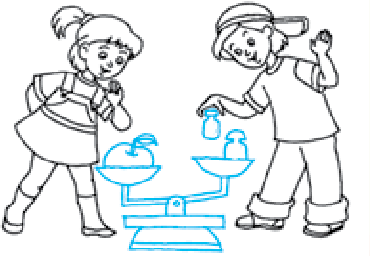
Задача 2. Як можна зрівноважити терези, маючи гирі в 1 кг і 3 кг, і вантажі масою 2 кг і 4 кг? З'ясуйте всі можливі варіанти. При яких зважуваннях ми змогли б визначити масу вантажів, якби вона була невідомою?

Підказка. Гирі можна класти як на шальку терезів, протилежну вантажу, так і на шальку з вантажем.

Задача 3. Є набори гир масою 1, 2, 4, 8, 16 г. На одну шальку терезів кладуть вантаж, на іншу — гирі. Покажіть, що терези можна зрівноважити, якщо маса вантажу дорівнює:

а) 13 г; б) 19 г; в) 23 г; г) 31 г.





Конструювання заданого набору з гир

Обговорюємо задачу

Сусідка Петрика працює продавцем у кондитерській крамниці. Одного разу вона запропонувала хлопчикові розв'язати цікаву задачу. Цукерки в крамниці розкладені в 24 пакети по 5 кг і по 3 кг у кожному. Маса всіх пакетів по 5 кг дорівнює масі всіх пакетів по 3 кг. Скільки пакетів по 5 кг і скільки — по 3 кг?

Задача 4. Є гирки масою від 1 до 8 г. Розкладіть їх на 4 рівні за масою купки.

Підказка. Використайте метод Гаусса.

Задача 5. Є гирки масою від 1 до 12 г. Розкладіть їх на 3 рівні за масою купки так, щоб у кожній купці було по 4 гирки.

Задача 6. Запропонуйте набір із п'яти гир, за допомогою яких можна зрівноважити будь-яке ціле число кілограмів від 1 до 31, якщо гирі можна ставити тільки на одну шальку терезів.

Задачі

1. Сім мішків із монетами

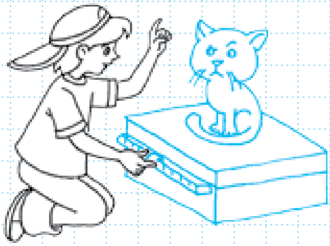
На столі лежать 7 пронумерованих мішків, у кожному з яких по 10 монет. В одному з мішків містяться фальшиві монети, а в інших — справжні. Маса справжньої монети 5 г, а фальшивої — 4 г. Як за одне зважування на терезах зі шкалою визначити, в якому мішку лежать фальшиві монети?

2. Як знайти потрібну гирю

Є набір гир масами 1000 г, 1001 г, 1002 г і 1004 г, які на вигляд не відрізняються одна від одної. Як за два зважування на терезах зі шкалою знайти гирю в 1000 г?

3. Від 1 до 13

Як за допомогою гир масами 1 кг, 3 кг і 9 кг зрівноважити будь-яке ціле число кілограмів від 1 до 13? Результати запишіть у таблицю.

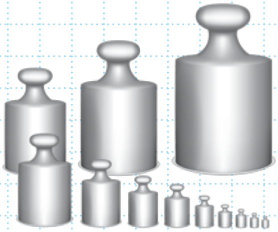


4. Три купки гирок

Дано набір гирок масою від 1 до 9 г. Розподіліть їх на 3 купки так, щоб сумарна маса кожної купки була тою самою і щоб в одній купці було 2, в другій 3, а в третій 4 гирі.

5. 101 гиря

З набору гирок масою від 1 до 101 г загубилася гирка масою 19 г. Чи можна 100 гирок, що залишилися, розподілити на дві купки по 50 гирок у кожній так, щоб маси обох купок були однаковими?



Цікаві факти

Феміда — богиня правосуддя

У Давній Греції ваги завжди були чимось більшим за прилад для зважування товарів. Так, наприклад, давньогрецька богиня Феміда в одній руці тримає терези (ваги), в іншій — меч, а її очі закриті пов'язкою. Отже, терези використовувались як давній символ міри й справедливості. Вважалося, що на терезах правосуддя Феміди зважуються добро і зло, гарні та погані вчинки.

Зважування в Русі-Україні

- За часів правління Київського князя Володимира Великого міри ваги мали назву «ставила», а прилади для зважування (терези) — «звеси».
- У давнину міри ваги були найрізноманітнішими. У різних місцевостях застосовували різні одиниці. Ті самі назви могли мати різні значення, а однакові за розміром одиниці — різні назви.

  Ось деякі міри ваги:

  доля — 0,04 г;
  золотник — 4,27 г;
  лот — 12,8 г;
  пуд — 16,38 кг;
  берковець — 163,8 кг.

- Фунт (від лат. *pondus* — вага, гиря) як міра ваги був поширеним до запровадження метричної системи мір. На українських землях фунт відомий ще з кінця XIV століття. Але термін «фунт» у різних сферах діяльності позначав різну вагу і наприкінці XVIII століття в різних країнах мав близько 400 варіантів. Наприклад, польський фунт дорівнював 0,406 кг, литовський — 0,37 кг, віденський — 0,56 кг.
- Камінь як міра ваги відома на українських землях від XIV століття. Нею користувалися під час зважування вовни, мила, заліза, воску. В Україні його вага становила здебільшого 32 фунти (близько 13 кг). Але існували й інші стандарти. Так, на Лівобережній Україні у XVIII столітті термін «камінь» означав пуд вагою від 40 до 60 фунтів.

Математичні ігри

Фокуси із числами та арифметичними діями

Математичні фокуси з’явилися разом з виникненням математики як науки.

Арифметичні фокуси — це експерименти, в основі яких лежать властивості чисел і арифметичних дій. Розгадати секрет фокуса — означає знайти його математичну закономірність.

У задачах на фокуси із числами необхідно розгадати секрет фокуса, тобто зрозуміти, чому задана послідовність дій приводить до очікуваного результату.

Обговорюємо задачу

Виконайте обчислення: 37 • 3; 37 • 6 ; 37 • 9.
Проаналізуйте отримані результати. Не виконуючи обчислень, запишіть значення добутків числа 37 на числа з діапазону від 9 до 27, які кратні числу 3.

Задача Діофанта (із трактату «Арифметика»). Знайдіть три числа, якщо відомо, що добуток суми перших двох чисел на третє дорівнює 35, добуток суми першого й третього чисел на друге — 27, а добуток суми другого й третього на перше — 32.

Підказка. (Ч1 + Ч2) • Ч3 = 35; (Ч1 + Ч3) • Ч2 = 27; (Ч2 + Ч3) • Ч1 = 32.

Угадування задуманого числа

Ілюзійне мистецтво (демонстрація фокусів) привертає увагу людей вже більше 4,5 тисяч років. У Середньовіччі мандрівні фокусники, щоб відволікти увагу глядачів від своїх маніпуляцій, промовляли заклинання: «Хокус-покус!». Згодом «хокус» перетворився на «фокус».

Фокусникові для виконання фокусів, як правило, потрібний асистент. Кожен із вас може спробувати себе як у ролі фокусника, так і в ролі асистента.

Фокус «Угадай задумане число»

Фокусник пропонує асистентові задумати будь-яке число від 1 до 20 й виконати такі дії:

1) додати до задуманого числа число 5;
2) отриману суму помножити на 3;
3) добуток зменшити на 15.

Фокусник просить повідомити йому результат і легко відгадує задумане асистентом число.

Розгадайте секрет фокуса.

Розгадка

Позначимо задумане число буквою n. Запишемо послідовність дій:

1) $n + 5$;
2) $3(n + 5)$;
3) $3(n + 5) - 15 = 3n + 15 - 15 = 3n$.

Ми отримали, що задумане число завжди буде в 3 рази меншим за результат.

Висновок. Щоб відгадати задумане число, фокусник повинен поділити на 3 названий асистентом результат.

Фокус «Угадування числа»

Фокусник пропонує асистентові задумати число й виконати такі дії:

1) відняти від задуманого числа одиницю;
2) різницю подвоїти;
3) до отриманого добутку додати задумане число і результат повідомити фокусникові.

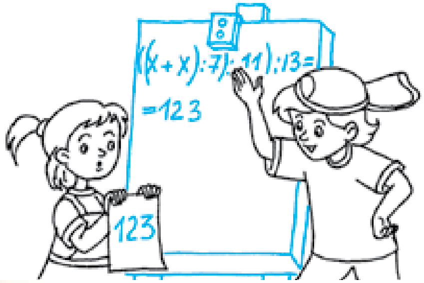
Як угадати задумане асистентом число?

Підказка. Позначте задумане число буквою n і виконайте дії в загальному вигляді.

Фокус «Число Шахерезади»

Для виконання цього фокуса потрібно три асистенти.

Фокусник просить першого асистента загадати трицифрове число та написати його на аркуші паперу два рази підряд. Цей аркуш фокусник передає другому асистенту й пропонує йому отримане шестицифрове число поділити на 7 та записати результат ділення. Потім фокусник передає аркуш третьому асистенту і просить отриманий результат поділити на 11, а потім на 13.



Аркуш із записаним результатом фокусник повертає першому асистенту, який бачить, що кінцевий результат — це загадане число. Розгадайте секрет фокуса. Чому назва фокуса пов’язана з іменем Шахерезади?

Підказка. Перевірте, у скільки разів збільшиться трицифрове число, якщо до нього приписати його самого.

Фокус «Угадування віку й дня народження»

Фокусник повідомляє, що він може дізнатися дату народження будь-якої людини. Тому, хто хоче це перевірити, фокусник пропонує виконати такі дії:

1) порядковий номер місяця помножити на 100;
2) до добутку додати число місяця народження;
3) суму помножити на 2;
4) до добутку додати 8;
5) суму помножити на 5;
6) до добутку додати 4;
7) суму помножити на 10;
8) до добутку додати число повних років, збільшене на 4;
9) назвати остаточний результат.

Якщо від цього результату фокусник відніме число 444, то останні дві цифри отриманої різниці покажуть число років, наступні дві цифри — число народження, а дві перші цифри — порядковий номер місяця. Розгадайте секрет фокуса.

Підказка. Позначте порядковий номер місяця буквою a, число місяця — буквою b, число повних років — буквою c і запишіть усі вказані обчислення у вигляді виразу.

Фокус «Угадування віку»

Фокусник просить асистента записати свій вік, а потім виконати такі дії:

1) знайти суму цифр записаного числа;
2) помножити суму цифр на 9;
3) скласти результат із початковим числом (віком).

Після цього асистент повідомляє результат фокуснику. Фокусникові треба знайти суму цифр результату. Вік асистента відрізняється від знайденої суми цифр на число, кратне 9.

Розгадайте секрет фокуса.

Задачі

1. Фокус «Угадайте задумане число» (з книжки Л. Ф. Магницького «Арифметика»)

Фокусник пропонує асистентові задумати будь-яке двоцифрове число, збільшити число десятків задуманого числа у 2 рази, до добутку додати 5, отриману суму збільшити в 5 разів, до нового добутку додати 10 і число одиниць у задуманому числі, а потім результат виконаних дій повідомити фокусникові. Фокусник віднімає від зазначеного результату число 35 і називає задумане число.

Розгадайте секрет фокуса.

2. Фокус «Угадайте результат обчислень»

Фокусник пропонує асистентові виконати такі дії:

1) написати довільне трицифрове число, у якому перша й остання цифри відрізняються більше ніж на одиницю;
2) переставити цифри цього числа у зворотному порядку й записати утворене число;
3) знайти різницю двох записаних чисел;
4) утворити нове число, переставивши у зворотному порядку цифри отриманої різниці;
5) скласти результати дій, описаних в пунктах 3 і 4.

Після цього фокусник легко вгадує результат обчислень: 1089.

Розгадайте секрет фокуса.

3. Фокус «Число з улюбленої цифри»

Запишіть свою улюблену цифру.

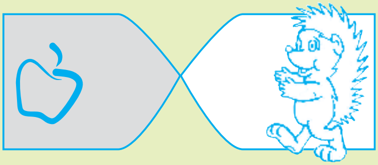
1) Помножте записану цифру на 7, потім на 15 873.
2) Помножте записану цифру на 9, потім на 12 345 679.

Розгадайте секрет фокуса.

Математичні фокуси з геометричними фігурами

Обговорюємо задачу

Виріжте з паперу смужку.
Намалюйте на її лицьовому боці (ліворуч) їжачка, а на звороті (праворуч) — яблуко. Склейте смужку так, щоб їжачок зміг дістатися яблука.



Накресліть шлях їжачка й перевірте, чи може їжачок дістатися яблука, не перебираючись через край смужки?

Отримане вами «кільце» — одна з найвідоміших математичних конструкцій, яку називають **стрічкою Мебіуса**.

Найчудовіша властивість цієї стрічки — те, що вона має один бік та один край, на відміну від звичайного кільця, склеєного зі смужки паперу, яке має два боки (зовнішній і внутрішній) й два краї (верхній і нижній).

Німецький математик, астроном-теоретик. Його іменем назвали дивовижну геометричну фігуру — стрічку Мебіуса. У 1858 році Мебіус зробив вражаюче відкриття: існують поверхні, які мають лише один бік. Розповідають, що в цьому Мебіусу допомогла служниця, яка одного разу неправильно зшила кінці стрічки. Цікаво, що цю саму фігуру незалежно від Мебіуса відкрив інший німецький математик — Йоганн Бенедикт Лістинг.

Август Фердинанд Мебіус
(1790–1868)

Вивчення властивостей стрічки Мебіуса

Задача 1. Проведіть олівцем уздовж краю стрічки Мебіуса. Де опинився олівець наприкінці руху?

Задача 2. Склейте з паперових смужок стрічку Мебіуса й звичайне кільце. Посередині кожної склеєної смужки проведіть лінію по всій її довжині та розріжте смужки уздовж цих ліній.

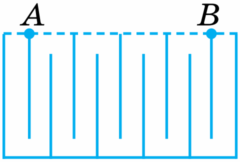
1) Визначте, які фігури ви отримали, розрізавши: стрічку Мебіуса; звичайне кільце.
2) Визначте, скільки боків і країв мають отримані частини: стрічки Мебіуса; звичайного кільця.

Задача 3. Склейте з паперових смужок стрічку Мебіуса й звичайне кільце. Уздовж кожної склеєної смужки проведіть лінію на відстані 1/3 її ширини від краю та розріжте смужки по цих лініях. Запишіть, які фігури ви отримали, розрізавши: стрічку Мебіуса; звичайне кільце.

Задача Дідони. За легендою, фінікійська царівна Дідона, діставшись Африки та вирішивши там оселитись, попросила нумідійського царя Ярба продати їй ділянку землі. Ярб погодився продати таку ділянку, яку б можна було оточити однією бичачою шкірою.

Дідона не стала розстилати шкіру, а розрізала її. Ділянка землі виявилась такою великою, що згодом Дідона заснувала на ній місто Карфаген. Як Дідоні вдалося розрізати шкіру, ви дізнаєтесь, виконавши такий фокус.

Фокус. Візьміть аркуш звичайного зошита й спробуйте вирізати в ньому таку діру, через яку змогла б пролізти людина.



Математичні фокуси з предметами

Фокус із гральними кубиками

Фокусник повертається до асистента спиною та пропонує йому виконати такі дії:

1) кинути на стіл три кубики й знайти суму трьох чисел, які випали;
2) взяти будь-який із трьох кубиків і додати число на його нижній грані до отриманої суми;
3) кинути ще раз той самий кубик і додати до суми число, що випало.

Тепер фокусник повертається до асистента, збирає всі кубики в руку і правильно називає кінцевий результат.

Розгадайте секрет фокуса.

Підказка. Перш ніж зібрати кубики, потрібно скласти числа на їхніх верхніх гранях і до отриманої суми додати деяке число. Визначте, яке саме.

Фокус «Дивовижний годинник»

Фокусник просить асистента задумати будь-яке число від 1 до 12. Потім фокусник кінчиком олівця торкається чисел на циферблаті годинника нібито в довільному порядку.

У цей час асистент рахує про себе до 20, починаючи з числа, наступного після задуманого, так щоб на кожний дотик припадало одне число.

Дійшовши до 20, асистент говорить: «Стоп».

У цей момент олівець фокусника зупиняється саме на задуманому числі.

Розгадайте секрет фокуса.

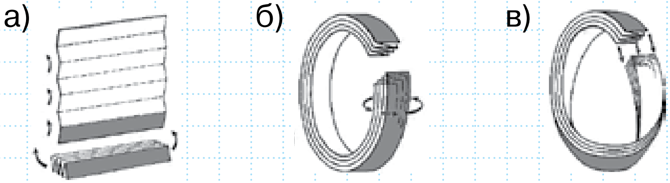
Як число 20, на якому закінчує рахувати асистент, допомагає фокусникові відгадати задумане число?

Задачі

1. Стрічка Мебіуса із квадратного аркуша

Перевірте, чи можна із квадратного аркуша паперу зробити стрічку Мебіуса, якщо м’яти й згинати аркуш забороняється. А якщо згинати аркуш можна?

Підказка. Для виготовлення стрічки Мебіуса з квадратного аркуша, скористайтесь мал. *а–в*.



2. Фокус із монетами

Для фокуса знадобиться коробка з 20 монетами.

Фокусник повертається спиною до асистента й пропонує йому виконати такі дії:

1) взяти з коробки будь-яку кількість монет (від 1 до 9) і покласти собі в кишеню;
2) порахувати кількість монет, що залишилися, та знайти суму цифр отриманого числа;
3) взяти з коробки і покласти собі в кишеню таку кількість монет, яка дорівнює отриманій в пункті 2 сумі;
4) взяти з коробки будь-яку кількість монет і сховати їх у долоні.

Повернувшись, фокусник швидко рахує кількість монет у коробці й знаходить число, яке доповнює цю кількість до 9. Знайдене число дорівнює кількості монет у долоні асистента. Розгадайте секрет фокуса. Як бути, якщо в пункті 4 асистент візьме всі монети?

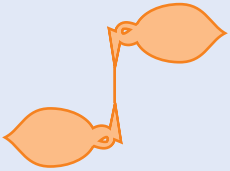
Підказка. Перевірте, чому дорівнює різниця будь-якого числа від 10 до 20 і суми його цифр.

Математичні конструкції

Симетрія

Обговорюємо задачу

Розгляньте фігури, зображені на малюнках.



а) Спробуйте знайти на кожному малюнку таку лінію, щоб половинка фігури та її відображення в дзеркалі, поставленому вздовж цієї лінії, склали вихідну фігуру. Чи на всіх малюнках вам вдалося знайти таку лінію? Якщо аркуш, на якому зображена фігура, скласти вздовж проведеної лінії, що буде з половинками фігури?

б) Поверніть книжку на 180° (догори ногами). Зображення яких фігур не змінилося? На кожній із цих фігур спробуйте знайти точку (центр), у разі повороту навколо якої на 180° фігура суміщається сама із собою.

Розгляньте зображення. Які об'єкти «складаються» з двох дзеркальних половинок? Які об'єкти в разі повороту навколо деякої точки на 180° суміщаються самі із собою?

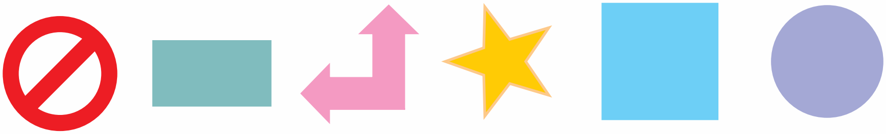
Осьова і центральна симетрія

Фігура має **осьову (дзеркальну) симетрію**, якщо в разі згинання аркуша, на якому її намальовано, уздовж деякої прямої лінії половинки фігури збігаються. Ця лінія називається віссю симетрії.

Фігура має **центральну симетрію**, якщо в разі повороту навколо деякої точки на 180° фігура суміщається сама із собою. Ця точка називається центром симетрії.

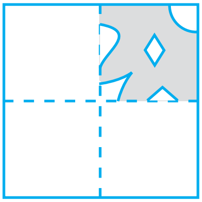
Задача 1. У фігурах, зображених на малюнку, знайдіть усі можливі осі симетрії. Скільки осей симетрії має кожна фігура?

На які групи можна поділити фігури залежно від того, скільки осей симетрії вони мають?



Задача 2. Щоб зробити мереживні серветки, Марійка склала два аркуші вчетверо й вирізала візерунки (мал. *а*, *б*). Який вигляд матиме кожна серветка, коли Марійка її розгорне? Домалюйте серветки.

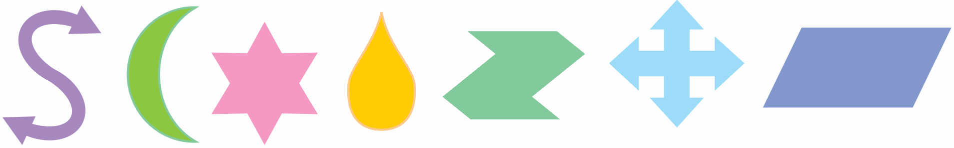
а)



б)

Задача 3. Які з фігур, зображених на малюнку, мають центральну симетрію, а які — осьову?

Чи є на малюнку фігури, які мають і вісь, і центр симетрії?



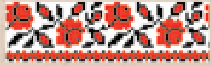
Цікавий факт

Український орнамент

Оздоблювати предмети вжитку орнаментами — це давня традиція нашого народу.

Зазвичай розрізняють такі види орнаментів:

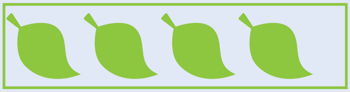
- геометричні (зображення трикутників, квадратів, хрестиків);
- рослинні (зображення квітів, ягід, листя);
- тваринні (зображення тварин, птахів) та інші.



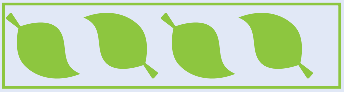
Орнамент (від латинського *ornamentum* — прикраса) — візерунок, побудований чергуванням у певному порядку якихось малюнків чи ліній.

Обговорюємо задачу

Розгляньте орнаменти, зображені на мал. *а–в*. У кожному орнаменті знайдіть повторюваний фрагмент. Який вид симетрії в яких орнаментах використано?

а) 

б) 

в) 

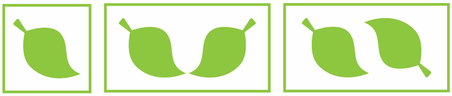
Бордюри

Орнаменти у вигляді смуги, які ми розглянули в попередній задачі, називають **бордюрами.**

Повторювані фрагменти бордюрів (наприклад, мал. *г*) будемо називати **трафаретами.**

Для створення бордюру трафарет (мал. *ґ*) повторюють уздовж прямої лінії потрібну кількість разів (мал. *д*). Таке перетворення називається **паралельним перенесенням.**

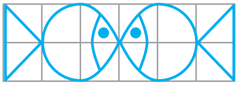
г)



ґ)

д)

Задача 4. Використовуючи трафарети на малюнках, складіть за допомогою паралельного перенесення бордюри та розфарбуйте їх.



Конструювання трафаретів

Створювати складні трафарети зручно за допомогою симетрії. Наприклад, намалювавши довільний простий малюнок (див. мал. *ґ*), можна перетворити його за допомогою:

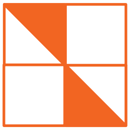
1) симетрії відносно вертикальної осі (мал. *е*);
2) симетрії відносно горизонтальної осі (мал. *є*);
3) симетрії відносно горизонтальної та вертикальної осей (мал. *ж*);
4) центральної симетрії (мал. *з*).

е)

є)

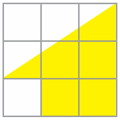
ж)

з)

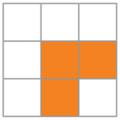


Задача 5. За допомогою симетричних перетворень, розглянутих у пунктах 1–4, створіть із фігур (мал. *а*, *б*) складні трафарети для бордюрів.

а)

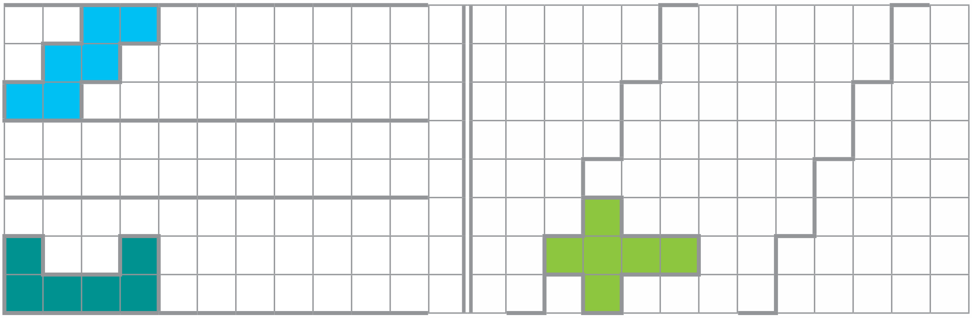


б)



Задача 6. Складіть бордюри з геометричних фігур на малюнках, виклавши їх смугою без проміжків і перекриттів.

Підказка. Смуга може бути похилою, із зубцями.

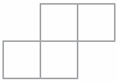


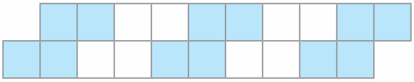
Паркети

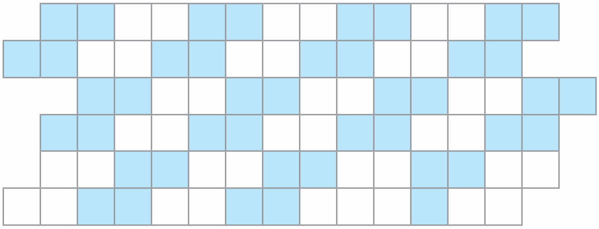
Паркетом називають орнамент, що заповнює площину (аркуш) без проміжків.

Паркети часто зустрічаються в житті: наприклад, малюнок паркету або лінолеуму на підлозі, малюнок плиткового покриття тротуару.

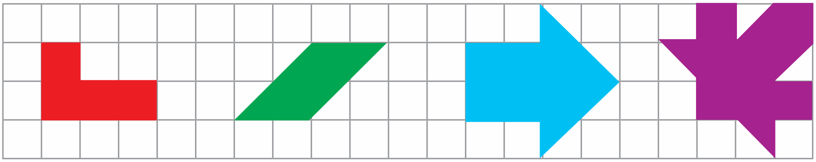
Щоб скласти паркет, у якому використано один трафарет, зазвичай діють так: спочатку з трафарету (мал. *а*) складають бордюр — горизонтальний, вертикальний або похилий (мал. *б*), а потім заповнюють отриманими смугами площину (мал. *в*).

а)


б)


в)


Задача 7. Складіть паркети з фігур, зображених на малюнку.



Задачі

1. Сніжинка

Петрик вирізав сніжинку з аркуша, склавши його вдвічі один раз, потім ще раз і ще раз. Дайте відповіді на запитання.

а) Скільки осей симетрії має ця сніжинка?

б) Скільки осей симетрії матиме сніжинка, якщо аркуш скласти вдвічі ще раз?

в) Як Петрикові потрібно скласти паперовий круг, щоб сніжинка мала 6 осей симетрії?

2. Об'єкти навколо нас

Знайдіть і намалюйте об'єкти, які мають: а) осьову симетрію; б) центральну симетрію; в) осьову та центральну симетрію.

3. Український алфавіт

1) Запишіть усі букви українського алфавіту, які мають: а) горизонтальну вісь симетрії; б) вертикальну вісь симетрії; в) горизонтальну й вертикальну осі симетрії; г) центр симетрії.
2) Складіть слова, які мають: а) горизонтальну вісь симетрії; б) вертикальну вісь симетрії.

4. Чарівні смужки

Виріжте з паперу дві смужки завдовжки 20 см і завширшки 5 см. Виконайте завдання.

а) Одну зі смужок складіть «гармошкою» і виконайте на ній довільний малюнок так, щоб він торкався до ліній згину. Виріжте малюнок, не розрізаючи ділянки на лініях згину, і розгорніть смужку. Замалюйте одержаний бордюр.

б) Як потрібно скласти смужку паперу, щоб одержати бордюр, симетричний відносно горизонтальної осі? Із другої смужки виріжте бордюр із горизонтальною віссю симетрії й замалюйте його.

5. Складаємо паркет

Складіть паркет:

а) із рівносторонніх трикутників; б) квадратів; в) правильних шестикутників.

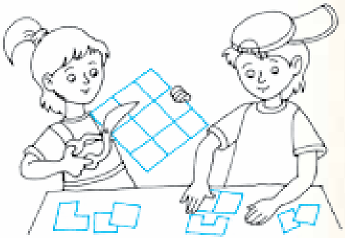
Розрізання фігур

Обговорюємо задачу

Розріжте клітковий прямокутник 3 × 5 на три фігурки, які складаються з 5 клітинок кожна, але мають різну форму. В одній фігурі кожна клітинка повинна мати спільну сторону ще хоча б з однією клітинкою.
Скільки різних фігурок можна скласти з 5 клітинок?

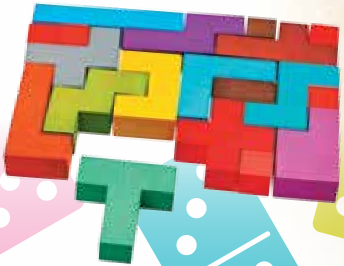
Поліміно — це фігурки, складені з клітинок у такий спосіб, що кожна клітинка має спільну сторону ще хоча б з однією клітинкою.

Поліміно, складені з двох клітинок, називають доміно, з трьох — триміно, з чотирьох — тетраміно, з пяти клітинок — пентаміно.



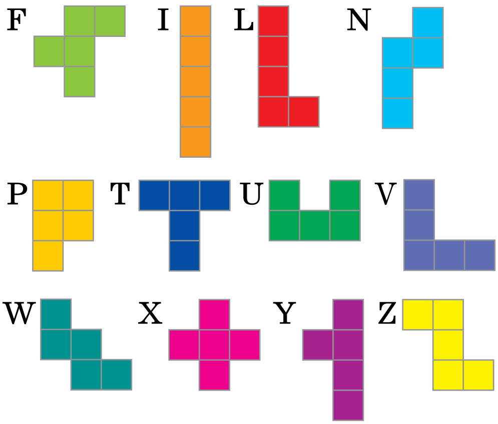
Соломон Вольф Голомб
(1932–2016)

Американський математик та інженер, який у 50-х роках XX століття винайшов одну з найпопулярніших головоломок — «Пентаміно» (від грецького слова «пента» — п’ять).

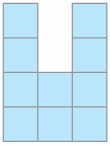


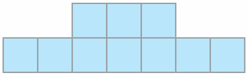
Пентаміно

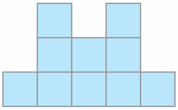
Головоломка «Пентаміно» складається з 12 пласких фігурок (див. малюнок). Кожна фігурка позначається латинською буквою, форму якої вона нагадує.

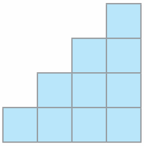


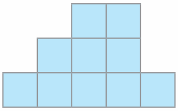
Задача 1. Складіть геометричні фігури, подані на малюнках, із фігурок пентаміно. У кожному випадку одну й ту саму фігурку пентаміно можна використати не більш ніж один раз.

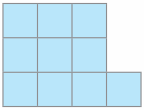
а)


б)


в)


г)


ґ)


д)


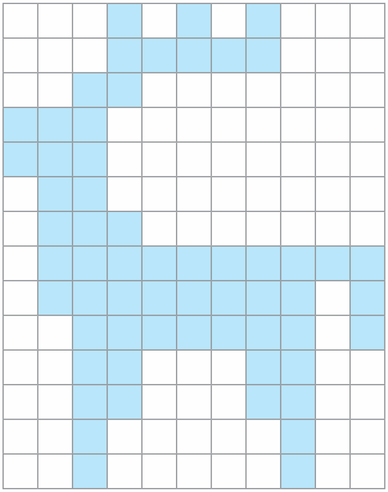
Задача 2. Які з фігурок пентаміно мають осьову симетрію? Намалюйте ці фігурки і проведіть у них осі симетрії. Чи є серед пентаміно фігурки, що мають центральну симетрію?

Одна з найвідоміших задач пентаміно — скласти з усіх фігурок прямокутник так, щоб у ньому не було проміжків і фігурки не накладались одна на одну.

Кожна з 12 фігурок містить 5 клітинок, отже, площа прямокутника має дорівнювати 60 клітинкам. Із пентаміно можна скласти прямокутники розмірами 6×10, 5×12, 4×15 і 3×20. Прямокутник 3×20 можна скласти двома способами, а от для прямокутника 6×10 існує 2339 різних способів.

Задача 3. Складіть з усіх фігурок пентаміно прямокутник 6×10 хоча б одним способом.

Задача 4. Використовуючи всі фігурки пентаміно, складіть фігуру оленя (див. малюнок).



Розрізання фігур на квадрати

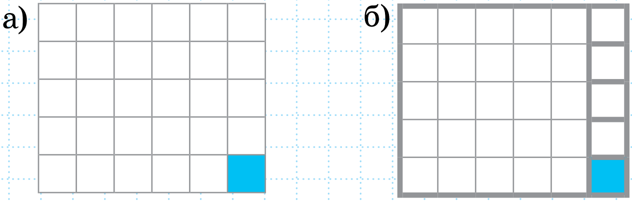
Обговорюємо задачу

Марійка й Петрик розрізали прямокутник на 4 квадрати. Два з них мають розміри 4×4 і 6×6. Які розміри мають два інші квадрати?

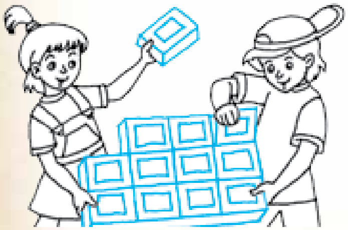
Задача 5. У прямокутнику вирізано одну клітинку (мал. *а*). Розріжте отриману фігуру по лініях клітинок на 5 квадратів.

Розв'язання

1) Сумарна площа п'яти квадратів має дорівнювати $6 \cdot 5 - 1 = 29$ клітинок.
2) Подамо число 29 у вигляді суми п'яти повних квадратів: $29 = 25 + 1 + 1 + 1 + 1$.
3) Отже, поле потрібно розрізати на такі квадрати: один квадрат 5×5 і чотири квадрати 1×1 (мал. *б*).



Задача 6. Розріжте прямокутник 3×9 по лініях клітинок на 8 квадратів.

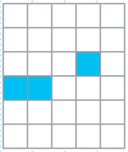


Задачі

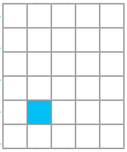
1. Розрізаємо на 7 квадратів

У прямокутниках вирізано деякі клітинки (мал. *а–в*). Розріжте отримані фігури по лініях клітинок: а) на 5 квадратів; б) на 7 квадратів; в) на 7 квадратів.

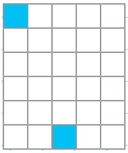
а)



б)



в)



2. Прямокутник із трьох фігурок

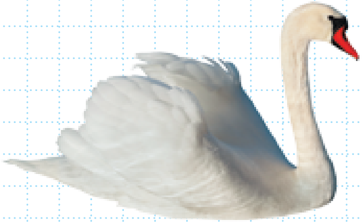
Складіть прямокутник 3×5 із трьох фігурок пентаміно. Знайдіть кілька варіантів. Чи можна всі фігурки пентаміно поділити на групи по три фігурки так, щоб із фігурок кожної групи скласти прямокутник 3×5?

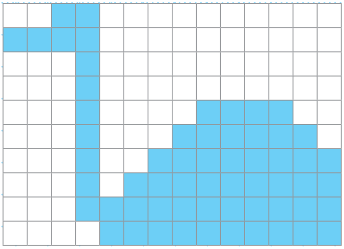
3. Клітинковий квадрат

Як розрізати клітинковий квадрат 5×5 по лініях клітинок на 7 різних прямокутників?

4. Чарівний лебідь

Використовуючи всі фігурки пентаміно, Марійка й Петрик склали фігуру лебедя (див. малюнок). Спробуйте зробити це й ви.





5. Прямокутники з набору пентаміно

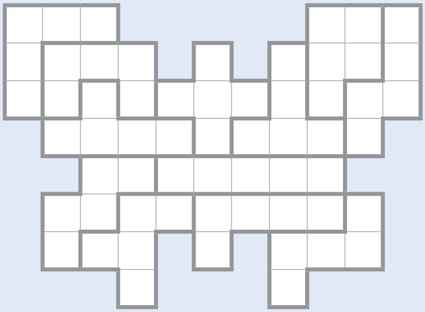
Складіть з усіх фігурок одного набору пентаміно два прямокутники 5×6.

Задачі на розфарбовування

У задачах на розфарбовування **сусідніми** називають ділянки (частини фігур, клітинки), які мають спільну межу. Дві ділянки, що мають лише одну спільну точку, сусідніми не вважаються.

Обговорюємо задачу

Розфарбуйте метелика, якого склали з фігурок пентаміно (див. малюнок), за допомогою мінімальної кількості кольорів так, щоб фігурки одного кольору не дотикалися одна до одної.



У задачах із використанням розфарбовування зазвичай потрібно:

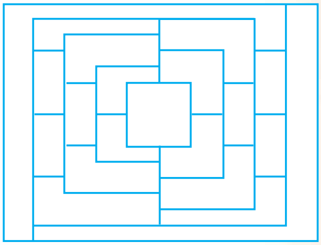
- розфарбувати частини фігури в певний спосіб, тобто одержати розфарбування із заданими властивостями;
- дібрати таке розфарбування, яке допоможе розв'язати задачу (наприклад, розфарбування стовпчиками, шахове розфарбування).

Цікавий факт

У 1852 р. Френсіс Ґутрі розфарбував карту графств Англії чотирма кольорами й висловив гіпотезу про те, що для розфарбовування будь-якої карти в такий спосіб, щоб сусідні країни зі спільною межею мали різні кольори, достатньо чотирьох фарб.

Розфарбовування із заданими властивостями

Задача 1. Розфарбуйте фігуру (див. малюнок) чотирма кольорами так, щоб сусідні ділянки були пофарбовані в різні кольори. Чи можна обійтися трьома кольорами?

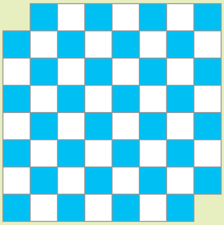


Задача 2. Розфарбуйте в чорний і білий кольори клітинки квадрата 5 × 5 так, щоб у кожної клітинки всі сусіди були іншого кольору і щоб чорних клітинок було більше.

Задача 3. Розфарбуйте в чорний і білий кольори клітинки квадрата 4 × 4 так, щоб у кожної чорної клітинки були рівно три білі сусідки, а в кожної білої клітинки — рівно одна чорна.

Обговорюємо задачу

У шахівниці вирізали дві кутові клітинки (див. малюнок). Необхідно розрізати отриману фігуру на фігурки доміно (прямокутники 1 × 2). Чи вдасться вам це зробити?



Шахове розфарбування

Ідея шахового розфарбування, використана в попередній задачі, допомагає, наприклад коли потрібно довести неможливість розв’язку в задачах на розрізання, знаходження певного маршруту, побудову якоїсь конструкції.

Задача 4. У кожній клітинці дошки 7 × 7 сидить жук. У певний момент усі жуки переповзають на сусідні (по горизонталі або вертикалі) клітинки. Чи обов’язково при цьому залишиться порожня клітинка?

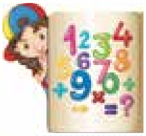
Розв’язання

1) Намалюйте клітковий квадрат 7 × 7 і розфарбуйте його клітинки в шаховому порядку.
2) Скільки отримано білих клітинок?
3) Скільки отримано чорних клітинок?
4) Переповзаючи на сусідню клітинку, жук опиняється на клітинці іншого кольору.

Задача 5. Петрик стверджує, що зможе з усіх п’яти фігурок тетраміно скласти прямокутник 4 × 5. Чи має рацію Петрик? Відповідь обґрунтуйте.

Підказка. Використайте шахове розфарбування.

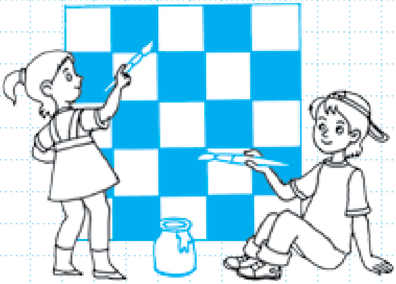
Задача 6. Маємо таблицю 100 × 100. Яку найменшу кількість букв можна розмістити в її клітинках так, щоб ніякі дві однакові букви не містилися в сусідніх клітинках?



Задачі

1. Розфарбовуємо квадрат 5 × 5

Розфарбуйте в чорний і білий кольори клітинки квадрата 5 × 5 так, щоб у кожному стовпчику, крім останнього, білих клітинок було більше, ніж чорних, а в кожному рядку, крім першого, чорних клітинок було більше, ніж білих.

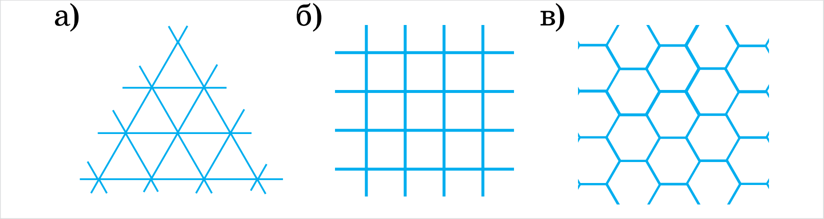


2. Розфарбовуємо квадрат 7 × 7

Розфарбуйте в чорний колір деякі клітинки квадрата 7 × 7 так, щоб у кожному стовпчику та кожному рядку було по три чорні клітинки.

3. Різнокольоровий паркет

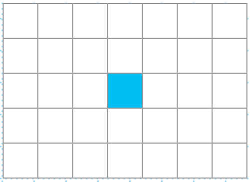
Із плиток, що мають форму правильних многокутників, склали паркети (мал. *а*–*в*). Кожний паркет необхідно розфарбувати так, щоб кожна плитка була зафарбована одним кольором, а будь-які дві сусідні клітинки мали різні кольори. Яка найменша кількість кольорів потрібна для такого розфарбування?



4. Палац із басейном

Палац має форму прямокутника розміром 5 × 7 (див. малюнок). Кожна клітинка, крім центральної, є кімнатою палацу, у центральній клітинці розташований басейн. У кожній стіні, що розділяє дві сусідні кімнати (сторона клітинки), є двері. Чи можна, не виходячи з палацу й не заходячи до басейну, обійти всі кімнати, побувавши в кожній рівно по одному разу?

Підказка. Використайте шахове розфарбування.



5. Розрізаємо квадрат 10 × 10

Петрик стверджує, що зможе розрізати квадрат 10 × 10 на 25 фігурок Т-тетраміно. Чи має рацію Петрик? Відповідь обґрунтуйте.

Відповіді та розв'язання

Задачі на с. 9

1. 1) а) 17; б) 166; в) 1408. 2) а) XLVI; б) XCIX; в) DCCCXVI; г) MCCCLIX. **2.** а) XXIV (24); б) CXXIV (124); в) VIII (8). **3.** а) X – VIII = II; б) C – L = L; в) VI = IV + II; г) XV + V = XX.

Задачі на с. 11

2. в) 1071102. **3.** У числа (A + B) п'ять або шість десятків. Наприклад: 75 + 81 = 156, 75 + 86 = 161. У числа (B – A) один або нуль десятків. Наприклад: 85 – 71 = 14, 85 – 78 = 7.

Задачі на с. 12–13

1. а) $38 = 3 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$; в) $24\ 707 = 2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^0$. **2.** 147. **3.** Так. Наприклад, 308.

4. 1~~234567891~~0111~~2~~1~~3~~1~~4~~1~~5~~1~~6~~1~~718192~~021222324252627282930 =
= 1011111111021222324252627282930.

5. 142857. **6.** 1881. **7.** Петрик побачив числа 16, 61 і 106, а швидкість потяга 61 – 16 = 106 – 61 = 45 (км/год). **8.** Число 111 112, 6 цифр. **9.** а) 1; б) 1 або 2.

Задача 1 на с. 17: 1120_3.

Задачі на с. 19

1. а) 11; б) 7; в) 13; г) 16. **2.** б) $143511_8 = 1 \cdot 8^5 + 4 \cdot 8^4 + 3 \times 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0$. **3.** б) $BC52E_{16}$; в) $C0A850_{16}$.

Задачі на с. 21

1. а) Див. мал. 1; б) див. мал. 2. **2.** 145_5, 128_8, 102_2, 7760_7, $A2E_{14}$.

3	+	2	=	10
+				–
3				4
=				=
11	–	2	=	1

Мал. 1

2	×	2	=	11
+				+
10				20
=				=
12	×	2	=	101

Мал. 2

Задачі на с. 22–23

1. Основа системи: а) 5; б) 7; в) 6; г) 9.

2. $222_3 = 26$; $211_3 = 22$; $200_3 = 18$; $122_3 = 17$; $111_3 = 13$; $100_3 = 9$; $22_3 = 8$; $11_3 = 4$.

3. Основа системи 3.

4. 1, 3, 9, 27. На шалькових терезах можна класти важки на будь-яку з шальок.

5. Картка № 1 має числа, що містять 1 у розряді одиниць у двійковому записі, № 2 — ті, що містять 1 у розряді двійок, № 3 — 1 у розряді четвірок, № 4 — 1 у розряді вісімок. Додаючи перші числа карток, ми знаходимо число як суму його розрядних одиниць.

7. а) $1101_2 + 111_2 = 10100_2$; б) $21102_3 + 21212_3 =120021_3$.

Задачі на с. 24–25

1. а) 21; б) 91; в) 273; г) 651. **2.** а) 36_8, 54_6, 35_{10}, 100101_2; б) 25_{10}, 50_6, 111001_2, 10012_3. **3.** 59. **4.** 17, 11, 22, 16, 7, 18, 18, 33; мислення.

Задачі на с. 27

1. а) 12010_3; б) 1023_5; в) 212_8. **2.** а) 50_7; б) 142_7; в) 532_7; г) 2626_7. **3.** 414214_5. **4.** а) 7, 107, 232; б) 11001100_2, 176_{11}, 411_7. **5.** а) 1101_4, 221_7, 122_8, 32_{10}; б) 104_{10}, 144_8, 110010_2. **6.** а) 3; б) 8; в) 24; г) 63. **7.** Основа системи 3.

Задача на с. 29

Напис на медалі: «Щоби вивести з нічого все, достатньо одиниці».

Задачі на с. 30

1. б) 111000_2; в) 101011111_2; г) 11000111_2.

2. Див. мал. 3.

Задача 5 на с. 34.

$163_8 = 1110011_2 = 1303_4$.

Задачі на с. 35–36

1. 110000_2, 100001_2, 10001_2, 1101_2, 1001_2, 111_2, 100_2, 11_2, 10_2.

2. а) 110100_2; б) 10101_2; в) 10000_2; г) 1101100001_2.

3. Див. мал. 4.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 11011100000 \\ 1000110 \end{array} \\ \hline 11100100110 \end{array}$$

Мал. 3

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 101101 \\ 10100 \end{array} \\ \hline 1000001 \end{array}$$

Мал. 4

4. а) $22533_8 = 10010101011011_2 = 2111123_4$;
б) $1001010111100_2 = 1022330_4 = 11274_8$.

6. 8 ламп.

Задачі на с. 38–39

2. $p = 16$. **3.** б) $\overline{aaa} = 100a + 10a + a = 111a$; в) $\overline{a(b+1)b} = 100a + 10(b+1) + b = 100a + 11b + 10$; г) $\overline{ab(3b)} = 100a + 10b + 3b = 100a + 13b$. **5.** 42. **6.** 24_5 та 240_5. **7.** Від 4 до 11.

Задачі на с. 40

1. Основа системи — 3. **2.** Основа системи — 5. **3.** 37 і 370. **4.** 123, 124, 125, 126. **5.** 864.

Задачі на с. 43

1. Маємо прості числа в діапазоні від 1 до 50.

$\cancel{1}$	②	③	$\cancel{4}$	⑤	$\xcancel{6}$	⑦	$\cancel{8}$	$\bcancel{9}$	$\xcancel{10}$
⑪	$\xcancel{12}$	⑬	$\xcancel{14}$	$\xcancel{15}$	$\xcancel{16}$	⑰	$\xcancel{18}$	⑲	$\xcancel{20}$
$\xcancel{21}$	$\xcancel{22}$	㉓	$\xcancel{24}$	$\bcancel{25}$	$\xcancel{26}$	$\bcancel{27}$	$\xcancel{28}$	㉙	$\xcancel{30}$
㉛	$\cancel{32}$	$\xcancel{33}$	$\xcancel{34}$	$\xcancel{35}$	$\xcancel{36}$	㊲	$\xcancel{38}$	$\xcancel{39}$	$\xcancel{40}$
㊶	$\xcancel{42}$	㊸	$\xcancel{44}$	$\xcancel{45}$	$\xcancel{46}$	㊼	$\xcancel{48}$	$\cancel{49}$	$\xcancel{50}$

2. Одне з цих чисел має бути обов'язково парним. Оскільки існує одне парне просте число — 2, то шукана пара чисел — це 2 і 19.

3. Нехай n — шукане число, а d — його дільник, відмінний від 1 і n. Тоді число n кратне також числу $\frac{n}{d}$. Але оскільки в n усього три дільники, то, по-перше, d — просте число, а по-друге, $\frac{n}{d} = d$, отже, $n = d^2$. Таким чином, лише три різні дільники мають квадрати простих чисел.

Задачі на с. 45–46

1. б) $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$; в) $1\,000 = 2^3 \cdot 5^3$; г) $2560 = 2^9 \cdot 5$; ґ) $5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

2. Оскільки $1000 = 2^3 \cdot 5^3$, то кожне з чисел у своєму розкладі на прості множники може містити лише двійки й п'ятірки. При цьому обидва ці множники не можуть міститися в розкладі одного числа, інакше воно буде ділитися на 10. Отже, одне з чисел дорівнює 5^3, інше — 2^3, а їхня сума дорівнює $2^3 + 5^3 = 125 + 8 = 133$.

4. а) 25, 49; б) 27; в) 16, 81.

6. Марійка має рацію. Добуток числа, кратного 2, і числа, кратного 3, ділиться на 6, оскільки 2 і 3 взаємно прості числа.

Задачі на с. 47

1. а) Інших пар сусідніх простих чисел не існує, оскільки серед них одне має бути парним; б) пари-близнюки: 3 і 5, 5 і 7, 11 і 13, 17 і 19, 29 і 31, 41 і 43, тобто 6 пар.

2. Може, якщо одна зі сторін дорівнює 1, а інша — будь-якому простому числу. Наприклад, якщо сторони прямокутника дорівнюють 1 і 5 або 1 і 7.

3. а) 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961; б) 125, 343; в) 625.

4. Ділиться на 3, 6, 8, оскільки розклад заданого числа на прості множники містить усі прості множники з розкладу чисел 3, 6 ($2 \cdot 3$), 8 (2^3). Не ділиться на 25, оскільки розклад заданого числа на прості множники не містить усі прості множники з розкладу числа 25.

5. Якщо жоден зі співмножників не є кратним даному простому числу, то і в розклад добутку на прості множники воно не входить, а отже, добуток не ділиться на дане просте число.

Задачі на с. 48–50

Задача для обговорення: 250 не може, оскільки не ділиться на 4; 300 може, наприклад: 37 стосів по 8 книжок і 1 по 4.

1. Діляться на 2 числа: 146, 1872, 7500, 150. Діляться на 3 числа: 1872, 4335, 7500, 150. Діляться на 5 числа: 4335, 7500, 150. Діляться на 10 числа: 7500, 150.

2. б) Подамо число 123 456 у вигляді $D \cdot 1000 + k$ і перевіримо кратність доданків числу 8. Маємо: $123\,456 = 123 \cdot 1000 + 456$, перший і другий доданки кратні 8, отже, число 123 456 кратне 8.

3. а) 245 250 = 245 200 + 50, перший і другий доданки кратні 25, отже, число 245 250 кратне 25. Висновок: число ділиться на 25, якщо воно закінчується двома нулями або цифрами, що виражають число, яке ділиться на 25. б) 245 250 = 245 000 + 250, перший і другий доданки кратні 125, отже, число 245 250 кратне 25. Висновок: число ділиться на 125, якщо воно закінчується трьома нулями або цифрами, що виражають число, яке ділиться на 125.

4. Число 732 кратне 6, інші числа — ні. Ознака подільності на 6: число ділиться на 6, якщо воно одночасно ділиться на 2 і на 3. Тобто число ділиться на 6, якщо сума всіх цифр цього числа ділиться на 3 і остання цифра цього числа ділиться на 2.

5. Складемо з цих цифр всі двоцифрові числа, які діляться на 4: 12, 16. Потім складемо трицифрові числа, кратні 4, додавши одну цифру: 112, 116, 212, 216, 612, 616. Числа, кратні 8, виберемо з чисел, кратних 4: 112, 216, 616.

Задачі на с. 51

1. Оля має рацію. Якщо число ділиться на 8, то число, утворене трьома його останніми цифрами, має ділитися на 8. Серед трицифрових чисел, що складаються з однакових цифр, лише одне (888) ділиться на 8. Отже, число з однакових цифр ділиться на 8, тільки коли ці цифри дорівнюють 8.

2. Щоразу кількість шматочків збільшується на 4, тому дає остачу 1 у випадку ділення на 4. Отримати 2020 шматочків неможливо.

3. 7380, 3384, 8388.

4. а) Чотирицифрові числа, які діляться на 4: 3816, 8316, 1836, 8136, 1368, 3168. б) Чотирицифрові числа, які діляться на 8: 3816, 8136, 1368, 3168.

5. Загальна сума покупки має ділитися на 3. Тому Марійка не могла заплатити 500 грн.

Задачі на с. 53–55

1. Діляться на 11 числа: 3091 (б), 8173 (в), 49 203 (д).

2. Числа 121, 132, 231.

3. Ви маєте отримати те число, яке задумали.

5. Ні, оскільки 19 грн 50 к. = 1950 к. не ділиться без остачі на 7.

6. Сума виторгу має бути кратною 13, тому вона не могла скласти 570 грн.

Задачі на с. 55–56

1. Наприклад: а) 54 351, 52 371; б) 2 046, 3 146; в) 22 517, 32 527.

2. 1100, 1001, 1111, 1210, 1012, 2101, 2200, 2002, 1122, 1221, 2211, 2112, 2222.

3. Числа, які діляться на 7: 32 172, 417 599, 855 008, 536 704. Числа, які діляться на 11: 37 840, 490 776, 855 008. Числа, які діляться на 13: 35 048, 417 599, 490 776.

4. а) 1 345 678 920; б) 1 025 364 879; в) 5 374 896 120; г) 9 378 604 125. Можливі й інші розв'язки.

5. У числа, кратного 11, сума цифр парна або не менша за 11. а) 2, наприклад, число 110; б) 6, наприклад, число 33.

6. Не могли. Число помилок, яких припустилися діти, кратне 3; число 200 не кратне 3.

7. Нехай двоцифрове число — це $\overline{ab}$. Тоді Тимофій отримав: $\overline{ababab} = 100\,000a + 10\,000b + 1000a + 100b + 10a + b = 101\,010a +$ $+ 10\,101b = 10\,101 \cdot (10a + b)$. Оскільки $10\,101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$, то число, яке отримав Тимофій, кратне і 3, і 7, отже, кратне і 21.

8. 2232.

Задачі на с. 58

2. НСК (6, 10) = 30.

3. 1) 60, Ч; 2) 90, И; 3) 80, С; 4) 12, Л; 5) 36, А; 6) 126, П; 7) 20, Р; 8) 36, А; 9) 8, В; 10) 12, Л; 11) 1, Я; 12) 48, Т; 13) 5, Ь; 14) 80, С; 15) 8, В; 16) 210, І; 17) 48, Т; 18) 144, О; 19) 96, М. Вислів: «Числа правлять світом».

Задачі на с. 60–61

1. б) 41. **2.** б) 22; в) 29; г) 19.

Задачі на с. 62–63

2. а) 29; б) 59.

3. а) Дріб скоротний; б) дріб нескоротний.

4. 6 і 420; 12 і 210; 30 і 84; 42 і 60.

5. Число 22...22, яке складається із 20 двійок.

6. а) 11111111 : 111111 = 100 (ост. 11), 111111 : 11 = 10 101, отже, НСД (11111111, 111111) = 11.

б) Оскільки $\underbrace{11\ldots11}_{20} = \underbrace{11\ldots11}_{15} \cdot 10^5 + 11111$, то остачею від ділення більшого числа на менше є 11 111. Одночасно число з 15 одиниць ділиться на 11 111 без остачі (частка дорівнює $10^{10} + 10^5 + 1$), тому НСД цих чисел дорівнює 11 111.

7. 12 і 180; 36 і 60.

8. 1 001 с. (Кількість хвилин у годині дорівнює НСД (77, 91) = 7.)

9. 301. Кількість дітей без Петрика є кратною НСК (4, 5, 6) = 60, а загальна кількість школярів є кратною 7.

10. За 30 днів.

11. Сума цифр кожного з чисел дорівнює 15, тому всі вони діляться на 3, але не діляться на 9. З іншого боку, різниця будь-яких двох із зазначених чисел є кратною їхнім НСД. Зокрема, 12 354 − 12 345 = 9 ділиться на НСД усіх чисел. Тому шуканий НСД дорівнює 3.

Задачі на с. 65–66

1. б) 6424. Число кратне 88, якщо воно ділиться на 8 і 11.

2. а) 251 130, 254 130, 257 130; б) 255 132, 251 136; в) 251 130, 256 135; г) 251 136.

3. У розклад входять прості множники всіх чисел від 1 до 20, тобто 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 і 19 — усього 8 різних простих чисел. У найбільшому степені входить просте число 2 (до розкладу числа 18).

4. а) Число закінчується на таку кількість нулів, скільки пар чисел 2 і 5 входять у його розклад на прості множники. У розклад 10! входить 8 двійок (по одній із чисел 2, 6, 10, дві — з 4, три — з 8) і дві п’ятірки (з чисел 5 і 10). Отже, 10! закінчується на 2 нулі; б) на 7 нулів; в) на 24 нулі.

5. Ні, оскільки це число ділиться на 9.

6. Оскільки 100! кратне 9, то всі знайдені суми цифр мають ділитися на 9. Очевидно, що 0 у кінці Всезнайко отримати не може, отже, останнє число — це 9.

7. Добуток кратний 11 за ознакою подільності. Тому один зі співмножників має бути кратним 11. Але двоцифрове число ділиться на 11, тільки якщо його цифри збігаються, що в нашому випадку не так. Отже, ребус не може мати розв’язків.

Задачі на с. 67

1. а) 1650 або 6655; б) 1152 або 6156.

2. 9876543120.

3. Оскільки сума цифр числа не змінюється в разі множення на 9, то число кратне 9. Із двоцифрових чисел, які кратні 9, — 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 — задовольняють умову задачі числа 18, 45 і 90.

4. Ні. Наприклад, число 9819 не кратне 27, хоча сума його цифр дорівнює 27.

5. Номери квитків змінюються від 000000 до 999999, таким чином, всього їх 1000000. Кожний щасливий номер кратний 11 (обернене твердження є хибним!). Тому число щасливих квитків не перевищує $1000000 : 11 \approx 90909 < 100000$.

Задачі на с. 68–70

1. б) 9 і 125.

2. Серед букв ребуса зустрічаються всі цифри, крім нуля. Одній із букв обов'язково має відповідати цифра 7, і тоді та частина рівності, до якої входить ця буква, буде ділитися на 7, а інша — не буде.

3. Нехай шукані числа — це $\overline{ab}$ і $\overline{ba}$. Тоді маємо їхню різницю: $\overline{ab}-\overline{ba}=(10a+b)-(10b+a)=9(a-b)$. Таким чином, $a-b$ має бути повним квадратом, тобто $a-b$ дорівнює 1 або 4. Якщо $a-b=1$, то одне з чисел є парним, отже, не може бути простим. Тоді $a-b=4$, обидві цифри непарні, і жодна з них не дорівнює 5. Отже, шукані числа — це 73 і 37.

Задача для обговорення: у кожній групі дільників однакова кількість чисел — по 2. Загальна кількість дільників $2 \cdot 4 = 8$.

5. б) Розкладемо число 9216 на прості множники: $9216 = 2^{10} \cdot 3^2$. Обчислимо за формулою кількість дільників числа 9216: $(10 + 1)(2 + 1) = 11 \cdot 3 = 33$ (дільники).

6. Оскільки шукане число кратне 12, воно має принаймні два різні прості множники: 2 і 3. Оскільки $14 = 2 \cdot 7$, то трійка має входити в розклад на прості множники в першому степені, а двійка — у шостому. Шукане число дорівнює 192.

Задачі на с. 72

1. Розкладемо число 217 на прості множники: $217 = 7 \cdot 31$. Умову задачі задовольняє набір чисел 7, 31 і 179.
2. Нехай вихідне число дорівнює n. Тоді сума чисел Марійки і Петрика дорівнює $2n + 5n = 7n$, тобто є кратною 7.
3. а) 18; б) 30; в) 12.
4. Наприклад, $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ або $1620 = 3^4 \cdot 2^2 \cdot 5$.
5. Таке число існує, і воно єдине: 735. Покажемо це. Цифрами числа, очевидно, можуть бути лише 2, 3, 5 або 7. Цифри 2 і 5 не можуть входити одночасно в число, інакше воно має ділитися на 10, тобто закінчуватися нулем. Припустимо, що число містить цифру 2, тоді вона має бути останньою. Якщо шукане число кратне 3, то сума його цифр має бути кратною 3, а тоді ще однією цифрою має бути цифра 7. Але числа 372 і 732 не підходять. Якщо цифра 3 не входить у запис числа, то залишаються варіанти 222, 722, 272, які також не підходять.

   Якщо шукане число кратне 5, то 5 є останньою цифрою. Міркуючи аналогічно щодо подільності на 3, отримуємо 375 або 735. Причому число 735 підходить, а число 375 — ні (воно не кратне 7). Якщо ж і в цьому варіанті число не кратне 3, то залишаються числа 555, 575 і 755, жодне з яких також не підходить.

   Якщо ж число не містить ані цифру 2, ані цифру 5, то воно має містити цифру 3 (оскільки 777 не підходить), отже, сума його цифр кратна 3. Однак єдиний варіант числа з трійок і сімок із сумою цифр, яка кратна 3, — це число 333, яке також не підходить.
6. Квадрат шуканого числа має бути парним числом, оскільки перевищує просте число на одиницю, отже, не може дорівнювати 3. Тобто шукане просте число парне, і тоді воно дорівнює 2.

Задача для обговорення на с. 75

Спосіб 1: зробити розрізи у трьох перпендикулярних площинах.
Спосіб 2: двома розрізами розділити голівку на чверті, сумістити їх і останнім третім розрізом розділити кожну із чвертей на дві частини.

Задачі на с. 75

1. Розрізати 4 хліби на половинки, 2 хліби — на чверті, а один хліб — на 8 частин. Знадобиться 11 розрізів.
2. Уявімо, що Петрик розрізав кожне яблуко на 12 рівних частин. Тоді своїм приятелям він роздав по $5 \cdot 12 : 6 = 10$ частин. Марійка, розділивши кожне яблуко на 12 частин, повинна була віддати подругам по 7 таких шматочків. Отже, приятелям Петрика дісталося більше яблук.
3. Мудрець додав свого верблюда до 17-ти братових. Потім він віддав половину (9 верблюдів) старшому братові, третину (6 верблюдів) — середньому і дев'яту частину (2 верблюди) — молодшому братові. Після того забрав свого верблюда.

Задача 2 на с. 77. 27 картоплин.

Задачі на с. 78–79

1. $\frac{1}{7}+\frac{6}{7}=\frac{2}{7}+\frac{5}{7}=\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=1.$
2. Кількість цукерок має ділитися на 2, 3 і 5, але не ділитися на 4. Таких чисел, які менші за 100, рівно два — 30 і 90.
3. Якщо в першого пастуха x овець, то в другого пастуха має бути $(x-2)$ вівці. Тоді з першої умови отримуємо рівняння: $2 \cdot (x-3) = x+1$, звідки $x = 7$. Отже, в першого пастуха 7 овець, а в другого — 5.
4. 7 повних бочок і 7 «половин» бочок складають разом 21 «половину». Таким чином, на кожній вантажівці має бути 7 «половин» бочок квасу. Розподілити бочки можна таким чином.

Вантажівки	Бочки			Разом «половин»	Разом бочок
	повні	половини	порожні		
1-ша	3	1	3	$3 \cdot 2 + 1 = 7$	7
2-га	2	3	2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$	7
3-тя	2	3	2	$2 \cdot 2 + 3 = 7$	7

5. а) Половина від чверті числа — це 1/8 числа, тому число дорівнює $6 \cdot 8 = 48$. б) Третина від половини числа — це 1/6 числа, тому число дорівнює $8 \cdot 6 = 48$.

6. 34 – 29 = 5 (кг) — це 1/6 частина квасу; 5 · 6 = 30 (кг) — маса квасу; 34 – 30 = 4 (кг) — маса порожньої бочки.

7. 28 грн — це 2/3 грошей, які залишилися в Петрика після покупки книжки. Тому на зошити він витратив 28 : 2 = 14 грн. А після покупки книжки в нього залишалося 28 + 14 = 42 грн. Отже, спочатку Петрик мав 42 · 2 = 84 грн.

8. 1 година 20 хвилин. *Підказка: Карлсон і Малюк за годину з'їдають разом* 1/2 + 1/4 = 3/4 *торта*.

9. Потрібно розділити 3 яблука на 4 частини кожне, а 4 яблука — на 3 частини кожне.

10. Кожний із пастухів з'їв по $2\frac{2}{3}$ мірки, тому першому пастуху належать гроші за $3-2\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ мірки, а другому — за $5-2\frac{2}{3}=\frac{7}{3}$ мірки. Тому першому пастуху — одна монета, а другому — 7 монет.

Задача для обговорення на с. 80

Залишиться однакова кількість води.

Задача 2 на с. 83. Див. табл. 1.

Задачі на с. 84.

1. Див. табл. 2.

Таблиця 1

№ кроку	1	2	3	4	5	6
7 л	6	3	3	7	5	5
6 л	4	4	6	2	2	5
3 л	0	3	1	1	3	0

Таблиця 2

№ кроку	1	2	3	4	5	6	7	8
5 л	5	0	5	2	2	0	5	0
8 л	0	5	5	8	0	2	2	7

2. Див. таблицю.

№ кроку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
7 л	0	7	0	5	5	7	0	7	0	3	3	7	0	7
12 л	12	5	5	0	12	10	10	3	3	0	12	8	8	1

3. Див. таблицю.

№ кроку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10 л	10	7	7	4	4	1	1	8	8	5
7 л	0	0	3	3	6	6	7	0	2	2
3 л	0	3	0	3	0	3	2	2	0	3

4. Див. таблицю.

№ кроку	1	2	3	4	5	6	7
13 в.	13	4	4	9	9	0	0
9 в.	0	9	4	4	0	9	8
5 в.	0	0	5	0	4	4	5

5. Див. таблицю.

№ кроку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
18 л	11	11	15	15	8	8	12	5	5	9	9	2	2	6
7 л	7	3	3	0	7	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7 л	0	0	0	0	0	0	0	7	3	3	0	7	6	6
4 л	0	4	0	3	3	4	0	0	4	0	3	3	4	0

6. Див. таблицю.

№ кроку	1	2	3	4	5	6	7	8
17 л	0	15	15	17	0	13	13	17
15 л	15	0	15	13	13	0	15	11

7. Наповнимо маленьку посудину й переллємо воду в п'ятилітрову посудину. Знову наповнимо маленьку посудину й доллємо до верху п'ятилітрову. Спорожнимо п'ятилітрову посудину, виллємо в неї залишок води (чи то 1 л, чи то 3 л) і знову наповнимо меншу посудину. Якщо нам вдасться перелити з неї воду повністю в п'ятилітрову, то менша посудина вміщує 3 л, в іншому випадку — 4 л води.

Задача для обговорення на с. 85

Підказка: морквина важча за яблуко.

Задача 4 на с. 88

Розділимо камені на три купки: 33, 33 і 35 каменів. Зважимо дві купки з однаковою кількістю каменів. Якщо терези зрівноважаться, то фальшивий камінь у третій купці з 35-ти каменів, а 66 каменів на терезах — справжні.

Виберемо з 66 каменів 35 і визначимо, легша чи важча третя купка з 35 каменів, що залишилися, а з нею і фальшивий камінь. Якщо під час першого зважування одна з шальок переважила (наприклад, ліва), то зважимо ліву шальку і 33 із 35-ти каменів, що залишилися. Нерівність означатиме, що фальшивий камінь важчий, а рівність — що фальшивий камінь був на правій шальці й він легший.

Задачі на с. 89

1. Потрібно розділити монети на три групи: 3, 2 і 2 монети. За перше зважування знайти групу з фальшивою монетою, а за друге — саму фальшиву монету.
2. За кожне зважування групу з фальшивою монетою потрібно ділити приблизно на три рівні частини і шукати частину з фальшивою монетою. Наприклад, за перше зважування можна зважити 9 і 9 монет, а 7 залишити на столі. За друге зважування розділити монети на групи по три (або групи 3, 2, 2). За третє зважування знайти фальшиву монету.
3. Спочатку розділити діаманти на групи 9, 9 і 8 та знайти частину з природним діамантом.
4. Див. таблицю.

Зважування № 1	1, 2, 3, 4, 5 і 6, 7, 8, 9, 10 (11, 12, 13, 14, 15)								
Результат	<			=			>		
Висновок: фальшива монета	серед 1, …, 5, причому легша за справжню, або серед 6, …, 10, причому важча за справжню (11, …, 15 справжні)			серед 11, …, 15			серед 1, …, 5, причому важча за справжню, або серед 6, …, 10, причому легша за справжню		
Зважування № 2	1, 2, 3, 4, 5 і 11, 12, 13, 14, 15 (6, 7, 8, 9, 10)								
Результат	<	=	>	<	=	>	<	=	>
Висновок: фальшива монета	легша	важча	неможливо	важча	неможливо	легша	неможливо	легша	важча

5. Див. таблицю.

Зважування № 1	1 і 2 (3, 4)								
Результат	<			=			>		
Висновок: фальшива монета	1 або 2 (справжні — 3 і 4)			3 або 4 (справжні — 1 і 2)			1 або 2 (справжні — 3 і 4)		
Зважування № 2	1 і 3 (2, 4)			1 і 3 (2, 4)			1 і 3 (2, 4)		
Результат	<	=	>	<	=	>	<	=	>
Висновок: фальшива монета	1, л.	2, в.	неможливо	3, в.	4, про масу не знаємо	3, л.	1, л.	2, в.	неможливо

Задача для обговорення на с. 90: 6 зважувань.

Задача на с. 90. 7 горіхів.

Задачі на с. 91–93

2. 8 кульок слід розбити на 4 пари й вибрати з них 4 легкі кульки за чотири зважування. Ці 4 кульки потрібно розбити на пари й вибрати в кожній парі легшу кульку. З пари знову отриманих легших кульок вибираємо найлегшу. Витрачено 7 зважувань. Ще за три зважування визначимо найважчу кульку з чотирьох важчих, які знайшли в першій серії зважувань.

3. Зважимо мечі 1 і 2, а потім мечі 3 і 4. Після цього зважимо ті з них, які виявилися легшими, отже, після третього зважування ми дізнаємося, який меч найлегший. Потім зважимо мечі, які виявилися важчими, і з'ясуємо, який меч найважчий. П'ятим зважуванням визначимо, який з двох «середніх» мечів важчий.

6. Див. таблицю.

Зважування № 1	2, 3 і 5 (1)								
Результат	<			=			>		
Висновок: фальшива монета	серед 2, 3, причому легша за справжню, або 5, причому важча за справжню			1			серед 2, 3, причому важча за справжню, або 5, причому легша за справжню		
Зважування № 2	1, 2 і 3						1, 2 і 3		
Результат	<	=	>				<	=	>
Висновок: фальшива монета	2	5	3				3	5	2

7. Потрібно розділити крупу на частини масами 1 кг, 2 кг і 4 кг.

8. За перше зважування порівняти картки з написами 1 г, 2 г, 3 г і картку з написом 6 г. За друге зважування порівняти картки з написами 2 г, 6 г і 3 г, 5 г.

9. Розділимо монети на 4 купки по 10 монет. Першим зважуванням порівняємо купки 1 і 2. Нехай одна з купок (наприклад, 1) легша за іншу. Тоді вона містить принаймні одну фальшиву монету, а купка 2 містить лише справжні монети. Порівняємо купки 2 і 3. Якщо терези виявляться зрівноваженими, то купка 3 містить справжні монети. Тоді купки 2 і 3 дадуть шукані 20 монет. Якщо купка 3 легша, то купки 2 і 4 дадуть шукані 20 монет. Вочевидь, купка 3 не може бути важчою за купку 2.

Нехай маси купок 1 і 2 однакові. Тоді або ці купки містять лише справжні монети, або кожна з них містить по одній фальшивій монеті. Покладемо купки 1 і 2 на одну шальку, а купки 3 і 4 — на іншу. Терези не можуть зрівноважитися, отже, та шалька, яка виявиться важчою, дасть шукані 20 справжніх монет.

10. Пронумеруємо монети. Першим зважуванням порівняємо монети 1, 2, 3, 4 і 5, 6, 7, 8. Якщо терези виявляться зрівноваженими, то фальшива монета серед монет 9, 10, 11, 12. Визначимо фальшиву монету в цьому випадку.

Зважування № 2	9 і 10 (11, 12)								
Результат	<			=			>		
Висновок: фальшива монета	9, причому легша за справжню, або 10, причому важча за справжню, 11 і 12 справжні			11 або 12, 9 і 10 справжні			9, причому важча за справжню, або 10, причому легша за справжню, 11 і 12 справжні		
Зважування № 3	9 і 11 (10, 12)			9 і 11 (10, 12)			9 і 11 (10, 12)		
Результат	<	=	>	<	=	>	<	=	>
Висновок: фальшива монета	9, л.	10, в.		11, л.	12	11, л.	9, в.	10, л.	

Якщо фальшивою виявиться монета 12, ми не зможемо визначити, легша чи важча вона від справжньої. Нехай під час першого зважування одна з шальок виявилася легшою, наприклад 1, 2, 3, 4 (випадок шальки 5, 6, 7, 8 є аналогічним). Тоді фальшива монета серед монет 1, 2, 3, 4, причому легша за справжню, або серед 5, 6, 7, 8, причому важча за справжню. Монети 9, 10, 11, 12 справжні. Визначимо фальшиву монету в цьому випадку.

Зважування № 2	3, 4, 6, 7 і 5, 9, 10, 11 (1, 2, 8, 12)								
Результат	<			=			>		
Висновок: фальшива монета	3 або 4, причому легша за справжню, або 5, причому важча за справжню			1 або 2, причому легша за справжню, або 8, причому важча за справжню			6 або 7, причому важча за справжню		
Зважування № 3	3 і 4			1 і 2			6 і 7		
Результат	<	=	>	<	=	>	<	=	>
Висновок: фальшива монета	3, л.	5, в.	4, л.	1, л.	8, в.	2, в.	7, в.	неможливо	6, в.

Задачі на с. 94

1. Перші 8 зважувань витратимо на те, щоб, зваживши монети в парах, визначити 8 легших і 8 важчих. Продовжуючи розбивати монети на пари, із 8 «легких» монет за 7 зважувань знайдемо найлегшу, а з 8 «важких» монет за 7 зважувань знайдемо найважчу.
2. Методом половинного ділення відміряємо 24 кг, потім 12 кг, 6 кг і 3 кг. 24 кг і 3 кг разом дадуть 27 кг, решта крупи становитиме 21 кг.
3. Нехай монети мають номери (зліва направо) 1, 2, 3, 4. Оскільки серед монет є обов'язково справжня і фальшива, то монета 1 справжня, а монета 4 — фальшива. Необхідно визначити, які монети 2 і 3. Справжні монети лежать ліворуч від фальшивих, отже, можливі такі випадки: 1) с., с., с., ф.; 2) с., с., ф., ф.; 3) с., ф., ф., ф. Покладемо на ліву шальку терезів монети 1 і 4, а на праву — 2 і 3. Якщо права шалька переважила, то на ній лише справжні монети, тобто монети 2 і 3 справжні. Якщо терези зрівноважені, то на кожній шальці справжня й фальшива монети, тобто монета 2 справжня, а монета 3 — фальшива. Якщо ліва шалька переважила, то на правій шальці лише фальшиві монети, тобто монети 2 і 3 фальшиві.
4. Достатньо з'ясувати, чи важчі в сумі два найлегші камені, ніж найважчий камінь. Знайдемо найважчий камінь. Для цього розділимо камені на 4 пари та зважимо. Легкі відкладемо в одну купку, а важкі — в іншу. Ми витратили 4 зважування. Камені з «важкої» купки знову розділимо на пари і зважимо. Після цього два важчі камені порівняємо між собою і знайдемо найважчий камінь. На це витратимо ще 3 зважування. Із каменів «легкої» купки аналогічно знайдемо найлегший, нехай це буде камінь Л. Найлегший із решти — це один із трьох каменів (нехай це будуть камені К1, К2, К3), які порівнювалися з каменем Л. Порівняємо К1 і К2, а потім легший із них — із каменем К3. Таким чином ми знайдемо другий із двох найлегших каменів. Ми витратили ще 3 + 2 = 5 зважувань. Тринадцятим зважуванням порівняємо масу двох найлегших і найважчого каменів. Якщо два важчі за один, то так само буде й для будь-якої іншої пари. Якщо два легші за один, то ми знайшли пару каменів, для якої вимога геолога не виконується.

5. Див. таблицю.

Зважування № 1	1, 3 і 4 (7)								
Результат	<			=			>		
Висновок: фальшива монета	серед 1, 3, причому легша за справжню, або 4, причому важча за справжню			7			серед 1, 3, причому важча за справжню, або 4, причому легша за справжню		
Зважування № 2	3, 4 і 7						3, 4 і 7		
Результат	<	=	>				<	=	>
Висновок: фальшива монета	3	1	4				4	1	3

Задача для обговорення на с. 95: 1 кг 800 г.

Задача для обговорення на с. 97

а) Поставити на одну шальку терезів гирю в 3 кг, а на іншу — у 5 кг.

б) Користуючись вантажем у 2 кг, зваженим в пункті *а*, відміряти 2 рази по 2 кг.

в) Відміряти 8 разів **по** 2 кг.

Задачі на с. 98

4. На одну шальку терезів покладемо гирю і розділимо 25 кг на частини у 12 і 13 кг. Потім 12 кг розділимо на дві частини по 6 кг. 13 кг і 6 кг разом дають 19 кг.

5. Потрібно розділити пудру на дві рівні частини, а потім покласти на одну шальку гирю у 200 г і розділити кожну частину на 800 г і 1000 г. А потім дві частини по кілограму зсипати разом.

6. За допомогою гирок у 5 г і 9 г відміряти чотири рази по 4 г чаю. Залишиться також 4 г чаю. Потім кожні 4 г чаю розділити на дві рівні частини по 2 г, при цьому буде виконано ще п’ять зважувань.

Задачі на с. 99

1. Методом половинного ділення відміряти 4 кг 500 г, потім 2 кг 250 г борошна. Потім покласти на одну шальку терезів 2 кг 250 г борошна, а на іншу — гирі в 50 г і 200 г. Потім насипати борошно на легшу шальку, доки терези не зрівноважаться. Таким чином можна відміряти 2 кг борошна.

2. На одну шальку терезів покласти гирю й відміряти два рази по 900 г мармеладу. Маса мармеладу, що залишився, становить 2000 – 1800 = 200 г. Покласти 200 г мармеладу в пакет і використати його як гирку для фасування решти мармеладу.
3. Розділити какао на дві частини по 2 кг 100 г. Потім покласти на одну шальку терезів гирю в 100 г і розділити кожну з частин на дві частини: 1 кг і 1 кг 100 г. З'єднати разом дві частини по 1 кг 100 г. Маємо три частини какао: дві по 1 кг і одну — 2 кг 200 г.
4. Застосуємо ідею подвоєння і відміряємо послідовно 1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г, 64 г, 128 г, 256 г, 512 г. Маємо: 512 + 256 + + 128 + 64 + 32 + 8 = 1 000.
5. Див. таблицю.

Зважування № 1	1, 2 і 3, 5 г (4)								
Результат	<			=			>		
Висновок: фальшива монета	серед 1, 2, причому легша за справжню, або 3, причому важча за справжню (4 — справжня)			4			серед 1, 2, причому важча за справжню, або 3, причому легша за справжню		
Зважування № 2	1, 3 і 4, 5 г			4 і 5 г			1, 3 і 4, 5 г		
Результат	<	=	>				<	=	>
Висновок: фальшива монета	1, л.	2, л.	3, в.	4, л.	неможливо	4, в.	3, л.	2, в.	1, л.

Задачі на с. 100–102

1. Візьмемо з першого капелюха одну монету, з другого — дві, з третього — три і т. д. Зважимо відібрані 55 монет. Якби вони всі були б справжніми, то їхня сумарна маса становила 550 г. Оскільки фальшива монета на 1 г легша від справжньої, то терези покажуть масу меншу на стільки грамів, скільки фальшивих монет на терезах. Ця кількість грамів (і монет) указує на номер капелюха з фальшивими монетами.
2. Вантаж у 2 кг можна зрівноважити, поклавши його разом із гирею в 1 кг на одну шальку терезів, а гирю в 3 кг — на іншу шальку. Вантаж у 4 кг можна зрівноважити, поклавши його на одну шальку терезів, а гирі в 1 і 3 кг — на іншу. Терези можна зрівноважити ще в один спосіб: на одну шальку терезів покласти

гирю масою 1 кг і вантаж масою 4 кг, а на іншу — вантаж і гирю, що залишилися. При такому зважуванні визначити маси вантажів (якщо вони не відомі заздалегідь) неможливо. Можна лише сказати, що один із вантажів на 2 кг важчий від іншого.

3. а) 13 г = 1 г + 4 г + 8 г; б) 19 г = 1 г + 2 г + 16 г;
в) 23 г = 1 г + 2 г + 4 г + 16 г; г) 31 г = 1 г + 2 г + 4 г + 8 г + 16 г.

Задача для обговорення (с. 102): 9 пакетів по 5 кг і 15 пакетів по 3 кг.

4. Застосуємо ту саму ідею, яку використовують для підсумовування чисел за методом Гауса: перша й остання гирки важать стільки ж, скільки друга й передостання, скільки третя спочатку й третя з кінця і т. д. Отже, 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5.

5. Розділимо на 6 рівних за масою купок по дві гирки в кожній, а потім об'єднаємо по дві купки в одну: 12 + 1 + 11 + 2 = = 10 + 3 + 9 + 4 = 8 + 5 + 7 + 6.

6. Набір гир: 1 кг, 2 кг, 4 кг, 8 кг, 16 кг.

Задачі на с. 103

1. Пронумеруємо мішки й візьмемо з першого мішка одну монету, з другого — дві і т. д. Зважимо отримані 28 монет. Якби вони були справжніми, то важили б 28 · 5 = 140 г. Отримана маса відрізнятиметься від 140 г на число, що дорівнює номеру «фальшивого» мішка.

2. Позначимо маси гир a, b, c, d. З'ясуємо сумарну масу a і b. Якщо $a + b$ дорівнюватиме 2001, 2002 або 2004 г, то гиря масою в 1000 г міститься в цій парі, якщо ні — то в іншій парі. Отже, ми знаємо, в якій із двох пар кілограмова гиря. Припустимо, що це пара a і b. Дізнаємося сумарну масу b і c. Якщо $b + c$ дорівнюватиме 2001, 2002 або 2004 г, то $b = 1000$ г, інакше $a = 1000$ г.

3. У цій задачі важливо, що гирі можна класти як на протилежну шальку терезів, так і на одну з шальок. Зрівноважити вантажі можна так, як показано в таблиці (підкреслені числа — це маса вантажу, непідкреслені — маси гир).

$\underline{1} = 1$	$\underline{5} + 1 + 3 = 9$	$\underline{8} + 1 = 9$	$\underline{11} + 1 = 9 + 3$
$\underline{2} + 1 = 3$	$\underline{6} + 3 = 9$	$\underline{9} = 9$	$\underline{12} = 9 + 3$
$\underline{3} = 3$	$\underline{7} + 3 = 9 + 1$	$\underline{10} = 9 + 1$	$\underline{13} = 9 + 3 + 1$
$\underline{4} = 1 + 3$			

4. Знайдемо сумарну масу всіх гирок методом Гауса: $1 + 2 + \ldots + 9 = 10 \cdot 4 + 5 = 45$ г. Отже, маса кожної купки має становити 15 г. Тепер легко підібрати відповідь: 1-ша купка — 7 г і 8 г; 2-га купка — 9 г, 2 г і 4 г; 3-тя купка — 6 г, 5 г, 3 г, 1 г.
5. Можливо. Розділимо гирі на пари першого і другого виду. Перший вид: (1, 37), (2, 36), ..., (18, 20). Сума в кожній такій парі 38, а всього пар 18. Другий вид: (38, 101), (39, 100), ..., (69, 70). Цих пар 32, сума в кожній парі 139. Тепер до кожної купки беремо 9 пар першого виду і 16 пар другого виду.

Задача на с. 109 (фокус «Угадування віку»)

Число та сума його цифр мають однакову остачу від ділення на 9.

Задачі на с. 110

1. Якщо задумане число має вигляд $\overline{ab} = 10a + b$, то асистент має отримати такі числа: $2a$; $2a + 5$; $5(2a + 5) = 10a + 25$, $10a + 25 + 10 + b = 10a + b + 35 = \overline{ab}$.
2. Якщо вихідне число має вигляд $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, то різницю з пункту 3 можна записати як $\overline{d9(9-d)}$ для деякої цифри d. Переставивши цифри та додавши результати, отримаємо: $\overline{d9(9-d)} + \overline{(9-d)9d} = 100d + 90 + 9 - d + 100(9 - d) + 90 + d = 900 + 180 + 9 = 1089$.
3. Помноживши 7 на 15873, отримаємо 111111, тому результатом фокуса стане число, записане шістьма улюбленими цифрами. Помноживши 9 на 12345679, отримаємо 111111111, отже, в цьому випадку результатом фокуса стане число, записане дев'ятьма улюбленими цифрами.

Задачі на с. 112

1. Олівець повернеться в ту саму точку — стрічка Мебіуса має один край.
2. 1) Із звичайного кільця отримаємо два таких самих кільця. У стрічки Мебіуса поверхня не розпадеться, отримаємо двічі перекручене кільце.

   2) Кількість сторін і країв для кожного з кілець, отриманих зі звичайного кільця: 2 і 2. У двічі перекрученого кільця, отриманого зі стрічки Мебіуса, також дві сторони й два краї.

3. Звичайне кільце розпадеться на два звичайних, одне з яких буде вдвічі ширшим за інше. Стрічка Мебіуса розпадеться на два зціплених кільця, одне з яких — стрічка Мебіуса, а інше — двічі перекручене кільце.

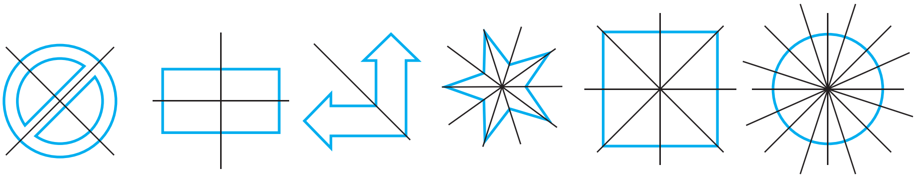
Задачі на с. 113.

Фокус із гральними кубиками: потрібно додати 7, оскільки сума чисел на протилежних гранях кубика дорівнює 7.

Фокус «Дивовижний годинник»: щоб показати на задумане число, фокусник має перші сім разів показувати на довільні числа, на восьмий — показати на 12, потім на 11 і так далі, поки асистент не отримає 20. Раніше, ніж на восьмий раз, асистент не зможе отримати число 20, оскільки максимально можливе задумане число — це 12.

Задачі на с. 117–121

1. Див. мал. 5. Круг має безліч осей симетрії.



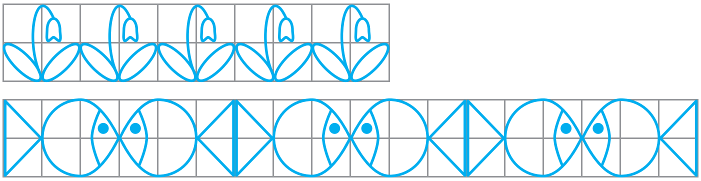
Мал. 5

2. Підказка: намалюйте частини серветки симетрично до тієї частини, яку видно, відносно ліній згину.

3. Центральну симетрію мають фігури (починаючи зліва): перша, третя, п’ята, шоста й сьома. Осьову симетрію мають фігури: друга, третя, четверта й шоста. Центр і вісь симетрії мають третя й шоста фігури.

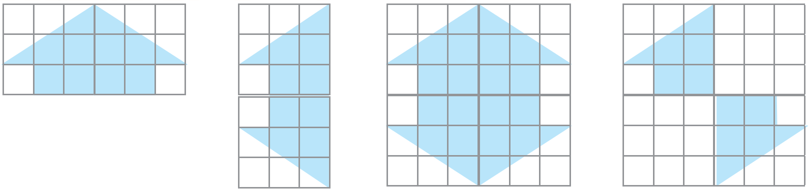
Задача для обговорення: а) немає симетрії; б) осьова симетрія; в) центральна симетрія.

4. Див. мал. 6.

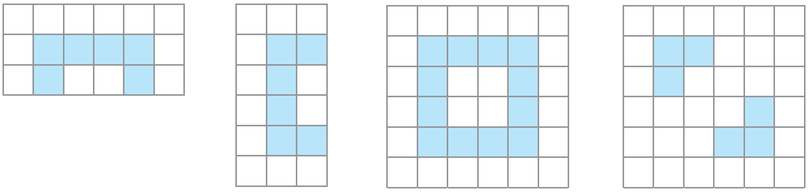


Мал. 6

5. а) Див. мал. 7; б) див. мал. 8.

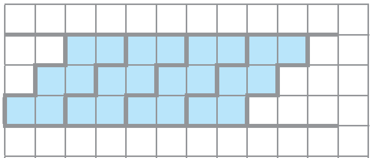


Мал. 7

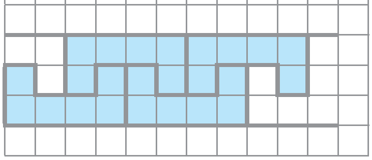


Мал. 8

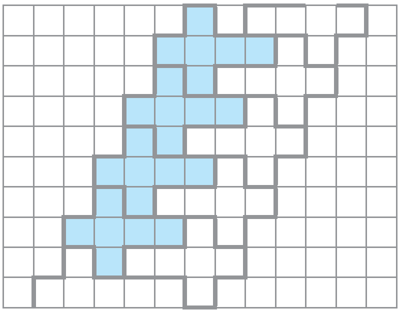
6. Див. мал. 9–11.



Мал. 9

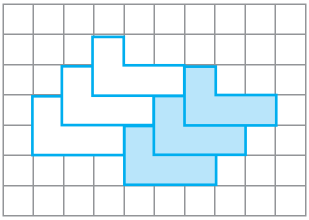


Мал. 10

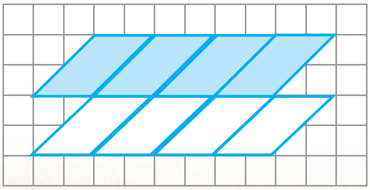


Мал. 11

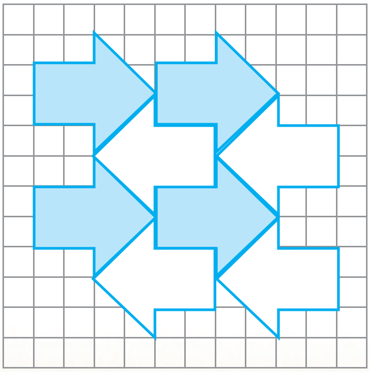
7. Див. мал. 12–15. *Підказка до мал. 15: сформуйте з фігур вертикальні ряди.*



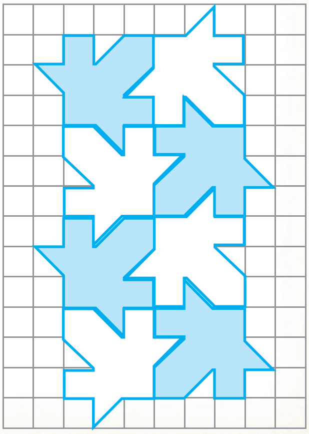
Мал. 12



Мал. 13



Мал. 14



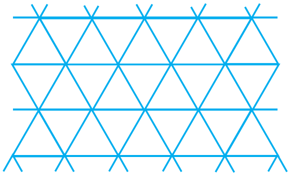
Мал. 15

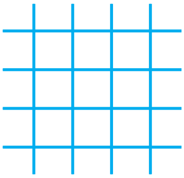
Задачі на с. 121–122

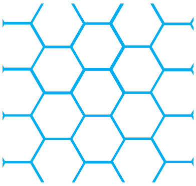
1. а) 8 осей; б) 16 осей; в) скласти удвічі, а потім утричі.

3. 1) а) В, Е, Є, Ж, З, І, К, Н, О, С, Ф, Х, Ю; б) А, Д, І, Ї, Ж, Л, М, Н, О, П, Т, Ф, Х, Ш; в) Ж, Н, О, Ф, Х; г) Ж, И, І, Н, О, Ф, Х.
2) Наприклад: а) ОКО, СОН, ВІКНО; б) ШАЛАШ, НАТАН.

5. а) Див. мал. 16; б) див. мал. 17; в) див. мал. 18.

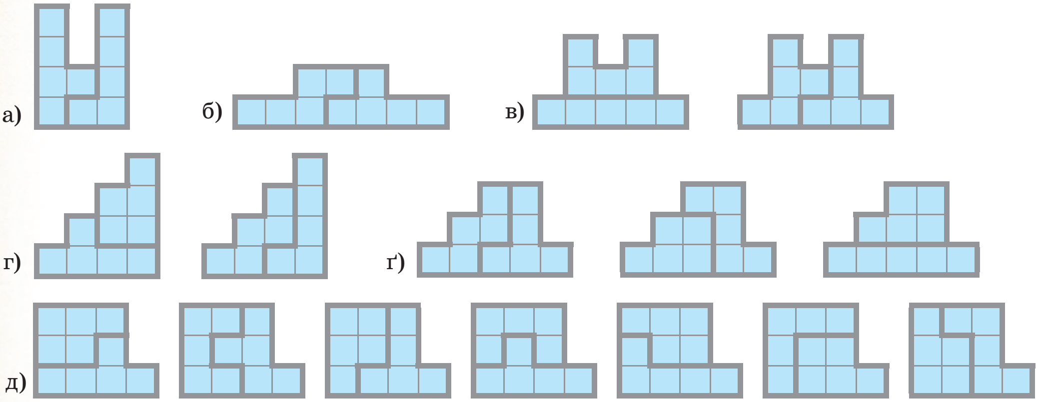

Мал. 16


Мал. 17


Мал. 18

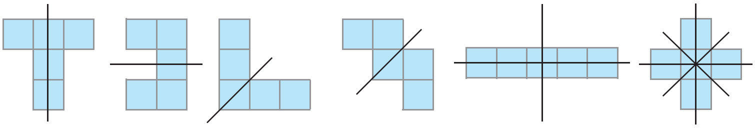
Задачі на с. 124–126

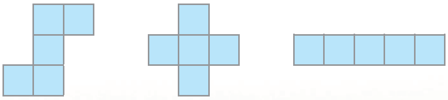
1. Див. мал. 19.



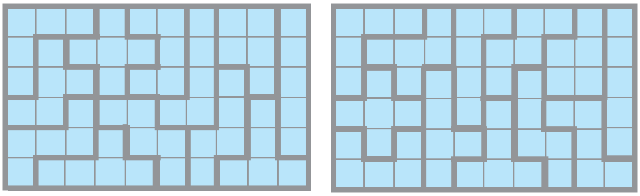
Мал. 19

2. Фігури з осьовою симетрією подано на мал. 20, фігури з центральною симетрією — на мал. 21.

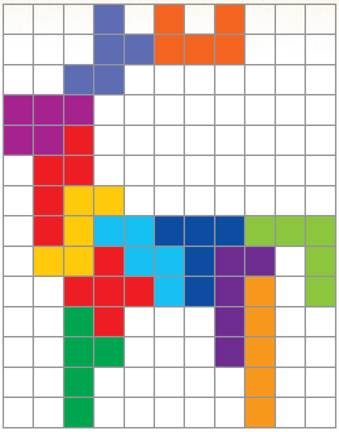

Мал. 20


Мал. 21

3. Див. мал. 22.
4. Див. мал. 23.



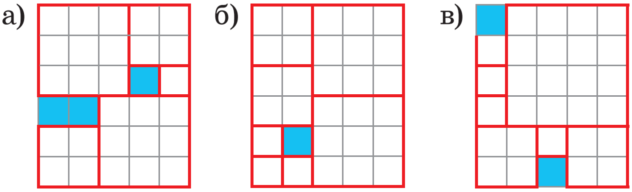
Мал. 22



Мал. 23

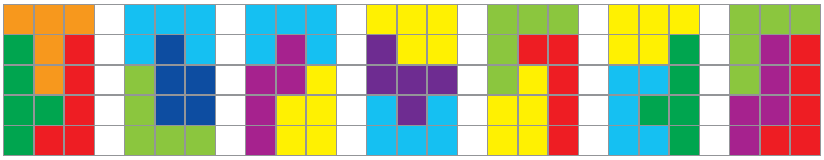
Задачі на с. 127

1. Див. мал. 24 (*а–в*).



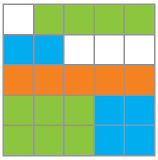
Мал. 24

2. Див. мал. 25.

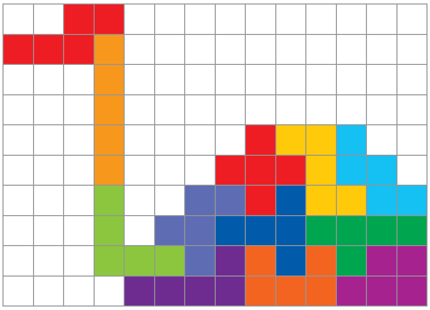


Мал. 25

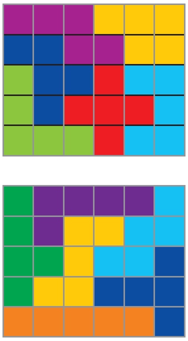
3. Див. мал. 26.
4. Див. мал. 27.
5. Див. мал. 28.



Мал. 26



Мал. 27



Мал. 28

Задачі на с. 129–130

1. Див. мал. 29.

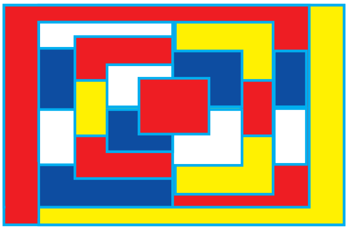
2. *Підказка: розфарбуйте клітинки в шаховому порядку.*

3. Див. мал. 30.

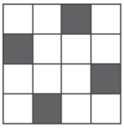
6. Дві букви, достатньо розташувати їх у шаховому порядку.

Задачі на с. 130–131

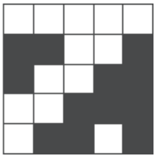
1. Див. мал. 31. **2.** Див. мал. 32.



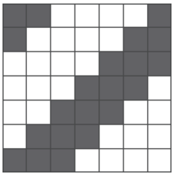
Мал. 29



Мал. 30



Мал. 31



Мал. 32

3. Найменша кількість кольорів: а) 2; б) 2; в) 3.

4. Розфарбуємо клітинки в шаховому порядку. Клітинок одного кольору виявиться на 2 більше, ніж іншого. Але шлях обходу 34 клітинок має містити по 17 клітинок кожного кольору. Отже, маємо суперечність, що доводить, що обійти кімнати не вдасться.

5. Петрик помиляється. Розфарбуємо клітинки в шаховому порядку. Кожна фігурка Т-тетраміно містить або 1, або 3 білі клітинки, отже, якщо розрізання можливе, то всі фігурки Т-тетраміно містять разом непарну кількість білих клітинок. Але у квадраті 10×10 білих клітинок 50. Отже, маємо суперечність.

Алфавітний покажчик

Література

1. Бєлова Л. П. Математичний калейдоскоп (факультативний курс). 5 клас : робочий зошит : У 2 ч. / Л. П. Бєлова, М. М. Корнієнко, Л. Ю. Полякова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2012. — (Серія «Логіка+»).
2. Бєлова Л. П. 92 логічні задачі : [факультативний курс] Математичний калейдоскоп / Л. П. Бєлова, М. М. Корнієнко, Л. Ю. Полякова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2012. — (Серія «Логіка +»).
3. Бєлова Л. П. 101 логічна задача : [факультативний курс] Математичний калейдоскоп / Л. П. Бєлова, М. М. Корнієнко, Л. Ю. Полякова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2014. — (Серія «Логіка +»).
4. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения / М. Гарднер. — М. : «Оникс», 1994.
5. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки / Е. И. Игнатьев. — М. : Наука, 1978.
6. Клини С. Математическая логика / С. Клини // перев. с англ. Ю. А. Гастева. — М. : Мир, 1983.
7. Коваль С. От развлечения к знаниям. Математическая смесь / С. Коваль. — Warszawa : Wydavnictva naukowo-techniczne, 1975.
8. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад / Т. В. Коваль. — Мандрівець, 2008.
9. Косоротова Є. Математична логіка: Навчальний посібник / Є. І. Косоротова, С. І. Якименко. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2010.
10. Логіка. Збірник задач. 5–9 кл. / Укл. В. О. Геращенко. — 2-ге вид., перероб. і доп. — Харків : Торсінг-плюс, 2011.
11. Перельман Я. И. Живая математика / Я. И. Перельман. — М. : Наука, 1974.
12. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч : навчальний посібник / О. А. Сарана. — К. : АСК, 2004.
13. Сухарєва Л. С. Задачі на переливання, зважування, перекладання / Л. С. Сухарєва. — Харків : Вид. група «Основа», 2007.
14. Федак І. В. Методи розв’язування олімпіадних завдань з математики / І. В. Федак. — Чернівці : Зелена Буковина, 2002.
15. Ясинський В. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування / В. Ясинський. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2012.

Зміст

Навчальне видання

Серія «Шкільна бібліотека»

БЄЛОВА Лілія Петрівна
КОРНІЄНКО Марина Михайлівна
ПОЛЯКОВА Людмила Юріївна

«МАТЕМАТИКА НАВКОЛО НАС»

посібник серії «Шкільна бібліотека»
для 5–9 класів закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Провідний редактор *І. Л. Морєва*. Редактор *О. В. Костіна*.
Технічний редактор *А. В. Пліско*. Художнє оформлення *В. І. Труфена*.
Коректор *Н. В. Красна*

Окремі зображення, що використані в оформленні посібника,
розміщені в мережі інтернет для вільного використання

Підписано до друку 01.12.2020. Формат 70×90/16.
Папір офсетний. Гарнітура Шкільна. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 11,70. Обл.-вид. арк. 11,3.
Тираж 89 384 прим. Зам. № 9410-2020.

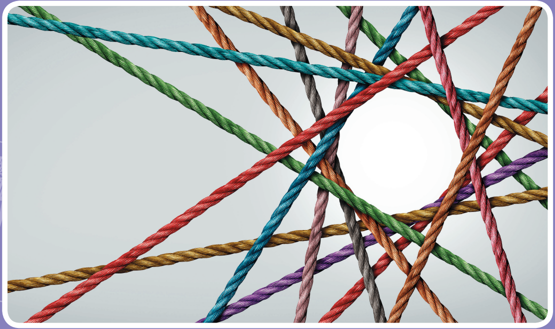
ТОВ Видавництво «Ранок»,
вул. Кібальчича, 27, к. 135, Харків, 61071.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5215 від 22.09.2016.
Адреса редакції: вул. Космічна, 21а, Харків, 61145.
E-mail: office@ranok.com.ua. Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

Посібник надруковано на папері українського виробництва

Надруковано у друкарні ТОВ «ТРІАДА-ПАК»,
пров. Сімферопольський, 6, Харків, 61052.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 5340 від 15.05.2017.
Тел. +38 (057) 712-20-00. E-mail: sale@triada.kharkov.ua

Обчислення за допомогою двійок, тобто 0 і 1, … є для науки основним і породжує нові відкриття, які стають корисними згодом… У разі зведення чисел до найпростіших початків, якими є 0 і 1, усюди виявляється дивовижний порядок.

Готфрід Вільгельм Лейбніц



Уява — це здатність до відкриттів… Це те, що відчуває та виявляє реальність, яку ми не бачимо, яка існує не для наших чуттів. Математична наука являє нам сутність таких речей. Це мова невидимих відношень між речами.

Ада Лавлейс

Невигадливі головоломки про цілі числа протягом віків були джерелом оновлення математики.

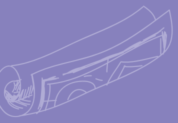
Гаррет Біркгоф

Математика — наука молодих. Інакше й не може бути. Заняття математикою — це така гімнастика розуму, для якої потрібна вся гнучкість і вся витривалість молодості.

Норберт Вінер

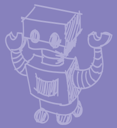
Симетрія є тією ідеєю, за допомогою якої людина століттями намагається пояснити і створити порядок, красу і досконалість.

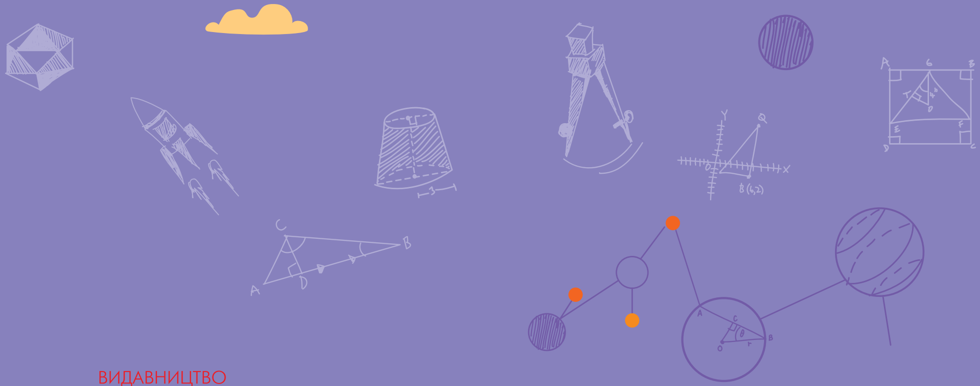
Герман Вейль



Для допитливого розуму навколишній світ цікавий і різноманітний. Навіть повсякденні справи можуть викликати такі запитання, відповіді на які знають лише науковці — математики, фізики, хіміки, економісти тощо. І чи насправді математика — це лише формули і нічого цікавого? Сподіваємося, відповідь ви знайдете самі, читаючи цей посібник, розв'язуючи запропоновані задачі, граючи в логічні ігри, демонструючи математичні фокуси своїм друзям.

Допомогти вам поглянути уважно навкруги, зрозуміти, що математика дійсно навколо нас, і покликане видання, яке ви тримаєте в руках.





ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

ISBN 978-617-09-6796-1
9 786170 967961
2443 7301

Інтернет-підтримка