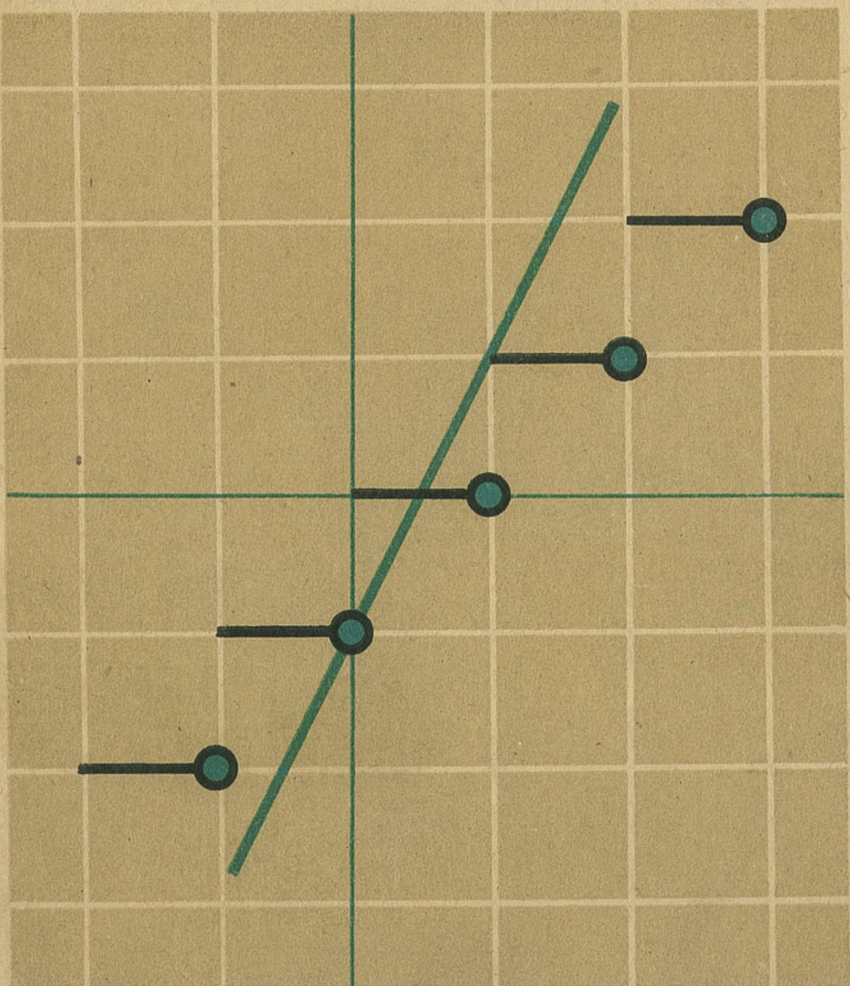
Г. П. БЕВЗ

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ЗАДАЧ

у 6–8 класах



Г. П. БЕВЗ

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ЗАДАЧ

у 6—8 класах

Посібник для вчителів

«РАДЯНСЬКА ШКОЛА»
КИЇВ—1975

512 *Схвалено Управлінням шкіл*
Б36 *Міністерства освіти УРСР*

Пропонована книжка — один з перших посібників, в якому розглянуто методику розв'язування алгебраїчних задач у школі. В ній, крім загальних питань, висвітлено методику розв'язування найважливіших типів задач з курсу алгебри, зокрема задач на перетворення виразів, дослідження функцій, розв'язування рівнянь і нерівностей, а також текстових задач на складання рівнянь. Основну увагу звернуто на ті задачі, що є в підручниках з алгебри для VI—VIII класів. Щоб забезпечити наступність у викладанні математики, аналізуються також способи розв'язування алгебраїчних задач, характерні для IV і V класів.

Книжка буде корисним посібником для вчителів математики IV—VIII класів, студентів фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів.

$Б\,\frac{60501-262}{М210(04)-75}\,259-75$

ПЕРЕДМОВА

Математика виникла із задач. Найдавніші єгипетські математичні папіруси не містять ще ніяких доведень, означень чи аксіом, а являють собою збірки задач, здебільшого геометричних, правил та формул для обчислення площ і об'ємів. Те саме можна сказати і про математику Вавілону та інших країн стародавнього Сходу. Російські математичні рукописи XVII — XVIII століть теж містять в основному задачі і їх розв'язання.

Іноді стверджують, що в Росії термін «задача» почали вживати в 20-х роках XVIII ст. (Кутина Л. Л., Формирование языка русской науки. М — Л., «Наука», 1964, стор. 76), хоч насправді ще в 1703 р. вийшла в світ «Арифметика» Л. П. Магніцького, один з розділів якої має назву «Задачи на правила ко гражданству потребные», а розділ про потрійне правило закінчується віршем:

«А смотри всех паче
Разума в задаче ...»

Задачі стимулювали не тільки виникнення математичної науки, а й її розвиток. Основну роль, звичайно, відігравали задачі, поставлені життям. Вони насамперед змушували вчених розробляти нові алгоритми, розкривати нові закономірності, створювати нові методи дослідження, тобто збагачувати математику новими відкриттями.

У процесі навчання математичні задачі також відіграють велику роль. Вони сприяють кращому осмисленню теоретичного матеріалу, його запам'ятанню, дають можливість пов'язувати викладання математики з життям та іншими науками, виховують в учнів активність, самостійність мислення, наполегливість та інші позитивні риси.

Особливо корисні математичні задачі для активізації мислення учнів, для виявлення їх творчої думки. Саме із задач починається зацікавленість багатьох учнів математикою. Ось чому в наших школах приблизно половину всього часу, відведеного на вивчення математики, використовують для розв'язування різних задач і вправ.

У методичній літературі задачам приділено багато уваги. Відомі десятки книжок, сотні статей, присвячених методиці розв'язування задач. Але це стосується головним чином арифметичних і геометричних задач. Окремі праці, в яких би докладно розглядалася методика розв'язування всіх найважливіших видів алгебраїчних задач, нам не відомі.

У цій книжці основну увагу приділено розв'язуванню алгебраїчних задач з шкільних підручників, а також висвітленню загальних питань, що стосуються класифікації алгебраїчних задач, способів їх розв'язування, оформлення тощо.

Автор висловлює глибоку подяку рецензентам О. С. Дубинчук, Б. В. Василишину, Д. А. Скрипнику за цінні зауваження і пропозиції, які сприяли поліпшенню цього посібника.

Пропозиції і побажання щодо змісту книжки просимо надсилати на адресу: м. Київ, вул. Юрія Коцюбинського, 5, видавництво «Радянська школа», редакція математики.

Автор.

І. АЛГЕБРАЇЧНІ ЗАДАЧІ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. Види алгебраїчних задач

Алгебраїчні задачі

Задачею в найширшому розумінні цього слова називають завдання, яке треба виконати, або мету, якої треба досягти. Є математичні, фізичні, хімічні, економічні та інші задачі. В математичній задачі здебільшого треба що-небудь обчислити, побудувати, довести чи дослідити. Якщо такі вимоги ставляться до алгебраїчних виразів, рівнянь, нерівностей, функцій, маємо алгебраїчні задачі.

У методиці математики термін «алгебраїчна задача» вживається досить часто. Проте в сучасній методичній літературі немає ні означення цього поняття, ні переліку особливостей алгебраїчних задач, ні їх класифікації. Пояснюється це не тільки тим, що на алгебраїчні задачі методисти взагалі звертали менше уваги, ніж, скажімо, на арифметичні чи геометричні, а й тим, що саме це поняття досить невизначене. Відомо, що шкільними програмами з алгебри передбачено розв'язування найрізноманітніших задач: на складання рівнянь, обчислення виразів, доведення нерівностей, дослідження функцій, побудову їх графіків тощо. Крім того, цілі групи арифметичних та геометричних задач, які можна розв'язувати алгебраїчними методами, також часто називають алгебраїчними. Зрозуміло, що охопити одним означенням усі різновиди цих задач дуже важко. Тому й ми не означатимемо це поняття, а тільки опишемо його. Віднесемо до алгебраїчних задач задачі на перетворення виразів, доведення тотожностей, дослідження висловлень, функцій, побудову графіків, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, а також текстові задачі, що зводяться до рівнянь, тобто називатимемо алгебраїчними всі задачі, які звичайно розв'язуються (або які можна розв'язувати) під час вивчення шкільного курсу алгебри.

У кожній алгебраїчній задачі звичайно щось дано і щось треба виконати: обчислити, побудувати, довести, дослідити. Те, що дано в задачі, називається її *умовою*, а те, що треба виконати — *вимогою* (або запитанням).

Розглянемо дві задачі.

1. У двох класах 78 учнів, причому у першому на 8 учнів більше, ніж у другому. Скільки учнів у кожному класі?
2. Доведіть, що при дійсних a, b, c

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc.$$

«У двох класах 78 учнів, причому у першому на 8 учнів більше, ніж у другому» — умова першої задачі; «Скільки учнів у кожному класі?» — її запитання.

«a, b, c — дійсні числа» — умова другої задачі, а «Доведіть, що при дійсних a, b, c $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$» — її вимога.

Іноді вчителі слідом за авторами методичних посібників всю задачу називають її умовою, пропонуючи учням повторити у м о в у задачі. На нашу думку, ототожнювати поняття «задача» і «умова задачі» не слід. Їх треба розрізняти, як розрізняють теорему і умову теореми.

Розглянемо, наприклад, таку задачу.

У трьох цехах заводу працює 2740 робітників, причому в другому цеху — на 140 робітників більше, ніж у першому, а в третьому — в 1,2 рази більше, ніж у другому. Скільки робітників працює в кожному цеху?

Умова цієї задачі — весь її текст, крім останнього речення,— складається з трьох частин: а) у трьох цехах заводу працює 2740 робітників; б) у другому цеху — на 140 робітників більше, ніж у першому; в) у третьому — в 1,2 раза більше, ніж у другому.

На основі кожної частини умови задачі можна скласти рівняння, нерівність або якесь інше речення із змінними. Наприклад, кожна з трьох частин умови даної задачі приводить до рівняння: а) $x + y + z = 2740$, б) $y - x = 140$, в) $z = 1{,}2y$. (Буквами x, y, z позначено кількість робітників відповідно в першому, другому і третьому цехах).

Умови задач бувають найрізноманітніші. Вимоги задач, хоч їх формулюють по-різному, менш різноманітні. В кожній задачі треба щось або обчислити, або побудувати, або довести, або дослідити. Отже, й алгебраїчні задачі поділяють на чотири види: на обчислення, побудову, доведення і дослідження.

Задачі на обчислення, побудову, доведення, дослідження

У задачі *на обчислення* треба знайти число (або кілька чисел) за даними в її умові числами і залежностями між ними. Дані й шукані числа можуть бути виражені цифрами і буквами. Наведемо приклади.

1. Моторний човен за 2 *год* 30 *хв* пройшов 12 *км* за течією річки і 12 *км* проти течії. Іншим разом він за 1 *год* 20 *хв* пройшов 4 *км* за течією і 8 *км* проти течії. Визначте швидкість моторного човна у стоячій воді і швидкість течії річки.
2. Обчисліть значення виразу $\frac{x^2 + 2x + 4}{x^3 - 64}$, якщо $x = 3$.
3. Розв'яжіть нерівність $x^2 - 5x + 6 < 0$.

У задачах на обчислення вимогу формулюють або у вигляді питання «скільки?», «на скільки?», «у скільки разів?», або в наказовій формі: «обчисліть», «визначте», «знайдіть». Задачі на обчислення, умови яких записані тільки за допомогою математичних символів, називаються *прикладами*. Інші задачі прийнято називати *текстовими*.

Коли йдеться про задачі *на побудову*, здебільшого мають на увазі геометричні задачі, в яких треба побудувати якусь геометричну фігуру. Але до задач на побудову слід віднести і деякі алгебраїчні задачі типу:

1. Побудуйте графік функції $y = x^2 - |3x + 2|$.
2. Побудуйте графік, що відповідає рівнянню $x^2 + y^2 = 36$.
3. Побудуйте граф відношення «менше» на множині $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
4. Побудуйте круги Ейлера, що ілюструють співвідношення між множинами натуральних, цілих і дробових чисел.

До алгебраїчних задач на побудову (або на створення) можна було б віднести задачі, в яких треба побудувати (скласти, створити) не тільки якусь геометричну фігуру — графік, граф, діаграму, схему, а й будь-який інший об'єкт — рівняння, нерівність, функцію тощо, наприклад:

1. Складіть квадратне рівняння, корені якого дорівнюють 2 і —5.
2. Напишіть арифметичну прогресію, третій і п'ятий члени якої дорівнюють відповідно 3 і 16.
3. Напишіть рівняння лінійної функції, графік якої проходить через точки A (0; 2) і B (3,0).

Задача, в якій сформульовано яке-небудь твердження і треба довести його, називається задачею *на доведення*. В теорії вивчають найважливіші твердження, які дають можливість розв'язувати багато різних практичних задач і взагалі мають широке застосування. Їх називають теоремами. Інші, менш важливі, твердження, які можна не запам'ятовувати, пропонують учням у вигляді задач на доведення. Наприклад:

1. Доведіть, що при кожному натуральному n число $10^n + 8$ ділиться на 9.
2. Доведіть, що середнє арифметичне трьох нерівних додатних чисел більше від їх середнього геометричного.
3. Нехай A, B, C,— довільні множини. Доведіть, що $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Задачі на доведення відрізняються від усіх інших видів задач і вимогою, і метою розв'язування. Розв'язування математичної задачі, яка не є задачею на доведення, зводиться до знаходження відповіді, а розв'язування задачі на доведення цього не передбачає. Отже, математичні задачі, в тому числі й алгебраїчні, можна поділити, як пропонує Д. Пойа, на два види: на доведення і на знаходження [27, 83][1].

Задачі, в яких треба щось дослідити й сформулювати відповідне твердження, називаються задачами *на дослідження*. Наведемо приклади таких задач.

1. Чи існує таке значення змінної x, при якому значення виразу $3x^2 + 1$ менше від 0?
2. Дослідіть, чи для будь-яких множин A, B і C правильна рівність $(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup (B \cup C)$.
3. Чи існують функції, які одночасно є парними і непарними?
4. Чи існують такі значення a і b, щоб справджувалась рівність $(a + b)^2 = a^2 + b^2$?
5. Чи рівносильні рівняння

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{3-x}{x-1} \text{ і } x + 1 = 3 - x?$$

6. Який висновок можна зробити щодо чисел m і n, якщо

$$\log_m 3{,}4 < \log_n 3{,}4?$$

Для задач на дослідження характерні запитання: «Чи можна...?» «Чи існує...?» «При якій умові...?» «Чи рівні ...?» тощо. Деякі автори вживають також термін «задачі-запитання» замість «задачі на дослідження». Цей термін невдалий, бо, як відомо, вимоги багатьох задач на обчислення також подають у формі запитань. З другого боку, задачі на дослідження не обов'язково формулювати у вигляді запитань. Так, задача типу «Дослідіть функцію $y = \frac{1}{x^2+1}$» — теж, очевидно, є задачею на дослідження.

Не треба змішувати задачі на дослідження із задачами на обчислення, під час розв'язування яких доводиться виконувати деяке дослідження.

Розглянемо, наприклад, таку задачу:

Через вершину конуса й хорду його основи проведено переріз, площа якого дорівнює Q. Визначте відстань від центра основи до хорди, якщо радіус основи дорівнює r, а висота конуса h.

Це звичайна задача на обчислення, і ми не радимо такі задачі відносити до задач на дослідження, хоч під час їх розв'язування і доводиться виконувати певне (іноді досить громіздке) дослідження. Нагадаємо, що складовою частиною розв'язання майже кожної геометричної задачі на побудову є дослідження, але тільки через це її не слід називати задачею на дослідження.

У шкільних збірниках задач є задачі з кількома вимогами різних видів: побудувати і обчислити, побудувати і довести тощо. Розглянемо, наприклад, таку задачу.

Дано квадратний тричлен $y = -2x^2 + 4x - 6$.

---

[1] Тут і далі перша цифра в квадратних дужках — порядковий номер у списку літератури твору, на який посилаємось, друга — номер потрібної сторінки.

1) Доведіть, що цей тричлен не має коренів (дійсних).
2) Доведіть, що при будь-яких значеннях x $y < 0$.
3) Знайдіть, при якому значенні x тричлен має найбільше значення, і яке саме.
4) Визначте, як змінюється y при зміні x від $-\infty$ до $+\infty$.
5) Побудуйте графік цієї функції.
6) Перевірте, що координати вершини параболи $y = -2x^2 + 4x - 6$ визначаються за формулами:

$$x = -\frac{b}{2a}, \quad y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

де a, b, c — коефіцієнти тричлена $ax^2 + bx + c$.

Це — комбінована задача, що має 6 різних вимог: доведення (1, 2), обчислення (3), дослідження (4, 6), побудова (5).

Задачі визначені, невизначені і суперечливі

Вище ми поділяли математичні задачі на види за їх вимогами. Залежно від інших особливостей ці задачі поділяють також на інші види. Дуже поширений у методичній літературі поділ математичних задач на визначені (означені), невизначені (неозначені) та перевизначені (переозначені). Терміни «визначена», «означена», коли йдеться про задачу, вживають як синоніми. Щоб не було різнобою в термінології, вживатимемо лише перший з них.

Математичні задачі залежно від кількості розв'язків можна поділити на чотири види:

1. Задачі, які мають один розв'язок.
2. Задачі, які мають 2, 3, ..., n розв'язків.
3. Задачі, які мають безліч розв'язків.
4. Задачі, які не мають жодного розв'язку.

Задачі першого виду природно називати *визначеними*, а третього — *невизначеними*. Задачі четвертого виду можна назвати *суперечливими*.

Лишається домовитися, як бути з тими задачами, що мають два або більше (але скінченну кількість) розв'язків. Їх можна віднести і до визначених, і до невизначених або вважати окремим видом задач. Проте такі задачі звичайно вважають невизначеними [4, 76]. Отже, і в школі задачі, що мають більше ніж один розв'язок, бажано називати невизначеними. Наведемо приклади невизначених задач.

1. Після того як дівчинка купила три альбоми, у неї залишилося 2 крб. 10 коп. Скільки грошей залишиться у дівчинки, якщо вона купить шість альбомів?
2. У двоцифровому числі десятків на два більше, ніж одиниць. Якщо від нього відняти 18, то дістанемо двоцифрове число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайдіть це число.

3. Поставте замість зірочок такі одночлени, щоб утворилась тотожність:

$$* \cdot (3y^2 + 8y - 7) = 36y^5 + * + *.$$

У першій задачі ми не можемо дати певну відповідь, бо в ній пропущено частину умови: треба вказати або вартість одного альбома, або суму грошей, що була у дівчинки, або якесь відношення.

У другій задачі дано дві частини умови, але вони рівносильні: з першої випливає рівняння $x - y = 2$, а з другої $10x + y - 18 = 10y + x$, яке рівносильне першому рівнянню. Ця задача має 7 розв'язків: 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97.

Третя задача також невизначена, бо замість першої зірочки можна поставити одночлени $12y^2$; $4{,}5y^4$; $-\frac{36}{7}y^5$.

Іноді задачі поділяють на такі три види, виходячи не з кількості їх розв'язків, а з кількості різних рівнянь, які можна скласти за кожною умовою. Задача називається *визначеною*, якщо розв'язання її зводиться до стількох різних рівнянь, скільки шуканих величин є в запитанні.

Задача називається *невизначеною*, коли кількість різних рівнянь, які виражають її умову, менша від кількості шуканих величин.

Задача називається *суперечливою*, коли кількість різних рівнянь, до яких вона приводить, більша від кількості шуканих величин.

Ці два поділи задач не рівносильні.

Справді, розглянемо, наприклад, таку задачу.

Під час відвідування зоопарку одна група екскурсантів купила 78 дитячих квитків і 16 квитків для дорослих на суму 6 крб. 30 коп. Інша група екскурсантів купила 50 дитячих квитків і 12 квитків для дорослих за 4 крб. 30 коп. Яка ціна одного дитячого квитка й одного квитка для дорослих?

Це цілком визначена задача, адже в ній треба знайти значення двох величин, а за її умовою можна скласти два різні рівняння:

$$78x + 16y = 630 \text{ і } 50x + 12y = 430$$

(x — ціна одного дитячого квитка, а y — ціна одного квитка для дорослих — в копійках). Розв'язавши систему цих рівнянь, дістанемо $x = 5$; $y = 15$.

Ще одна задача.

Під час відвідування зоопарку було куплено 50 дитячих квитків і 12 квитків для дорослих на суму 4 крб. 30 коп. Яка ціна одного дитячого квитка і одного квитка для дорослих?

З умови цієї задачі випливає тільки одне рівняння

$$50x + 12y = 430,$$

або

$$25x + 6y = 215.$$

Тому за другим поділом цю задачу треба було б вважати невизначеною. Але вона має той самий розв'язок, що й попередня задача. Справді, в рівнянні $25x + 6y = 215$ змінні x і y позначають натуральні числа. З рівняння видно, що x — число непарне і менше від 9, бо $25 \cdot 9 > 215$. Щоб знайти значення x, досить випробувати числа 1, 3, 5, 7. Виявляється, що задачу задовольняє тільки значення $x = 5$. Тоді $y = 15$. Отже, і ця задача визначена.

Існує думка, що задачі, які пропонуються учням, тільки тоді матимуть належне навчально-виховне значення, коли вони будуть визначеними. Вважаємо, що учням треба давати і невизначені задачі, бо на практиці найчастіше трапляються саме такі задачі.

Чи можна задачі на доведення поділяти на визначені, невизначені і суперечливі? Розв'язування задач на доведення не зводиться до знаходження розв'язків. Про відповідь або розв'язок задачі на доведення взагалі не можна говорити. Тому й поділяти такі задачі на види залежно від кількості розв'язків не можна.

Задачі на доведення доцільно поділяти на правильні й неправильні, виходячи з того, правильне чи неправильне твердження пропонується довести в задачі. Наведемо приклад.

Доведіть, що коли a і b — довільні дійсні числа, то

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2.$$

Сформульоване в задачі твердження правильне не при всіх дійсних a і b, а тільки за умови, що числа мають однакові знаки. Ця задача неправильна.

Задачі із зайвими даними і додатковими обмеженнями

Тепер розглянемо поділ алгебраїчних задач на види залежно від того, чи є в їх умовах зайві дані або додаткові обмеження. Під *зайвими даними* розуміють дані в умові задачі числа, залежності, властивості тощо, які випливають з інших наявних в умові даних. Розглянемо задачу.

Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 15. Якщо це число помножити на 7 і від добутку відняти двоцифрове число, записане тими самими цифрами, що й початкове, але в зворотному порядку, то дістанемо 387. Знайти двоцифрове число.

Розв'язання. Якщо позначити цифри десятків і одиниць шуканого двоцифрового числа відповідно буквами x і y, то тільки з другої частини умови задачі дістанемо рівняння:

$$7(10x + y) - (10y + x) = 387,$$

або

$$y = 23x - 129.$$

Тепер лишається випробувати кілька значень x. Якщо $x \leqslant 5$, то $y < 0$; якщо $x \geqslant 7$, то $y \geqslant 32$. Ці значення задачі не задовольняють, бо y — одноцифрове натуральне число. Якщо $x = 6$, то $y = 23 \cdot 6 - 129 = 9$.

Відповідь. Шукане число 69.

Як бачимо, перша частина умови задачі зовсім не використовувалася, вона зайва.

Розглянута задача хоч і містить зайві дані, цілком визначена, бо має один певний розв'язок. Але такі задачі бувають і невизначеними, наприклад:

Яке двоцифрове число на 4 менше від суми квадратів його цифр і на 5 більше від їх подвоєного добутку?

У цій задачі друга частина умови зайва. Справді, якщо позначити буквою x кількість десятків, а буквою y — кількість одиниць шуканого двоцифрового числа, то тільки з першої частини умови можна дістати таке рівняння:

$$(10x + y) + 4 = x^2 + y^2,$$

або

$$y(y - 1) = 4 + 10x - x^2.$$

Число $y(y - 1)$ парне, тому і x парне, а $4 + 10x - x^2$ ділиться на 4. Отже, $y(y - 1)$ також поділиться на 4. Це можливо тільки тоді, коли y дорівнює одному з чисел 4, 5, 8, 9. Безпосередньою перевіркою неважко переконатися, що $y = 5$, тоді маємо рівняння:

$$20 = 4 + 10x - x^2,$$

або

$$x^2 - 10x + 16 = 0,$$

звідки

$$x_1 = 2, \ x_2 = 8.$$

Як бачимо, задача має два розв'язки: 25 і 85. Кожен з цих розв'язків задовольняє і другу частину її умови. Отже, це — невизначена задача із зайвими даними.

Розглянемо ще дві задачі на доведення.

1. Доведіть, що коли a, b і c — додатні числа і сума будь-яких двох з них більша від третього числа, то справджується нерівність:

$$abc > (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c).$$

Якщо у цій задачі опустити умову «сума будь-яких двох з них більша від третього числа», можна дістати також правильну задачу на доведення. Проте не слід цю частину умови задачі вважати зайвою, бо вона не випливає з інших її даних. Отже, ця задача має не зайві дані, а тільки *додаткові обмеження.*

2. Доведіть нерівність

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Ця задача не має ні зайвих даних, ні додаткових обмежень. Але вимога її послаблена. Виявляється, справедлива і сильніша нерівність

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{12},$$

але доведення її досить складне, непосильне для учнів. Якщо послабити вимогу, як це зроблено в посібнику [13, 29], то доведення набагато спрощується і стає доступним для учнів. Такі задачі варто називати задачами з послабленими вимогами.

Учням можна пропонувати задачі із зайвими даними або з додатковими обмеженнями. Правда, є й інші думки. В журналі «Математика в школе» критикували навіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{3x-5y}{2}+3=\frac{2x+y}{5}, \\ 8-\frac{x-2y}{5}=\frac{x}{2}+\frac{y}{3} \end{cases}$$

тільки за те, що її розв'язок $x = 12$, $y = 6$ перетворює дріб $-\frac{x-2y}{5}$ у нуль. Цей дріб, мовляв, в системі зайвий. З такою думкою ми не можемо погодитись.

Абстрактні і конкретні задачі

Залежно від того, про що йдеться в задачі — про абстрактні числа і співвідношення чи про певні значення конкретних величин (ваги, часу, відстані, швидкості, температури тощо), її відносять до *абстрактних* або до *конкретних* задач. Приклади абстрактних задач.

1. Сума двох чисел дорівнює 100, а різниця 10. Знайдіть ці числа.
2. Розв'яжіть рівняння $2x^2 + 3x = 0$.

Конкретні задачі:

1. З 10 *кг* цукрових буряків виходить 1 *кг* цукру. Скільки цукру можна дістати з 3 *т* буряків?
2. Чи можна з квадратного куска жерсті розміром 5 *дм* × 5 *дм* зробити відкриту зверху коробку об'ємом 10 *дм*^{3}?

Здебільшого в конкретних задачах, що є в підручниках і посібниках з алгебри, подаються реальні числові значення величин, описуються типові ситуації, які часто відбуваються або можуть відбуватися в житті. На жаль, іноді в посібниках трапляються нереальні, навіть абсурдні задачі. Нереальними звичайно називаються задачі з надуманим змістом, із завищеними або заниженими числовими даними.

Трапляються в методичних посібниках і такі задачі, в яких описуються неможливі ситуації. Ось одна з таких задач.

Змішано 10 *л* 60-процентної соляної кислоти з 4 *л* 95-процентної кислоти. Якої міцності буде суміш?.

Ця задача абсурдна, бо не існує 60-процентної і 95-процентної соляної кислоти. З хімії відомо, що міцність соляної кислоти не може бути вищою від 42%.

Нереальних, тим більше абсурдних задач не можна пропонувати учням.

Типові, шаблонні та інші задачі

Типовими називатимемо задачі, алгоритми розв'язування яких вже відомі учням. [27,197]. Раніше термін «типова задача» застосовувався в арифметиці до тих задач, які простіше було розв'язувати за допомогою рівнянь; іноді їх називали ще задачами алгебраїчного типу. Тепер цей термін не вживають у такому вузькому розумінні: всі такі задачі називаються алгебраїчними.

Якщо учням пропонують задачу, загального алгоритму якої вони не розглядали, то її вважають нешаблонною.

Сформулюємо кілька нешаблонних алгебраїчних задач для учнів VIII класу.

1. Скільки цифр має число $2^{1000} + 1$, якщо його записати в десятковій системі числення?
2. При якому значенні змінної x функція $y = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}$ набуває найменшого значення?
3. Поїзд їде з міста A в місто B з швидкістю 50 *км/год*, а за B в A — з швидкістю 60 *км/год*. Визначити середню швидкість руху поїзда на цій дільниці.

Щоб учні могли розв'язувати нешаблонні задачі, треба, щоб вони навчилися розв'язувати типові задачі, передбачені програмою. В нових підручниках і посібниках для учнів є навіть окремі добірки задач підвищеної трудності (більшість з них нешаблонні, нетипові задачі).

У цій книжці розглядається в основному методика розв'язування найважливіших типів задач, передбачених програмою з алгебри для загальноосвітніх восьмирічних шкіл.

Взаємно обернені задачі

Дві задачі на обчислення з однаковими змістом і числовими даними, невідоме в одній з яких є даним в другій, і, навпаки, дане в першій є невідомим в другій, називаються *взаємно оберненими*. Наведемо приклад.

1. Через перший кран бак наповнюється водою за 6 *год*, а через другий — за 8 *год*. Яка частина баку наповниться водою за 3 *год*, якщо відкрити обидва крани одночасно?
2. Через перший кран бак наповнюється водою за 6 *год*. За скільки годин наповниться бак через другий кран, якщо за 3 *год* через обидва крани, відкриті одночасно, наповниться $\frac{7}{8}$ частини бака?

Ці задачі взаємно обернені: зміст їх однаковий, а одне з даних у першій задачі (8 *год*) є невідомим у другій; навпаки, одне з даних у другій задачі $\left(\frac{7}{8}\right)$ є шуканим у першій.

Очевидно, до першої задачі можна скласти ще одну, обернену. Всі ці три попарно обернених одна одній задачі можна подати так.

Частини задач без числових даних	Числові дані задач		
	I	II	III
Через перший кран бак наповнюється за	6 *год*	6 *год*	x *год*
Через другий кран бак наповнюється за	8 *год*	x *год*	8 *год*
Через обидва крани за 3 *год* наповнюється	x ч. бака	$\frac{7}{8}$ ч. бака	$\frac{7}{8}$ ч. бака

Першу задачу доцільно розв'язувати арифметичним способом. За допомогою числової формули відразу записати її розв'язок:

$$x = 3\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right).$$

Другу задачу зручно розв'язувати за допомогою рівняння

$$\frac{7}{8} = 3\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{x}\right).$$

Деякі методисти пропонують розв'язувати одночасно взаємно обернені задачі. Так, якщо учні розв'яжуть одну задачу, вчитель повинен відразу ж запропонувати їм сформулювати й розв'язати обернену до неї. Це дає можливість перевірити правильність розв'язання першої задачі і зрозуміти суть обох задач. Вважаємо, що в школі тільки до найважливіших задач слід складати й розв'язувати обернені. Це насамперед стосується задач на доведення. Часто після розв'язування такої задачі доцільно з'ясувати, чи правильне обернене твердження.

Наприклад, після того як учні доведуть нерівність $c + \frac{1}{c} \geqslant 2$ $(c > 0)$, бажано поставити їм запитання: чи правильне обернене твердження?

Учні повинні сформулювати обидва твердження і записати їх схематично: 1) $(c > 0) \Rightarrow \left(\left(c + \frac{1}{c}\right) \geqslant 2\right)$; 2) $\left(\left(c + \frac{1}{c}\right) \geqslant 2\right) \Rightarrow (c > 0)$.

Р о з в ' я з а н н я. Якщо $c + \frac{1}{c} \geqslant 2$, то число c не буде від'ємним, бо сума двох від'ємних чисел не може бути більшою від 2 або дорівнювати 2. Число c не може також дорівнювати нулю, інакше вираз $\frac{1}{c}$ не мав би значення. Отже, нерівність $c + \frac{1}{c} \geqslant 2$ справедлива тільки при додатних значеннях c. Обернене твердження правильне.

Ще один приклад. Коли учні розв'язують квадратні рівняння з числовими коефіцієнтами, наприклад рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ (воно має корені 2 і 3), бажано запропонувати їм розв'язати хоч одну-дві з обернених задач:

1. При якому значенні p один з коренів рівняння $x^2 - px + 6 = 0$ дорівнює 2?
2. При якому значенні p один з коренів рівняння $x^2 - px + 6 = 0$ дорівнює 3?
3. При якому значенні q один з коренів рівняння $x^2 - 5x + q = 0$ дорівнює 2?
4. При якому значенні q один з коренів рівняння $x^2 - 5x + q = 0$ дорівнює 3?
5. При яких значеннях p і q рівняння $x^2 - px + q = 0$ має корені 2 і 3?

Отже, ми вважаємо, що розв'язувати таким способом усі задачі, які розглядаються в школі, не слід; тільки в окремих випадках бажано відразу ж після розв'язання даної задачі сформулювати одну або кілька обернених до неї і розв'язати їх.

Часто вважають, що розв'язування оберненої задачі є одним з кращих способів перевірки розв'язання даної. Звичайно, розв'язання оберненої задачі можна використати як контроль правильності знайденої відповіді, але вважати такий спосіб перевірки найкращим не можна, оскільки така перевірка буває дуже громіздка (часто обернену задачу важче розв'язати, ніж дану), а в окремих випадках і недостатня. (Більш докладно про перевірку розв'язань сказано на стор. 39).

Види задач на складання рівнянь

Розглянемо найважливіші види алгебраїчних задач, що розв'язуються складанням рівнянь. Особливо детально це питання досліджував О. М. Барсуков [3]. Він прийшов до висновку, що найкраще класифікувати такі задачі за видами рівнянь, і запропонував поділити їх на два цикли.

Пропедевтичний цикл складається з восьми груп задач:

1. Прості задачі на залежність між компонентами.
2. Комбіновані задачі на залежність між компонентами.
3. Задачі на кратне відношення і на пропорційне ділення, на різницеве і кратне відношення.
4. Задачі на площі.
5. Задачі на проценти.
6. Задачі на знаходження числа за його частиною.
7. Задачі на дії з дробами.
8. Задачі на пропорції.

Основний цикл складається з семи груп задач, розв'язування яких зводяться до таких видів рівнянь:

1. $ax + b = x$.
2. $ax + b = cx + d$.
3. $ax + b = m(cx + d)$ і $ax + b = (cx + d) + r$.
4. $ax + b = m(c(s - x) + d)$.
5. $ax + b(s - x) = c$.
6. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$; $\frac{1}{a} + \frac{1}{x} = \frac{1}{b}$ і т. д.

7. Дробові рівняння з многочленними знаменниками.

За цією класифікацією ту саму задачу можна віднести до двох або навіть до трьох різних груп залежно від того: 1) яку величину взято за основне невідоме; 2) що являють собою права і ліва частини рівняння; 3) яким способом розв'язується рівняння [3, 230].

Зрозуміло, що така класифікація з логічного і методичного боку невдала.

Проте це не означає, що ми повністю заперечуємо доцільність поділу задач за видами рівнянь. Ні, систематизуючи задачі, треба мати на увазі різні основи поділу, насамперед вид рівняння. Слід розрізняти задачі, що зводяться: 1) до лінійних рівнянь; 2) до квадратних рівнянь. У кожній з цих груп бажано, в свою чергу, виділити два види задач залежно від того, чи можна розв'язати їх за допомогою системи рівнянь. Такий поділ відповідає шкільній програмі.

Дискусійним є також питання про доцільність поділу задач за їх тематикою (на рух, роботу тощо). До речі, такий поділ і досі поширений в школі. Розв'язування задач на складання рівнянь тісно пов'язане з вивченням різних конкретних залежностей між величинами. Звичайно, є задачі, в яких йдеться про яку-небудь одну величину або про абстрактні числа. Але в переважній більшості задач на складання рівнянь йдеться про різні величини: час, швидкість, відстань, вагу, ціну, вартість, температуру та ін. Зрозуміло, щоб розв'язувати задачі з такими величинами, треба знати, які залежності можуть бути між цими величинами. Ці залежності не завжди відомі учням. Залежність між часом, швидкістю і відстанню або об'ємом, густиною і масою учні, взагалі кажучи, засвоюють важко. Отже, більшість з них не може впевнено розв'язувати й відповідні задачі на складання рівнянь.

Можна було б і не пропонувати учням задач з невідомими їм залежностями між величинами, але це не вихід із становища. Ознайомити учнів з такими залежностями — одне із завдань розв'язування задач в школі. Отже, плануючи ту чи іншу систему задач для учнів, треба врахувати не тільки види рівнянь, а й залежності між величинами, які доведеться повторити або вивчити. Задачі бажано розв'язувати групами (на рух, роботу, сплави тощо), щоб учні краще ознайомлювалися з різними видами залежностей між величинами.

Текстові задачі на складання рівнянь залежно від кількості величин поділяються на три групи:

1. задачі з абстрактними числовими даними;
2. задачі з однойменними значеннями величин;
3. задачі з різнойменними значеннями величин.

Перші дві групи відрізняються мало, тому їх можна об'єднати і назвати, наприклад, задачами без різнойменних величин. Саме такого поділу ми додержуємося далі; всі текстові задачі на складання рівнянь поділяємо на дві групи: 1) задачі без різноіменних величин і 2) задачі з різнойменними величинами. Кожну з цих груп в свою чергу можна поділити на види. Їх розглянемо в третьому розділі.

2. Розв'язування алгебраїчних задач

Розв'язування, розв'язки і розв'язання задач

Розв'язати задачу — це означає виконати те, що вимагається в ній: обчислити, побудувати, дослідити чи довести. В результаті розв'язування задачі на доведення дістають не розв'язок, а підтвердження сформульованого в ній твердження.

Не слід плутати розв'язок, розв'язування і розв'язання. Це різні поняття. *Розв'язування* — це процес міркувань, спрямований на досягнення поставленої в задачі мети. Для розв'язування як для процесу характерні: час, протягом якого воно відбувається, темп, активність учнів тощо. Наприклад, кажуть «під час розв'язування задачі», «на розв'язування задачі пішло 20 *хв*» та ін.

Розв'язком задачі називається той об'єкт, який треба визначити в задачі. Розв'язок задачі на обчислення — це деяке число. Розв'язками задач на побудову (створення), можуть бути різні діаграми, графіки, вирази, таблиці, функції, рівняння тощо. Наприклад, задача «Скласти рівняння, корені якого дорівнюють 1 і 2» має такий розв'язок: $(x-1)(x-2)=0$. Рівняння $\lg x \cdot \lg \frac{x}{2}=0$ також можна вважати розв'язком цієї задачі. Взагалі вона має безліч різних розв'язків.

Деякі задачі на обчислення і побудову не мають розв'язків. У цих випадках не слід говорити, що задачу не можна розв'язати. Якщо доведено, що задача не має розв'язку, то цим самим її вже розв'язано; у відповіді треба писати: «Задача не має розв'язків».

Іноді розв'язок ототожнюють з відповіддю. Це не зовсім правильно. Розв'язок і відповідь задачі — різні речі. Наприклад, до кожної задачі на обчислення дають одну відповідь, хоч розв'язків вона має кілька.

Якщо у відповіді два, три або більше чисел, то це не означає, що й задача відповідно має два, три або більше розв'язків. Справа в тому, що часто в одній відповіді містяться розв'язки кількох задач, об'єднаних однією умовою. Наприклад, до задачі, сформульованої на стор. 203, дано таку відповідь: «Швидкість велосипедиста на підйомі 12 *км/год*, на спуску 18 *км/год*, довжина підйому від *A* до *B* 24 *км*». Тут маємо три числа, а задача має один розв'язок.

Нерідко трапляється, що розв'язок тієї самої задачі можна подати з різним ступенем закінченості: у вигляді деякого числового виразу (причому обчислення цього виразу не завжди практично здійсненне), у вигляді виразу, числове значення якого можна порівняно легко визначити, або у вигляді числа, точного чи наближеного.

У таких випадках, крім формулювання задачі, учням бажано повідомити, в якій формі і з яким ступенем закінченості вони повинні дати відповідь до задачі.

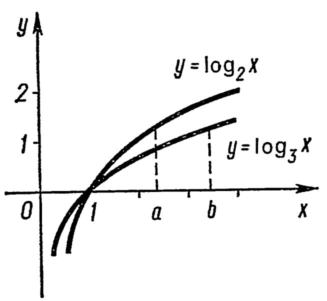
Розв'язання задачі — це ланцюг тверджень, перетворень, обчислень, який дістаємо в процесі її розв'язування. Розв'язання може бути раціональне, правильне і нераціональне, неправильне, аналітичне, графічне тощо. Якщо розв'язування — процес (в психології йдеться в основному про розв'язування), то розв'язання— логічна форма. Коли кажуть про різні розв'язання, то мають на увазі не різні процеси чи відповіді, а різні зв'язки, логічні форми.

Розв'язання будь-якої задачі має таку структуру:

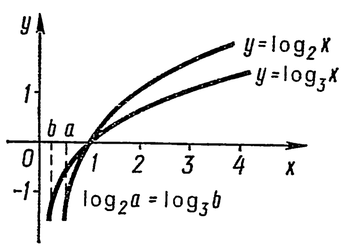
$$P \Rightarrow P_1,\ P_1 \Rightarrow P_2, \ldots,\ P_{n-1} \Rightarrow P_n,\ P_n \Rightarrow Q.$$

Яким повинно бути розв'язання задачі

Розв'язання кожної математичної задачі обов'язково має бути безпомилковим, обгрунтованим і повним. Бажано також, щоб воно було раціональним і добре оформленим. Повним вважається розв'язання, в якому вказано всі розв'язки, розглянуто всі можливі випадки, співвідношення між даними значеннями величин та ін. Якщо задача має кілька розв'язків, а учень знайде лише один, то розв'язання буде неповним.



Мал. 1.



Мал. 2.

Особливо часто учні пропонують неповні розв'язання задач на дослідження.

Розглянемо, наприклад, задачу 1502, а з посібника [14, 125]. Яке число більше, a чи b, якщо $\log_2 a = \log_3 b$?

Розв'язуючи цю задачу, учні часто розглядають тільки ті випадки, коли вирази $\log_2 a$ і $\log_3 b$ додатні (мал. 1) і тому дістають відповідь: $b > a$. Таку відповідь подано і в посібнику.

Це розв'язання неповне. З мал. 2 видно, що коли $\log_2 a$ і $\log_3 b$ від'ємні, то $a > b$. Дана рівність правильна й тоді, коли $a = b = 1$.

До такого висновку можна прийти й іншим шляхом.

Нехай $\log_2 a = \log_3 b = m$, тоді $2^m = a$, $3^m = b$.

Якщо $m > 0$, то $b > a$,
—»— $m = 0$, то $b = a$,
—»— $m < 0$, то $b < a$.

Повна відповідь: $b > a > 1$, або $b = a = 1$, або $0 < b < a < 1$.

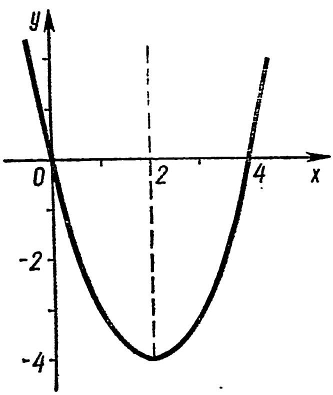
Розв'язання задач треба обгрунтовувати. Якщо учень знайде розв'язок, але не обгрунтує його, то не можна вважати, що задачу розв'язано. Розглянемо таку задачу.

При якому значенні x значення функції $f(x) = x^2 - 4x$ найменше?

Часто цю задачу розв'язують так: складають таблицю значень даної функції для кількох (цілих) значень x

x	—1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	0	—3	—4	—3	0	5

і роблять висновок, що ця функція має найменше значення при $x = 2$. Знайдена відповідь правильна, але таке розв'язання не можна вважати задовільним: воно здійснене за допомогою неповної індукції. Учень розглянув кілька значень функції і зробив без будьяких додаткових міркувань загальний висновок. Це розв'язання необгрунтоване. Його можна було б вважати правильним, якби продовжити міркування, наприклад, так.



Мал. 3.

Покажемо, що при $x = 2$ значення даної функції справді найменше. Для цього порівняємо $f(2)$ із значенням $f(2 + \alpha)$, де $\alpha \neq 0$.

$$f(2+\alpha) - f(2) = (2+\alpha)^2 - 4(2 + \alpha) + 4 = \alpha^2.$$

При $\alpha \neq 0$ $\alpha^2 > 0$, отже, $f(2 + \alpha) > f(2)$. Звідси випливає, що значення функції $f(x)$ найменше при $x = 2$.

Можна міркувати й інакше:

$$f(x) = x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x - 2)^2 - 4.$$

Як бачимо, вираз $(x - 2)^2$ при всіх значеннях $x \neq 2$ додатний, а при $x = 2$ його значення дорівнює нулю, тобто найменше. Отже, і значення виразу $(x - 2)^2 - 4$ найменше при $x = 2$.

Цю задачу можна розв'язати й геометрично.

Функція $f(x) = x^2 - 4x$ квадратна, вона має нульові значення при $x = 0$ і $x = 4$. Її графік — парабола, яка перетинає вісь абсцис в точках 0 і 4 (мал. 3). Вітки параболи спрямовані вгору, а її вісь перпендикулярна до осі абсцис і перетинає її в точці $x = 2$. Така сама абсциса й вершини параболи. Отже, в точці $x = 2$ функція $f(x) = x^2 - 4x$ має найменше значення.

У старших класах середньої школи цю задачу найпростіше розв'язувати за допомогою похідної.

Взагалі питання про обгрунтованість розв'язання задачі відносне. Учитель в кожному конкретному випадку має вказати, яке обгрунтування достатнє, а яке не достатнє.

Під час пошуків способу розв'язування задачі не варто відразу вимагати від учнів обгрунтування кожного кроку. Якщо напрям міркувань правильний, деякі їх моменти можна лишити необгрунтованими, щоб не гальмувати процес розв'язування. Коли буде знайдено спосіб розв'язування, бажано, щоб учні довели те, що спочатку приймалось без доведення.

Кожну задачу можна розв'язати кількома способами. Деякі з них простіші, швидше приводять до мети; інші, навпаки, складні й нераціональні. Розглянемо таку задачу.

Доведіть, що число $11^{10} - 1$ ділиться на 10.

Деякі вчителі вважають її непосильною для учнів, бо мають на увазі розв'язання за допомогою формули бінома Ньютона (див. вказівку до задачі 1859 у посібнику [14, 273].

Проте цю задачу можуть розв'язати усно не тільки учні X класу, а й п'ятикласники.

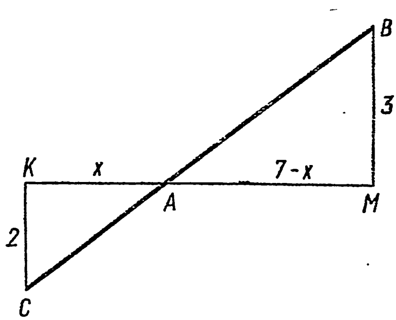
Розв'язання. Число 11^{10} закінчується цифрою 1, тому $11^{10} - 1$ закінчується цифрою 0, отже ділиться на 10.

Від нераціональних розв'язань слід відрізняти штучні — незагальні, але які для кожного конкретного випадку досить швидко приводять до мети.

Нехай, наприклад, треба визначити, при яких значеннях змінної x значення функції

$$y = \sqrt{(7 - x)^2 + 9} + \sqrt{x^2 + 4}$$

найменше.



Мал. 4.

Задачі такого типу звичайно розв'язують за допомогою похідної, але цю можна розв'язати й геометрично. Побудуємо відрізок: $|KM| = 7$. З його кінців проведемо перпендикуляри: $|KC| = 2$ і $|MB| = 3$ (мал. 4). На відрізку KM візьмемо деяку точку A. Нехай $|KA| = x$, тоді $y = \sqrt{(7 - x)^2 + 9} + \sqrt{x^2 + 4} = |CA| + |AB|$. Ця сума буде найменшою тоді, коли точки B, A і C лежатимуть на одній прямій, тобто коли трикутники BMA і CKA будуть подібні. В цьому випадку маємо $x : (7 - x) = 2 : 3$, звідки $x = 2{,}8$.

Ознайомлюючи учнів з найраціональнішими способами розв'язування задач, учителі повинні вимагати і від них по можливості раціональних розв'язань. Але, повторюємо, по можливості. Коли учень знайде не найкращий спосіб розв'язання, оцінку йому можна не знижувати. Якщо ж він у розв'язанні задачі передбаченого програмою типу виконає зайві обчислення або перетворення, які свідчать про неміцне засвоєння алгоритму розв'язання таких задач, треба оцінку знизити.

Способи і методи розв'язування задачі

Часто одна задача має кілька розв'язань. В таких випадках кажуть про різні способи її розв'язування. Відрізнятися ці способи можуть або деталями, або істотно. У першому випадку говорять про різні способи, в другому — про різні методи розв'язування задач. Розглянемо таку задачу.

Відстань між двома станціями 784 *км*. З цих станцій одночасно назустріч один одному вийшли два поїзди і зустрілися через 8 *год*. Знайдіть швидкість кожного поїзда, якщо швидкість першого на 10 *км/год* більша, ніж швидкість другого.

Перший спосіб.

1) На скільки кілометрів зближалися поїзди щогодини?

$$784 : 8 = 98\ (км).$$

2) На скільки кілометрів зближалися б поїзди щогодини, якби перший мав таку саму швидкість, як і другий?

$$98 - 10 = 88\ (км).$$

3) З якою швидкістю їхав другий поїзд?

$$88 : 2 = 44\ (км/год).$$

4) З якою швидкістю їхав перший поїзд?

$$44 + 10 = 54\ (км/год).$$

Другий спосіб.

1) На скільки кілометрів менше проїхав до зустрічі другий поїзд, ніж перший?

$$10 \cdot 8 = 80\ (км).$$

2) На скільки кілометрів зблизилися б поїзди за 8 *год*, якби перший мав таку саму швидкість, як і другий?

$$784 - 80 = 704\ (км).$$

3) Скільки кілометрів проїхав до зустрічі другий поїзд?

$$704 : 2 = 352\ (км).$$

4) З якою швидкістю їхав другий поїзд?

$$352 : 8 = 44\ (км/год).$$

5) З якою швидкістю їхав перший поїзд?

$$44 + 10 = 54 \quad (км/год).$$

Т р е т і й с п о с і б.

Нехай другий поїзд їхав із швидкістю x *км/год*, тоді швидкість першого становила $(x + 10)$ *км/год*. За 8 *год* вони проїхали відповідно $8x$ *км* і $8(x + 10)$ *км*. У задачі сказано, що сума цих відстаней дорівнює 784 *км*. Отже,

$$\begin{aligned}
&8x + 8(x + 10) = 784,\\
&8x + 8x + 80 = 784,\\
&16x = 704,\\
&x = 44,\ x + 10 = 54.
\end{aligned}$$

В і д п о в і д ь. 54 *км/год* і 44 *км/год*.

Ч е т в е р т и й с п о с і б.

Нехай перший поїзд їхав з швидкістю u *км/год*, а другий — з швидкістю v *км/год*. Тоді, згідно з умовою задачі, $u - v = 10$. За 8 *год* перший поїзд проїхав $8u$, а другий $8v$ *км*. Всього вони проїхали до зустрічі 784 *км*. Отже, $8u + 8v = 784$.

Розв'яжемо систему складених рівнянь.

$$\begin{cases} u - v = 10, \\ 8u + 8v = 784, \end{cases} \quad \left| \quad \begin{aligned} u - v &= 10,\\ u + v &= 98,\\ \hline 2u \quad &= 108, \end{aligned} \right.$$

$$u = 54, \quad v = 44.$$

В і д п о в і д ь. 54 *км/год*, 44 *км/год*.

Маємо чотири способи розв'язування задачі і два методи: арифметичний (1-й і 2-й способи) і алгебраїчний (3-й і 4-й). Є ще графічні методи розв'язування таких задач (див. стор. 27).

Довести, що при $c > 0$ справджується нерівність $c + \frac{1}{c} \geqslant 2$.

П е р ш и й с п о с і б. Відомо, що при $c > 0$ вираз $\left(\sqrt{c} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$ невід'ємний, тобто $\left(\sqrt{c} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \geqslant 0$, звідки $c - 2 + \frac{1}{c} \geqslant 0$, $c + \frac{1}{c} \geqslant 2$, що й треба було довести.

Д р у г и й с п о с і б.

$$(c - 1)^2 \geqslant 0,\ c^2 - 2c + 1 \geqslant 0,\ c^2 + 1 \geqslant 2c.$$

Поділивши обидві частини цієї нерівності на додатне число c, дістанемо $c + \frac{1}{c} \geqslant 2$.

Т р е т і й с п о с і б. Як відомо, середнє арифметичне двох додатних чисел не менше від їх середнього геометричного. Тому

$$\left(c + \frac{1}{c}\right) : 2 \geqslant \sqrt{c \cdot \frac{1}{c}}, \text{ звідки } c + \frac{1}{c} \geqslant 2.$$

Четвертий спосіб. Перетворимо різницю

$$\left(c+\frac{1}{c}\right)-2=\frac{c^2+1-2c}{c}=\frac{(c-1)^2}{c}\geqslant 0,$$

Тому $c+\frac{1}{c}\geqslant 2$.

П'ятий спосіб. Припустимо, що дана нерівність неправильна, тобто існує таке $c>0$, при якому $c+\frac{1}{c}<2$. Звідси випливає:

$$\frac{c^2+1-2c}{c}<0, \qquad \frac{(c-1)^2}{c}<0.$$

Остання нерівність не справджується при жодному додатному c. Отже, наше припущення неправильне: $c+\frac{1}{c}\geqslant 2$ при $c>0$.

Дану нерівність можна розв'язати й іншими способами. Якщо учні вже знають властивості тригонометричних функцій, вони можуть розв'язати задачу ще й так.

Яке б не було $c>0$, знайдеться таке α з проміжку $\left]0;\ \frac{\pi}{2}\right[$, що $c=\operatorname{tg}\alpha$. Тому

$$c+\frac{1}{c}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2}{\sin 2\alpha}\geqslant 2,$$

звідки і випливає нерівність, яку треба було довести. Її неважко довести й геометрично (див. стор. 26).

Як бачимо, алгебраїчні задачі на доведення можна розв'язувати різними способами, використовуючи при цьому ті самі методи, якими в шкільному курсі алгебри доводять теореми: аналітичний, синтетичний, від супротивного, повної індукції, математичної індукції тощо. Ці методи докладно описані в нашій книжці [4]. Спинимось на арифметичних і геометричних методах розв'язування задач.

Арифметичний метод

Арифметичні методи розв'язування багатьох текстових задач на обчислення, які зводяться до лінійних рівнянь з однією змінною, дуже нераціональні. Доцільніше такі задачі розв'язувати алгебраїчними методами. Років десять тому на сторінках журналу «Математика в школе» розгорнулася гостра дискусія з приводу методів розв'язування типових арифметичних задач. Одні автори вважали, що традиційні арифметичні методи розв'язування цих задач застарілі і дуже важкі для учнів. Інші, навпаки, відстоювали ці методи, мотивуючи це тим, що вони більш сприяють розвитку мислення учнів, ніж алгебраїчні. Проте переваги алгебраїчних методів розв'язування багатьох типових арифметичних задач настільки очевидні, а традиційні методи настільки нераціональні і важкі для учнів, що тепер ніхто не відстоює вимоги розв'язувати такі задачі тільки арифметично.

Розглянемо, наприклад, таку задачу.

Сума двох чисел дорівнює 180, $\frac{3}{4}$ першого числа дорівнюють $\frac{3}{5}$ другого. Знайти ці числа.

Ще не так давно цю задачу пропонували розв'язувати так («Математика в школе», 1953, № 3, стор. 31):

1) $\frac{3}{4}\mathrm{I} = \frac{3}{5}\mathrm{II}$

$\frac{1}{4}\mathrm{I} = \frac{3}{5} : 3 = \frac{1}{5}\mathrm{II}$

$\frac{4}{4}\mathrm{I} = \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5}\mathrm{II}$

II — 1 ч.

I — 1 ч. $\cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$ ч.

$1 + \frac{4}{5} = 1\frac{4}{5}$ (частини).

2) $180 : 1\frac{4}{5} = 100$ (II)

$100 \cdot \frac{4}{5} = 80$ (I)

Це розв'язання дуже невдале: по-перше, в ньому учень легко може сплутати тире із знаком мінус; по-друге, такі записи неправильні з математичного погляду: рівність $\frac{1}{4}\ \mathrm{I} = \frac{3}{5} : 3 = \frac{1}{5}\mathrm{II}$ не припустима, бо $\frac{1}{4}$ першого числа не дорівнює $\frac{3}{5} : 3$ і $\frac{1}{5}$ другого числа не дорівнює $\frac{3}{5}$: 3. Тепер цю задачу розв'язують за допомогою рівняння.

Розв'язання.

Позначимо перше число буквою x, тоді друге буде $180 - x$. Отже, $\frac{3}{4}x = \frac{3}{5}(180 - x)$ і т. д.

Алгебраїчні способи розв'язування задач цього типу досить чіткі і зрозумілі учням, які вже вміють розв'язувати лінійні рівняння з однією змінною. Те саме можна сказати і про більшість інших типів задач: на суміші, розчини, сплави, на рух, роботу тощо.

Проте із сказаного не випливає, що треба зовсім відмовитись від арифметичного методу розв'язування задач.

У VI—VIII класах основну увагу слід приділити алгебраїчним методам розв'язування задач, але іноді, хоч раз на місяць, доцільно зіставляти їх і з арифметичними. Не завжди алгебраїчні способи розв'язування задач простіші від арифметичних. Розглянемо, наприклад, таку задачу.

Певне двоцифрове число, помножене на суму його цифр, дає 814. Знайти це число, якщо цифра його десятків більша на 3 від цифри одиниць.

Звичайно, цю задачу розв'язують да допомогою двох рівнянь з двома змінними.

Позначивши цифру десятків шуканого числа буквою x, а цифру одиниць — буквою y, матимемо таку систему:

$$\begin{cases}(10x + y)(x + y) = 814, \\ x - y = 3.\end{cases}$$

Розв'язавши її, дістанемо: $x = 7$, $y = 4$. Отже, шукане число дорівнює 74.

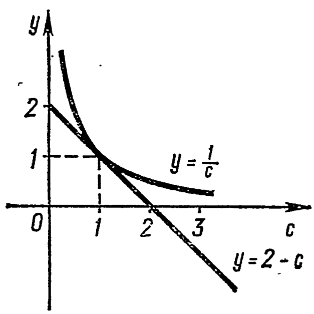
Наведений спосіб розв'язування цієї задачі найпоширеніший. Проте його не можна вважати найраціональнішим, оскільки складена система приводить до квадратного рівняння з великими коефіцієнтами, а на його розв'язування потрібно багато часу. Значно швидше цю задачу можна розв'язати так.

Нехай x — шукане число, а n — сума його цифр. Тоді $xn = 814 = 2 \cdot 11 \cdot 37$. Сума цифр двоцифрового числа не може бути більша за 18, а в даному випадку вона не може дорівнювати й 2. Отже, $n = 11$. Тоді шукане число $x = 2 \cdot 37 = 74$.

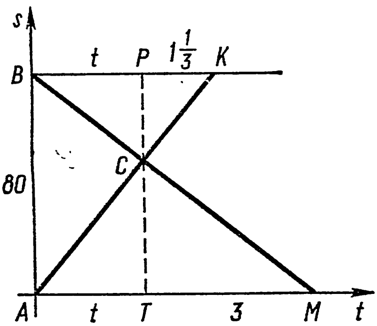
Цей спосіб можна вважати арифметичним: в його основу покладено розклад числа на множники і аналіз цих множників. В даному випадку він раціональніший від алгебраїчного, хоч і не загальний. Звичайно, в школі треба давати перевагу найзагальнішим способам розв'язування задач, але і таких штучних способів критикувати не треба. Учень, який знайде нешаблонний спосіб розв'язування задачі, заслуговує найвищої оцінки.

Графічний метод

Значну частину алгебраїчних задач можна розв'язувати також за допомогою різних графіків, схем, діаграм тощо. Наприклад, добре відомі графічні методи розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем. На стор. 20 дано графічне розв'язання задачі на визначення мінімуму функ-



Мал. 5.



Мал. 6.

ції $f(x) = x^2 - 4x$. Можна розв'язати графічно й деякі задачі на доведення. Доведемо, наприклад, уже розглянуту на стор. 23 нерівність $c + \frac{1}{c} \geqslant 2$ при $c > 0$.

Д о в е д е н н я. Запишемо цю нерівність інакше:

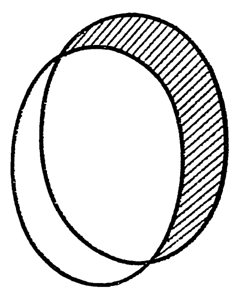
$$\frac{1}{c} \geqslant 2 - c$$

і побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{1}{c}$ і $y = 2 - c$ (мал. 5). Як бачимо, при $c = 1$ значення цих функцій рівні, а при кожному іншому c значення функції $y = \frac{1}{c}$ більше, ніж відповідне значення функції $y = 2 - c$. Отже, при всіх додатних c правильна нерівність $\frac{1}{c} \geqslant 2 - c$, або $c + \frac{1}{c} \geqslant 2$.

Багато текстових задач на складання рівнянь (на рух, роботу тощо) можна також розв'язувати за допомогою графіків. Наведемо приклад.

З A і B, відстань між якими 80 *км*, одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти. Один прибув у B через 1 *год* 20 *хв*, а другий в A через 3 *год* після зустрічі з першим. Скільки годин вони їхали до зустрічі?

Побудуємо прямокутну систему координат (мал. 6), на горизонтальній осі якої At відкладемо час у годинах, а на вертикальній As — відстань у кілометрах. На осі As виберемо точку B з ординатою 80 і проведемо через неї пряму, паралельну осі At. Нехай точці A і прямій At відповідає пункт A, з якого виїхав перший велосипедист (графіком його руху є відрізок AK), а точці B і прямій BK — пункт B, з якого виїхав другий велосипедист (графіком його руху є відрізок BM). Припустимо, що ці два графіки — відрізки AK і BM — перетнуться в точці C, яка має абсцису t, тобто $|AT| = |BP| = t$. Це означає, що до зустрічі велосипедисти були в дорозі по t *год*. За умовою задачі $|PK| = 1\frac{1}{3}$, а $|TM| = 3$. Таким чином, задача звелася до геометричної. Розв'яжемо її. Трикутники PCK і ACT, BCP і MCT попарно подібні, тому $|BP|:|TM| = |PC|:|CT| = |PK|:|AT|$, або $t : 3 = 1\frac{1}{3} : t$. Додатний корінь цього рівняння $x = 2$. Це означає, що зустріч велосипедистів відбулась через дві години після їх виїзду.


Мал. 7.

Графічне розв'язання задачі дещо громіздке, але не менш раціональне, ніж алгебраїчне.

Вище наводились приклади розв'язування задач з використанням прямокутної системи координат і графіків функцій, заданих у цій системі. У шкільну математику дедалі більше проникають також круги Ейлера, графи та інші схематичні зображення. Виявляється, їх також можна використовувати для розв'язування багатьох типів задач.

Частина жителів одного міста володіє тільки російською мовою, частина — тільки узбецькою, і частина знає обидві мови. Узбецькою мовою розмовляють 85% жителів, а російською — 75%. Скільки процентів жителів володіє обома мовами?

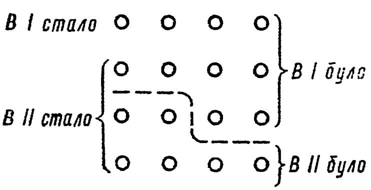
Описану в задачі ситуацію доцільно зобразити за допомогою кругів Ейлера (мал. 7). Оскільки російською мовою володіють тільки 75% жителів, то нею не володіють 25% усіх жителів (їм відповідає заштрихована частина діаграми). Узбецькою мовою володіють 85% жителів міста; частина з них — 25% усіх жителів міста — не знає російської, отже, інші 85% — 25 % = 60% володіють двома мовами.

В і д п о в і д ь. 60%.

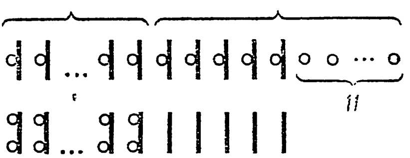
Задачу, в якій йдеться про величини, що можуть набувати тільки натуральних значень, іноді можна легко розв'язати, зобразивши схематично ті об'єкти, про які в ній іде мова.

У двох хлопчиків було 16 горіхів. Коли один з них віддав другому 6 горіхів, то у нього залишилося у три рази менше горіхів, ніж стало в другого. Скільки горіхів було у кожного хлопчика?

Цю задачу легко розв'язати, склавши систему рівнянь. Ще краще зобразити її схематично, наприклад, так, як показано на мал. 8. Розглянувши цей малюнок, можна відразу дати відповідь: 10 і 6.



Мал. 8.



Мал. 9.

Якщо всі учасники шкільної математичної олімпіади сядуть по одному за парту, то не вистачить 11 парт, а якщо по двоє, то залишиться 5 вільних парт. Скільки було учасників олімпіади і скільки парт?

Цю задачу можна ілюструвати схемою, поданою на мал. 9 (риска позначає парту, а кружечок — учня).

Якщо учень намалює цю схему, він відразу побачить, що 11 + + 5 — половина всіх учнів, які прийшли на олімпіаду. Тому всього на олімпіаду прийшло 32 учні. Якщо їх посадити по двоє за парту, то вони займуть 16 парт. Отже, в класі 21 парта.

Досі текстові задачі майже не розв'язувались графічно і взагалі дуже рідко використовувались різні схеми, діаграми тощо, оскільки традиційна методика вважала їх несерйозними, навіть шкідливими, протиставляла малюнки логічному мисленню учнів.

Тепер графіки, діаграми, схеми, графи досить поширені в різних галузях науки. Вважаємо, що з ними треба ознайомлювати учнів, так само як і з рівняннями. Слід звернути увагу, що в самому шкільному курсі математики схематичні малюнки використовуються дедалі частіше. Якщо в першій частині підручника алгебри А. П. Кисельова було всього 8 малюнків, у підручнику О. М. Барсукова — 86, то в нових підручниках з алгебри для VI—VIII класів їх близько 300. Можна сподіватися, що в майбутньому в наших шкільних підручниках схематичних малюнків буде ще більше.

3. Як навчати учнів розв'язувати задачі

Попередні зауваження

У цій книжці йтиметься в основному про те, як навчати учнів розв'язувати алгебраїчні задачі.

Звичайно, навчити кожного учня розв'язувати будь-яку математичну задачу неможливо, адже розв'язування більшості з них не має загальних алгоритмів. Проте для багатьох видів алгебраїчних задач такі алгоритми існують, і завдання вчителя — навчити учнів розв'язувати найважливіші з цих задач.

Розв'язування математичних задач становить для учнів значні труднощі. Іноді це пояснюють тим, що в методиці математики відповідні питання розроблені ще не досить повно. Та справа, мабуть, не в цьому. Математичні задачі, особливо нешаблонні, завжди даються учням важче, ніж питання теорії.

У методичній літературі основна увага звертається на розв'язування нешаблонних задач, оскільки вважається, що тільки вони розвивають мислення учнів. Але не слід забувати, що переважна більшість (понад 90%) задач, передбачених шкільною програмою,— це типові задачі. Тому вчитель насамперед повинен навчити учнів розв'язувати саме такі задачі.

Спинимось на методиці розв'язування найважливіших типових задач з алгебри.

Загальні правила розв'язування задач

Найповніший перелік загальних правил розв'язування задач будь-якого типу подано в таблиці з відомої книжки Д. Пойа «Як розв'язувати задачу» [27, 202[. Таку таблицю бажано мати в математичному кабінеті. Проте, навіть найкраще запам'ятовування її майже нічого не дасть учневі, який не вміє розв'язувати задач принаймні кількох найважливіших типів.

Крім загальних правил розв'язування задач будь-якого типу, є також правила й системи правил розв'язування окремих видів задач. Спинимось докладніше на загальних правилах розв'язування текстових задач на складання рівнянь.

Розглянемо систему таких загальних правил, вміщених в книжці [26, 19]:

1. З'ясуйте зміст тексту задачі і значення кожного слова. Пригадайте або прочитайте означення понять, що входять до умови задачі.
2. Встановіть об'єкт дослідження (спостереження).
3. Виявіть процеси, описані в задачі. Визначте, скільки їх, скільки доведеться проводити спостережень, вести записів.
4. Вкажіть величини, які характеризують кожен процес, позначте їх і поставте одиниці вимірювання (розмірність); з'ясуйте залежність між величинами і виразіть її формулою. Якщо формулу в загальному вигляді важко записати, запишіть її на окремих прикладах, а потім — у загальному вигляді.
5. Запишіть умову задачі в зрозумілій і доступній формі (для цього слід вибрати одну з невідомих величин і позначити її буквою);

скласти для кожного процесу задачі алгебраїчний вираз, який включає дані і невідомі (не забувати про вибрані одиниці вимірювання!), спростіть весь вираз.

6. Розмістіть записані алгебраїчні вирази в послідовності, зручній для обчислень і порівнянь, використовуючи для цього таблицю, графік, малюнок або текстове пояснення.

Ця система, в якій, до речі, є ще 7 правил, навряд чи буде корисною для учнів: вона нечітка, громіздка й малозрозуміла.

Деякі методисти пропонують загальне правило розв'язування задач, яке складається з чотирьох кроків: 1-й крок — аналіз задачі; 2-й крок — побудова граф-схеми (структурної моделі) задачі; 3-й крок — записування всіх співвідношень, що випливають з умови задачі, у вигляді системи рівнянь (на основі складеної граф-схеми); 4-й крок — «згортання» знайденої системи в одне рівняння (або безпосереднє розв'язування її).

Вважаємо, що ознайомлювати учнів з правилом, за яким треба виписати, у вигляді системи рівнянь, всі співвідношення, що випливають з умови задачі, а потім розв'язати систему, яка має велику кількість змінних, недоцільно.

В принципі ми не проти загальних правил, але вони мають бути лаконічними й чіткими, повністю відповідати рівню математичної підготовки учнів, на яких розраховані. Так, учням, які тільки починають розв'язувати задачі складанням рівнянь, буде корисним така система правил:

1. Добре з'ясуйте, що дано в задачі і що треба знайти.
2. Встановіть співвідношення між даними і шуканими величинами.
3. Позначте шукане[1] буквою.
4. Виразіть через цю букву значення інших величин.
5. Складіть рівняння і розв'яжіть його.
6. Запишіть відповідь до задачі.

Зміст цих рекомендацій спочатку слід розкрити на конкретних прикладах, і тільки тоді зробити потрібні узагальнення.

Умови задач та співвідношення між величинами, які входять до них, такі різні, що єдиного правила складання рівнянь бути не може. Отже, у навчанні учнів розв'язуванню задач складанням рівнянь найбільше значення мають не загальні правила, а добре продумана система тренувальних вправ.

Систематизація задач

Питанню систематизації математичних задач завжди приділялось багато уваги в нашій методичній літературі. Досить згадати праці О. М. Астряба «Принципи систематизації арифметичних задач» і О. М. Барсукова «Рівняння першого степеня». Звичайно, були й противники будь-якої систематизації (типізації) математичних задач, які

---

[1] Коли учні навчаться розв'язувати найпростіші задачі складанням рівнянь, слід показати їм, що інколи краще взяти за невідоме значення не шуканої змінної, а якоїсь іншої.

вважали, що коли учням пропонувати задачі, згруповані за певними типами, то їм не доведеться мислити, можна буде користуватися готовими шаблонами.

Безумовно, повертатись до методики розв'язування задач тих часів, коли занадто захоплювалися їх типізацією, не можна. Але й зовсім відкидати будь-яку систематизацію задач було б неправильно.

Добре навчати учнів можна, тільки працюючи за певною системою. Цього вимагає і принцип систематичності навчання. Якщо пропонувати їм задачі без будь-якої системи, таке навчання не сприятиме досягненню мети. Це не означає, що всі задачі треба згрупувати за якимись окремими типами і пропонувати учням спочатку одного типу, потім — другого і т. д. Говорячи про систематизацію задач, ми маємо на увазі таке: якщо вчитель ознайомлює учнів з якимось новим типом задач, він повинен спочатку дати їм кілька задач тільки цього типу. Коли учні засвоять особливості їх розв'язування, він може запропонувати задачі цього та інших типів.

Наприклад, учні вперше дізнаються про розклад многочленів на множники способом групування — цілий урок можна розв'язувати такі вправи саме цим способом. На наступному уроці, крім таких вправ, учитель пропонує й ускладнені (зокрема на доведення тотожностей, дослідження властивостей цілих чисел тощо), розв'язування яких зводиться до розкладу многочленів на множники. Ще приклад. Учитель вперше ознайомлює учнів з найпростішими задачами на розчини й сплави. Спочатку він розв'язує з ними кілька таких задач, а потім, коли учні оволодіють основними способами їх розв'язування, пропонує задачі й інших типів.

Звертаємо увагу вчителів на доцільність розв'язування підготовчих вправ. Наприклад, перед розв'язуванням задачі на складання рівнянь, бажано повторити з учнями, як можна записати (трьома способами), що: а) a менше від x на m; б) x більше від y втроє; в) половина c більша від n на 3 і т. д.

Перед розв'язуванням задач на знаходження цифр слід пригадати, як зобразити, наприклад, трицифрове число, що має a сотень, b десятків і c одиниць. Перед розв'язуванням задач на рух бажано з'ясувати залежність між швидкістю, часом, відстанню, виробити в учнів міцні навички швидко визначати потрібну залежність.

Розв'язуючи задачу на рух, роботу тощо, учень має: 1) з'ясувати залежність між шуканими й даними в задачі значеннями величин, 2) виконати обчислення. Звичайно друге завдання легше, бо перед тим, як розв'язати текстові задачі, учні розв'язують багато прикладів на обчислення. Із з'ясуванням залежності між величинами справа гірша. Тому, якщо ми хочемо, щоб учні добре розв'язували текстові задачі, треба давати їм більше задач на з'ясування залежності між величинами, особливо задач з найпростішими числовими даними, щоб виконання обчислень забирало якнайменше часу й енергії. Такі задачі можна розв'язувати й усно.

Наприклад, чотирикласникам для усного розв'язування доцільно запропонувати такі задачі:

1. Автобус рухається з швидкістю 60 *км/год*. Скільки кілометрів він проїде за 3 *год*?
2. Поїзд за півгодини пройшов 32 *км*. З якою швидкістю він рухався?

Такі задачі іноді слід пропонувати й учням V—VII класів, яким важко даються задачі на рух. Якщо на кожному уроці алгебри протягом тижня вони розв'язуватимуть усно по 10—15 таких поступово ускладнюваних задач, то для них не становитимуть непереборних труднощів і складніші задачі на рух.

Важливо вибрати оптимальну послідовність розв'язування задач (в класі і дома). Правда, тепер учителеві легше справитись з цим завданням: у навчальних посібниках майже всі задачі розміщено в окремих пунктах. Однак, це не означає, що він обов'язково повинен додержувати саме такої послідовності. Деякі задачі можна опустити, а замість них запропонувати задачі з інших посібників чи складені вчителем, до деяких задач можна повертатися кілька разів.

Радимо вчителям ще перед початком вивчення певного розділу визначити, які із вміщених у ньому задач найважливіші, а які менш важливі, які задачі обов'язково повинні вміти розв'язувати всі учні класу, а які не обов'язково. Вчитель має поставити собі таке завдання: добитися, щоб задачі семи-десяти типів під кінець навчального року вільно розв'язували всі учні класу. Наприклад, учителі шостих класів повинні добитися, щоб під кінець навчального року всі їх учні вміли:

1) подавати будь-який одночлен чи многочлен у стандартному вигляді;

2) розкладати найпростіші многочлени на множники;

3) будувати графіки функцій $y = ax$, $y = ax + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2$ і «читати» їх основні властивості;

4) розв'язувати лінійні рівняння і нерівності з однією змінною;

5) розв'язувати системи лінійних рівнянь з двома змінними;

6) розв'язувати текстові задачі на роботу і на рух.

Зрозуміло, що учні VI класу повинні розв'язувати також задачі багатьох інших типів. Але, повторюємо, не всі вміщені в посібниках для учнів задачі однаково важливі.

Усне розв'язування задач

Деякі вчителі пропонують учням вправи для усного розв'язування епізодично, тільки під час вивчення окремих розділів. Це неправильно. Під час вивчення всіх без винятку розділів шкільного курсу алгебри є можливість і потреба розв'язувати задачі усно. Не слід обмежуватись спеціальними «п'ятихвилинками», як це практикується на уроках арифметики. Звичайно, на окремих уроках можна планувати 5—7 *хв* на усне розв'язування задач, але і під час письмового розв'язування треба використовувати навички усних обчислень і перетворень. Буває так, що вчитель на «п'ятихвилинках» вимагає тільки усного розв'язування вправ, а вже через кілька хвилин, коли учень записує на дошці розв'язання такого, наприклад, рівняння

$$3x = 2\frac{1}{9}x + 4, \quad 27x - 19x = 36,$$

$$3x = \frac{19}{9}x + 4, \quad 8x = 36,$$

$$27x = 19x + 36, \quad x = 4\frac{1}{2},$$

він, на жаль, не робить ніяких зауважень, хоч більшість учнів могла б принаймні половину цих перетворень і обчислень виконати усно і записати розв'язання, наприклад, так:

$$3x = 2\frac{1}{9}x + 4, \ \frac{8}{9}x = 4, \ x = \frac{36}{8}, \ x = 4\frac{1}{2}.$$

Більшість вправ, які майже всі учні легко можуть розв'язати усно, порівняно важко запам'ятати. Наприклад, якщо учитель запропонує звести до стандартного вигляду якийсь досить громіздкий одночлен і не запише його на дошці, то не всі учні відразу його запам'ятають. У цьому разі трудність не в розв'язуванні, а в запам'ятанні завдання. Отже, більшість вправ для усного розв'язування бажано записувати на дошці, проектувати з діапроектора. Можна користуватися спеціально заготовленими таблицями. Наприклад, на переносній дошці вчитель може записати таку таблицю:

a	n	$2a+n$	$a+2n$	$2a^2n$	$3an^2+1$
5	3				
6	—1				
$\frac{2}{3}$	0				

а потім запропонувати усно обчислити (і записати в таблицю) значення чотирьох даних виразів при вказаних значеннях змінних.

У нових підручниках вправи для усного розв'язування не відмічені. Це не означає, що там немає таких вправ. Наприклад, у підручнику з алгебри для VI класу вправ, які більшість учнів може розв'язати усно, дуже багато. І залежно від того, як підготовлені учні класу, вчитель сам повинен вирішувати, як розв'язувати дану вправу — усно чи письмово. Але не треба обмежуватися підручником. Кожен учитель до багатьох тем може скласти скільки завгодно вправ для усного розв'язування. Немало таких вправ є і в посібниках [12], [15], [16], [21], [22], [23], [25].

Не обов'язково всі задачі, які є в шкільних підручниках з алгебри, розв'язувати повністю. Іноді доцільно записати тільки частину розв'язання. Так, коли вчитель бачить, що учні добре розв'язують рівняння, але відчувають труднощі під час їх складання за текстами задач, він може запропонувати їм вправи на складання рівнянь (без наступного визначення їх коренів). Іноді це доцільно робити усно. Наприклад, учитель пропонує учням прочитати задачу 65 з підручника з алгебри для VI класу і скласти за її умовою рівняння. Учень міркує так:

Нехай у першому цеху працює x робітників, тоді в другому — $x + 140$, а в третьому $1{,}2 \cdot (x + 140)$. Маємо рівняння (тільки тепер записує): $x + (x + 140) + 1{,}2 \cdot (x + 140) = 2740$. Так за порівняно короткий строк можна скласти рівняння до багатьох задач. Така форма роботи допомагає швидше навчити учнів розв'язувати задачі.

В якій послідовності пропонувати вправи для усних і письмових розв'язувань? Багато учителів вправи для усного розв'язування пропонують на початку вивчення теми, мотивуючи це тим, що спочатку треба розв'язувати легші, а потім — важчі вправи, а для усного розв'язування дають легші вправи. З цим не можна погодитись. Доцільнішою буває така послідовність. Коли вчитель розв'яже 2—3 вправи даного типу, бажано кілька вправ розв'язати всім класом, повністю записуючи розв'язання на дошці і в зошитах. Потім учні розв'яжуть (теж письмово) 2—3 такі вправи самостійно, і тільки після цього можна кілька найпростіших вправ розв'язати усно. Пізніше розв'язування складних вправ кожного типу можна чергувати: одні розв'язати колективно, інші самостійно, але й при цьому не треба нехтувати усним розв'язуванням.

Вивчення задачі Досі йшлося про розв'язування простих задач. Але учням доводиться розв'язувати й складні задачі. Розв'язування складної задачі слід починати з вивчення її умови, тобто з'ясування, що дано і що треба зробити. Це досить елементарна вимога, але, як показують спостереження, деякі вчителі часто порушують її. Економлячи час, вони починають розв'язувати задачу тоді, коли ще не всі учні засвоїли її зміст. Цьому сприяє і пропозиція окремих методистів читати задачу тільки один раз, бо, мовляв, якщо учні знають, що задача буде прочитана два-три рази, то вони до першого читання ставитимуться без потрібної уваги.

З цією пропозицією не можна погодитись. Звичайно, якщо учні неуважні, задачу читати не слід. Не бажано читати її і багато разів. Але задачу з двох речень треба прочитати два-три рази, не обов'язково підряд. Доцільно, перший раз прочитавши задачу, запропонувати кому-небудь з учнів повторити її, записати числові дані, а потім прочитати ще раз. Мета першого читання — ознайомити учнів із задачею у загальних рисах. Другий раз задачу доцільно читати частинами, одночасно записуючи числові дані. Іноді вже в процесі розв'язування можна ще разів два прочитати її. Прочитавши задачу навіть 2—3 рази, вчитель не може бути впевнений в тому, що всі учні зрозуміли її. Тому корисно запропонувати одному-двом учням повторити її текст або відповісти на запитання: що відомо? Що треба зробити?

Не обов'язково задачу має читати вчитель. Може прочитати її вголос один учень, а інший перекаже своїми словами. Можуть також усі учні самостійно прочитати задачу в підручнику і записати її скорочено в зошитах.

У підручниках з алгебри трапляються задачі з незрозумілими учням словами, невідомими залежностями, співвідношеннями. В таких випадках треба перед розв'язуванням задачі пояснити або повторити матеріал, пов'язаний з нею.

Краще зрозуміти задачу допомагає вдала графічна інтерпретація її — діаграма, графік, схема, таблиця тощо. В. О. Сухомлинський у праці «Сто порад учителеві» писав: «В другому й третьому класах мої діти завжди ділили зошит з арифметики на дві «смуги», ліва смуга — умова, права — наочне схематичне зображення задачі. Навчити малювати задачу, в цьому я вбачаю дуже важливе завдання розумового виховання, зокрема переходу від конкретного мислення до абстрактного. Діти спочатку малюють предмети (яблука, кошики, дерева, пташок і т. п.), потім беруться за схематичне зображення предметів, позначаючи їх квадратами, кружечками тощо. Особливо мене турбувало, як малюють задачу учні, що важко встигають... Якщо малюк навчився малювати задачі, я з певністю скажу, що він буде їх розв'язувати» («Радянська освіта», 1972, 12 січня).

Сказане стосується учнів молодших класів, але і в VI—VIII класах такі схематичні зображення задач бувають дуже корисними, бо дають можливість глибше проникнути в задачу, краще її зрозуміти. Оскільки учні VI—VIII класів мають справу не тільки з дискретними величинами, а й з неперервними, такими, як час, відстань, маса, температура тощо, слід розширити арсенал схематичних засобів зображення задач. Тут у пригоді стануть відрізкові чи стовпчикові діаграми, круги Ейлера. Умови задач, особливо таких, в яких йдеться про три величини, зручно зображати за допомогою таблиць або граф-схем. Зразки таких схематичних зображень задач є на стор. 180 та ін.

Добре вивчити задачу допомагає її аналіз. Спочатку бажано виділити умову задачі (що дано) і її вимогу (що треба зробити). Потім, якщо йдеться про складну задачу, слід розбити її умову на частини, щоб в кожній частині було тільки одне дане. Припустимо, учні мають розв'язати таку задачу.

З однієї ділянки зібрали 1440 *ц* пшениці, а з другої, площа якої була на 12 *га* менша, 1080 *ц*. Знайти площу кожної ділянки, якщо відомо, що з кожного гектара першої ділянки зібрали на 2 *ц* пшениці більше, ніж з кожного гектара другої.

Умову цієї задачі можна розбити на такі частини:

1) з першої ділянки зібрали 1440 *ц* пшениці;

2) з другої ділянки зібрали 1080 *ц* пшениці;

3) площа другої ділянки на 12 *га* менша від площі першої;

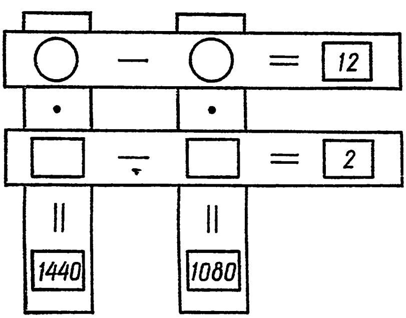
4) з 1 *га* першої ділянки зібрали на 2 *ц* більше, ніж з 1 *га* другої ділянки.

Якщо учень своїми словами приблизно так перекаже умову задачі і скаже, щó в ній треба визначити, можна вважати, що він добре зрозумів її зміст.

Складання плану розв'язування

Тільки тоді, коли учні добре зрозуміють задачу, можна перейти до складання плану її розв'язування. Основне на цьому етапі — встановити співвідношення між даними і шуканими значеннями величин, твердженнями тощо.

Співвідношення, про які явно або неявно говориться в задачі, найчастіше відповідають якимсь рівнянням, рідше — нерівностям, висловленням про подільність тощо. Оскільки виявлення співвідношень, що випливають з умови задачі,— найважливіший момент у складанні плану розв'язування, то слід докладніше розглянути різні види і особливості цих співвідношень.



Мал. 10.

Повернемося до наведеної задачі. Чотирьом частинам її умови відповідають чотири співвідношення. Правда, частини 3 і 4 явно виражають співвідношення порівняння: в них сказано, що від чого і на скільки більше. Ті ж співвідношення, які випливають з 1 і 2 частин умови задачі, явно не задані. Учень, прочитавши фразу «з першої ділянки зібрали 1440 *ц* пшениці», може не побачити в ній ніякого співвідношення. Насправді в цій частині умови задана залежність між площею першої ділянки і урожайністю на ній. Якщо позначити площі ділянок (в гектарах) буквами x і y, а урожайності на них (в центнерах з гектара) відповідно буквами m і n, то чотирьом частинам умови задачі відповідатимуть такі чотири рівняння:

$$mx = 1440, \quad ny = 1080, \quad x - y = 12, \quad m - n = 2.$$

Щоб краще зрозуміти структуру цієї задачі, подамо її у вигляді стрічкової діаграми (мал. 10). Кола відповідають шуканим невідомим, а квадрати — допоміжним. Кожне з чотирьох невідомих належить двом співвідношенням, тому на малюнку смуги попарно накладені одна на одну. Кожне з чотирьох рівнянь, що відповідають цим співвідношенням, невизначене. Кажуть, що всі ці співвідношення нерозв'язні. Якщо співвідношенню відповідає рівняння, що має один розв'язок, то перше називається розв'язним. Якщо в задачі є розв'язні співвідношення, то бажано спочатку використати їх. Проте в більшості задач на складання рівнянь, вміщених у шкільних підручниках і посібниках з алгебри, всі співвідношення нерозв'язні.

Зрозуміло, що учням не треба знати все це про співвідношення, які випливають з умов задач. Але вчителі повинні добре розібратися в цих питаннях, щоб чітко уявляти структуру кожної з тих задач, які вони пропонують учням. Навчаючи учнів розв'язувати задачі, треба вчити їх аналізувати кожну задачу і виявляти різні співвідношення, виражені явно або неявно в її умові.

Коли учні проаналізують задачу і виявлять усі співвідношення, що випливають з її умови, можна скласти план її розв'язування. Якщо задача розв'язується складанням рівняння з однією змінною, цей план може бути такий.

1) Позначимо площу першої ділянки буквою x.

2) Виразимо через x площу другої ділянки.

3) Виразимо через x урожайність на кожній ділянці.

4) Знаючи різницю цих урожайностей, складемо рівняння.

Звичайно, дуже добре, коли учні, розв'язуючи задачу, спочатку складуть такий план (усно), а потім складатимуть рівняння. Але не обов'язково кожного разу строго додержувати такої послідовності. Досвід показує, що часто учні вже при першому читанні задачі, не зрозумівши її до кінця, можуть правильно скласти одне рівняння. Не слід критикувати їх за поспішність.

Процес розв'язування більшості задач можна порівняти з прокладанням шляху в лабіринті. Цей шлях між шуканими і відомими об'єктами можна прокладати по-різному: або виходити від відомого і йти в напрямі до шуканого, або виходити від шуканого і йти в напрямі до відомого. Раніше ці два напрями міркувань називали синтетичним і аналітичним методами розв'язування задач. Проте в математиці ці терміни частіше використовують для інших понять. Наприклад, аналітичними здебільшого називаються методи розв'язування задач, характерні для аналітичної геометрії і математичного аналізу. Тому тепер ці терміни для позначення напрямів міркувань використовують рідко. Д. Пойа, який глибоко досліджував ці питання, говорить не про аналітичний і синтетичний методи розв'язування, а про роботу чи рух «від кінця до початку» і «від початку до кінця» [27, 152], [28, 197]. Проте замість слів «робота», «рух» краще вживати «міркування» і говорити: «міркування від кінця до початку» або «міркування від початку до кінця».

Який з цих двох напрямів міркування кращий? Все залежить від того, хто і яку саме задачу розв'язує. Коли учні розв'язують важку незнайому задачу, то бажано порадити їм випробувати обидва напрями міркувань.

Нерідко трапляється, що учень, випробувавши різні шляхи міркувань, так і не зможе розв'язати задачі. Йому на допомогу повинен прийти вчитель. Але допомогти учневі — це не означає за нього розв'язати задачу. Треба вказати йому шлях, яким можна розв'язати задачу, але не вести його цим шляхом. Іноді корисно навести аналогію, розглянути простішу задачу такого самого типу, уточнити яке-небудь співвідношення або ще раз прочитати потрібну частину задачі, наголошуючи окремі слова. В деяких випадках допомагають учням і невеличкі запитання, наприклад: «То який же поїзд їхав швидше?», «10% від чого?», «Чи може квадрат числа бути від'ємним?». Якщо така допомога виявиться недостатньою, можна підказати: «Візьміть за невідоме час», «Спробуйте розв'язати задачу графічно», «Тут найкраще міркувати методом від супротивного».

Нерідко учень не може розв'язати задачу, бо допустив якусь помилку. Наприклад, складаючи рівняння за умовою задачі, замість різниці двох виразів виду $A - B$ написав $B - A$ і тому прийшов до абсурдного висновку. В таких випадках бажано звернути увагу учня на цей момент: «Подумай, який з цих двох виразів повинен мати більше числове значення».

Взагалі, навчаючи учнів розв'язувати задачі, вчитель повинен у разі потреби допомагати їм різними зауваженнями, пропозиціями, запитаннями, а в окремих випадках — і прямими підказуваннями. При цьому важливо вдало вибрати форму і міру допомоги, вчасно допомогти учням.

Самостійне і колективне розв'язування задач

Як відомо, в школі учні розв'язують задачі або самостійно, або колективно. Майже на кожному уроці алгебри учитель дає їм задачі для самостійної домашньої роботи, а потім перевіряє, як вони справилися з цим завданням. Але самостійну роботу учнів слід організувати не тільки в домашніх умовах. Доцільно і на уроках час від часу пропонувати задачі для самостійного розв'язування. Завдання вчителя — добитися, щоб усі учні класу вміли самостійно розв'язувати задачі найважливіших типів. Щоб досягти цього, треба добре організувати колективну роботу в класі.

Розв'язувати задачу колективно не означає записувати її розв'язання на дошці. Іноді на дошці нічого не пишуть. Наприклад, після ознайомлення із задачею вчитель може запропонувати одному з учнів розповісти, як би він її розв'язував. Учень розповідає, а клас слухає і в разі потреби доповнює, уточнює, виправляє, пропонує інші способи. Це також один з видів колективного розв'язування задачі.

Можлива й інша форма колективного розв'язування задач у класі. Всі учні вивчають задачу і знаходять спосіб її розв'язування. Потім один учень записує розв'язання на дошці, а решта стежить і виправляє помилки. Дошку витирають або завішують. Учитель пропонує всім учням відтворити розв'язання задачі в своїх зошитах. Таке поєднання колективної і самостійної роботи дуже корисне, але, на жаль, воно потребує багато часу.

Буває ще й так: учні починають розв'язувати задачу колективно, а закінчує її кожен учень самостійно. Після цього вчитель викликає до дошки одного з учнів і пропонує йому підвести підсумок чи зробити перевірку.

Під час закріплення вивченого матеріалу доцільно більше уваги приділяти самостійній роботі учнів. Якщо ж учитель пропонує задачу, щоб проілюструвати нею якийсь новий алгоритм, теорему, метод, тоді краще розв'язувати її колективно.

Слід зважити і на трудність задачі. Звичайно для самостійної роботи варто пропонувати не досить складні задачі, легші від розв'язаних колективно. Особливо це стосується контрольних робіт і тих самостійних, які вчитель оцінюватиме.

Робота над задачею після її розв'язування

Іноді доцільно попрацювати над задачею і після її розв'язування: перевірити, чи задовольняє знайдений розв'язок умову задачі, скласти і розв'язати задачу, обернену до даної, або знайти інший спосіб розв'язування та ін.

Розрізняють повну перевірку (показують, що знайдений розв'язок задовольняє всі частини умови задачі) і неповну (контроль, перевіряють відповідність знайденого розв'язку тільки деяким частинам умови задачі). Безумовно, неповна перевірка не дає такої впевненості в правильності розв'язку, як повна. Але іноді, коли повну перевірку виконати важко, роблять неповну. Розглянемо приклад.

Спростіть вираз $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{a+b}{a-b}$.

Якщо учень, розв'язавши вправу, дістане у відповіді вираз $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, проконтролювати її він може так.

При $b = 0$ і $a \neq 0$ даний вираз і знайдений мають однакові значення. При $b = 1$, $a = 4$ і даний вираз має значення $\frac{1}{3}$. Стже, можна сподіватись, що знайдена відповідь правильна.

Зрозуміло, що це — неповна перевірка. Саме тому деякі вчителі вважають недоцільним ознайомлювати учнів з таким способом контролю, бо, мовляв, після цього вони вважатимуть перевіркою розв'язків нерівності підстановку в неї одного-двох значень змінної і т. ін. Однак ми не можемо погодитися з таким аргументом. Досвід показує, що учні найчастіше допускають такі помилки саме тоді, коли вчитель у свій час не пояснив, чим відрізняється повна перевірка від контролю. Учням слід розповісти про різні способи перевірки і контролю розв'язків задач. Зокрема, треба показати, що іноді навіть повна перевірка не дає права стверджувати, що задачу розв'язано правильно, бо може трапитись, що в розв'язанні допущено кілька помилок, які нейтралізують одна одну. Бувають і такі помилки, які не впливають на розв'язок. Отже, розв'язок може бути правильний, а розв'язання — неправильне.

Чи завжди учні повинні робити перевірку?

Розв'язуючи дробові, ірраціональні, показникові та логарифмічні рівняння, іноді доводиться заміняти їх іншими, не рівносильними даним. У цьому випадку перевірка обов'язкова: вона є складовою частиною розв'язання. Іноді замість такої перевірки пропонують робити попереднє дослідження області допустимих значень. Проте таке дослідження не може замінити перевірку (див. стор. 110).

Перевірка необов'язкова, якщо її роблять з метою переконатися, що в процесі обчислень не було допущено помилок. В такому разі вчитель повинен попередити учнів, чи робити її, чи ні.

Після перевірки роботу над задачею можна продовжити.

Насамперед слід з'ясувати, як учні зрозуміли і засвоїли розв'язання. Спостереження показують, що засвоєння учнями теоретичного матеріалу вчителі контролюють досить часто, а проконтролювати, чи засвоїли вони розв'язання якогось типу задач, забувають.

Іноді доцільно запропонувати учням знайти інші способи розв'язування задачі, зіставити їх, визначити найраціональніший. У цьому разі вчитель, готуючись до уроку, повинен добре продумати різні способи розв'язування запланованих задач і виділити з них основний, тобто такий, що найбільше відповідає опрацьовуваній на даному уроці темі, найхарактерніший для того алгоритму, з яким він запланував ознайомити учнів. Не обов'язково розглядати на одному уроці всі способи розв'язування задачі. Деякі з них можна розглянути під час вивчення інших тем, на спеціальному уроці для розв'язування задач або на заняттях математичного гуртка.

Якщо учитель вважає за потрібне ознайомити учнів з кількома способами розв'язування якоїсь задачі, то зробити це варто порізному. Наприклад, можна колективно розв'язати задачу одним способом і запропонувати учням інші способи знайти самостійно (в класі або дома). Можна також після усного розгляду кількох планів розв'язування задачі викликати до дошки двох учнів: один розв'язує задачу одним способом, другий — іншим. У зошитах учні розв'язують задачу тим способом, який їм найбільше подобається. Зауважимо, однак, що цю роботу треба проводити з почуттям міри. В наступних розділах цієї книжки пропонуються різні способи розв'язування окремих задач, але це не означає, що всі ці способи слід пояснити учням.

Бажано іноді, розв'язавши задачу, розглянути характерні властивості задач цього типу, порівняти їх з іншими тощо. Після розв'язування текстової задачі на обчислення доцільно поставити запитання: які ще значення величин можна знайти? Як це зробити? Якщо в задачі замість певного числового значення було інше, чи мала б вона розв'язки? Скільки?

У деяких випадках варто сформулювати задачу, обернену до розв'язаної, і запропонувати розв'язати її або зробити узагальнення. Наприклад, коли учні доведуть, що середнє арифметичне двох додатних чисел не менше від їх середнього геометричного, можна, принаймні сильнішим, запропонувати дослідити, чи справедлива аналогічна властивість для чотирьох додатних чисел. А для восьми? Задачі на дослідження створюють проблемні ситуації і активізують учнів.

Оформлення розв'язань

Питання про оформлення розв'язань задач для вчителя математики досить важливе. Вдалі форми запису допомагають учням краще зрозуміти задачу, привчають їх до акуратності, точності. Добре оформлення варте уваги і з погляду естетичного виховання учнів. Акуратно оформлену і чітко скомпоновану роботу легко читати і виправляти. Але щоб добитися цього, вчитель повинен систематично перевіряти записи учнів на дошці і в зошитах.

Зробимо спочатку кілька зауважень щодо оформлення розв'язань задач в учнівських зошитах.

Переписувати задачу з шкільного підручника не слід. Досить відмітити її номер і коротко записати, що дано і що треба виконати. Задачу, взяту з якогось посібника чи складену учнями, треба повністю переписати в зошит.

Оформлення розв'язання задачі доцільно почати із заголовка «Розв'язання». Розв'язання можна записати і з поясненнями, і без них. Пояснення здебільшого мають бути короткими. Іноді вчитель може запропонувати учням докладно пояснити розв'язання.

Не обов'язково, щоб розв'язання задачі на складання рівняння мало заголовки «Позначення шуканих величин», «Складання рівняння», «Розв'язування рівняння» та ін.

Відповідь бажано виділяти: або писати її після слова «Відповідь», або підкреслювати. Розв'язання задачі треба оформляти так, щоб було видно, де його початок, а де кінець.

У зошитах обов'язково мають бути поля, абзаци. Всі записи, в тому числі і розв'язання задач, повинні відповідати вимогам мовного режиму. Учні мають додержувати таких загальноприйнятих правил:

а) кожний запис у зошиті повинен бути зрозумілим і зручним для огляду і читання;

б) порівняно довгі формули і співвідношення треба виносити в окремі рядки;

в) не можна писати математичні символи $+$, $-$, $:$, $\%$, $=$, $>$, $<$ тощо між словами, наприклад: «Ліва сторона = правій», «На скільки % зросла продуктивність». Не можна допускати і таких записів: «20 на $5 > 15$», «$\frac{3}{5}$ від $15 = 9$»;

г) під час розв'язування текстових задач з величинами треба додержувати загальноприйнятих скорочень: *г*, *кг*, *ц*, *т*, *м*, *см*, *дм*, *мм*, *км*, *а*, *га*, *л*, *дл*, *кв. м*, *кв.см*, *куб.м*, *куб.дм*, $м^2$, $см^3$, *сек*, *хв*, *год*, *міс*, крб., коп.

У рівняннях, складених за умовами задач, найменувань ставити не треба.

Бажано широко використовувати математичні символи, зокрема такі:

$\in$, $\notin$ — належить, не належить;
$\varnothing$ — порожня множина;
$\subset$ — підмножина;
$\cap$, $\cup$ — перетин і об'єднання множин;
$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ — випливає і рівносильно;
$]a;\ b[$ — множина всіх таких чисел x, що $a < x < b$,
$[a;\ b[$ — » » » » $a \leqslant x < b$,
$[a;\ b]$ — » » » » $a \leqslant x \leqslant b$.

Оформлення екзаменаційних робіт

До оформлення екзаменаційних робіт з алгебри не ставляться якісь ссобливі вимоги. Проте, окремі вчителі розробляють спеціальні трафарети для оформлення цих робіт, диктують їх учням, примушують запам'ятовувати. Цього робити не слід.

Пояснювальний текст до розв'язання задачі має бути коротким.

Тотожні перетворення виразів можна не пояснювати.

Перевірку робити тоді, коли вона є складовою частиною розв'язання задачі або коли пропонується виконати її в тексті завдання.

Наведемо зразок оформлення екзаменаційної (контрольної) роботи з алгебри в VI класі.

1. Задача. В одному резервуарі 470 *л* води, а в другому — 240 *л*. З першого резервуара викачують за годину в 3 рази більше води, ніж з другого. Через 5 *год* у першому резервуарі залишиться на 20 *л* менше води, ніж у другому. Скільки літрів води викачують за годину з кожного резервуара?

Розв'язання. Припустимо, що з другого резервуара щогодини викачують по x *л* води, тоді з першого — по $3x$ *л*.

Через 5 *год* з першого викачають $15x$ *л*, а з другого $5x$ *л*. Отже, в першому резервуарі через 5 *год* залишиться $(470 - 15x)$ *л*, а в другому $(240 - 5x)$ *л*.

У задачі сказано, що через 5 *год* у першому резервуарі залишиться на 20 *л* менше, ніж у другому. Тому $(470 - 15x) - (240 - 5x) = 20$, $470 - 15x - 240 + 5x = 20$, $210 = 10x$, $x = 21$, тоді $3x = 63$.

Відповідь. З першого резервуара за годину викачують 63 *л*, а з другого 21 *л*.

Перевірка. $63 \cdot 5 = 315$, $21 \cdot 5 = 105$, $470 - 315 = 155$, $240 - 105 = 135$, $155 - 135 = 20$.

2. Знайдіть значення виразу $(5a+6)(6a+4)-(4a+7)^2-$ $-(3a-5)(3a+5)$ при $a = 1\frac{3}{5}$.

Р о з в'я з а н н я. $(5a+6)(6a+4)-(4a+7)^2-(3a-$ $-5)(3a+5) = 30a^2+20a+36a+24-16a^2-56a-49-$ $-9a^2+25 = 5a^2$.

Якщо $a = -1\frac{3}{5}$, то $5a^2 = 5.\left(-1\frac{3}{5}\right)^2 = 5.\left(-\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{5} =$ $= 12\frac{4}{5}$.

В і д п о в і д ь. $12\frac{4}{5}$ — шукане значення виразу.

3. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

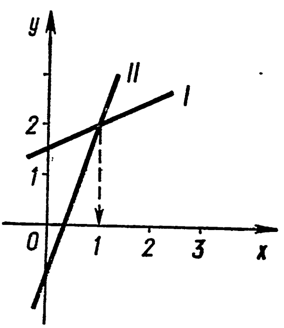
$$\begin{cases} x = 2y-3, \\ 3x-y = 1. \end{cases}$$

Р о з в 'я з а н н я. Запишемо дану систему так:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2}+\frac{3}{2}, \\ y = 3x-1. \end{cases}$$

Побудуємо графіки двох цих рівнянь на одній координатній площині (мал.11). Як бачимо, ці графіки перетинаються в точці, абсциса і ордината якої дорівнюють відповідно 1 і 2. Щоб переконатися, чи це точні значення змінних x і y, чи тільки наближені, зробимо перевірку.

$1 = 2 \cdot 2 - 3$ — рівність правильна,
$3 \cdot 1 - 2 = 1$ — рівність правильна.
В і д п о в і д ь. $x = 1$, $y = 2$.



Мал. 11.

Наводимо ще зразок оформлення роботи з алгебри (VIII клас).

1. Сума трьох чисел, які становлять арифметичну прогресію, дорівнює 30. Якщо від другого члена цієї прогресії відняти 2, а інші залишити без зміни, то утвориться геометрична прогресія. Знайти ці числа.

Р о з в'я з а н н я. Три дані числа, які становлять арифметичну прогресію, позначимо так:

$$a,\ a+d,\ a+2d.$$

Оскільки їх сума дорівнює 30, маємо рівняння:

$$a+a+d+a+2d = 30, \text{ або } a+d = 10.$$

Отже, дані числа можна записати так: a, 10, $20-a$. За умовою задачі числа a, 8, $20-a$ становлять геометричну прогресію, тому

$$\frac{20-a}{8}=\frac{8}{a}, \text{ або } a^2-20a+64=0,$$

звідки $a_1=4$, $a_2=16$.

Відповідь. 4, 10, 16, або 16, 10, 4.

2. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}\right)\cdot\frac{ab^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{5}{6}}}{2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}.$$

Розв'язання:

$$\frac{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}=\frac{\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)^2}{\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)}=$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}.$$

Тому даний вираз можна записати так:

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{ab^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{5}{6}}}{2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}=$$

$$=\frac{b^{\frac{1}{6}}\left(2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)\left(ab^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{5}{6}}\right)}{\left(2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)}=\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}.$$

Відповідь: $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$.

8. Розв'яжіть нерівність $\lg(x+2)+\lg(27-x)<2$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку область визначення лівої частини нерівності:

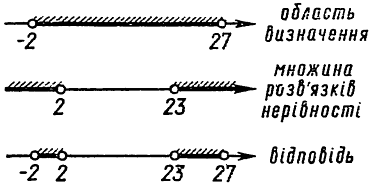
$$\begin{cases} x+2>0, \\ 27-x>0, \end{cases} \left|\begin{matrix} x>-2, \\ x<27, \end{matrix}\right| \Rightarrow]-2;\ 27[.$$

При таких значеннях x дана нерівність рівносильна нерівності

$$\lg((x+2)(27-x)) < \lg 100, \quad (*)$$

або

$$(x+2)(27-x) < 100,$$
$$x^2 - 25x + 46 > 0.$$



Мал. 12.

Корені останнього тричлена: 2 і 23. Отже, $]-\infty; 2[\cup]23; +\infty[$ — множина розв'язків нерівності (*). Враховуючи область визначення лівої частини даної нерівності, дістанемо таку множину її розв'язків: $]-2; 2[\cup]23; 27[$ (мал. 12).

II. ВИРАЗИ, ФУНКЦІЇ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

1. Тотожне перетворення виразів

Перетворення виразів в IV—V класах

Важливим показником рівня математичної підготовки учнів є їх уміння безпомилково, швидко й раціонально виконувати найважливіші тотожні перетворення алгебраїчних виразів. Щоб виробити в учнів відповідні навички, треба розв'язувати з ними багато різних тренувальних вправ і задач, насамперед на перетворення цілих виразів із змінними.

З найпростішими вправами на перетворення цілих виразів учні ознайомлюються в IV—V класах під час вивчення таких тем: «Спрощення виразів» (IV клас), «Розкриття дужок і взяття в дужки», «Коефіцієнт», «Винесення множника за дужки», «Зведення подібних доданків», «Піднесення до степеня» (V клас).

У IV класі починають із спрощення виразів виду:

$$3c + 7c,\ \ 12x - 7x,\ \ 5a - 2a + a.$$

Перші три-чотири вправи розв'язують, застосовуючи розподільний закон множення. $3c + 7c = (3 + 7)c = 10c$. Згодом, коли учні глибше зрозуміють суть цього закону, проміжні перетворення можна опускати і відразу записувати $3c + 7c = 10c$. Після того як усі учні навчаться вільно розв'язувати такі вправи, слід перейти до складніших.

Розв'язання більшості вправ, зокрема вправ на знаходження числового значення деякого виразу, включає насамперед його спрощення.

Іноді попереднє перетворення виразу, поданого в умові вправи, недоцільне. Нехай, наприклад, треба знайти значення виразів (IV клас):

а) $17{,}1y + 121{,}4 + 0{,}9y$ при $y = 45{,}5$;
б) $4(26m + 31{,}4n) + 17 \cdot (0{,}01m + 0{,}02n) + 16$ при $m = 0$, $n = 0$;
в) $2 \cdot (1{,}4x + 3{,}6y) + 3 \cdot (0{,}8x - 0{,}6y)$ при $x = 1$; $y = 1$.

Вправу а) можна розв'язати двома способами: 1) спростити даний вираз і підставити в знайдений вираз дане значення y;

2) підставити в даний вираз значення y і виконати обчислення. Другий спосіб нераціональний. Зате, розв'язуючи вправи б) і в), доцільно спершу підставити в подані вирази значення змінних. Записати їх розв'язання можна так:

а) $y = 45{,}5$; $17{,}1y + 121{,}4 + 0{,}9y = 18y + 121{,}4 =$
$= 18 \cdot 45{,}5 + 121{,}4 = 940{,}4$;
б) $m = 0$; $n = 0$; $4(26m + 31{,}4n) + 17(0{,}01m + 0{,}02n) +$
$+ 16 = 4(0 + 0) + 17(0 + 0) + 16 = 16$;
в) $x = 1$ і $y = 1$; $2(1{,}4x + 3{,}6y) + 3(0{,}8x - 0{,}6y) = 2(1{,}4 +$
$+ 3{,}6) + 3(0{,}8 - 0{,}6) = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0{,}2 = 10 + 0{,}6 = 10{,}6$.

У V класі кількість таких вправ значно збільшується, особливо після введення від'ємних чисел, коли доводиться розглядати вирази з модулями, розкривати дужки, перед якими стоїть знак + або —, тощо. Розглянемо кілька вправ для V класу.

1. Знайдіть значення виразу:

а) $x - (b - c)$, якщо $x = -10{,}3$; $b = 3$; $c = -5$.
б) $-m + p + 1 + m - 24$, якщо $m = 4{,}7$; $p = -7{,}9$.

Розв'язання.

а) Підставимо в подані вирази потрібні значення змінних:

$$-10{,}3 - (3 + 5) = -10{,}3 - 8 = -18{,}3.$$

б) Цю вправу розв'яжемо інакше:

$$-m + p + 1 + m - 24 = p - 23|_{p=-7,9} = -7{,}9 - 23 = -30{,}9.$$

Тут числове значення $m = 4{,}7$ зайве.

2. Запишіть різницю двох виразів $-c + b$, $b - 3 - c$ і спростіть її.

Розв'язання. $(-c + b) - (b - 3 - c) = -c + b - b + 3 + c = 3$.

3. Візьміть в дужки три останні доданки, поставивши перед дужками знак «мінус»:

$$m - n - k - a + 9{,}1.$$

Розв'язання. $m - n - k - a + 9{,}1 = m - n - (k + a - 9{,}1)$.

Вправи на перетворення виразів, вміщені в підручнику для V класу, досить різноманітні, але прості.

Розкладання многочленів на множники

З найпростішими випадками винесення спільних множників за дужки учні ознайомлюються в V класі. У VI класі цей матеріал повторюється і розв'язуються складніші вправи, у тому числі і вправи на винесення за дужки спільного множника із знаком «мінус», наприклад:

$$-10a^3 + 5a^2 - 15a = -5a(2a^2 - a + 3).$$

Деякі методисти пропонують розв'язання подібних вправ записувати так:

$$15a^3x + 3a^2x - 9ax = 3ax\left(\frac{15a^3x + 3a^2x - 9ax}{3ax}\right) =$$
$$= 3a\left(\frac{15a^3x}{3ax} + \frac{3a^2x}{3ax} - \frac{9ax}{3ax}\right) = 3ax\,(5a^2 + a - 3).$$

Від цієї форми запису треба відмовитися, бо винесення спільного множника за дужки тепер вивчається раніше, ніж ділення многочлена на одночлен. Крім того, запис $3ax\left(\frac{15a^3x + 3a^2x - 9ax}{3ax}\right)$ взагалі невдалий: якщо множник стоїть перед виразом, записаним у вигляді дробу, то останній не слід брати в дужки. Коли учні вмітимуть ділити многочлен на одночлен, доцільно з метою повторення матеріалу про розкладання многочленів на множники виконати з ними дві-три вправи на винесення множника за дужки, подаючи розв'язання у вигляді:

$$15a^3x + 3a^2x - 9ax = 3ax\left(\frac{15a^3x}{3ax} + \frac{3a^2x}{3ax} - \frac{9ax}{3ax}\right) = 3ax\,(5a^2 + a - 3).$$

Треба вимагати від учнів усного виконання проміжних дій у вправах такого типу.

Деякі вчителі пропонують також вправи на винесення неспільних множників за дужки, маючи на увазі перетворення виду $ab + c = a\left(b + \frac{c}{a}\right)$. Такі перетворення корисні, але про них може йти мова в VII класі у зв'язку з вивченням дробових виразів.

У VI класі можна дати кілька вправ на винесення за дужки многочленного множника, наприклад:

$$a(m - n) + b(m - n),$$
$$a(x + z) - b(x + z) + c(x + z),$$
$$1 - a + x(1 - a).$$

Виконання цих вправ підготує учнів до кращого засвоєння найважчого для них способу розкладання многочленів на множники — способу групування, який є природним узагальненням способу винесення спільного множника за дужки. Так, пояснивши, як розкладається на множники вираз $a\,(b + c) + x\,(b + c)$, можна відразу запропонувати учням розкласти на множники вираз $ab + ac + xb + xc$. Якщо вони не зможуть цього зробити, слід поставити їм таке запитання: чи не дорівнює другий вираз першому? Часто цього буває досить, щоб учні зрозуміли, як їм виконувати завдання.

Розкладання многочлена на множники способом групування, як уже зазначалось, становить для учнів значні труднощі, часто не відразу вдається як слід згрупувати члени даного многочлена —

доводиться випробовувати кілька способів групування доти, поки не буде знайдено найраціональніший. Тому вчитель має добре продумати систему вправ, щоб труднощі наростали повільно. Спочатку треба запропонувати вправи типу $2cx - nx + 2cy - ny$. Потім можна давати вправи, в яких перед групуванням треба переставити члени, наприклад:

$$a^2 - xy - ay + ax = (a^2 + ax) - (ay + xy) =$$
$$= a(a + x) - y(a + x) = (a + x)(a - y).$$

Бажано звернути увагу учнів на те, що члени того самого многочлена можна згрупувати по-різному. Наприклад, розглянуту щойно вправу можна виконати так:

$$a^2 - xy + ay + ax = (a^2 - ay) + (ax - xy) =$$
$$= a(a - y) + x(a - y) = (a - y)(a + x).$$

Коли учні ознайомляться з усіма передбаченими програмою способами розкладання многочленів на множники, слід запропонувати їм складніші вправи, виконуючи які, доводиться використовувати кілька способів, наприклад:

$$x^3 - 2x^2a + xa^2 - xc^4 = x((x^2 - 2xa + a^2) - c^4) =$$
$$= x((x - a)^2 - c^4) = x(x - a - c^2)(x - a + c^2).$$
$$a^5 + a^4 + a^2 + a = a(a^4 + a^3 + a + 1) = a(a^3(a +$$
$$+ 1) + a + 1) = a(a + 1)(a^3 + 1) =$$
$$= a(a + 1)^2(a^2 - a + 1).$$

Слід зауважити, що тепер в усіх випадках вживають тільки круглі дужки.

Потім можна запропонувати учням розкласти на множники кілька многочленів, в яких деякі члени вже згруповані, але не так, як треба:

$$ac - 8 - 2(c - 2a) = ac - 8 - 2c + 4a =$$
$$= (ac - 2c) + (4a - 8) = c(a - 2) + 4(a - 2) =$$
$$= (a - 2)(c + 4).$$

Є також многочлени, які можна розкласти на множники способом групування, подавши спочатку їх деякі члени у вигляді суми або різниці:

$$x^2 + 7x + 6 = x^2 + x + 6x + 6 = x(x + 1) + 6(x + 1) =$$
$$= (x + 1)(x + 6),$$
$$x^2 + 7x + 6 = x^2 + 7x + 7 - 1 = (x^2 - 1) + (7x + 7) =$$
$$= (x - 1)(x + 1) + 7(x + 1) = (x + 1)(x - 1 + 7) = (x + 1)\times$$
$$\times (x + 6),$$
$$x^2 + 7x + 6 = 7x^2 - 6x^2 + 7x + 6 = 7x(x + 1) - 6(x^2 - 1) =$$
$$= (x + 1)(7x - 6x + 6) = (x + 1)(x + 6).$$

Такі вправи досить важкі і програмою VI класу не передбачені; їх можна пропонувати тільки сильним учням.

Тотожності скороченого множення

Під час вивчення тотожностей скороченого множення багато перетворень доводиться виконувати у зв'язку з вивченням тотожності $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Можна запропонувати учням такі вправи:

1. Подайте вираз $(a-7)(a+7)$ у вигляді різниці двох квадратів.
2. Перемножте двочлени $a-7$ і $a+7$.
3. Подайте вираз $(a-7)(a+7)$ у стандартному вигляді многочлена.

Кілька перших вправ бажано розв'язати, записуючи проміжні перетворення:

$$(2a-b^3)(2a+b^3) = (2a)^2 - (b^3)^2 = 4a^2 - b^6.$$

Коли учні навчаться безпомилково й швидко їх розв'язувати, проміжні перетворення вони виконуватимуть усно і відразу запишуть:

$$(2a-b^3)(2a+b^3) = 4a^2 - b^6.$$

Корисно також, щоб учні перетворили кілька виразів, в яких, на перший погляд їм здаватиметься, є добуток різниці двох виразів та їх суми, хоч насправді його там немає.

Подайте, якщо можна, добуток виразів у вигляді різниці двох квадратів:

а) $(p-1)(p+1)(p^2+1)$;
б) $(2ab^2-1)(2a^2b+1)$;
в) $x^3(x-1)(x^2+x)$.

Розв'язання.

а) $(p-1)(p+1)(p^2+1) = (p^2-1)(p^2+1) = p^4 - 1$.

б) Добуток $(2ab^2-1)(2a^2b+1)$ подати у вигляді різниці квадратів двох цілих виразів не можна.

в) $x^3(x-1)(x^2+x) = x^2(x-1)\,x\,(x^2+x) = (x^3-x^2)(x^3+x^2) = x^6 - x^4$.

Останню вправу можна розв'язати й так:

$$x^3(x-1)(x^2+x) = x^3(x-1)\,x\,(x+1) = x^4(x^2-1) = x^6 - x^4.$$

Зауважимо, проте, що при аналізі вправ із запереченими відповідями треба бути обережними. Якщо, наприклад, якийсь вираз не можна подати у вигляді різниці квадратів за допомогою формули $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, то це не означає, що він взагалі тотожно не дорівнює ніякій різниці квадратів двох виразів. Наприклад, до добутку $(x+z)(x+z)$ цю формулу застосувати не можна, але

$$(x+z)(x+z) = (x+z)^2 - (z-z)^2.$$

Таких прикладів можна навести безліч.

$$(x^2 - 4a^2)(x^2 - (x + a)(x - a)) = (ax)^2 - (2a^2)^2,$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + (1 + x^4)) = (x^3)^2 - 1 \text{ і т. п.}$$

Працюючи за підручником О. М. Барсукова, учні спочатку користувалися формулою $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ тільки для перетворення добутку в різницю квадратів, а обернене перетворення, тобто розклад різниці квадратів двох виразів на множники, виконували значно пізніше. В новому підручнику з алгебри для VI класу ці два види перетворень вивчають майже одночасно. Якщо на першому уроці, присвяченому тотожностям скороченого множення, вчитель пояснює формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, то вже на другому (або принаймні на третьому) уроці він показує, що частини цієї формули можна поміняти місцями: $a^2 - b^2 = (a - b) \times (a + b)$, і пропонує, наприклад, такі вправи:

а) запишіть вираз $4 - a^2b^2$ у вигляді добутку двох двочленів.

б) Розкладіть на множники $100x^4 - 4^n$.

в) Розкладіть на множники многочлен $a^2 + a + 2b - 4b^2$.

г) Обчисліть усно $51{,}5^2 - 48{,}5^2$ і т. д.

Розв'язувати ці вправи можна так:

а) $4 - a^2b^2 = 2^2 - (ab)^2 = (2 - ab)(2 + ab)$;

б) $100x^4 - 4^n = (10x^2)^2 - (2^n)^2 = (10x^2 - 2^n)(10x^2 + 2^n)$;

в) $a^2 + a + 2b - 4b^2 = (a + 2b) + (a^2 - 4b^2) = (a + 2b) + (a - 2b)(a + 2b) = (a + 2b)(1 + a - 2b)$;

г) сума чисел 51,5 і 48,5 дорівнює 100, а різниця 3. Отже, в результаті дістанемо 300.

Одну-дві вправи, подібних до останньої, бажано розв'язати з учнями письмово, потім запропонувати їм кілька таких вправ розв'язати усно. Цей спосіб обчислення різниці квадратів двох виразів доцільно пригадати під час вивчення теореми Піфагора. Якщо, наприклад, гіпотенуза трикутника дорівнює 50,5 *см*, а катет 49,5 *см*, то другий катет дорівнює $\sqrt{50{,}5^2 - 49{,}5^2} = \sqrt{1 \cdot 100} = 10$ (*см*).

В VI класі бажано розв'язати і таку задачу.

Доведіть тотожність

$$(10a + 5)^2 = 100a(a + 1) + 25$$

і застосуйте її для обчислення квадратів двоцифрових чисел, що закінчуються на 5.

Як показує досвід, учні досить легко доводять дану тотожність, але не бачать її арифметичного змісту. Можна дати їм такі пояснення.

Вираз $10a + 5$ позначає число, яке закінчується цифрою 5. Це число має a десятків і 5 одиниць. Якщо a — число одноцифрове, то $10a + 5$ — двоцифрове. Наприклад, якщо $a = 6$, то $10a + 5 = 65$. А вираз $100a(a + 1) + 25$ позначає число, яке має $a(a + 1)$

сотень і закінчується на 25. Наприклад, якщо $a = 6$, то $100a(a + 1) + 25 = 4225$.

Отже, квадрат числа, яке має a десятків і закінчується цифрою 5 (ліва частина тотожності), є таке число, яке містить $a(a + 1)$ сотень і яке закінчується на 25.

Розглянемо приклади. Чому дорівнює 35^2? Тут $a = 3$, $a \times (a + 1) = 3 \cdot 4 = 12$. Отже, $35^2 = 1225$. Так само знаходимо $85^2 = 7225$.

Розв'яжемо кілька важчих вправ на застосування тотожностей скороченого множення.

1. При якому значенні n можна подати у вигляді квадрата двочлена вираз $25x^2 + 30x + n$?

Розв'язання. $25x^2 + 30x + n = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 3 + n$. Перший доданок — квадрат одночлена $5x$, другий — подвоєний добуток цього одночлена і числа 3. Щоб дана сума була квадратом двочлена, досить, щоб $n = 3^2 = 9$.

Перевірка. $25x^2 + 30x + 9 = (5x + 3)^2$.

Якщо під n розуміти не число, а вираз, то задача буде невизначеною: існує безліч таких виразів n, при яких даний многочлен можна подати у вигляді квадрата двочлена. Наприклад, якщо $n = 25 - 16x^2$, то

$$25x^2 + 30x + n = 9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2.$$

2. Подайте у вигляді різниці квадратів двох виразів $a^2 + 10a + 24$.

Розв'язання. $a^2 + 10a + 24 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 5 + 25 - 1 = (a + 5)^2 - 1^2$.

Ця задача також невизначена. Її задовольняють ще й інші вирази, наприклад: $a^2 + 10a + 24{,}25$ і $a^2 + 10a + 23{,}75$.

Справді, $(a^2 + 10a + 24{,}25)^2 - (a^2 + 10a + 23{,}75)^2 = (a^2 + 10a + 24{,}25 - a^2 - 10a - 23{,}75)(a^2 + 10a + 24{,}25 + a^2 + 10a + 23{,}75) = 0{,}5\,(2a^2 + 20a + 48) = a^2 + 10a + 24$.

Чи існують інші вирази, які задовольняють цю задачу? Як їх знайти? Можна скористатися методом невизначених коефіцієнтів:

$$(Aa^2 + Ba + C)^2 - (Da^2 + Ea + K)^2 = A^2a^4 + B^2a^2 + C^2 + 2ABa^3 + 2ACa^2 + 2BCa - D^2a^4 - E^2a^2 - K^2 - 2DEa^3 - 2DKa^2 - 2EKa = a^4(A^2 - D^2) + 2a^3(AB - DE) + a^2(B^2 + 2AC - E^2 - 2DK) + 2a(BC - EK) + C^2 - K^2.$$

Щоб вирази $Aa^2 + Ba + C$ і $Da^2 + Ea + K$ задовольняли умову задачі, досить, щоб виконувались такі співвідношення:

$$A^2 = D^2,\ AB = DE,\ B^2 - E^2 + 2(AC - DK) = 1,\ BC - EK = 5,\ C^2 - K^2 = 24.$$

Виберемо, наприклад, $A = D = 2$. Тоді $B = E = 20$, $C = 48{,}125$, $K = 47{,}865$.

Отже, $(2a^2 + 20a + 48,125)^2 - (2a + 20a + 47,865)^2 = a^2 + 10a + 24$.

Зрозуміло, що таким самим способом можна знайти багато інших многочленів, які задовольняють дану задачу. Учням про це говорити не треба. Тільки сильнішим корисно запропонувати подумати, скільки розв'язків має задача.

1. Знайдіть такі значення M, при яких $(3x - 5)^2 + (4x + 12)^2 + Mx$ можна подати у вигляді квадрата двочлена.

Розв'язання. $(3x-5)^2 + (4x+12)^2 + Mx = 9x^2 - 30x + 25 + 16x^2 + 96x + 144 + Mx = 25x^2 + x(66 + M) + 169$.

Цей вираз буде квадратом двочлена тоді, коли його середній доданок $x(66 + M)$ тотожно дорівнюватиме подвоєному добутку виразів $5x$ і 13. Отже, $2 \cdot 5x \cdot 13 = x(66 + M)$, звідки $M = 64$. Є й інший розв'язок. Якщо $2 \cdot 5x \cdot 13 = -x(66 + M)$, то $M = -196$.

Перевірка. $(3x-5)^2 + (4x+12)^2 + 64x = (5x + 13)^2$, $(3x - 5)^2 + (4x + 12)^2 - 196x = (5x - 13)^2$.

2. Підставте замість зірочок такі одночлени, щоб утворилась тотожність:

$$(4a^3b^2 + *)(* - 20a^4b^5 + *) = * + *.$$

Зрозуміло, що ця задача має такий розв'язок:

$$(4a^3b^2 + 5ab^3)(16a^6b^4 - 20a^4b^5 + 25a^2b^6) = 64a^9b^6 + 125a^3b^9.$$

Але вона має й безліч інших розв'язків:

$$(4a^3b^2 + 1)(20a^4b^6 - 20a^4b^5 + a) = 4a^4b^2 + a,$$

$$(4a^3b^2 + b)(m - 20a^4b^5 - m) = -80a^7b^7 - 20a^4b^6 \text{ тощо.}$$

3. Доведіть, що значення виразу

$(3a + 5)^3 - 3(3a + 5)^2(3a - 1) + 3(3a + 5)(3a - 1)^2 - (3a - 1)^3$ не залежить від a.

Звичайно, можна розкрити всі дужки і звести подібні доданки, але такий спосіб дуже громіздкий. Якщо учні самі не знайдуть раціональнішого способу розв'язання, його доцільно підказати, поставивши таке запитання: чи є цей вираз кубом різниці?

Цей вираз справді — куб різниці двочленів $3a + 5$ і $3a - 1$. Він тотожно дорівнює $(3a + 5 - 3a + 1)^3 = 6^3$ і, як бачимо, не залежить від змінної a.

Доведення властивостей цілих чисел

За допомогою тотожних перетворень виразів можна довести багато властивостей цілих чисел. Раніше в наших школах розв'язували мало задач на доведення, небагато їх було і в учнівських задачниках. У новому ж підручнику з алгебри для VI класу таких задач багато. Вони дають учням все те, що і різні вправи з вимогами «спростити вираз», «виконати дії», але разом з тим привчають учнів бачити реальний зміст символів.

Учень, який не розв'язував задач на доведення, в тотожності

$$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

не побачить нічого, крім того, що вона правильна. Інший же учень, якому доводилося розв'язувати такі задачі, легко встановить, що вона виражає такі властивості чисел:

1. Якщо сума двох чисел парна, то парною є і їх сума квадратів.

2. Квадрат суми двох додатних чисел більший від суми їх квадратів.

3. Квадрат суми двох чисел більший за їх подвоєний добуток.

4. Якщо сума двох чисел та сама, то сума їх квадратів буде тим більша, чим менший їх добуток.

Щоб зацікавити учнів задачами на доведення і дохідливо подати умову кожної з них, слід спочатку з'ясувати доводжувані твердження на конкретних прикладах. Однією з перших задач на доведення можна дати таку.

Доведіть, що сума трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3.

Перед розв'язуванням цієї задачі бажано запропонувати учням написати три будь-яких послідовних цілих числа і знайти їх суму. При цьому їм можна дати такі завдання.

1. Встановіть, чи ділиться сума записаних чисел на три (ділиться).
2. Напишіть ще три яких-небудь послідовних цілих числа і знайдіть їх суму. Встановіть, чи ділиться вона на 3 (ділиться).
3. Подумайте і скажіть, чи завжди сума трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3; якщо ні, то коли не ділиться?

Як показує досвід, учні часто не справляються з таким завданням. У такому разі вчителеві доведеться дати такі пояснення.

Якщо перше з послідовних цілих чисел n, то наступне буде на одиницю більше від n, тобто $n + 1$. Число, що йде за $n + 1$, буде $n + 2$. Запишемо суму цих трьох чисел: $n + (n+1) + (n + 2) = 3n + 3$. Вона ділиться на 3, бо кожен з доданків $3n$ і 3 ділиться на 3. Отже, сума будь-яких трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3.

У зошитах учні записують: «Три послідовних числа n, $n + 1$, $n + 2$. $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$ — їх сума. При кожному цілому n вираз $3n + 3$ ділиться на 3. Отже, і сума даних чисел завжди ділиться на 3.»

Справедливість сформульованого в задачі твердження випливає не тільки з тотожності $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$, а й з багатьох інших тотожностей, наприклад: $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$, $(n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 3n + 6$ і т. п. Тому, хто добре обізнаний з математичною символікою, найпростішою здається тотожність $(n-1)+n+(n+1)=3n$. У VI класі доцільніше перше з чисел позначати однією буквою.

Коли учням будуть відомі тотожності скороченого множення, можна розв'язувати з ними й такі задачі:

1. Доведіть, що сума квадратів трьох послідовних цілих чисел не ділиться на 3.
2. Доведіть, що сума кубів трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3.
3. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних непарних чисел ділиться на 8.
4. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних парних чисел не ділиться на 8.

Щоб розв'язати такі задачі, треба вміти доводити тотожності і «читати» їх, бачити за символами властивості чисел. Справедливість сформульованих у цих задачах тверджень випливає з таких тотожностей:

$$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=3n^2+2;$$
$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n^3+6n,$$
$$(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n,$$
$$(2n+2)^2-(2n)^2=8n+4.$$

Такі задачі цілком доступні учням. Досить розв'язати з ними лише кілька з них, а решту вони розв'яжуть самостійно.

Від розглядуваних задач слід відрізняти такі, що розв'язуються методом повної індукції, наприклад:

1. Доведіть, що добуток трьох послідовних цілих чисел ділиться на 6.
2. Доведіть, що коли n ціле число, то n^3-n ділиться на 6.
3. Доведіть, що квадрат непарного числа, зменшений на 1, ділиться на 8.
4. Доведіть, що сума кубів трьох послідовних цілих чисел ділиться на 9.

Ці задачі формулюються майже так, як і попередні, і часто різниця між ними здається неістотною: в одній йдеться про суму чисел, в іншій — про добуток, в одній — про подільність суми на 3, в іншій — на 6. Проте розв'язуються вони різними способами.

Розв'яжемо, наприклад, першу з цих задач.

Треба довести, що добуток $n(n-1)(n+1)$ ділиться на 2 і на 3. На 2 він ділиться, оскільки з двох послідовних цілих чисел n і $n+1$ обов'язково одне парне. Покажемо, що цей добуток ділиться і на 3. Яке б не було ціле число n, воно або ділиться на 3 без остачі, або при діленні на 3 дає остачу 1 чи 2. Якщо n ділиться на 3 без остачі, то і $n(n-1)(n+1)$ ділиться на 3 без остачі. Якщо остача від ділення n на 3 дорівнює 1, то $n-1$ ділиться на 3. Якщо ця остача дорівнює 2, то $n + 1$ ділиться на 3. Інших випадків бути не може.

Отже, яке б не було ціле число n, добуток $n(n-1)(n+1)$ ділиться на 3 без остачі. Крім того, як було показано, він ділиться й на 2. Числа 2 і 3 взаємно прості, тому цей добуток ділиться і на 6. (Обов'язково треба зауважити, що числа 2 і 3 взаємно прості. Учні часто цього не розуміють і, міркуючи аналогічно, твердять, що коли число ділиться на 2 і на 4, то воно ділиться і на 8, а це неправильно).

У розглянутих вище задачах йшлося про подільність чисел. Саме таких задач на доведення найбільше в підручнику з алгебри. Але існують також інші алгебраїчні задачі на доведення, наприклад:

1. Доведіть, що кожне непарне число є сума двох послідовних цілих чисел.
2. Доведіть, що сума двох послідовних цілих чисел дорівнює різниці їх квадратів.
3. Доведіть, що кожне непарне число є різниця квадратів двох цілих чисел.
4. Доведіть, що квадрат парного числа є різниця квадратів двох цілих чисел.

Сформульовані в цих задачах твердження випливають з таких тотожностей:

$$2n + 1 = n + (n + 1),$$
$$n + (n + 1) = (n + 1)^2 - n^2,$$
$$2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2,$$
$$(2n)^2 = (n^2 + 1)^2 - (n^2 - 1)^2.$$

Довести ці тотожності неважко. Значно важче встановити, яку саме тотожність треба розглянути. Розв'язуючи, наприклад, задачу 2, це зробити легко: читаючи «сума двох послідовних цілих чисел», відразу можна записати: $n + (n + 1)$; читаючи «дорівнює різниці їх квадратів», дописуємо $(n + 1)^2 - n^2$ — тотожність готова. Але, розв'язуючи задачу 4, потрібну тотожність знайти важче. Читаючи «квадрат парного числа», пишемо $(2n)^2$. А далі замислюємось: різниця квадратів яких чисел дорівнює $4n^2$? Можливо, це числа $6n$ і $2n$? Ні, бо $(6n)^2 - (2n)^2 \neq 4n^2$. Можливо, це числа $2n + 1$ і $2n - 1$? Теж ні, бо $(2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 \neq 2n^2$.

Тільки глибокий аналіз задачі і розгляд багатьох можливих випадків приводить до правильної тотожності.

Розв'яжемо ще кілька задач на доведення властивостей чисел з підручника з алгебри для VI класу.

1. Доведіть, що: а) сума чисел $\overline{ab}$ і $\overline{ba}$ кратна 11; б) різниця чисел $\overline{abc}$ і $\overline{cba}$ кратна 99.

Р о з в'я з а н н я. а) $\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$.

Тут a і b — цілі числа, тому $11a$ і $11b$ діляться на 11. Якщо кожен доданок ділиться на 11, то й сума їх ділиться на 11.

б) $\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c$. Оскільки зменшуване і від'ємник діляться на 99, то і їх різниця ділиться на 99.

2. Доведіть, що:
а) $48^7 - 48^6$ ділиться на 47;
б) $5^5 - 5^4 + 5^3$ ділиться на 21.

Р о з в'я з а н н я.
а) $48^7 - 48^6 = 48^6 \cdot (48 - 1) = 48 \cdot 47$ — ділиться на 47.
б) $5^5 - 5^4 + 5^3 = 5^3 \cdot (25 - 5 + 1) = 5 \cdot 21$ — ділиться на 21.

Щоб не писати часто слово «ділиться», в теоретичній арифметиці вживають символ $\vdots$. Але у восьмирічній школі його вживати недоцільно. Замінювати цей символ відомим учням знаком ділення «:» ні в якому разі не можна. Треба чітко розрізняти зміст слів «ділиться» і «поділити».

3. Доведіть:
а) Якщо a і b — натуральні числа, які при діленні на 9 дають в остачах відповідно 7 і 4, то їх добуток при діленні на 9 дає в остачі 1;
б) Якщо x і y — натуральні числа, які при діленні на 12 дають в остачах відповідно 4 і 9, то їх добуток ділиться на 12;

Р о з в'я з а н н я. а) Нехай $a = 9m + 7$, $b = 9n + 4$. Тоді $ab = (9m + 7)(9n + 4) = 81mn + 63n + 36m + 28 = 9\,(9mn + 7n + 4m + 3) + 1$.

б) Нехай $x = 12m + 4$, $y = 12n + 9$. Тоді $xy = (12m + 4) \times (12n + 9) = 144mn + 12 \cdot 9m + 12 \cdot 4n + 36 = 12(12mn + 9m + 4n + 3)$.

При цілих значеннях m і n вираз у дужках завжди ділиться на 12.

4. Доведіть, що при будь-якому цілому n значення виразу $(4{,}5\,n + 8)^2 - (2{,}5n + 6)^2$ ділиться на 28.

Р о з в'я з а н н я. $(4{,}5n + 8)^2 - (2{,}5n + 6)^2 = (4{,}5n + 8 - 2{,}5n - 6)(4{,}5n + 8 + 2{,}5n + 6) = 14(n + 1)(n + 2)$.

Коли n — ціле, $n + 1$ і $n + 2$ — цілі числа, причому одне з них обов'язково парне. Отже, $(n + 1)(n + 2)$ ділиться на 2, тому $14\,(n + 1)(n + 2)$ ділиться на 28.

5. Якщо натуральне число при діленні на 9 дає в остачі 3, то його квадрат кратний 9. Доведіть це.

Р о з в'я з а н н я. Число, яке при діленні на 9 в остачі дає 3, має вид $n = 9k + 3$, тому $n^2 = (9k + 3)^2 = 81k^2 + 54k + 9 = 9\,(9k^2 + 6k + 1)$.

Знайдений добуток, а отже, й число n^2, ділиться на 9. Це твердження можна довести й інакше. Якщо $n = 9k + 3 = 3(3k + 1)$, то $n^2 = 9(3k + 1)^2$ і т. д.

Учні іноді ототожнюють поняття «натуральне число» і «ціле число». До речі, в першому виданні підручника в цій задачі (822) замість слова «натуральне» було «ціле». Чи правильно в цьому випадку сформульовано в задачі твердження? Правильно, але для випадку цілих від'ємних чисел його важко осмислити учням. Коли запропонувати учням придумати кілька цілих від'ємних чисел, які при діленні на 9 дають в остачі 3, вони часто міркують так: 12 при діленні на 9 дає в остачі 3, тому і — 12 при діленні на 9 дає в остачі 3. А це неправильно, бо $-12 = 9 \cdot (-2) + 6$ (остача 6). При діленні на 9 дають в остачі 3 такі числа: $-9 + 3$, $-18 + 3$, $-27 + 3$, $-36 + 3$, тобто -6, -15, -24, -33 і т. д. Квадрат кожного з них ділиться на 9 без остачі.

6. Якщо натуральне число при діленні на 4 дає в остачі 3, то сума його куба і квадрата ділиться на 4. Доведіть це.

Розв'язання. Якщо натуральне число n при діленні на 4 дає в остачі 3, то ціле число k таке, що $n = 4k + 3$. Тоді $n^3 + n^2 = n^2(n + 1) = (4k + 3)^2(4k + 4) = 4(4k + 3)^2(k + 1)$.
Знайдений добуток, а отже, й сума $n^3 + n^2$ ділиться на 4.

Можна зразу підставляти замість n його значення, але підносити до куба і квадрата двочлен $4k + 3$ не треба:

$$n^3 + n^2 = (4k + 3)^3 + (4k + 3)^2 = (4k + 3)^2(4k + 3 + 1) = 4(4k + 3)^2(k + 1).$$

7. Доведіть, що добуток двох середніх з чотирьох послідовних цілих чисел більший від добутку крайніх на 2.

Розв'язання. Чотири послідовних цілих числа: a, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$.
Тоді $(a + 1)(a + 2) - a(a + 3) = a^2 + 2a + a + 2 - a^2 - 3a = 2$.

Звичайно, можна чотири послідовних числа позначити й інакше, наприклад: $a - 1$, a, $a + 1$, $a + 2$. Тоді $a(a + 1) - (a - 1)(a + 2) = a^2 + a - a^2 - 2a + a + 2 = 2$.

8. Доведіть, що значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ при будь-якому натуральному n ділиться на 10.

Розв'язання.

$$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1) = 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n = 10(3^n - 2^{n-1}).$$

Знайдений добуток, а отже, і значення даного виразу діляться на 10.

Якщо учні не знають ще степенів з нульовими показниками, то для $n = 1$ треба виконати безпосередню перевірку, показати, що сума для $3^3 - 2^3 + 3 - 2 = 20$ також ділиться на 10.

9. Якщо змінні n і k набувають значень, які при діленні на 11 дають в остачах відповідно 5 і 6, то значення їх добутку при діленні на 11 дає в остачі 8. Доведіть це.

Розв'язання. Якщо змінна n набуває значень, які дають при діленні на 11 в остачі 5, то $n = 11t + 5$.
Аналогічно з умови задачі випливає, що $k = 11l + 6$, де t і l — якісь цілі числа. Тоді $nk = (11t + 5)(11l + 6) = 121tl + 11 \cdot 6t + 11 \cdot 5l + 30 = 11(11tl + 6t + 5l + 2) + 8$.
А це й означає, що nk при діленні на 11 дає в остачі 8.

Далі розв'яжемо ще кілька задач на доведення властивостей цілих чисел, яких немає в шкільних підручниках, але які доступні і цікаві для учнів VI—VII класів.

1. Доведіть, що коли $2a + 3b$ ділиться на 5, то на 5 ділиться й значення виразу $3a + 2b$.

Розв'язання. $(2a + 3b) + (3a + 2b) = 5(a + b)$.
Якщо сума двох чисел і один з доданків ділиться на якесь число, то і другий доданок ділиться на це число.

2. Доведіть, що при натуральному n число $10^n + 8$ ділиться на 18.

Розв'язання. Число $10^n + 8 = 1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}8$. Сума його цифр дорівнює 9, отже, дане число ділиться на 9. Крім того, воно закінчується парною цифрою, отже, ділиться і на 2.

3. Якщо число $(6m + 5)(5m + 6)$ ділиться на 11, то воно ділиться і на 121. Доведіть це.

Розв'язання. $(6m + 5) + (5m + 6) = 11(m + 1)$. Оскільки одне з чисел $6m + 5$ і $5m + 6$ ділиться на 11, то ділиться на 11 і друге. Отже, їх добуток ділиться на 11^2.

4. Якщо сума двох цілих чисел ділиться на 10, то квадрати цих чисел закінчуються однаковими цифрами. Доведіть це.

Розв'язання. Нехай $a + b$ ділиться на 10. Тоді $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ також ділиться на 10. Отже, число $a^2 - b^2$ закінчується нулем. А це рівносильно тому, що числа a^2 і b^2 закінчуються однаковими цифрами.

Складніші приклади розкладання многочленів на множники

Є багато таких многочленів або цілих виразів, розкладання яких на множники вимагає від учнів кмітливості. Про це повинен пам'ятати кожен учитель математики VII—VIII і старших класів. Якщо в його класі є здібні учні, бажано добирати для них вправи на розкладання многочленів. Такі вправи розв'язуються багатьма способами. Наприклад, треба розкласти на множники вираз $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$. Деякі автори посібників пропонують цю задачу розв'язувати так:

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=((a-b)^3+(b-c)^3)+(c-a)^3=((a-b)+(b-c))((a-b)^2-(a-b)(b-c)+(b-c)^2)+(c-a)^3=(a-c)((a-b)^2-(a-b)(b-c)+(b-c^2))-(a-c)^3=$
$=(a-c)((a-b)^2-(a-b)(b-c)+(b-c)^2-(a-c)^2)=$
$=(a-c)(a^2-2ab+b^2-ab+ac+b^2-bc+b^2-2bc+$
$+c^2-a^2+2ac-c^2)=(a-c)(3b^2-3ab+3ac-3bc)=$
$=3(a-c)(b^2-ab+ac-bc)=3(a-c)((b^2-ab)-(bc-ac))=3(a-c)(b(b-a)-c(b-a))=3(a-c)(b-a)\times$
$\times(b-c)=3(a-b)(b-c)(c-a).$

Набагато простіше і природніше таке розв'язання:

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+b^3-3b^2c+$
$+3bc^2-c^3+c^3-3c^2a+3ca^2-a^3=-3a^2b+3ab^2-3b^2c+$
$+3bc^2-3c^2a+3ca^2=-3ab(a-b)+3c(a^2-b^2)-3c^2(a-b)=$
$=3(a-b)((a+b)c-ab-c^2)=3(a-b)(a(c-b)+c(b-c))=$
$=3(a-b)(b-c)(c-a).$

Якщо учні вже знають, що при $x+y+z=0$ $x^3+y^3+z^3=3xyz$, то задачу можна розв'язати ще простіше:
$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$. Отже, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

Можна використати й деякі штучні способи. Наприклад, позначимо $a-b=m$, тоді $b-c=a-c-m$. Тому $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=m^3+((a-c)-m)^3-(a-c)^3=m^3+(a-c)^3-3(a-c)^2m+3(a-c)m^2-m^3-(a-c)^3=3(a-c)m^2-3(a-c)^2m=3(a-c)m(m-a+c)=3(a-b)(a-c)(a-b-a+c)=3(a-b)(a-c)(c-b)$.

Можна ввести дві заміни. Нехай $a-b=m$ і $b-c=k$. Тоді $c-a=-m-k$, тому $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=m^3+k^3-(m+k)^3=m^3+k^3-m^3-3m^2k-3mk^2-k^3=-3mk\times(m+k)=-3(a-b)(b-c)(a-c)=3(a-b)(b-c)(c-a)$.

Не обов'язково вводити нові букви. Оскільки $c-a=(c-b)+(b-a)$, то $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=(a-b)^3+(b-c)^3+((c-b)+(b-a))^3=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-b)^3+$
$+3(c-b)^2(b-a)+3(c-b)(b-a)^2+(b-a)^3=$
$=3(c-b)(b-a)(c-b+b-a)=3(a-b)(b-c)(c-a).$

Такі вправи слід розв'язувати на заняттях математичного гуртка. Нижче наведемо ще кілька прикладів на розкладання многочленів, які можна пропонувати сильнішим учням.

$a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^2=(a^2+2)^2-4a^2=(a^2-2a+$
$+2)(a^2+2a+2);$

$a^4+a^2+1=a^4+2a^2+1-a^2=(a^2+a+1)(a^2-a+1);$

$a^5+a+1=a^5+a^4-a^4+a^3-a^3+a^2-a^2+a+1=$

$$= (a^5 + a^4 + a^3) - (a^4 + a^3 + a^2) + (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^3 - a^2 + 1);$$

$$a^{10} + a^5 + 1 = (a^{10} + a^9 + a^8) - (a^9 + a^8 + a^7) + (a^7 + a^6 + a^5) - (a^6 + a^5 + a^4) + (a^5 + a^4 + a^3) - (a^3 + a^2 + a) + (a^2 + a + 1) = (a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1);$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3abc - 3a^2b - 3ab^2 = ((a + b)^3 + c^3) - 3ab(a + b + c) = (a + b + c) \times (a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2) - 3ab(a + b + c) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Дробові вирази

Під час вивчення в VII класі теми «Дроби» учням доводиться виконувати багато тотожних перетворень: скорочувати дроби, зводити їх до спільних знаменників, замінювати дробом суму, різницю, добуток чи частку дробових виразів тощо.

Розглянемо кілька вправ на перетворення дробових виразів, вміщених у підручнику з алгебри для VII класу.

1. Знайдіть область визначення виразу:

$$а)\ \frac{8}{(x-1)(x+5)},\quad б)\ \frac{a^2+1}{|a|-a}.$$

Р о з в'я з а н н я. а) Даний вираз має числові значення при всіх значеннях x, за винятком тих, при яких $(x - 1)(x + 5) = 0$. Це рівняння має два корені: -5 і 1. Отже, область визначення даного виразу — множина всіх чисел, крім -5 і 1. Відповідь можна записати і так: $\{x \mid x \neq -5,\ \ x \neq 1\}$, або $]-\infty; -5[\ \cup\ ]-5; 1[\ \cup\ ]1; +\infty[$.

б) $|a| - a = 0$ тоді й тільки тоді, коли $a \geqslant 0$. Отже, область визначення даного виразу така: $]-\infty; 0[$.

П р и м і т к а. Коли вище ми говорили «множина всіх чисел», то мали на увазі всі відомі учням числа. Для семикласників це буде множина всіх раціональних чисел, а для учнів старших класів — дійсних чисел.

2. Перетворіть у дріб вираз

$$\frac{a+2}{a-3} - \frac{2a-1}{3-a} + \frac{4a-1}{a-3}.$$

Р о з в'я з а н н я.

$$\frac{a+2}{a-3} - \frac{2a-1}{3-a} + \frac{4a-1}{a-3} = \frac{a+2}{a-3} + \frac{2a-1}{a-3} + \frac{4a-1}{a-3} = \frac{a+2+2a-1+4a-1}{a-3} = \frac{7a}{a-3}.$$

Можливі й інші розв'язання, наприклад: замість доданка $\frac{2a-1}{a-3}$ написати $-\frac{1-2a}{a-3}$; звести всі дроби до знаменника $3-a$ та ін. Проте перший спосіб найкращий. Зрозуміло, що дане перетворення можливе при умові, що $a \neq 3$. Однак у VII класі кожного разу можна не говорити про область визначення виразу, а домовитися з самого початку, що у вправах на перетворення дробових виразів завжди маються на увазі тільки такі значення змінних, які не перетворюють знаменників у нуль.

3. Подайте дріб $\frac{x^2+5x-9}{x+3}$ у вигляді суми цілого виразу і дробу.

Використовуючи алгоритм ділення впорядкованих многочленів, задачу можна розв'язати так:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2+5x-9 & x+3 \\ \underline{x^2+3x\quad\;\;} & \overline{x+2} \\ -\,2x-9 & \\ \underline{2x+6} & \\ -15 & \end{array} \qquad \frac{x^2+5x-9}{x+3}=x+2-\frac{15}{x+3}.$$

Але семикласники цього алгоритму не знають, отже вони повинні подати чисельник даного дробу у вигляді суми таких доданків, один з яких був би добутком двочлена $x+3$ на якийсь цілий вираз. Це перетворення можна записати так:

$$\frac{x^2+5x-9}{x+3}=\frac{x^2+3x+2x-9}{x+3}=\frac{x(x+3)}{x+3}+\frac{2x-9}{x+3}=x+\frac{2x-9}{x+3}.$$

Добутий результат також задовольняє задачу. Зауважимо, що вона має й інші розв'язки.

4. При яких натуральних значеннях n дріб $\frac{(n-3)^2}{n}$ набуває натуральних значень?

Розв'язання. $\frac{(n-3)^2}{n}=\frac{n^2-6n+9}{n}=n-6+\frac{9}{n}$.

При кожному натуральному значенні n $n-6$ — ціле число. Тому даний дріб може набувати натуральних значень тільки тоді, коли число $\frac{9}{n}$ натуральне, тобто коли n — дільник 9. Серед натуральних чисел таких дільників три: 1, 3 і 9. Лишається випробувати, які з цих трьох чисел задовольняють задачу. При $n=1$, $n=3$, $n=9$ даний дріб набуває відповідно таких значень: 4, 0 і 1. Число 0 не натуральне, отже $n=3$ задачу не задовольняє.

Відповідь. 1 і 9.

5. Доведіть тотожність $\left(\frac{ab+b^2}{5a^2-5ab}+ab+b^2\right)\cdot\frac{5a}{a+b}-\frac{b}{a-b}=5ab.$

Розв'язуючи цю задачу, учні нерідко записують кілька рівностей, що випливають з даної:

$$\left(\frac{b(a+b)}{5a(a-b)}+b(a+b)\right)\cdot\frac{5a}{a+b}-\frac{b}{a-b}=5ab,$$

$$\frac{b(a+b)\cdot 5a}{5a(a-b)(a+b)}+\frac{b(a+b)\cdot 5a}{a+b}-\frac{b}{a-b}=5ab,$$

$$\frac{b}{a-b}+5ab-\frac{b}{a-b}=5ab,\ 5ab=5ab.$$

Закінчують міркування так. Рівність $5ab=5ab$ правильна при всіх значеннях a і b, тобто вона є тотожністю, тому і дана рівність — тотожність.

Таке доведення неправильне, бо, як відомо, з неправильного твердження можна вивести будь-яке твердження [4, 51]. До того ж воно нераціональне, оскільки потребує багатьох записів. Доцільніше задачу розв'язати так:

$$\left(\frac{ab+b^2}{5a^2-5ab}+ab+b^2\right)\cdot\frac{5a}{a+b}-\frac{b}{a-b}=\frac{b(a+b)}{5a(a-b)}\cdot\frac{5a}{a+b}+$$

$$+b(a+b)\cdot\frac{5a}{a+b}-\frac{b}{a-b}=\frac{b}{a-b}+5ab-\frac{b}{a-b}=5ab.$$

6. Знайдіть такі значення a і b, щоб виконувалася тотожність

$$\frac{5x+31}{(x-5)(x+2)}=\frac{a}{x-5}-\frac{b}{x+2}.$$

Розв'язання.

Перший спосіб.

$$\frac{a}{x-5}-\frac{b}{x+2}=\frac{ax+2a-bx+5b}{(x-5)(x+2)}=\frac{(a-b)x+(2a+5b)}{(x-5)(x+2)}.$$

Щоб дана рівність була тотожністю, треба, щоб a і b задовольняли систему рівнянь

$$\begin{cases} a-b=5, \\ 2a+5b=31. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо шукані значення: $a=8$, $b=3$.

Перевірка.

$$\frac{8}{x-5}-\frac{3}{x+2}=\frac{8x+16-3x+15}{(x-5)(x+2)}=\frac{5x+31}{(x-5)(x+2)}.$$

Другий спосіб. Якщо дана рівність — тотожність, то вона правильна при всіх допустимих значеннях змінної x, зокрема і при $x=0$ і $x=1$. Маємо:

1) якщо $x=0$, то $\frac{31}{-10}=\frac{a}{-5}-\frac{b}{2}$, звідки $2a+5b=31$;

2) якщо $x=1$, то $\frac{36}{-12}=\frac{a}{-4}-\frac{b}{3}$, звідки $3a+4b=36$.

Дістали систему рівнянь, яка має такий самий розв'язок: $a=8$, $b = 3$.

Зрозуміло, що, розв'язуючи задачу другим способом, замість x можна підставити будь-які (допустимі) числові значення.

7. Доведіть, що рівність $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ правильна при умові, що $(a+b)(b+c)=0$ і $abc \neq 0$.

Ця задача не зовсім вдало сформульована[1]: не вказано, якою умовою (необхідною, достатньою чи необхідною і достатньою) є рівність $(a+b)(b+c)=0$. Дослідимо це питання.

Рівність $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ правильна при тих самих значеннях змінних a, b, c, при яких правильна рівність

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1,$$

або

$$((a+b)+c)\left(\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{c}\right)=1,$$

$$\frac{(a+b)^2}{ab}+\frac{a+b}{c}+\frac{c(a+b)}{ab}+1=1,$$

$$(a+b)\left(\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{c}+\frac{c}{ab}\right)=0,$$

$$(a+b)\cdot\frac{ca+cb+ab+c^2}{abc}=0,$$

$$\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc}=0.$$

Як бачимо, щоб дана рівність була правильною, досить, щоб хоч один з двочленів $a+b$, $a+c$, $b+c$ дорівнював нулю, але жодне з чисел a, b, c не дорівнювало нулю. Сформульована в задачі умова тільки достатня.

Якби в задачі треба було показати, що ця умова достатня, то розв'язувати її можна було б способом випробувань.

Якщо $(a+b)(b+c)=0$, то або $a=-b$, або $b=-c$. У першому випадку рівність можна записати так: $\frac{1}{-b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{-b+b+c}$, у другому — так: $\frac{1}{a}+\frac{1}{-c}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a-c+c}$. Кожна з цих рівностей правильна при всіх відмінних від нуля значеннях змінних a, b, c. Отже, задачу розв'язано повністю.

---

[1] Її умову краще записати так: $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ і $abc \neq 0$.

Перетворення ірраціональних виразів

Вперше з ірраціональними виразами учні ознайомлюються в VII класі. Звичайно спочатку розглядають лише квадратні радикали. Нагадаємо, що тепер символ $\sqrt{\ }$ використовують тільки для позначення арифметичного кореня, отже, писати, наприклад, що $\sqrt{81} = \pm 9$, не можна. Особливу увагу слід звернути на тотожність $\sqrt{x^2} = |x|$, запропонувавши учням таку, наприклад, вправу.

Замініть вираз тотожно рівним:

а) $\sqrt{(x-4)^2}$, якщо $x < 4$;

б) $\sqrt{(x-4)^2}$, якщо $x < 7$.

Розв'язання. а) При $x < 4$ вираз $x - 4$ має від'ємні значення, тому $\sqrt{(x-4)^2} = 4 - x$.

б) Розглянемо два випадки. Якщо $x < 4$, то $\sqrt{(x-4)^2} = 4 - x$. Якщо $4 \leqslant x < 7$, то $\sqrt{(x-4)^2} = x - 4$. Результати можна об'єднати і записати так:

$$\sqrt{(x-4)^2} = \begin{cases} 4 - x, & \text{якщо } x < 4, \\ x - 4, & \text{якщо } 4 \leqslant x < 7. \end{cases}$$

Деякі методисти вже на початку вивчення квадратних коренів пропонують учням такі вправи.

1. Виконайте дії $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2}$ при $x > 0$.

Розв'язання..

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2} = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{x^2} = |x - 2| + |x|.$$

Якщо $0 < x < 2$, то $|x-2| + |x| = 2 - x + x = 2$;

якщо $x = 2$, то $|x - 2| + |x| = 0 + 2 = 2$;

якщо $x > 2$, то $|x - 2| + |x| = x - 2 + x = 2x - 2$.

Отже,

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2} = \begin{cases} 2, & \text{якщо } 0 < x \leqslant 2, \\ 2x - 2, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Такі вправи краще розв'язувати пізніше, під час вивчення перетворень ірраціональних виразів. (Зауважимо, що розв'язання, подане в [1, 248], неправильне).

2. Спростіть вираз

$$\left(\frac{3}{\sqrt{1+c}} + \sqrt{1-c}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-c^2}} + 1\right).$$

Розв'язання. Щоб не записувати ще раз цей вираз, позначимо його, наприклад, буквою A. Тоді

$$A = \frac{3 + \sqrt{1-c} \cdot \sqrt{1+c}}{\sqrt{1+c}} \cdot \frac{\sqrt{1-c^2}}{3 + \sqrt{1-c^2}} = \frac{(3 + \sqrt{1-c^2}) \cdot \sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1+c} \cdot (3 + \sqrt{1-c^2})} = \sqrt{1-c}.$$

Бажано дослідити область визначення даного виразу. Маємо: $1+c>0$, $1-c>0$, звідки $-1<c<1$. Отже, даний вираз визначений на множині $]-1;\ 1[$, а знайдений на множині $]-\infty;\ 1]$.

Відповідь. $A=\sqrt{1-c}$, де $c\in]-1;\ 1[$.

3. Доведіть, що коли $x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$ і $a<b<2a$, то

$$\frac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1+ax)\sqrt{1-bx}}=1.$$

Ця задача є в багатьох збірниках. Відомо багато способів її розв'язування, але всі вони досить громіздкі і нераціональні. Найкраще роз'язувати її так.

З умови $x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$ випливає $a^2x^2=\frac{2a}{b}-1$ або $b=$ $=\frac{2a}{1+a^2x^2}$.

Тому

$$\frac{(1-ax)\sqrt{1+bx}}{(1+ax)\sqrt{1-bx}}=\frac{(1-ax)\sqrt{1+\frac{2ax}{1+a^2x^2}}}{(1+ax)\sqrt{1-\frac{2ax}{1+a^2x^2}}}=\frac{(1-ax)\sqrt{\frac{(1+ax)^2}{1+a^2x^2}}}{(1+ax)\sqrt{\frac{(1-ax)^2}{1+a^2x^2}}}=1,$$

оскільки при $a<b<2a$ значення виразу $\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$ менше від 1, і, отже, $1-ax>0$ і $1+ax>0$.

Примітка. Замість наведеної вище умови в усіх збірниках дано таку: $0<a<b<2a$. Але з нерівностей $a<b<2a$ випливає: $0<a$.

4. Доведіть, що $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt{5\sqrt{2}-7}=2$.

Дуже часто учні цю задачу розв'язують так.

Піднесемо обидві частини тотожності, яка доводиться, до куба:

$$(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})^3=8,$$

$$5\sqrt{2}+7-5\sqrt{2}+7-3\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\times$$

$$\times\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)=8,$$

$$14-3\cdot(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})=8.$$

Але $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$, то $14-3\cdot 2=8$, або $8=$ $=8$. Ця рівність правильна, отже й дана рівність теж правильна.

Таке міркування не переконливе. Встановлюється тільки, що з рівності $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ випливає $(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-$ $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})^3=8$. Але цього не досить для доведення.

Розв'язати цю задачу можна так.

Перший спосіб. Припустимо, що дана рівність неправильна. Отже, $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}<2$, або $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-$ $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}>2$. Піднісши до куба кожну з її частин і виконавши перетворення, аналогічні до наведених вище, дістанемо відповідно $8<8$, або $8>8$. Як бачимо, наше припущення неправильне. Отже, дана рівність правильна.

Другий спосіб. Нехай $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=x$. Тоді, піднісши обидві частини цієї рівності до куба, після спрощень дістанемо $14-3x=x^3$ або $x(x^2+3)=14$. Значення $x=2$ задовольняє це рівняння, а будь-яке інше дійсне значення x його не задовольняє, бо коли $x<2$, то й $x(x^2+3)<14$, а коли $x>2$, то й $x(x^2+3)>14$. Звідси випливає, що $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$.

Третій спосіб. Звернемо увагу на те, що

$$5\sqrt{2}+7=(\sqrt{2}+1)^3,\ 5\sqrt{2}-7=(\sqrt{2}-1)^3.$$

Отже,

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3}-\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}=$$
$$=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2.$$

Дві останніх задачі порівняно важкі, тому їх краще запропонувати лише сильнішим учням.

2. Функції і їх властивості

Відповідність і функції

Як відомо, сучасне означення функції значно відрізняється від класичного [5, 70]. Якщо раніше функцією називали залежну змінну величину, то тепер функція — це відповідність між двома множинами, в якій кожному елементу однієї множини відповідає один і тільки один елемент другої. Сучасне поняття функції значно ширше, ніж класичне.

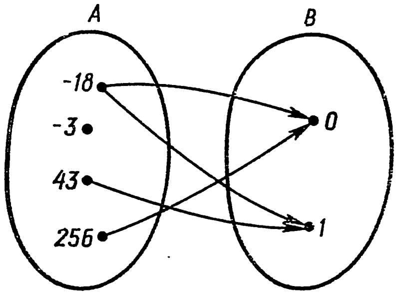
Щоб учні глибоко зрозуміли поняття функції, бажано спочатку розкрити зміст поняття «відповідність», навести приклади відповідностей і способи їх задання. Насамперед доцільно дати вправи на зображення відповідності стрілками.

1. Дано дві множини: $A=\{-18; -3; 43; 256\}$ і $B=\{0; 1\}$. Встановіть яку-небудь відповідність: а) між множиною A і множиною B; б) між множиною B і множиною A.

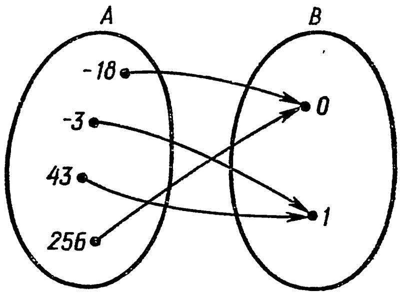
Ця задача невизначена, бо між даними множинами можна встановити дуже багато різних відповідностей.

Наведемо два приклади відповідностей між A і B (мал. 13, 14) і два між B і A (мал. 15, 16). Відповідності між множинами можна зображувати не тільки так, як на мал. 13—16. Зокрема, відповідність, подану на мал. 14, можна зобразити й інакше:

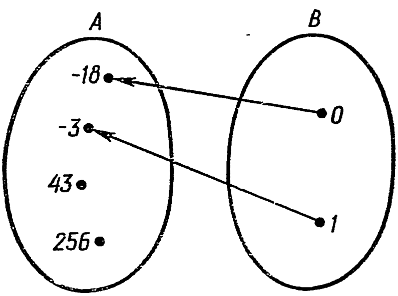
а) так, як на мал. 17; б) — 18 → 0; —3 → 1; 43 → 1; 256 → 0; в) так, як на мал. 18.



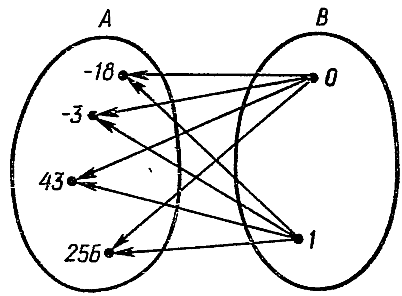
Мал. 13.



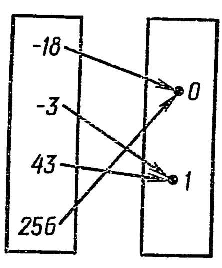
Мал. 14.



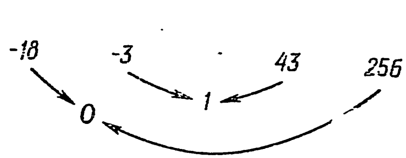
Мал. 15.



Мал. 16.



Мал. 17.



Мал. 18.

Можна й не малювати стрілок, а написати тільки впорядковані пари відповідних елементів (—18; 0), (—3; 1), (43; 1), (256; 0), або скористатися табличним заданням відповідності:

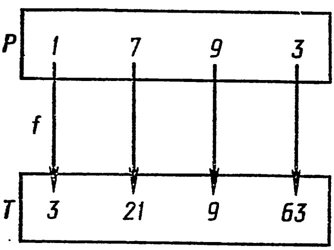
—18	—3	43	256
0	1	1	0

На таких прикладах бажано показати, коли відповідність є функцією, а коли ні. Зокрема, розглянута відповідність — функція, бо в ній кожному елементу множини A відповідає один і тільки один елемент множини B. Відповідності, зображені на мал. 13 і 16, не є функціями.

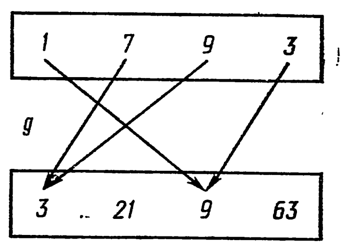
За допомогою таких прикладів можна ввести також поняття області визначення та множини значень функції.

Розв'яжемо ще таку вправу.

2. Дано дві множини $P = \{1; 7; 9; 3\}$ і $T = \{3; 21; 9; 63\}$. Встановіть між множинами P і T три відповідності, причому так, щоб дві з них були функціями.



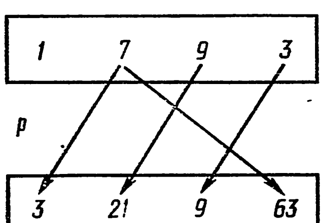
Мал. 19.



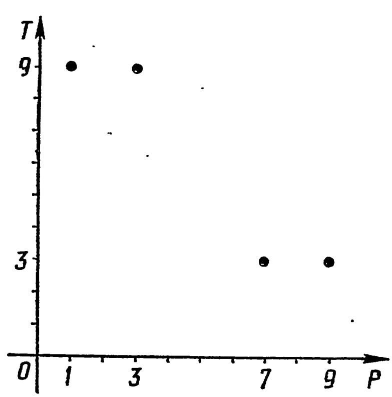
Мал. 20.

Ця задача також невизначена, бо різних відповідностей між множинами P і T можна встановити дуже багато. Наведемо три приклади (мал. 19, 20, 21).

Відповідності f і g — функції, а p — не функція, бо елементу 7 множини P відповідає не один, а два елементи множини T: числа 3 і 63.



Мал. 21.

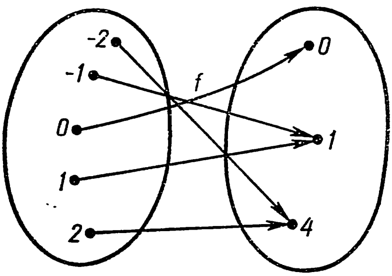


Мал. 22.

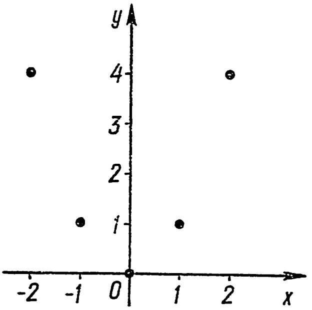
Відповідність g можна подати і в прямокутній системі координат (мал. 22). Функцію f так зображати недоцільно, бо не зовсім зручно будувати точку з координатою 63. Зрозуміло, що учні можуть назвати й інші відповідності і зобразити їх інакше: за допомогою пар або таблично.

Бажано запропонувати учням кілька вправ на різні задання функцій.

3. Побудуйте графік функції f, заданої за допомогою стрілок (мал. 23). (Див. мал. 24).



Мал. 23.



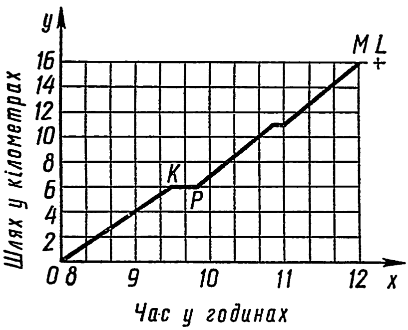
Мал. 24.

4. Задайте формулою функцію, задану таблично:

x	—4,5	—2	0	7	8
y	—9	—4	0	14	16

Такі задачі звичайно розв'язують способом випробувань. Як бачимо, кожне значення змінної y дорівнює відповідному значенню змінної x, помноженому на 2. Отже, $y = 2x$. Функцію можна задати формулою $y = 2x$ на множині $\{-4{,}5; -2; 0; 7; 8\}$.

Знайдена формула не єдино можлива. Наприклад, формула $y = 2x + (x - 2)(x - 4{,}5)(x - 7)(x - 8)x$ теж відповідає даній таблиці. Таке зауваження можна зробити в старших класах, у VI класі краще про це не говорити.



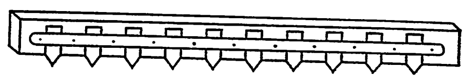
Мал. 25.

5. На мал. 25 подано графік руху туриста, який вийшов з турбази A у напрямі залізничної станції B. Визначити:

а) скільки часу витратив турист, щоб пройти від A до B;
б) яка середня швидкість туриста;
в) скільки хвилин він витратив на 1-й привал; на 2-й привал;
г) скільки кілометрів проходив турист за кожну годину;
д) скільки часу витратив турист, щоб пройти перші 8 *км*; наступні 8 *км*;
е) чи міг турист встигнути на поїзд, що відходить від станції B о 12 *год* 10 *хв*, якби він після першого привалу йшов без зупинки з початковою швидкістю.

Такі задачі доцільно розв'язувати усно. Учень повинен «читати» графік, поданий на малюнку.

Відповідь. а) 4 *год*; б) 4 *км/год*, бо турист за 4 *год* пройшов 16 *км*; в) 20 *хв*, 10 *хв*; г) за першу годину турист пройшов 4 *км*, за другу — 3 *км*, за третю — 4 *км*, за четверту — 5 *км*; д) перші 8 *км* турист пройшов за 2 *год* 15 *хв*, а наступні 8 *км* — за 1 *год* 45 *хв*; е) ні. Справді, пряма, проведена через точку P і паралельна прямій OK, проходить через точку L. Отже, турист прийшов би в B о 12 *год* 20 *хв*. До цього самого висновку можна прийти, довівши, що пряма OK проходить через M.



Мал. 26.

На таких вправах зручно вчити учнів «читати» графіки. Для цього бажано мати спеціальні таблиці. Якщо на дошці накреслено квадратну сітку, то неважко накреслити графік. Для нанесення такої сітки радимо зробити багаторядний рейсмус — дерев'яну планку, до якої прикріплено на однаковій відстані один від одного кілька крейдових стержнів (мал. 26).

Велике значення в курсі математики мають поняття «область визначення» і «множина значень» функції. Щоб учні добре засвоїли ці поняття, бажано закріпити їх на вправах. Однак, перед тим як перейти до методики розв'язування таких вправ, зробимо кілька зауважень щодо цих понять.

Якщо функцію задано графіком у прямокутній системі координат, то проекція графіка на вісь абсцис є її областю визначення, а на вісь ординат — множиною значень. Якщо функцію задано однією рівністю $y = f(x)$, то область її визначення може бути довільною частиною області визначення виразу $f(x)$.

Учні середньої школи не повинні ототожнювати область визначення функції з областю визначення виразу, яким її задано. Тільки після того як буде внесено повну ясність щодо цих двох понять, бажано домовитись, що коли функцію задано аналітично і про область визначення її нічого не сказано, то областю визначення функції вважають область визначення аналітичного виразу, яким її задано.

Іноді доводиться розглядати функцію на множині значень змінної, вужчій, ніж область визначення відповідного виразу. Якщо, розв'язавши задачу, в якій буквою x позначено певну кількість людей, дістанемо вираз $3x + 8$, то хоч допустимими значеннями x для даного виразу є всі дійсні числа, все ж областю визначення функції $x \to 3x + 8$ треба вважати множину натуральних чисел.

Раніше в школі розглядали тільки такі функції, області визначення яких являли собою або множину дійсних чисел, або якийсь проміжок — відрізок чи промінь. Тепер учням пояснюють, що область визначення функції може бути довільною множиною, зокрема може складатися з кількох відрізків тощо. Щоб учні зрозуміли це, слід запропонувати їм і такі, наприклад, задачі.

6. Функцію P задано за допомогою пар: $(1;\ 1)$, $\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(5;\ \frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{2}{7};\ \frac{1}{2}\right)$, $(-0{,}01;\ -100)$. Назвіть область визначення функції і множину її значень.

Розв'язання. Областю визначення функції P є множина перших елементів пар, тобто $\left\{1; 2; 5; \frac{2}{7}; -0{,}01\right\}$. Множиною значень цієї функції є множина всіх других елементів пар $\left\{1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{5};\ -100\right\}$. Число $\frac{1}{2}$ пишемо тільки один раз, бо всі елементи множини повинні бути різними.

Під час розв'язування таких вправ бажано нагадувати учням, що другі елементи пар можуть бути однаковими, а перші — ні. Наприклад, відповідність f задана за допомогою пар $(1;\ 1)$, $\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(2;\ \frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{2}{7};\ \frac{1}{2}\right)$, не є функцією, бо в ній тому самому елементу 2 відповідають два різних: $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{5}$.

7. Функцію задано формулою $y = -x - 1$ на множині $]-5; -1[\cup]\ 0; 5[$. Побудуйте графік цієї функції (див. мал. 27).

Зауважимо, що іноді ту саму функцію на різних проміжках можна задати по-різному, наприклад:

8. Функцію f задано на множині $X =]-\infty\ ; +\infty[$, причому, якщо, $x \in]-\infty; 0[$, то $y = -0{,}5\,x$; якщо $x \in [0;\ +\infty[$, то $y = 2x$.
Побудуйте графік функції f. Знайдіть $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(2{,}5)$.

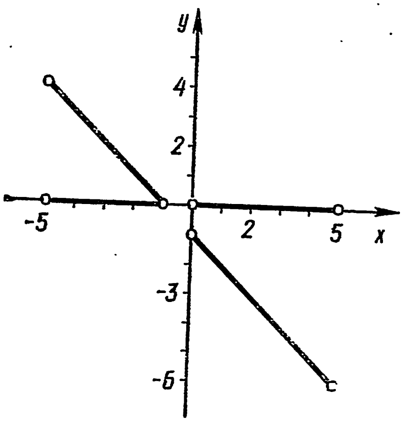
Дану функцію можна записати так:

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}5x, & \text{якщо } x < 0, \\ 2x, & \text{якщо } x \geqslant 0. \end{cases}$$

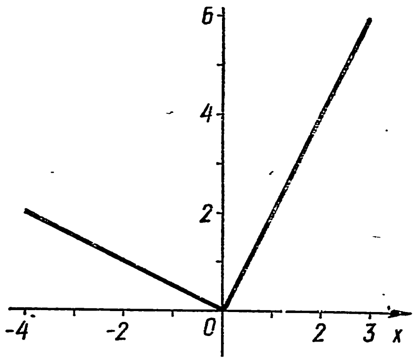
Її графік подано на мал. 28. З нього неважко визначити: $f(-4) =$ $= 2$, $f(-2) = 1$, $f(0) = 0$, $f(3) = 6$, $f(2{,}5) = 5$.
Ці значення функції можна обчислити, не користуючись графіком: число -4 від'ємне, отже, підставляючи його у рівність $y = 0{,}5\ x$, дістаємо 2, і т. д.

Розв'язуючи з учнями такі вправи, треба наголошувати на тому, що в них йдеться не про дві, а про одну функцію f, хоч на різних проміжках області визначення її задано по-різному. Цю функцію можна задати і однією рівністю, наприклад: $y = \frac{5}{4}|x| + \frac{3}{4}x$. Шестикласникам про це можна не говорити.

Іноді замість терміна «область визначення функції» пишуть



Мал. 27.



Мал. 28.

«область означення», «область задання», «область існування», «область зміни аргументу», «область допустимих значень функції» та ін. Автори деяких методичних посібників, наводячи ці терміни, пропонують встановити їх рівносильність, а потім користуватися тільки одним з них. Ми вважаємо, що учням досить дати тільки такі терміни: «область визначення функції» і «множина значень функції».

Здебільшого область визначення і множину значень функцій (числових) задають за допомогою нерівностей. Графічно їх зображають у вигляді частин прямої. Ці числові множини часто називають «відрізками», «інтервалами», «півінтервалами» тощо. У восьмирічній школі краще користуватися загальним терміном — «проміжок».

Але не слід забувати, що область визначення функції може складатися з кількох проміжків і навіть з ізольованих точок, а також бути множиною всіх дійсних чисел без однієї чи кількох точок.

9. Покажіть, що графік функції, заданої рівнянням $y = \frac{x^2}{x-2} +$ $+ \frac{4}{2-x}$, є пряма без однієї точки.

Розв'язання. Подамо функцію в іншому вигляді:

$$y=\frac{x^2}{x-2}-\frac{4}{x-2}=\frac{x^2-4}{x-2}=\begin{cases}x+2, & \text{якщо } x\neq 2;\\ \text{не має змісту}, & \text{якщо } x=2.\end{cases}$$

Як бачимо, область визначення цієї функції $]-\infty;\ 2[\ \cup\ ]2;\ +\infty\ [$. Її графік відрізняється від графіка функції $y=x+2$ (прямої) тільки тим, що з нього вилучено одну точку (2,4).

Лінійні функції

З лінійними функціями учні ознайомлюються вперше в VI класі. Нагадаємо, що лінійною називається функція, яку можна задати формулою виду $y=kx+b$, де x і y — змінні, а k і b — числа. Лінійну функцію можна задати не тільки формулою, а й таблицею, графіком та іншими способами. Щоб учні краще зрозуміли це, бажано їм запропонувати, наприклад, такі вправи.

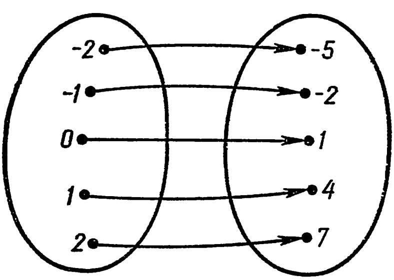
1. Покажіть, що відповідність, задана таблицею

x	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5	6
y	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

,

є лінійною функцією.

Щоб розв'язати цю задачу, досить записати рівність $y=2x+7$ і показати, що всі наведені в таблиці пари відповідних значень x і y задовольняють її. Добираючи потрібну рівність, слід виходити з рівності $y=kx+b$, використовуючи дві довільні пари відповідних значень. Якщо $x=0$, то $y=7$. Отже, $7=k\times 0+b$, звідки $b=7$. Якщо $x=1$, то $y=9$; отже, $9=k\cdot 1+7$, звідки $k=2$.



Мал. 29.

У старших класах цю задачу можна розв'язувати інакше. Досить показати, що дані в таблиці значення змінної y (вони відповідають послідовним натуральним значенням x) становлять арифметичну прогресію. Отже, всі прирости значень функції пропорціональні відповідним приростам аргументів, а таку властивість мають тільки лінійні функції.

2. Доведіть, що відповідність, задана стрілками на мал. 29, є лінійною функцією.

Цю задачу можна розв'язати, як і попередню, склавши спочатку таблицю відповідних значень x і y.

x	—2	—1	0	1	2
y	—5	—2	1	4	7

Таблицю не обов'язково записувати, досить скористатися малюнком. Щоб переконатися, що дана функція лінійна, слід побудувати її графік. Усі 5 точок цього графіка лежать на одній прямій — функція лінійна.

Цю функцію можна задати не тільки формулою $y = 3x + 1$, а й багатьма іншими, наприклад: $y = [3x] + 1$, $y = 3[x] + 1$. Взагалі, кілька пар відповідних значень змінних x і y не визначають повністю формулу $y = f(x)$. Учням VI класу можна цього не говорити.

3. Функцію f задано формулою $y = 0{,}5x — 1$ на проміжку [—4; 6]. Знайдіть множину значень функції.

Дана функція зростаюча, тому досить визначити її найменше і найбільше значення на даному відрізку.

Якщо $x = —4$, то $y = 0{,}5 \cdot (—4) — 1 = —3$.

Якщо $x = 6$, то $y = 0{,}5 \cdot 6 — 1 = 2$.

Отже, множина значень даної функції [—3; 2].

Застерігаємо, що таким способом не можна визначати множину значень немонотонної функції. Наприклад, якщо на проміжку [—4; 6] задано функцію $y = x^2 — 1$, то при $x = —4$ і $x = 6$ вона набуває відповідно значень 15 і 35. Але з цього не випливає, що множина значень даної функції є [15; 35].

Доцільно, формулюючи такі задачі, говорити про відображення однієї множини на іншу.

4. На яку множину відображає функція $y = — 2x + 3$ проміжок]2; 4[?

Щоб розв'язати задачу, слід спочатку показати, що дана функція спадна, а потім обчислити її значення при $x_1 = 2$ і $x_2 = 4$. Дістанемо: $y_1 = —1$ і $y_2 = —5$. Отже, функція f відображає проміжок]2; 4[на проміжок]—5; —1[.

Таке розв'язання для багатьох учнів може бути незрозумілим, тому краще цю задачу розв'язати графічно (мал. 30).

5. Лінійна функція на множині $X = [—5; 0]$ задана деякою формулою. Знайдіть цю формулу, якщо значення функції утворюють множину $Y = [0; 5]$?

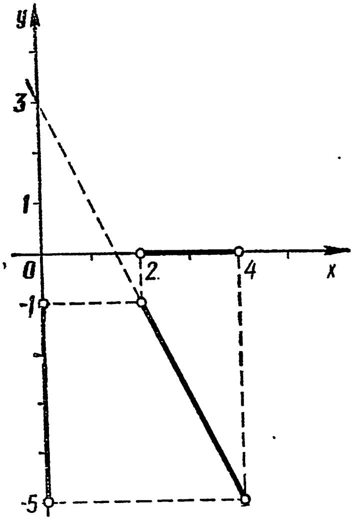
Р о з в 'я з а н н я. На осях координат слід позначити множини X і Y. Щоб шукана лінійна функція відобразила X на Y, її графіком має бути відрізок KM або OP. Перший з них проходить через точки K (—5; 0) і M (0; 5). Підставивши дві пари відповідних значень x і y у рівність $y = kx + b$, дістанемо, $y = x + 5$. Аналогічно знаходимо рівняння другої функції: $y = -x$ (мал. 31).

В і д п о в і д ь: $y = x + 5$ або $y = -x$.

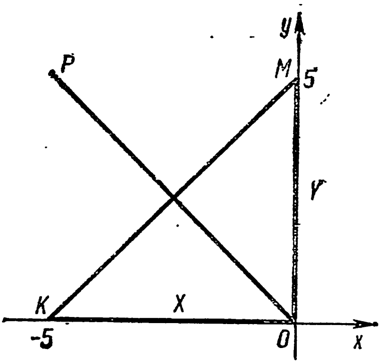
Коли б у задачі не було сказано, що функція лінійна, то вона мала б безліч різних розв'язків.

6. Швидкість v поширення звуку в повітрі залежно від його температури t можна визначити за формулою $v = 331 + 0{,}6t$. Побудуйте графік швидкості поширення звуку в повітрі. Знайдіть за графіком, з якою швидкістю поширюється звук зимового дня, коли температура -35°C, і літнього дня, коли температура $+30$°C.

Якби учні почали будувати весь графік, він не вмістився б



Мал. 30.



Мал. 31.

на сторінці зошита. Бажано зробити розрив і малювати так, як це показано на мал. 32.

7. Щоб відправити телеграму, треба заплатити 3 коп. за кожне слово і ще 10 коп. Скільки коштує відправлення телеграми з x слів? Позначте вартість телеграми (у копійках) буквою y. Складіть формулу вартості телеграми і побудуйте графік. Чому залежність y від x є лінійна функція? Яка область її визначення?

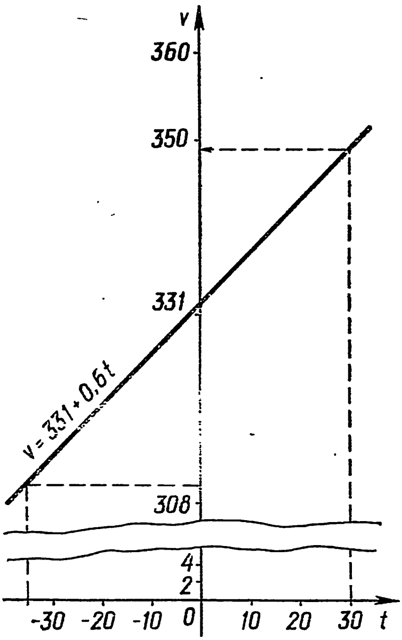
Розв'язуючи цю задачу, доцільно спочатку записати в таблицю кілька пар відповідних значень x і y.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	13	16	19	22	25	28	31	34

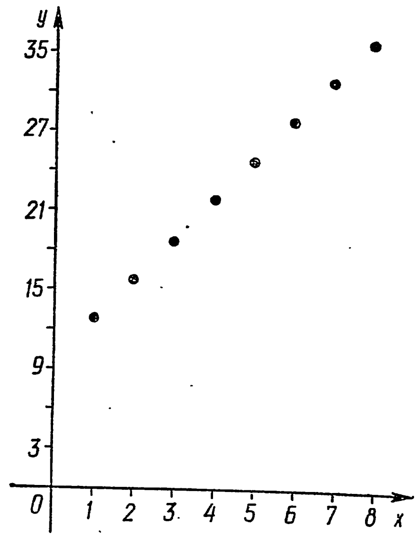
Тепер не важко здогадатися, що залежність між змінними x і y можна виразити формулою $y = 3x + 10$. Отже, ця залежність є лінійною функцією. Змінна x може набувати тільки натуральних значень. Таким чином, область визначення цієї функції — множина натуральних чисел. Її графік складається з ізольованих одна від одної точок (мал. 33).

8. Вважають, що при заглибленні на кожні 30,5 *м* внутрішня температура землі підвищується на 1°С. Якщо на глибині 5 *м* температура дорівнює 10°С, то

1) яка температура буде на глибині 1000 *м*? 2) на якій глибині температура досягне точки кипіння води?



Мал. 32.



Мал. 33.

Залежності, про яку йдеться в цій задачі, відповідає лінійна функція $t = \frac{h - 5}{30,5} + 10$, де t температура в градусах, h — глибина в метрах. Змінна h може набувати довільних дійсних значень, більших від 5. Звичайно, існує і верхня межа h, але вона значно більша від тих значень, про які йдеться в задачі, тому її можна не вказувати.

Використавши формулу $t = \frac{h - 5}{30,5} + 10$, запишемо:

$$t = \frac{1000 - 5}{30,5} + 10 \approx 42 \text{ (градусів), якщо } h = 1000;$$

$$100 = \frac{h - 5}{30,5} + 10, \; h = 2750 (м), \text{ якщо } t = 100.$$

Примітка. Ця задача в збірнику [17, 144] сформульована трохи інакше: замість слів «на глибині 5 *м*» написано «на поверхні землі». Таке формулювання приводить до простішої формули:

$$t = \frac{h}{30{,}5} + 10,$$

але вона дещо спотворює дійсність.

Для учнів VI класу розглянута задача може бути важкою, тому доцільніше запропонувати її в VII або у VIII класі. Взагалі, хоч лінійну функцію й вивчають у VI класі, деякі задачі, пов'язані з цим матеріалом, варто розв'язувати пізніше. Особливо це стосується задач на дослідження таких функцій.

Що означає дослідити функцію? Завдання дослідити функцію взагалі невизначене, бо під час дослідження можна з'ясовувати різні питання, а саме: при яких значеннях змінної функція існує, при яких вона додатна, від'ємна, дорівнює нулю, при яких набуває найменшого значення, при яких — найбільшого, коли значення функції більші від одиниці, коли — менші, коли виражаються цілими числами, а коли — раціональними тощо. Але в шкільному курсі математики під дослідженням функції розуміють цілком певне коло вимог. Дослідити функцію — це означає:

1) вказати її область визначення і множину значень,
2) визначити, парна чи непарна вона,
3) дослідити її на періодичність,
4) установити інтервал знакосталості,
5) визначити її корені (нулі),
6) з'ясувати, чи монотонна вона,
7) визначити її максимуми і мінімуми,
8) визначити проміжки зростання і спадання функції.

Дослідження функції прийнято супроводжувати побудовою її графіка, який допомагає досліджувати функцію і одночасно є підсумком дослідження.

Правда, детальне дослідження виконують тільки в старших класах, а учні VI—VIII класів досліджують тільки окремі властивості функції.

9. Вкажіть область визначення і множину значень функції $y = ax - 2$.

Щоб виконати цю вправу, не треба робити ніяких записів. Досить з'ясувати, що дана функція лінійна, і дати відповідь.

Але розв'язування таких вправ може привести до непорозумінь. Відомо, щоб задати функцію, однієї формули не досить, треба вказати також область її визначення. У даній вправі замість того щоб вказати цю область, пропонується знайти її. По суті, тут треба знайти область визначення виразу $ax - 2$. А функція, задана формулою $y = ax - 2$, може мати різні області визначення. Це буде й множина додатних, або натуральних, або цілих чисел і т. д.

Часто учні вважають множиною значень цієї функції множину всіх дійсних чисел (або раціональних, якщо вправу розглядають до ознайомлення з ірраціональними числами). Це неправильно. Коли дана функція розглядається на множині всіх дійсних чисел, то множиною її значень є:

а) множина всіх дійсних чисел, якщо $a \neq 0$,

б) $\{-2\}$, якщо $a = 0$.

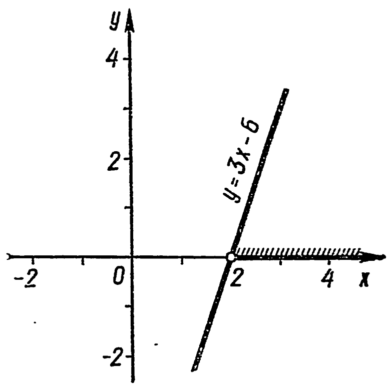
10. Знайдіть, при яких значеннях x функція $f(x) = 3x - 6$ набуває додатних значень (відповідь перевірте графічно).

Р о з в ' я з а н н я. Знайти, при яких значеннях x значення виразу $3x - 6$ додатне, означає розв'язати нерівність $3x - 6 > 0$.

Маємо: $3x > 6$, $x > 2$.

В і д п о в і д ь. $f(x) > 0$ тоді і тільки тоді, коли $x > 2$.

Графічно результат можна дістати без будь-яких обчислень. Побудувавши графік даної функції (мал. 34), побачимо, що він розміщений над віссю Ox при $x > 2$. Отже, при таких і тільки таких значеннях x значення $3x - 6$ додатні.



Мал. 34.

11. Чи може лінійна функція бути: а) парною, б) непарною, в) ні парною, ні непарною, г) парною і непарною?

В і д п о в і д ь. а) Може; парною є кожна функція, задана рівністю $y = ax + b$, якщо $a = 0$.

б) Може; такою є кожна функція $y = ax$.

в) Може; такою, наприклад, є функція $y = 2x + 3$.

г) Може; такою є функція $y = 0$. Графік цієї функції — вісь x — симетричний і відносно осі y, і відносно точки 0.

Сказане вище стосується тих лінійних функцій, які визначені на множині всіх дійсних чисел або на її підмножині, симетричній відносно точки 0.

Квадратні і степеневі функції

Нагадаємо, що квадратною називається кожна функція, яку можна задати рівністю $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, b, c — довільні числа.

До системи вправ на квадратні функції насамперед треба віднести такі, які давали б можливість:

1) уточнити зміст поняття «квадратна функція»,

2) навчити учнів будувати її графіки,

3) виробити навички дослідження квадратних функцій,

4) використовувати властивості квадратної функції для розв'язування рівнянь і нерівностей.

Бажано наводити приклади і таких квадратних функцій, які визначені не на всій множині дійсних чисел, а тільки на довільній її підмножині, або тих, що виражають залежності між конкретними фізичними чи іншими величинами. Такі вправи є в нових навчальних посібниках.

Графік функції $y = ax^2$ при довільних раціональних значеннях a вивчається в VI класі. В VII класі учнів треба навчити будувати графік функції $y = ax^2 + bx + c$ при довільних a, b, c. Тут же слід розглянути і кілька прикладів функцій з модулями.

Бажано запропонувати учням вправи, в яких треба з'ясувати, чи проходить графік даної функції через певну точку, при яких значеннях параметрів парабола проходить через дану точку, які координати вершини параболи та ін.

Розглянемо кілька вправ про квадратні функції.

1. Функцію задано таблицею

x	—3	—2	—1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Доберіть який-небудь вираз для $f(x)$ і скажіть, в чому полягає правило f.

Насамперед уважно розглянемо таблицю. В ній кожному числу першого рядка відповідає квадрат цього числа в другому рядку. Отже, маємо функцію $x \to x^2$. Правило f в даному випадку полягає ось у чому: щоб знайти $f(x)$, досить піднести x до квадрата.

Вказавши на таку відповідність, звертаємо увагу учнів на слово «який-небудь». Виявляється, є безліч різних виразів $f(x)$, які на даній множині відповідають цій самій функції, наприклад:

$$f(x) = x^2 - (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)x,$$
$$f(x) = x^2 + 5x(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$$

і т. ін.

2. Знайдіть координати вершини параболи $y = 0{,}25x^2 + x$.

Розв'язання.

Перший спосіб. Виділимо повний квадрат.

$$y = 0{,}25x^2 + x = 0{,}25(x + 2)^2 - 1.$$

Отже, маємо параболу $y = 0{,}25x^2$, перенесену вліво від осі Oy на дві одиниці і вниз від осі Ox на одиницю масштабу. Тому вершина цієї параболи знаходиться в точці (—2; —1).

Другий спосіб. Запишемо дану рівність у вигляді $y = x(0{,}25x + 1)$. Очевидно, парабола перетинає вісь Ox в точках $A(-4)$ і $O(0)$. Абсциса вершини параболи (середини відрізка AO) $x = \frac{-4+0}{2} = -2$. Її ордината $y = 0{,}25x^2 + x|_{x=-2} = -1$.

Відповідь. $(-2; -1)$.

Звичайно, не слід вимагати від учнів, щоб вони запам'ятали, що вершина параболи $y = ax^2 + bx + c$ знаходиться в точці $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

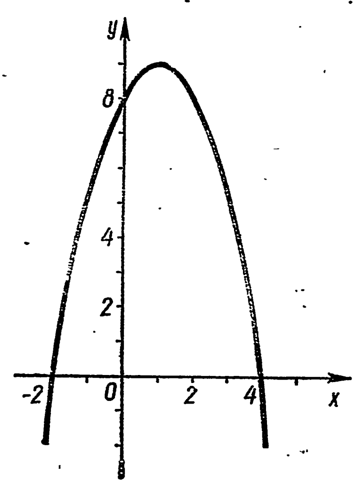
3. Яке рівняння відповідатиме параболі $y = 0{,}25\,x^2$, якщо цю параболу перенести:
   а) на 2 одиниці праворуч і 3 одиниці вниз;
   б) на 5 одиниць ліворуч і 2 одиниці вгору?

Спочатку такі задачі бажано розв'язувати, користуючись схематичними графічними зображеннями, а потім учні повинні давати відповіді на них усно. Записи можна оформіти так.

Дане рівняння	Рівняння графіка, перенесеного горизонтально	Остаточне рівняння
$y = 0{,}25x^2$	$y = 0{,}25\,(x-2)^2$	$y = 0{,}25\,(x-2)^2 - 3$
$y = 0{,}25x^2$	$y = 0{,}25\,(x+5)^2$	$y = 0{,}25\,(x+5)^2 + 2$

4. Побудуйте графік функції $y = 8 + 2x - x^2$. При яких значеннях x значення функції дорівнює нулю? Яке найбільше або найменше значення функції? Вкажіть множину значень x, на якій функція: а) зростає; б) спадає; в) набуває від'ємних значень; г) набуває додатних значень.

Розв'язання. Спочатку побудуємо графік функції $y = 2x - x^2 = x(2 - x)$. Ця парабола перетинає вісь Ox в точках $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$. Отже, графік даної функції проходить через точки $(0;\ 8)$ і $(2;\ 8)$, абсциса вершини параболи, що є її графіком, дорівнює 1. Тому ордината $y = 8 + 2x - x^2|_{x=1} = 9$. Отже, вершина цієї параболи знаходиться в точці $(1; 9)$. Рівняння $8 + 2x - x^2 = 0$ має корені -2 і 4. Отже, парабола перетинає вісь Ox у точках



Мал. 35.

$x_1 = -2$, $x_2 = 4$. Через 5 знайдених точок проведемо параболу (мал. 35).

Виходячи з графіка, можна відразу дати відповіді на поставлені в задачі запитання.

1) Значення функції дорівнює 0 при $x_1 = -2$ і $x_2 = 4$.

2) Найбільше значення функції $y = 9$ (при $x = 1$).

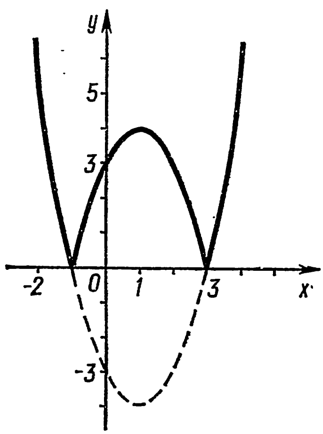
3) Дана функція: а) на множині $]-\infty; 1[$ зростає; б) на множині $]1; +\infty[$ спадає; в) на множині $]-\infty; -2[\cup]4; +\infty[$ набуває від'ємних значень; г) на множині $]-2; 4[$ набуває додатних значень.

5. Побудуйте графіки функцій, заданих на множині всіх дійсних чисел:

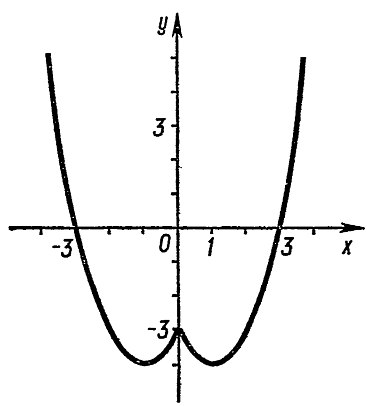
а) $y = |x^2 - 2x - 3|$; в) $y = |x^2 - 2x| - 3$;
б) $y = x^2 - 2|x| - 3$; г) $y = x^2 - |2x + 3|$.

Р о з в ' я з а н н я.

а) Побудуємо спочатку графік допоміжної функції $y = x^2 - 2x - 3$. Це парабола з вершиною в точці $(1; -4)$. При $x < -1$ і при $x > 3$ значення допоміжної функції додатні, а на проміжку $]-1; 3[$ — від'ємні. Дана функція відрізняється від допоміжної тільки тим, що при кожному значенні x, при якому допоміжна функ-



Мал. 36.



Мал. 37.

ція має від'ємне значення, значення даної функції дорівнює протилежному додатному числу. Отже, графік даної функції дістанемо з графіка допоміжної, побудувавши на проміжку $]-1; 3[$ частину параболи, симетричну частині допоміжної параболи, розміщеній нижче від осі x (мал. 36).

На перших порах бажано побудову таких графіків супроводжувати докладними поясненнями. Пізніше ці пояснення можуть бути коротшими.

Можна міркувати її так.

$$y = |x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, \text{ якщо } x \leqslant -1 \text{ або } x \geqslant 3, \\ -x^2 + 2x + 3, \text{ якщо } -1 < x < 3. \end{cases}$$

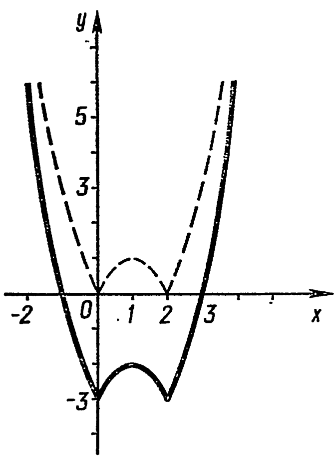
Побудуємо графік функції $y = x^2 - 2x - 3$; ту її частину, що відповідає x з проміжку $]-1;\ 3[$, зітремо і замість неї побудуємо графік функції $y = -x^2 + 2x + 3$. Дістанемо таку саму криву.

б) $$y = x^2 - 2|x| - 3 = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, \text{ якщо } x \geqslant 0, \\ x^2 + 2x - 3, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

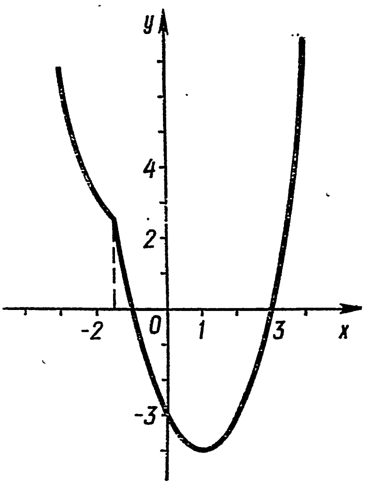
Щоб раціоналізувати побудову, бажано звернути увагу учнів на те, що дана функція парна; отже, її графік симетричний відносно осі y (мал. 37).

в) Побудуємо спочатку графік функції $y = |x^2 - 2x|$, а потім перенесемо його на 3 одиниці в напрямі, протилежному до напряму осі y (мал. 38).

г) $$y = x^2 - |2x + 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3, \text{ якщо } x \geqslant -\frac{3}{2}, \\ x^2 + 2x + 3, \text{ якщо } x < -\frac{3}{2}. \end{cases}$$



Мал. 38.



Мал. 39.

Побудувавши в двох півплощинах частини цих двох парабол, дістанемо графік даної функції (мал. 39).

6. Функція $f(x) = x^2$ задана на відрізку $[0;\ 3]$. Чи оборотна вона? Напишіть формулу, якою задається функція g, обернена до f. Яка область визначення і множина значень функції g?

Р о з в ' я з а н н я. На відрізку $[0;\ 3]$ різним значенням змінної x відповідають різні значення $f(x)$. Отже, функція f оборотна.

Вона кожному числу x з проміжку [0; 3] ставить у відповідність його квадрат (число з проміжка [0; 9]). Тому обернена до неї функція кожному дійсному числу x з проміжку [0; 9] ставить у відповідність його арифметичний квадратний корінь з проміжку [0; 3]. Отже, функцію g можна задати такою формулою:

$$g(x) = \sqrt{x},\ x \in [0; 9].$$

Область визначення функції g є відрізок [0; 9], а множина значень — [0; 3].

Функція $f(x) = \sqrt{x}$ задана на відрізку [0; 9].

7. Напишіть формулу, якою задається функція g, обернена до f. Яка область визначення і множина значень функції g?

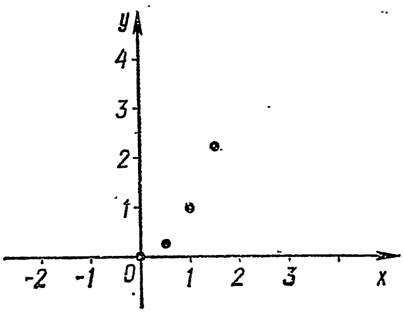
Ця задача обернена до попередньої.

Відповідь. $g(x) = x^2$, де $x \in [0; 3]$.

Множина значень функції g: [0; 9].

8. Функція $f(x) = x^2$ задана на відрізку [—3; 3]. Чи оборотна вона?

Розв'язання. Дана функція f двом протилежним значенням змінної x з проміжку [—3; 3] ставить у відповідність те саме число. Наприклад $f(-2) = 4$ і $f(2) = 4$. Тому відповідність, обернена до f, не є функцією. Отже, функція f не оборотна.



Мал. 40.

9. Функція $f(x) = x^2$ задана на множині $M = \left\{-2;\ \frac{1}{2};\ 0;\ 1;\ \frac{3}{2}\right\}$. Зобразіть відповідність f і обернену до неї відповідність g графічно. Чи є відповідність g функцією? Якщо так, задайте її формулою.

Розв'язання. Відповідність f графічно зобразимо так, як показано на мал. 40. Як бачимо, різним значенням $f(x)$ відповідають різні значення $x \in M$. Отже, дана відповідність оборотна, тому обернена до неї відповідність g є функцією. Формулою її можна задати так:

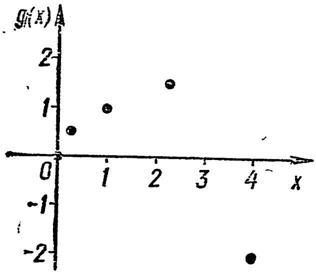
$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{якщо } x \in \left\{0;\ \frac{1}{4};\ 1;\ \frac{9}{4}\right\}; \\ -\sqrt{x}, & \text{якщо } x = 4. \end{cases}$$

Їй відповідає графік, поданий на мал. 41.

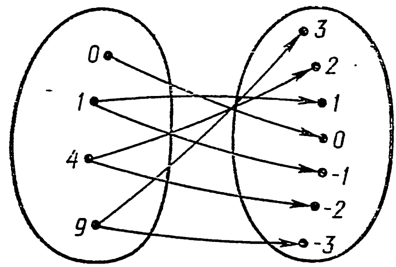
10. Побудуйте графік відповідності f, заданої стрілками на мал. 42. Чи є ця відповідність функцією? Побудуйте графік оберненої до неї відповідності g. Чи є вона функцією?

В і д п о в і д ь. Графіки відповідностей f і g подані на мал. 43, *а*, *б*. Відповідність f не є функцією, а g — функція.

Таких задач раніше не розв'язували навіть у X класі. Тепер з ними треба ознайомити учнів VIII класу.



Мал. 41.

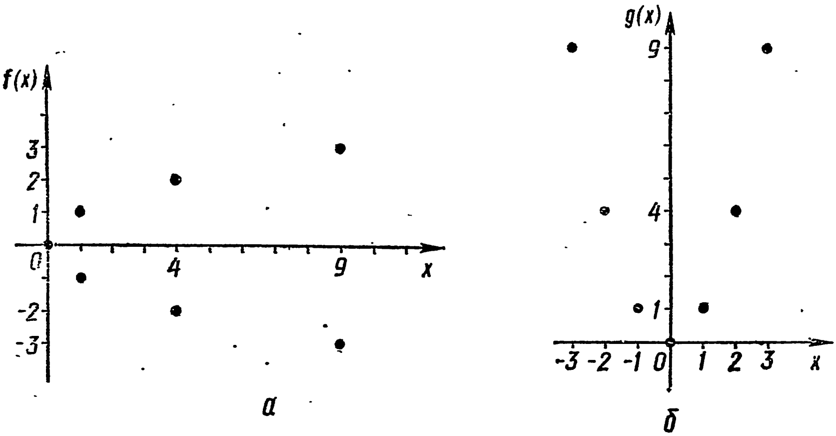


Мал. 42.

Бажано звернути увагу учнів на побудову графіків ірраціональних функцій, наприклад таких:

а) $y=\sqrt{x^2}$, б) $y=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, в) $y=x\sqrt{x^2}$, г) $y=\sqrt{x^2}-x$.

Можна вважати, що функції *а*, *в*, *г* задані на множині всіх дійсних чисел, а *б* — на множині всіх дійсних чисел, крім нуля.



Мал. 43.

Кожна з даних функцій містить вираз $\sqrt{x^2}$. Тому перед тим, як будувати графік, бажано нагадати учням співвідношення:

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

а) Дана функція нічим не відрізняється від функції $y=|x|$. Її графік подано на мал. 44, *а*.

Формули трьох інших функцій бажано записати інакше:

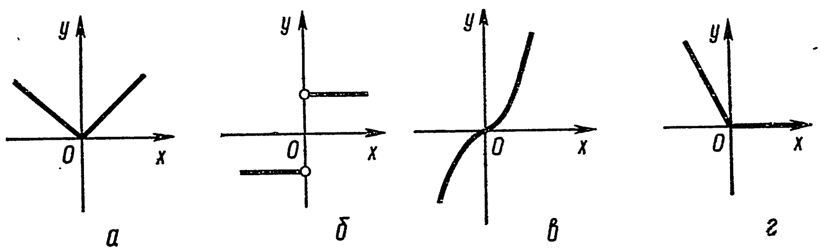
$$\text{б) } y=\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\begin{cases}1, \text{ якщо } x>0;\\ \text{не має змісту, якщо } x=0;\\ -1, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$$

$$\text{в) } y=x\sqrt{x^2}=\begin{cases}x^2, \text{ якщо } x\geqslant 0;\\ -x^2, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$$

$$\text{г) } y=\sqrt{x^2}-x=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\geqslant 0;\\ -2x, \text{ якщо } x<0.\end{cases}$$

Графіки цих функцій подані на мал. 44, *б*, *в*, *г*.

Коли учні побудують графіки таких функцій, доцільно розглянути («вичитати» з графіків) деякі їх властивості. Бажано зазна-



Мал. 44.

чити, що функція а) парна, б) і в) непарні, а г) ні парна, ні непарна. Множини значень функцій а) і г) — множини всіх невід'ємних дійсних чисел, функції в) — множина всіх дійсних чисел, а функції б) — множина $\{-1;\ 1\}$.

Слід також зіставити графіки функцій в) і $y = x^3$ (а в старших класах і $y = \operatorname{tg} x$).

Степеневі функції, складніші від розглянутих, у восьмирічній школі досліджувати не треба.

Дробово-раціональні функції

Дробово-раціональною називається функція, яку можна задати рівністю $y = f(x)$, де $f(x)$ — дробовий (раціональний) відносно змінної x вираз. Найпростішою з них є функція $y = \frac{k}{x}$, тобто обернено пропорційна залежність. З нею учні вперше ознайомлюються в VI класі.

У VII класі можна запропонувати дослідити і побудувати графіки функцій, заданих рівняннями $y=\frac{k}{x-2}$, $y=\frac{k}{x+3}$ і т. д. На кількох таких прикладах слід з'ясувати, що графік функції $y=\frac{k}{x+a}$ такий самий, як і $y=\frac{k}{x}$, тільки зміщений по осі Ox на a одиниць уліво, якщо $a>0$, або на $|a|$ одиниць управо, якщо $a<0$. Можна розглядати й складніші функції.

Але перед тим як досліджувати такі функції, бажано уточнити, що таке область визначення функції, зауважити, що область визначення функції, заданої виразом, може не збігатися з областю визначення даного виразу. Якщо функцію задано аналітично, але не вказано області її визначення, то під останньою слід розуміти область визначення даного виразу. Тільки при цій домовленості можна пропонувати учням такі, наприклад, задачі.

1. Знайдіть область визначення функції f, якщо

а) $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+3)}$; б) $f(x) = \frac{2}{x(x-5)} + \frac{3}{x(x+2)}$; в) $f(x) = \frac{1}{|x| - x}$.

Розв'язання. а) Вираз має зміст тоді, коли знаменник $(x-2)(x+3)$ не дорівнює нулю, тобто коли $x \neq 2$ і $x \neq -3$. Отже, областю визначення даної функції є множина всіх дійсних чисел, крім 2 і —3.

б) Вираз $f(x)$ має зміст тоді, коли $x \neq 0$, $x \neq 5$, $x \neq -2$. Отже, областю визначення даної функції є множина всіх дійсних чисел, крім 0, 5 і —2.

Деякі учні, перед тим як знайти область визначення даної функції, виконують додавання дробових виразів. Цього робити не слід.

в) $|x| - x = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ -2x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

Отже, областю визначення функції f є множина всіх від'ємних чисел.

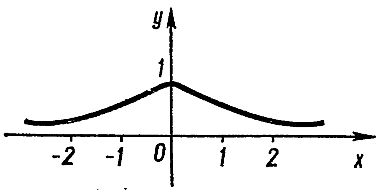
Знаходити множини значень таких функцій буває значно важче, ніж області їх визначення. Наприклад, щоб знайти множину значень функції $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+3)}$, треба спочатку визначити множину значень знаменника $(x-2)(x+3)$ — проміжок $\left[-\frac{25}{4};\ +\infty\right[$, що складається з трьох підмножин: 1) множини всіх додатних чисел; 2) нуля; 3) множини від'ємних чисел, не менших від $-\frac{25}{4}$. У першому випадку множина значень функції $f(x)$ — множина всіх додатних чисел. Якщо знаменник дорівнює 0, то $f(x)$ не має числового значення. В третьому випадку знаменник $f(x)$ набуває значень з проміжку $\left]-\infty;\ -\frac{4}{25}\right]$. Отже, множина значень даної функції: $\left]-\infty;\ -\frac{4}{25}\right] \cup \left]0;\ +\infty\right[$.

Не слід обмежуватись вправами на знаходження області визначення і множини значень. Навіть у VII класі бажано розглядати такі, наприклад, задачі.

2. Дослідіть функцію $y = \frac{1}{1+x^2}$ і побудуйте її графік.

Розв'язання. Знаменник дробу $\frac{1}{1+x^2}$ не може дорівнювати нулю при жодному значенні x. Отже, функція визначена при всіх значеннях x.

Чисельник дробу дорівнює 1, а знаменник не менший від 1, отже, значення функції — додатне число, не більше від 1. Областю зміни цієї функції є проміжок $]0, 1]$. У вираз $\frac{1}{1+x^2}$ x входить тільки в парному степені. Отже, дана функція парна.



Мал. 45.

При збільшенні модуля числа x значення функції зменшується, бо знаменник $1+x^2$ збільшується. Отже, при додатних значеннях x функція монотонно спадає, а при від'ємних — монотонно зростає.

Значення функції найбільше тоді, коли знаменник $1+x^2$ найменший, тобто при $x = 0$. Максимальне значення її дорівнює 1. Мінімуму функція не має.

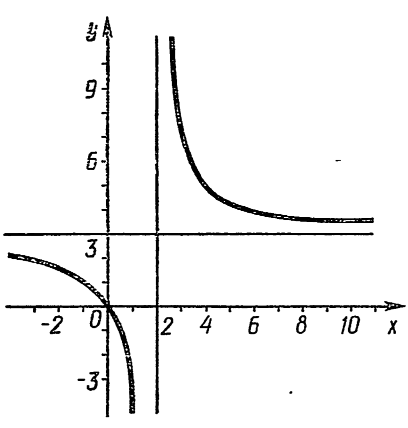
Графік цієї функції подано на мал. 45.

3. Побудуйте графік функції $y = \frac{3x}{x-2}$.

Розв'язання. Виділимо з даного дробу цілу частину:

$$\frac{3x}{x-2} = \frac{3(x-2)+6}{x-2} = 3 + \frac{6}{x-2}.$$

Як бачимо, щоб побудувати графік даної функції, слід спочатку побудувати графік функції, заданої формулою $y = \frac{6}{x}$, перенести його на 2 масштабні одиниці в напрямі осі x і підняти на 3 масштабні одиниці в напрямі осі y.



Мал. 46.

Простіше перенести не графік функції — криву з двох віток, а осі координат. Замість того щоб переносити криву на 2 одиниці праворуч і на 3 вгору, досить перенести вісь y на 2 одиниці ліворуч, а вісь x — на 3 одиниці вниз (мал. 46). Щоб учні не «втрачали» основної системи координат, бажано побудувати її, потім олівцем або тонкими лініями провести допоміжні осі і тільки після цього будувати графік функції. Доцільно зробити й узагальнення: щоб побудувати графік функції $y = f(x + a)$, досить перенести вісь ординат на a одиниць ліворуч і в новій, допоміжній, системі координат побудувати графік функції $y = f(x)$.

Не слід думати, що графік кожної функції, заданої рівністю $y = f(x)$, де вираз $f(x)$ дробовий віднссно x, є якоюсь кривою лінією.

4. Чим відрізняються графіки функцій

$$y = x - 3 \text{ і } y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}?$$

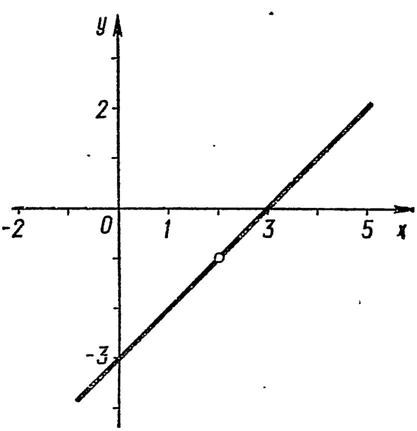
Відповідь. Графіки даних функцій відрізняються однією точкою. Справді, перша з цих функцій визначена на множині всіх дійсних чисел, а друга — на множині всіх дійсних чисел, крім —3, де правильна тотожність $\frac{x^2 - 9}{x + 3} = x - 3$. Графік першої функції — пряма, а другої — ця сама пряма без однієї точки (—3; —6).

5. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$.

Розв'язання. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

Отже, при $x \neq 2$ $y = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = x - 3$.

Графіком функції $y = x - 3$ є пряма. Тому графіком даної функції є ця сама пряма без однієї точки, що відповідає змінній $x = 2$ (мал. 47).



Мал. 47.

6. Дві функції f і g задані рівняннями

$$f(x) = \frac{x - 9}{x(x - 3)} - \frac{x - 1}{3 - x}$$

$$\text{і } g(x) = \frac{x + 3}{x}$$

на тій самій множині X усіх чисел, відмінних від 0 і 3.

Доведіть, що функції f і g рівні (тобто цими рівняннями задана та сама функція).

Розв'язання. $f(x) = \frac{x - 9}{x(x - 3)} + \frac{x - 1}{x - 3} = \frac{x - 9 + x^2 - x}{x(x - 3)} = \frac{x + 3}{x}$ (при $x \neq 3$). Тому при всіх значеннях x, крім 0 і 3, тотожність $f(x) = g(x)$ правильна. Отже, функції f і g на множині всіх дійсних чисел, крім 0 і 3, рівні.

У новому підручнику з алгебри термін «рівність функцій» вживається не в традиційному розумінні. Раніше кожне рівняння розглядали як рівність двох функцій. Тепер же рівними на деяких множинах називаються тільки такі функції, які встановлюють ту саму відповідність між елементами цих множин. Наприклад, функції, задані формулами $y = x + 2$ і $y = |x| + 2$, рівні тільки на множині додатних чисел, а на множині раціональних чисел вони нерівні. Отже, твердження, що кожне рівняння є рівність двох функцій, застаріле.

Під час вивчення дробових виразів бажано запропонувати учням дослідити і кілька функцій з модулями.

7. Побудуйте графіки функцій:

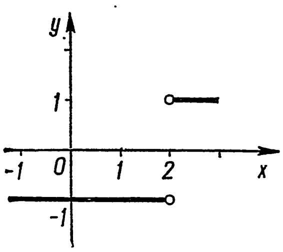
а) $y = \frac{|x-2|}{x-2}$; б) $y = \frac{x^2-4}{|x|-2}$.

Р о з в'я з а н н я.

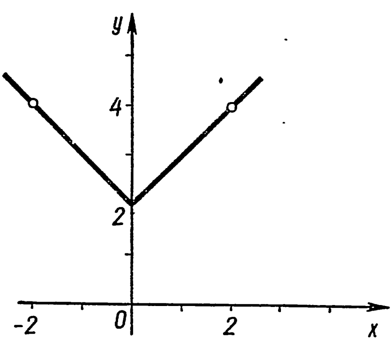
а) Якщо $x > 2$, то $|x - 2| = x - 2$, а $y = 1$.
Якщо $x = 2$, то $x - 2 = 0$, y не існує.
Якщо $x < 2$, то $|x - 2| = 2 - x$, а $y = -1$.
Отже,

$$y = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 2, \\ 1, & \text{якщо } x > 2, \\ \text{не існує}, & \text{якщо } x = 2. \end{cases}$$

Як бачимо, графік даної функції складається з двох відкритих променів (мал. 48).



Мал. 48.



Мал. 49.

б) Якщо $x \geqslant 0$, то $|x| = x$. Тоді

$$y = \frac{x^2-4}{|x|-2} = \frac{x^2-4}{x-2} = x + 2 \ (\text{при } x \neq 2).$$

Якщо $x < 0$, то $|x| = -x$. Тоді

$$y = \frac{x^2-4}{|x|-2} = \frac{x^2-4}{-(x+2)} = -x + 2 \ (\text{при } x \neq -2).$$

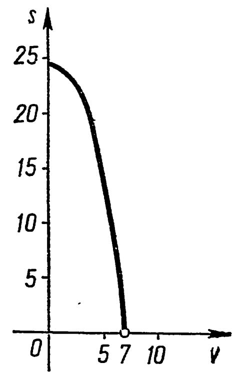
Отже,

$$y = \begin{cases} -x + 2, & \text{якщо } x < 0 \text{ і } x \neq -2, \\ x + 2, & \text{якщо } x \geqslant 0 \text{ і } x \neq 2, \\ \text{не існує}, & \text{якщо } |x| = 2. \end{cases}$$

Цій функції відповідає графік, поданий на мал. 49.

Побудувавши графіки функцій, доцільно ці функції коротко дослідити. Наприклад, можна визначити такі властивості останньої функції; область визначення — множина всіх дійсних чисел, крім —2 і 2; множина значень — множина всіх чисел, не менших від 2, крім 4; функція парна та ін.

Досі ми говорили тільки про абстрактні вправи на дослідження дробово-раціональних функцій; у шкільних підручниках і посібниках з алгебри вправ на дослідження таких функцій з конкретним змістом майже немає. Проте це не означає, що вчитель повинен обмежуватися тільки абстрактними вправами. Багато вправ на дослідження функцій з конкретним змістом можна скласти, переробивши деякі задачі на складання рівнянь. Наприклад, якщо в задачі 174 з посібника [19] замість числа 24 написати s і змінити вимогу, дістанемо нову задачу на дослідження функції.



Мал. 50

8. Турист проплив байдаркою за течією річки s *км* і повернувся назад. На весь шлях він витратив 7 *год*. Власна швидкість байдарки 7 *км/год*, а течії річки — v *км/год*. Виразіть формулою залежність s від v і побудуйте графік цієї залежності.

Р о з в ' я з а н н я. Турист плив за течією з швидкістю $7+v$ *км/год*, а проти течії — з швидкістю $7-v$ *км/год*. Тому за течією він плив $\frac{s}{7+v}$ *год*, а проти течії $\frac{s}{7-v}$ *год*. На весь шлях він витратив 7 *год*, отже

$$\frac{s}{7+v}+\frac{s}{7-v}=7,$$

звідки $s=0{,}5\,(49-v^2)$. Тут $v \in [0;\ 7[$.

Графіком цієї залежності є частина параболи (мал. 50).

Якщо в цій задачі замість 7 *год* написати t год і відповідно замінити вимогу, дістанемо ще одну задачу, якій відповідає формула $t=\frac{336}{49-v^2}$. Маємо дробово-раціональну функцію.

За допомогою таких перетворень можна дістати скільки завгодно різних функціональних залежностей з конкретним змістом.

Числові послідовності

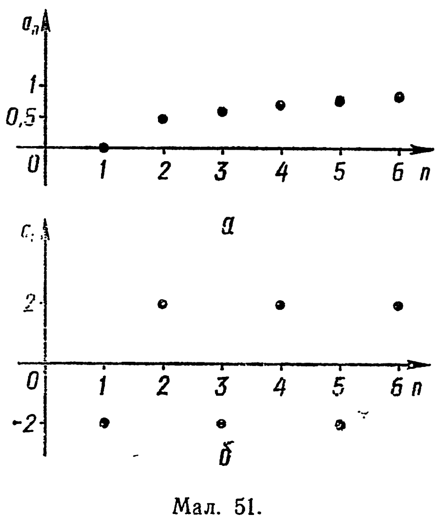
Досі ми розглядали функції, задані на множині всіх дійсних чисел або на довільних її підмножинах. Але в математиці часто розглядають і такі функції, які задані на множині всіх натуральних чисел. Значення таких функцій становлять нескінченні числові послідовності. Кожна скінченна послідовність також є функцією, її областю визначення є скінченна підмножина множини натуральних чисел.

Раніше у восьмирічній школі послідовностей не розглядали, тому й пов'язаних з ними задач не розв'язували. Тепер з послідовностями учні ознайомлюються ще в V класі, розв'язуючи такі, наприклад, задачі.

1. Напишіть послідовність натуральних чисел, кратних 9. Назвіть 4-й, 7-й і 20-й члени цієї послідовності. Яке число стоїть у цій послідовності на 100-му місці? На якому місці в послідовності стоїть число 99?
2 Напишіть формулу чисел, які дають при діленні:
а) на 3 в остачі 1; б) на 10 в остачі 7.
3. Напишіть послідовність, будь-який член якої можна обчислити за формулою $x = 4n + 1$. Яку властивість мають усі члени цієї послідовності?

Аналогічні задачі на числові послідовності бажано розв'язувати і в старших класах.

У VIII класі числові послідовності розглядаються систематично. Тут спочатку треба навчити учнів задавати послідовності графічно, рекурентними формулами, на числовій осі і т. п.



Мал. 51.

1. Випишіть послідовність (a_n) і побудуйте її графік, якщо

а) $a_n = \frac{n-1}{n}$, де $1 \leqslant n \leqslant 6$;

б) $a_n = (-1)^n 2$, де $1 \leqslant n \leqslant 6$.

Р о з в ' я з а н н я. Підставивши в кожну формулу замість змінної n послідовно значення 1, 2, 3, 4, 5, 6, дістанемо відповідні значення функцій, тобто послідовності:

а) $0;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};$

б) $-2;\ 2;\ -2;\ 2;\ -2;\ 2.$

Графічно ці послідовності можна зобразити точками на координатній площині, як показано на мал. 51 (*а*, б).

Обов'язково треба запропонувати учням побудувати кілька графіків арифметичних і геометричних прогресій.

2. Побудуйте графік арифметичної прогресії (y_n), в якої $y_1 = 2$, $d = 0{,}5$ і $1 \leqslant n \leqslant 8$.

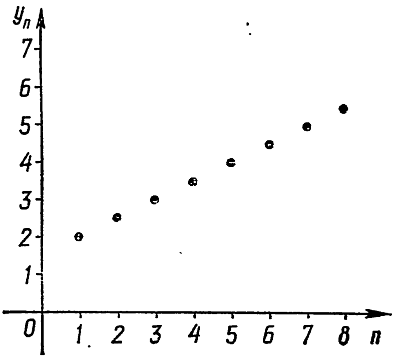
Р о з в ' я з а н н я. Випишемо всі 8 членів даної прогресії: 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 5,5. Позначивши точки з такими ординатами на координатній площині, як це ми робили на стор. 92 , дістанемо потрібний графік (мал. 52).

Можна зробити і так: позначивши пряму — графік функції $y_n = 2 + 0{,}5(n - 1) = 0{,}5n + 1{,}5$, вказати на ній тільки ті точки, які відповідають натуральним значенням n з проміжку $1 \leqslant n \leqslant 8$. Знайдені 8 точок і є графіком даної арифметичної прогресії.

3. Дано скінченну послідовність (b_n). Доберіть формулу, за якою можна обчислити будь-який її член:

а) $-2, -4, -6, -8, -10$;

б) $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}$.



Мал. 52.

Жодного алгоритму розв'язування таких вправ учням не повідомляють. Їм доводиться кожного разу встановлювати закономірність утворення членів послідовності. Так, перша з наведених вище послідовностей є, очевидно, послідовністю від'ємних парних чисел, її загальний член $a_n = -2n$. Щоб встановити закономірність утворення членів другої послідовності, слід записати всі її члени у вигляді дробів з чисельниками 2:

$$\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}.$$

Отже, загальний член даної послідовності $a_n = \frac{2}{n}$.

Загальні члени розглянутих вище послідовностей можна записати й інакше: $a_n = -2n + (n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5)$, $a_n = -2n + 2(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)(n - 5)$ і т. ін.

При першому ознайомленні учнів з такими задачами про їх невизначеність можна не говорити.

На двох-трьох прикладах варто показати, що ту саму послідовність для різних n можна задати по-різному.

4. Знайдіть 8 перших членів послідовності (x_n), в якої

$$x_n = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{якщо } n \text{ — непарне число;} \\ -\sqrt{n}, & \text{якщо } n \text{ — парне число.} \end{cases}$$

Обчислення можна виконувати усно, відразу записуючи відповідь:

$$1; -\sqrt{2}; \sqrt{3}; -2; \sqrt{5}; -\sqrt{6}; \sqrt{7}; -\sqrt{8}.$$

Цю послідовність можна задати й однією формулою:

$$x_n = (-1)^{n+1}\sqrt{n}.$$

Нова програма пропонує ознайомити учнів VIII класу з послідовностями, заданими рекурентними співвідношеннями. Тому доцільно з восьмикласниками розв'язати такі вправи.

1. Знайдіть формулу n-го члена послідовності (a_n), якщо:

а) $a_1 = 10,\ a_{n+1} = a_n + 10$;
б) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = a_n \cdot 2$.

Розв'язання. Спочатку бажано записати кілька перших членів цих послідовностей.

а) З рекурентного співвідношення $a_{n+1} = a_n + 10$ випливає, що $a_2 = a_1 + 10 = 20$, $a_3 = a_2 + 10 = 30$ і т. д. Отже, маємо послідовність 10, 20, 30, 40, 50, ... , формула n-го члена якої $a_n = 10n$.

Можна міркувати й інакше. Підставивши в рівність $a_{n+1} = a_n + 10$ замість n значення 1, 2, 3, 4, ... $n - 1$, матимемо:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 10, \\ a_3 &= a_2 + 10, \\ a_4 &= a_3 + 10, \\ &\cdots\cdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + 10, \\ a_n &= a_{n-1} + 10. \end{aligned}$$

В результаті почленного додавання цих рівностей дістанемо:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 10.$$

Оскільки $a_1 = 10$, то $a_n = 10n$.

б) Цю вправу також можна розв'язати аналогічно до попередньої, тільки замість почленного додавання $n - 2$ рівностей треба виконати почленне множення.

В результаті дістанемо: $a_n = 2^{n-1}$.

Як бачимо, перша з даних послідовностей — арифметична прогресія, а друга — геометрична. Бажано зробити узагальнення і пояснити учням, що кожна послідовність, задана рекурентною формулою $a_{n+1} = a_n + d$, — арифметична прогресія, а послідовність, задана рекурентною формулою $a_{n+1} = a_n q$, — геометрична. Отже, рівність $a_{n+1} = a_n + 10$ задає арифметичну прогресію з різницею $d = 10$. Крім того, відомо, що $a_1 = 10$. Підставивши ці значення у формулу $a_n = a_1 + d(n - 1)$, дістанемо відповідь:

$$a_n = 10 + 10(n - 1) = 10n.$$

2. Напишіть кілька перших членів кожної послідовності і з'ясуйте, якою прогресією (арифметичною чи геометричною) є ця послідовність:

а) (a_n), якщо $a_1 = 5$ і $a_{n+1} = 4a_n$;
б) (x_n), якщо $x_1 = 5$ і $x_{n+1} = 4 + x_n$;
в) (y_n), якщо $y_3 = -7$ і $y_{n+1} = \frac{1}{2} + y_n$.

Р о з в ' я з а н н я. Щоб з'ясувати, якою прогресією є кожна з даних послідовностей, досить проаналізувати її рекурентну формулу.

а) Відношення кожного члена (крім першого) до попереднього стале: $a_{n+1} : a_n = 4$. Отже, це геометрична прогресія із знаменником 4, перший член якої дорівнює 5:

$$5,\ 20,\ 80,\ 320,\ \ldots,$$

б) $x_{n+1} - x_n = 4$, отже, маємо арифметичну прогресію з різницею 4 і першим членом, що дорівнює 5:

5, 9, 13, 17, 21, . . .

в) Ця послідовність — також арифметична прогресія з різницею $\frac{1}{2}$, бо $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}$. Третій член цієї прогресії — 7, другий — $6\frac{1}{2}$, а перший — 6. Отже, шукана арифметична прогресія матиме вигляд:

$$-6,\ -6\frac{1}{2},\ -7,\ -7\frac{1}{2},\ \ldots$$

Якби відомим був не третій член послідовності, а, наприклад, двадцять третій: $y_{23} = -7$, то закінчити розв'язування можна було б так: $y_{23} = y_1 + 22d$, $-7 = y_1 + 22 \cdot \frac{1}{2}$, $y_1 = -18$.

Отже, дістали б прогресію: $-18,\ -17\frac{1}{2},\ -17,\ -16\frac{1}{2},\ \ldots$

Рекурентними формулами можна задавати не тільки прогресії. Щоб переконати в цьому учнів, корисно розглянути з ними такі задачі.

1. Послідовність (a_n) задана рекурентним співвідношенням. Випишіть кілька перших її членів.

а) $a_1 = 2,\ a_{n+1} \cdot a_n = 1$;

б) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} = 6$.

Р о з в ' я з а н н я. а) Підставивши в дану рекурентну формулу замість змінної n послідовно 1, 2, 3 і т. д., дістанемо:

$$a_2 \cdot a_1 = 1,\ a_2 \cdot 2 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2};$$

$$a_3 \cdot a_2 = 1,\ a_3 \cdot \frac{1}{2} = 1,\ a_3 = 2;$$

$$a_4 \cdot a_3 = 1,\ a_4 \cdot 2 = 1,\ a_4 = \frac{1}{2}.$$

Очевидно, що члени даної послідовності періодично повторюються. Можна було б спочатку записати дану формулу у вигляді $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$. Результат був би той самий: 2; $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{1}{2}$; 2; . . .

Загальний член цієї послідовності $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{3}{4} + \frac{5}{4}$.

б) Перетворимо формулу

$$a_{n+2} = \frac{6}{a_n a_{n+1}}:$$

$$a_3 = \frac{6}{a_1 a_2} = \frac{6}{1 \cdot 2} = 3; \quad a_5 = \frac{6}{a_3 a_4} = \frac{6}{3 \cdot 1} = 2;$$

$$a_4 = \frac{6}{a_2 a_3} = \frac{6}{2 \cdot 3} = 1; \quad a_6 = \frac{6}{a_4 a_5} = \frac{6}{1 \cdot 2} = 3.$$

Члени цієї послідовності також періодично повторюються: 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, ...

Загальний член її можна подати у вигляді

$$a_n = 3\left\{\frac{n+2}{3}\right\} + 1$$

(за умови, що учні обізнані з дробовою частиною числа, стор. 105).

2. Функція задана формулою $y = 0{,}5x + 4$ на множині натуральних чисел. Доведіть, що ця функція є арифметичною прогресією.

Розв'язання. Якщо функція задана на множині всіх натуральних чисел, то це — числова послідовність. Знайдемо різницю

$$y_{n+1} - y_n = (0{,}5(n+1) + 4) - (0{,}5n + 4) = 0{,}5.$$

Як бачимо, вона стала для всіх натуральних n. Отже, дана функція — арифметична прогресія.

Можна скористатися і графіком функції $y = 0{,}5x + 4$. Позначивши на цій прямій точки, які відповідають натуральним значенням x, дістанемо графік даної послідовності. Ордината кожної з цих точок (крім першої) більша від ординати попередньої точки на 0,5. Отже, це — графік арифметичної прогресії.

Попередню задачу можна узагальнити.

3. Якщо функція $y = f(x)$ лінійна і значення змінної x утворюють арифметичну прогресію, то і значення змінної y утворюють арифметичну прогресію. Доведіть це.

Розв'язання. Дана функція лінійна, тому її можна задати формулою $y = ax + b$, де a і b — якісь числа. Покажемо, що коли послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ — арифметична прогресія, то і послідовність $ax_1 + b, ax_2 + b, \ldots, ax_n + b, ax_{n+1} + b$ — теж арифметична прогресія. Справді, розглянемо різницю двох довільних послідовних її значень:

$$y_{n+1} - y_n = (ax_{n+1} + b) - (ax_n + b) = a(x_{n+1} - x_n) = ad,$$

де d — різниця даної прогресії. Отже, яким би не було натуральне число n, різниця $y_{n+1} - y_n$ стала (для даних a і d). Таку властивість має тільки арифметична прогресія.

Варто розглянути і конкретний приклад. Нехай маємо лінійну функцію $y = 2x - 1$ і арифметичну прогресію $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$, утворену значеннями змінної x.

Відповідна послідовність значень функції —3, —2, —1, 0, 1; 2, 3, ... — також арифметична прогресія.

Слід зауважити, що послідовність може бути функцією не тільки натурального аргументу, її можна задати й на довільній числовій послідовності. В останньому випадку маємо перетворення однієї послідовності в іншу. Наприклад, функція $y = 2x - 1$ перетворює прогресію $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$ в прогресію $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

4. Задайте формулою функцію, яка перетворює прогресію 1, 3, 5, 7, ... в прогресію 2, 4, 6, 8, ...

Щоб учні краще зрозуміли задачу, можна запропонувати їм скласти спочатку таку таблицю:

x	1	3	5	7	...
y	2	4	6	8	...

Як бачимо, кожному значенню змінної x відповідає число y, більше від x на 1. Цю функцію можна задати формулою $y = x + 1$ на множині непарних натуральних чисел.

Є й інші формули, які перетворюють прогресію 1, 3, 5, 7, ... в 2, 4, 6, 8 ..., наприклад: $y = [x] + 1$, $y = |x + 1|$. Однак всі вони на множині непарних натуральних чисел задають ту саму функцію, тому задачу можна вважати визначеною. Але якби в ній замість слова «прогресію» написати «послідовність», ми б мали невизначену задачу.

5. Відомі два члени арифметичної прогресії (c_n): $c_3 = 48$, $c_5 = 42$. Знайдіть c_7.

Розв'язання.

Перший спосіб. Оскільки $7 - 5 = 5 - 3$, то і $c_7 - c_5 = c_5 - c_3$ (кожна з цих різниць дорівнює $2d$). Отже, $c_7 = 2c_5 - c_3 = 84 - 48 = 36$.

Цей спосіб знаходження якогось члена арифметичної прогресії c_k за двома даними c_n і c_m застосовують тільки тоді, коли числа k, m і n є послідовними членами арифметичної прогресії.

Другий спосіб. Кожну арифметичну прогресію можна задати формулою $c_n = an + b$. Якщо $c_3 = 48$, $c_5 = 42$, то $48 = 3a + b$, $42 = 5a + b$. Розв'язавши систему цих двох рівнянь, дістанемо $a = -3$, $b = 57$. Отже, $c_n = -3n + 57$. Тепер легко знайти будь-який член даної прогресії; наприклад, $c_7 = -3 \cdot 7 + 57 = 36$. Можна дати і геометричне розв'язання, врахувавши, що два члени арифметичної прогресії визначають в прямокутній системі координат пряму, якій належить весь графік цієї прогресії.

Другий спосіб загальніший, з ним бажано ознайомити учнів.

6. Між числами 7 і 35 вставте шість таких чисел, щоб утворилась арифметична прогресія.

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Якщо між 7 і 35 вставити шість чисел, щоб утворилась арифметична прогресія, то число 7 буде першим, а 35 — восьмим членом цієї прогресії.

$$a_8 = a_1 + 7d, \qquad 35 = 7 + 7d, \qquad d = 4.$$

Отже, маємо таку арифметичну прогресію:

$$7,\ 11,\ 15,\ 19,\ 23,\ 27,\ 31,\ 35.$$

Д р у г и й с п о с і б. Як відомо, графіком арифметичної прогресії є сукупність точок, що лежать на одній прямій. Нехай рівняння цієї прямої $y = ax + b$. Тому що їй належать точки (1; 7) і (8; 35), то $7 = a + b$, $35 = 8a + b$. Розв'язавши утворену систему рівнянь відносно a і b, дістанемо: $a = 4, b = 3$. Отже, всі точки графіка даної арифметичної прогресії розміщені на прямій $y = 4x + 3$. Підставивши в це рівняння замість змінної x значення 2, 3, 4, 5, 6, 7, дістанемо шість шуканих членів арифметичної прогресії: 11, 15, 19, 23, 27, 31.

Другий спосіб розв'язання задачі порівняно з першим громіздкий, але він корисний тим, що підкреслює спільні властивості арифметичної прогресії і лінійної функції.

7. Між числами 60 і $\frac{15}{16}$ вставте п'ять таких чисел, які разом з даними утворюють геометричну прогресію.

Ця задача аналогічна до попередньої.

Випишемо вказані в задачі члени геометричної прогресії, позначивши її знаменник буквою q: 60, $60q$, $60q^2$, $60q^3$, $60q^4$, $60q^5$, $\frac{15}{16}$.

Очевидно, що $60q^6 = \frac{15}{16}$, тоді $q^6 = \frac{1}{2^6}$, звідки $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = -\frac{1}{2}$.

Отже, задача має два розв'язки:

а) $30,\ 15,\ \frac{15}{4},\ \frac{15}{8}$; б) $-30,\ 15,\ -\frac{15}{2},\ \frac{15}{4},\ -\frac{15}{8}$.

8. Деякі бактерії, вміщені в живильне середовище, діляться пополам кожної півгодини. Скільки бактерій у цьому випадку утвориться з однієї бактерії через 10 *год*?

Ілюструвати цю задачу можна відрізками: спочатку поділити вибраний відрізок пополам, потім — кожну половину пополам і т. д. Описану в задачі ситуацію зручно записати і за допомогою таблиці:

Години	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	...	10
Бактерії	1	2	4	8	16	32	64	128	...	x

Ще краща така таблиця.

Число півгодин	0	1	2	3	...	20
Число бактерій	1	2	2^2	2^3	...	2^{20}

Склавши таку таблицю, учень відразу напише відповідь: $x = 2^{20}$. Це число можна записати в стандартному вигляді:

$$2^{20} = 1024^2 = (1{,}024 \cdot 10^3)^2 = 1{,}024^2 \cdot 10^6 \approx 1{,}05 \cdot 10^6.$$

Показникові і логарифмічні функції

Раніше показникові і логарифмічні функції вивчали в IX—X класах. Нова програма пропонує ознайомити учнів з найважливішими властивостями цих функцій і у VIII класі. Спочатку розглядаються показникові функції на множині цілих чисел, потім поступово розширюється поняття показника степеня і відповідно до цього досліджуються показникові функції на множині дробових, раціональних і довільних дійсних чисел. Пояснення супроводиться побудовою графіків цих функцій. Доцільно розв'язати, наприклад, і такі вправи.

1. Вкажіть множину значень функції $y = 2^x$, якщо $x \in [-2; 2]$.

Знаючи, що дана функція монотонна, можна вправу розв'язати і без графіка. Проте у VIII класі краще такі задачі розв'язувати з графіками. Вони дають можливість наочно ілюструвати різні властивості розглядуваних функцій.

Щоб виконати вправу, слід побудувати (схематично) графік функції $y = 2^x$, позначити на осі x відрізок $[-2; 2]$, виділити відповідну частину кривої і спроектувати її на вісь y, а потім зробити такі обчислення:

$$y_1 = 2^{-2} = 0{,}25; \qquad y_2 = 2^2 = 4.$$

Відповідь. $[0{,}25; 4]$. Можна сказати і так: дана функція відображає відрізок $[-2; 2]$ на відрізок $[0{,}25; 4]$.

2. Функція f задана формулою $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^{10x}$. Чи існують значення x, при яких значення функції дорівнює:

а) 1; б) $\frac{81}{256}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $-2\frac{10}{27}$?

Р о з в'я з а н н я.

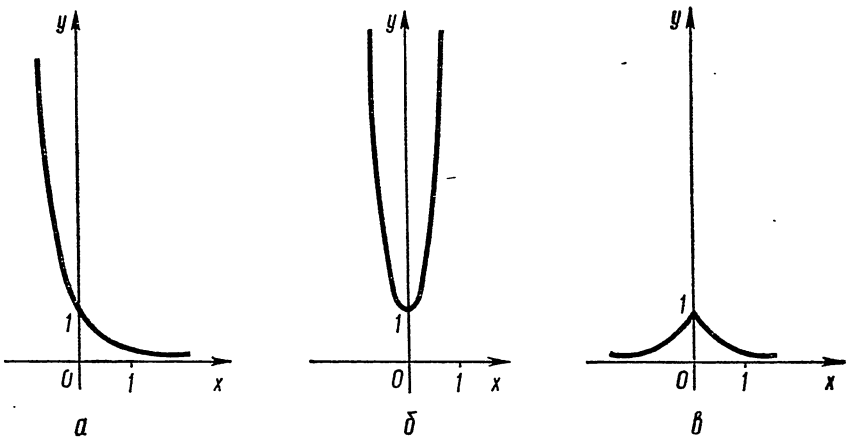
П е р ш и й с п о с і б. Досліджуємо, чи мають розв'язки такі показникові рівняння:

$$\text{а) } \left(\frac{4}{3}\right)^{10x} = 1; \quad \text{б) } \left(\frac{4}{3}\right)^{10x} = \frac{81}{256}; \quad \text{в) } \left(\frac{4}{3}\right)^{10x} = \frac{1}{3};$$

$$\text{г) } \left(\frac{4}{3}\right)^{10x} = -2\frac{10}{27}.$$

Цей спосіб нелегкий, до того ж учні, які ще не знають властивостей логарифмів, рівняння в) не розв'яжуть. Тому кращим треба вважати д р у г и й с п о с і б.

Нехай, $\left(\frac{4}{3}\right)^{10} = a$. Тоді $a > 1$ і функція $y = a^x$ показникова. Множина її значень $]0; +\infty[$. Тому прямі $y=1$, $y=\frac{81}{256}$, $y=\frac{1}{3}$ перетинають графік даної функції. В цих випадках шукані значення x існують. Пряма $y = -2\frac{10}{27}$ цього графіка не перетинає; отже, значення даної функції не може дорівнювати $-2\frac{10}{27}$.



Мал. 53.

Така відповідь правильна тільки тоді, коли розглядувана функція задана на множині всіх дійсних чисел. Якщо розглядати функцію $f(x)$ на множині цілих чисел, то ствердну відповідь можна дати тільки до вправи а); якщо — на множині раціональних чисел — то тільки до вправ а) і б).

3. Покажіть схематично, як розміщені графіки функцій $y = 10^{-x}$, $y = 10^{|x|}$, $y = 10^{-|x|}$.

Щоб виконати перше завдання, треба побудувати спочатку графік функції $y = 10^x$. Графік функції $y = 10^{-x}$, або $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

можна дістати з першого графіка за допомогою симетрії відносно осі y (мал. 53, *а*).

Функції $y = 10^{|x|}$ і $y = 10^{-|x|}$ парні, тому їх графіки симетричні відносно осі y. При $x > 0$ графік першої такий самий, як і функції $y = 10^x$, а другої — такий, як графік функції $y = 10^{-x}$ (мал. 53, *б*, *в*).

4. Задайте формулою функцію, обернену до функції $y = 0{,}1 \cdot 5^x$.

Такі вправи пропонуємо учням тільки тоді, коли вони ознайомляться з логарифмічними функціями і навчаться розв'язувати найпростіші показникові і логарифмічні рівняння. Виконувати їх можна в два кроки: спочатку з даної рівності виразити x через y, а потім ці змінні поміняти місцями.

Якщо $y = 0{,}1 \cdot 5^x$, то $10y = 5^x$, $x = \log_5(10y)$. Функцією, оберненою до даної, є $y = \log_5(10x)$. Зрозуміло, що останню рівність можна подати і у вигляді $y = 1 + \log_5 2x$.

Чи можна розв'язання задачі записати так:

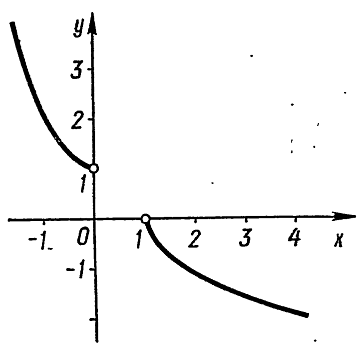
$$y = (0{,}1 \cdot 5^x) \Rightarrow (10y = 5^x) \Rightarrow (x = \log_5(10y)) \Rightarrow (y = \log_5(10x))?$$

Ні, не можна. Друга і третя рівність справді випливають з першої, але остання не випливає з попередніх, тому перед нею ставити знак $\Rightarrow$ не треба.

Є й інший спосіб розв'язання цієї задачі. Спочатку слід замінити в даній формулі x на y і навпаки, а потім перетворити знайдену рівність.

Дана функція: $y = 0{,}1 \cdot 5^x$.

Обернена до неї: $x = 0{,}5 \cdot 5^y$, або $10x = 5^y$, $y = \log_5 10x$.



Мал. 54.

Функція $y = 0{,}1 \cdot 5^x$ задана на множині всіх дійсних чисел, а обернена до неї — на множині всіх додатних чисел. Якби треба було задати функцію, обернену до $y = \log_5 10x$, на якійсь підмножині множини дійсних чисел, наприклад, на проміжку $[-2, 2]$, дістали б функцію, визначену на проміжку $[0{,}004; 2{,}5]$.

5. Задайте формулою функцію, обернену до $y = 2^{|x|}$.

Якщо область визначення даної функції — множина всіх дійсних чисел, то на цій множині немає оберненої їй функції, тобто дана функція необоротна. Якщо функцію $y = 2^{|x|}$ задано, наприклад, на множині тільки від'ємних чисел, то її можна задати і таким співвідношенням: $y = 2^{-x}$, $x \in]-\infty; 0[$.

Оберненою до неї є функція $y = -\log_2 x$, $x \in]1; +\infty[$. На мал. 54 подано графіки цих двох взаємно обернених функцій.

6. Знайдіть область визначення функції $y = \lg \dfrac{3-x}{x-5}$.

Мається на увазі знайти множину тих значень змінної x, при яких вираз $\lg\frac{3-x}{x-5}$ має зміст. Для цього необхідно і достатньо, щоб справджувалась нерівність $\frac{3-x}{x-5} > 0$. Розв'язки її становлять множину $]3;\ 5[$.

7. Знайдіть область визначення функції $y = \lg(3-x) - \lg(x-5)$.

Нерідко учні помилково зводять цю задачу до попередньої і дають таку саму відповідь. Розв'язувати задачу треба так.

$$\lg(3-x) \text{ має зміст, якщо } x < 3;$$
$$\lg(x-5) \text{ має зміст, якщо } x > 5.$$

Але такого числа x, яке задовольняло б одночасно обидві ці умови, немає. Отже, область визначення даної функції — порожня множина.

На факультативних заняттях слід ознайомити учнів VIII класу з логарифмічною і напівлогарифмічною системами координат, зокрема давати вправи на побудову і читання графіків функцій у цих системах координат. Спочатку треба навчити їх розмічати осі таких систем у зошитах і на дошці. Бажано мати спеціальну переносну дошку, з одного боку якої нанесено логарифмічну систему координат, а з другого — напівлогарифмічну. Якщо такої дошки немає, можна скористатися великими аркушами цупкого паперу, на якому можна писати крейдою. А найкраще мати в математичному кабінеті спеціальну планку-рейсмус, подібну до описаної на стор. 71, але в якій кусочки крейди були б розміщені не рівномірно, а за законом логарифмічної шкали. За допомогою такого рейсмуса можна досить швидко креслити на дошці логарифмічні і напівлогарифмічні системи координат.

Приклади вправ на побудову графіків функцій в цих системах.

8. Побудуйте в одній напівлогарифмічній системі координат графіки функцій

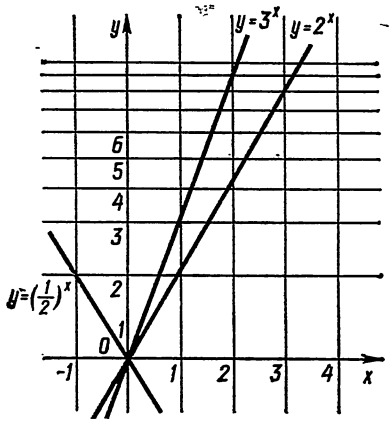
$$y = 2^x; \quad y = 3^x; \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Як відомо, напівлогарифмічні системи координат бувають двох видів. Для побудови графіків показникових функцій вибирають систему, в якої вісь x — рівномірна шкала, а вісь y — логарифмічна. Кілька перших графіків бажано побудувати за точками. Наприклад, щоб побудувати графік функції $y = 2^x$, складемо спочатку таблицю

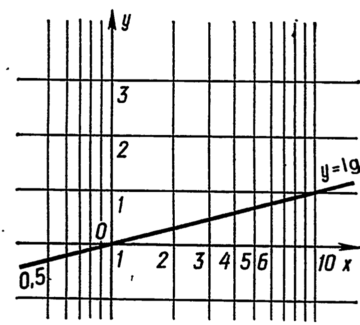
x	0	1	2	3	4
y	1	2	4	8	16

Потім позначимо на напівлогарифмічній координатній площині точки (0; 1), (1; 2), (2; 4), (3; 8), (4; 16). Всі вони розміщені на одній прямій. Проведемо цю пряму. Робимо висновок, що побудована таким способом пряма є графіком функції $y = 2^x$ в напівлогарифмічній системі координат.

Аналогічно можна побудувати графіки двох інших функцій (мал. 55). В напівлогарифмічній системі координат графік кожної показникової функції виду $y = a^x$, заданої на множині R всіх дійсних чисел, є пряма, що проходить через початок координат, тобто точку (0; 1). Якщо така функція задана на деякій підмножині множини R, то її графіком є частина прямої. Слід також звернути увагу



Мал. 55.



Мал. 56.

учнів на взаємне розміщення графіків функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 3^x$ і $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Вони симетричні відносно осі x. Після цього можна побудувати (теж за точками) два-три графіки функцій виду $y = ca^x$ при $c > 0$ і $a > 0$. Всі ці графіки — прямі лінії; вони проходять через початок координат тільки тоді, коли $c = 1$.

Так само на конкретних вправах можна переконати учнів, що в напівлогарифмічній системі координат, на осі x якої нанесено логарифмічну шкалу, а на осі y —рівномірну, графік кожної функції $y = a\lg x$ — пряма лінія (мал. 56).

Логарифмічною називається така система координат, в якій на кожній осі нанесено логарифмічну шкалу. Її початком є точка (1; 1). В такій системі координат графік кожної степеневої функції виду $y = cx^k$, де $c > 0$, є пряма лінія. Це неважко довести, але у VIII класі досить обмежитися ілюстрацією цього факту на конкретних прикладах. Учні мають побудувати в логарифмічній системі координат кілька графіків степеневих функцій, наприклад таких:

$$y = 3x^2; \quad y = \frac{1}{3}x^2; \quad y = 2x; \quad y = x^{\frac{1}{2}}.$$

Корисно запропонувати і обернені вправи: за даним графіком функції записати її рівняння.

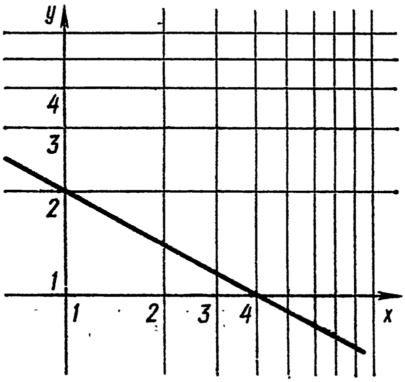
9. Задайте формулою функцію, графік якої подано на мал. 57.

Р о з в'я з а н н я. Оскільки графіком функції є пряма, зображена в логарифмічній системі координат, то це степенева функція $y = cx^k$, де $c > 0$. Залишається визначити c і k. Графік даної функції проходить через точки (1; 2) і (4; 1), отже, маємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} 2 = c \cdot 1^k, \\ 1 = c \cdot 4^k, \end{cases}$$

звідки $c = 2$, $k = -0{,}5$.

В і д п о в і д ь. $y = 2x^{-0{,}5}$.



Мал. 57.

10. Графіками яких функцій в логарифмічній системі координат є прямі, паралельні осі x?

Р о з в'я з а н н я. Розглянемо, наприклад, пряму, що проходить через точки (1; 3;) і (2; 3). Міркуючи так, як і в попередньому випадку, дістанемо систему рівнянь $3 = c \cdot 1^k$ і $3 = c \cdot 2^k$, звідки $c = 3$, $k = 0$. Отже, маємо функцію $y = 3x^0$, або $y = 3$. Взагалі, графіком кожної функції виду $y = a$, де a — стала, в логарифмічній системі координат є пряма, яка паралельна осі x і проходить через точку (1; a).

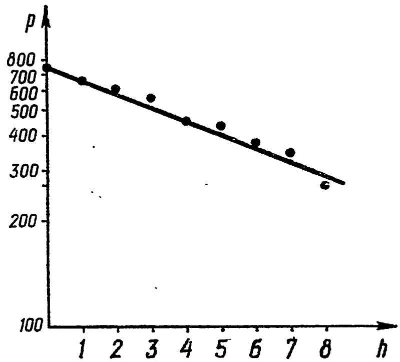
Досі, коли йшлося про показникові і логарифмічні функції, наводились приклади тільки абстрактних функцій, не пов'язаних з фізичними величинами. Однак у школі бажано розглянути кілька і таких функцій, які відповідають конкретним залежностям, що є в природі.

11. При визначенні залежності атмосферного тиску p (у *мм рт. ст.*) від висоти точки над рівнем світового океану h (у кілометрах) заповнили таку таблицю:

h (*км*)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p (*мм рт. ст.*)	760	674	596	526	462	405	354	308	267

Побудуйте графік цієї залежності в напівлогарифмічній системі координат. Запишіть у вигляді наближеної формули залежність p від h для значень h з проміжку [0; 8].

На горизонтальній осі h слід нанести рівномірну шкалу з мітками 0, 1, 2 і т. д., а на вертикальній p — логарифмічну з мітками 100, 200, 300 і т. д. (мал. 58). Якщо на такій напівлогарифмічній сітці позначити точки з вказаними у таблиці координатами, то всі вони розмістяться (приблизно) на одній прямій. Ця пряма і є шуканим графіком даної залежності.



Мал. 58.

Оскільки графіком залежності p від h в напівлогарифмічній системі координат є пряма, то цю залежність наближено можна виразити формулою $p = c \cdot a^h$. Підставивши в цю формулу відповідні значення p і h, взяті з таблиці, дістанемо: $760 = c \cdot a^0$, звідки $c = 760$. Значення a можна знайти, наприклад, з рівності $405 = 760 \cdot a^5$; $a \approx 0{,}5^{\frac{1}{5}}$. Отже, залежність p від h наближено можна виразити формулою $p \approx 760 \cdot 0{,}5^{\frac{h}{5}}$.

Функції $[x]$ і $\{x\}$

Символом $[x]$ у математиці позначають найбільше ціле число, яке не перевищує x, тобто таке, що задовольняє умову $x - 1 < [x] \leqslant x$. Наприклад: $[2{,}3] = 2$, $[\pi] = 3$, $[5] = 5$, $[-2{,}5] = -3$.

Кожному дійсному значенню x відповідає одне значення $[x]$. Отже, ця відповідність є функцією. Вираз $[x]$ називається цілою частиною, або характеристикою числа x. Поширена також назва «антьє x» (від французького слова *entier* — цілий).

Різниця між числом і його цілою частиною називається дробовою частиною цього числа. Дробову частину числа x позначають символом $\{x\}$. Отже, $\{x\} = x - [x]$. Відповідність $x \to \{x\}$ також є функцією, бо кожному числу x відповідає цілком певне число — його дробова частина.

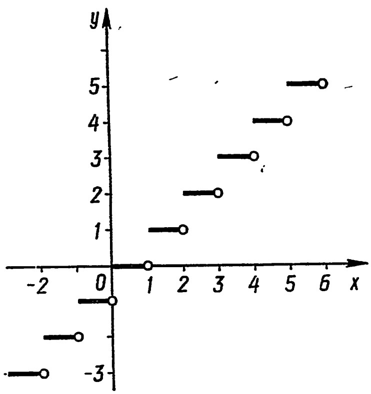
Розглянемо вправи, які бажано розв'язати з учнями, щоб вони добре засвоїли ці числові функції.

1. Побудуйте графік функції $y = [x]$.

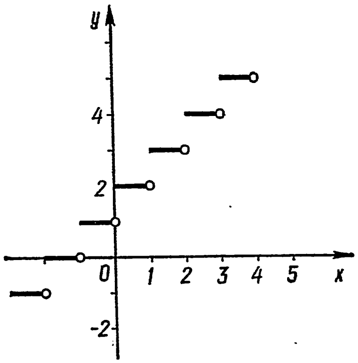
Графік цієї функції не можна дістати за допомогою геометричних перетворень з уже відомих графіків, тому спочатку слід будувати його за точками. При цьому таблицю треба складати не для окремих значень змінної x, а для цілих проміжків. (Ціла частина кожного з чисел проміжку $[0; 1[$ дорівнює 0 і т. д.).

x	[—2; —1[	[—1; 0[	[0; 1[	[1; 2[	[2; 3[	[3; 4[
y	—2	—1	0	1	2	3

Користуючись такою таблицею, неважко побудувати потрібний графік (мал. 59).



Мал. 59.



Мал. 60.

Перелічимо деякі властивості функції $y = [x]$:

а) функція визначена на множині всіх дійсних чисел; б) множиною її значень є множина всіх цілих чисел; в) функція необоротна; г) вона і не парна, і не непарна.

2. Побудуйте графіки функцій:

$$а)\ y = [x + 2], \qquad б)\ y = [x] + 2.$$

Графіки цих функцій можна будувати за точками, але раціональніше дістати їх з графіка функції $y = [x]$, перенісши його на 2 масштабні одиниці: а) в напрямі, протилежному напряму осі x, б) в напрямі осі y. В обох випадках маємо той самий графік (мал. 60). Взагалі при кожному дійсному x і цілому k $[x + k] = [x] + k$. Отже, незалежно від того, чи перенесем ми графік функції $y = [x]$ на k одиниць в напрямі осі y, чи на k одиниць в напрямі, протилежному напряму осі x, результат буде той самий. Таку властивість має не тільки графік функції $y = [x]$, а й графіки багатьох інших функцій, наприклад: $y = x + 3$, $y = x — 5$.

3. Побудуйте графік функції $y = [x]^2$ (вправа для сильніших учнів).

Р о з в'я з а н н я. Складемо таблицю значень x і y.

Користуючись цією таблицею, побудуємо графік даної функції (мал. 61).

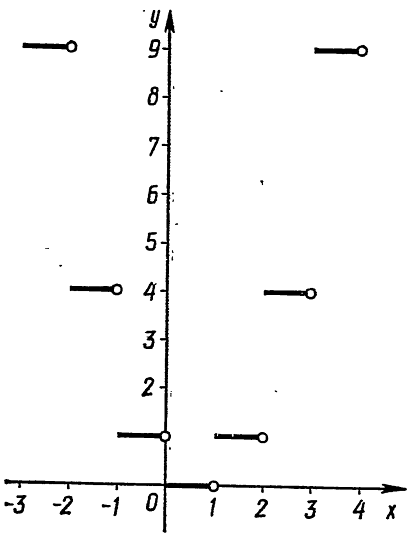
x	$[x]$	y
$[-3;\ -2[$	-3	9
$[-2;\ -1[$	-2	4
$[-1;\ 0[$	-1	1
$[0;\ 1[$	0	0
$[1;\ 2[$	1	1
$[2;\ 3[$	2	4

Дуже часто його будують симетричним відносно осі y, вважаючи цю функцію парною. Неправильний графік цієї функції дано і в посібнику [32, 121].

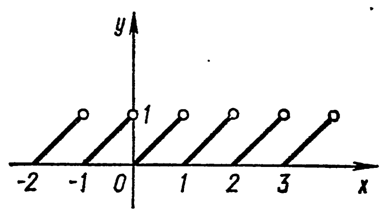
4. Побудуйте графік функції $y = \{x\}$.

Р о з в'я з а н н я. Складемо таблицю значень функції, врахувавши, що $\{x\} = x - [x]$. Як бачимо, на тій вертикальній смузі координатної площини, що відповідає проміжку $[-2;\ -1[$, треба побудувати графік функції $y = x + 2$, на наступній смузі — графік функції $y = x + 1$ і т. д. (мал. 62).

Новим для учнів є те, що на кожному проміжку виду $[a;\ a + 1[$ значення y не стале, як у попередніх прикладах, а залежить від x.



Мал. 61.



Мал. 62.

x	$[x]$	y
$[-2;\ -1[$	-2	$x+2$
$[-1;\ 0[$	-1	$x+1$
$[0;\ 1[$	0	x
$[1;\ 2[$	1	$x-1$
$[2;\ 3[$	2	$x-2$
$[3;\ 4[$	3	$x-3$

Можна міркувати й інакше. Графік функції $y = x - [x]$ на проміжку, де $[x] = 0$, такий самий, як і функції $y = x$. Побудуємо його. На проміжку, де $[x] = 1$, графік функції $y = x$ треба паралельно перенести на одиницю вниз і т. д.

З властивостей функції $y = \{x\}$ слід відзначити такі: а) функція визначена на множині всіх дійсних чисел; б) множиною її значень є проміжок $[0;\ 1[$; в) функція необоротна; г) періодична, довільне ціле число є її періодом.

5. Побудуйте графіки функцій: а) $y = \{x\} + 2$, б) $y = \{x + 2\}$; в) $y = [x] + \{x\}$; г) $y = [\{x\}]$.

Розв'язання. а) Досить графік функції $y = \{x\}$ перенести на 2 одиниці в напрямі осі y.

б) Перенести графік функції $y = \{x\}$ на 2 одиниці в напрямі, протилежному напряму осі x; функція $y = \{x\}$ періодична і її графік є також графіком даної функції.

в) Оскільки $\{x\} = x - [x]$, то $[x] + \{x\} = x$. Отже, графіком даної функції є пряма $y = x$.

г) Завжди $0 \leqslant \{x\} < 1$ і $[\{x\}] = 0$. Графік функції — вісь x.

3. Рівняння й нерівності

Розв'язування рівнянь — одне з найважливіших завдань курсу алгебри. В минулому столітті алгебру взагалі вважали наукою про розв'язування рівнянь. Зміст сучасної алгебри значно ширший. Тепер навіть у шкільному курсі алгебри, крім рівнянь, розглядають тотожні перетворення, функції, нерівності та ін. Але й досі одне з важливих задань шкільного курсу алгебри— навчити учнів розв'язувати рівняння й нерівності.

Як відомо, в шкільному курсі алгебри нерівностям почали приділяти значно більше уваги, ніж раніше. Якщо до останнього часу із знаками «>» та «<» учні вперше ознайомлювались тільки в VI класі, то тепер згадані знаки вводяться ще в початковій школі, а нерівності починають розв'язувати в IV класі, майже паралельно з рівняннями, оскільки розв'язування рівнянь тісно пов'язане з розв'язуванням нерівностей і навпаки.

Багато питань, пов'язаних з методикою розв'язування рівнянь і нерівностей у восьмирічній школі, висвітлено в нашій праці [5], тому повторювати їх ще раз не будемо. В цьому розділі спинимося тільки на питаннях практичного застосування теорії.

Відомо, що тільки в окремих випадках вдається замінити дане рівняння простішим і рівносильним йому. Частіше цього зробити не можна. Тому виникає потреба під час розв'язування рівняння проводити дослідження: виявляти, які із знайдених чисел задовольняють дане рівняння, а які не задовольняють. Є три способи розв'язування рівнянь: спосіб наслідків, спосіб попереднього дослідження області визначення виразів, що входять у рівняння, і спосіб мішаних систем.

Розв'язуючи рівняння способом наслідків, кожного разу замінюють рівняння його наслідком, тобто таким рівнянням, множина розв'язків якого містить усі розв'язки даного. Але рівняння-наслідок може мати і сторонні розв'язки. Їх виявляють за допомогою перевірки.

Другий спосіб полягає в тому, що спочатку знаходять множину значень змінної, на якій всі вирази, що входять до рівняння, мають зміст, а потім перетворюють дане рівняння. Закінчують розв'язання, відкидаючи ті розв'язки перетвореного рівняння, які не належать до області визначення даного (ОДЗ).

Спосіб мішаних систем полягає в тому; що дане рівняння замінюють рівносильною йому мішаною системою, яка складається з рівнянь і нерівностей, що містять знак $\neq$.

Проілюструємо ці способи конкретним прикладом.

Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{z+2}{z-2}=\frac{z^2}{z^2-4}+\frac{6}{z+2}.$$

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Звівши вирази, які входять до рівняння, до спільного знаменника, і помноживши обидві частини рівняння на z^2-4, дістанемо:

$$z^2+4z+4=z^2+6z-12,\ 2z=16,$$

звідки $z=8$.

П е р е в і р к а.

$$\frac{8+2}{8-2}=\frac{5}{3};$$

$$\frac{64}{64-4}+\frac{6}{8+2}=\frac{64}{60}+\frac{6}{10}=\frac{5}{3}.$$

В і д п о в і д ь. $z=8$.

Д р у г и й с п о с і б. Область визначення даного рівняння — множина всіх чисел, крім $z=2$ і $z=-2$.

Помноживши обидві частини його на z^2-4, дістанемо:

$$z^2+4z+4=z^2+6z-12,$$
$$16=2z,\ z=8.$$

Число 8 належить області визначення даного рівняння, тому $z=8$ — його корінь.

В і д п о в і д ь. $z=8$.

Т р е т і й с п о с і б. Перетворимо дане рівняння:

$$\frac{z^2}{z^2-4}+\frac{6}{z+2}-\frac{z+2}{z-2}=0;\quad \frac{z^2+6z-12-z^2-4z-4}{z^2-4}=0;$$

$$\frac{2z-16}{z^2-4}=0.$$

З умови рівності дробу нулю випливає:

$$\left\{\begin{array}{l}2z-16=0,\\ z^2-\ \ 4\neq 0,\end{array}\right. \Bigg|\ z=8.$$

Висловлення $8^2-4\neq 0$ істинне, тому 8 — корінь даного рівняння.

В і д п о в і д ь. $z=8$.

Який з цих трьох способів кращий? Це залежить від виду рівняння. Рівняння, яке не містить змінної у знаменнику, завжди можна замінити рівносильним.

Рівняння із змінною у знаменнику принаймні одного з виразів, що входить до нього, доцільніше розв'язувати першим або третім способом; ірраціональні і особливо трансцендентні рівняння — другим способом, причому і в цьому випадку потрібна перевірка знайдених розв'язків.

Розв'яжемо, наприклад, рівняння $\sqrt{3x+19} = x+3$.

Область його визначення $\left[-\frac{19}{3};\ +\infty\right[$. Піднесемо обидві частини даного рівняння до квадрата:

$$3x + 19 = x^2 + 6x + 9, \text{ звідки } x^2 + 3x - 10 = 0.$$

Квадратне рівняння має два корені: 2 і —5, обидва вони належать області визначення даного рівняння; —5 його не задовольняє. Ось чому перевірка буває потрібна і в тих випадках, коли рівняння розв'язують способом попереднього дослідження.

Розв'язуючи складніші рівняння, особливо трансцендентні, іноді доводиться робити і додаткові дослідження, зокрема встановлювати області визначення проміжних рівнянь. Адже в процесі розв'язування таких рівнянь можуть не лише з'являтися сторонні, а й втрачатися корені. Сказане вище стосується не тільки рівнянь, а й нерівностей. Докладно ці питання розглядаються в IX—X класах.

Дуже часто автори методичних посібників і вчителі пов'язують рівняння і нерівності з функціями. Взагалі такий підхід правильний. Але якщо кожне рівняння (нерівність) розглядають як рівність (нерівність) двох функцій, то можна припуститися помилки. Нехай, наприклад, треба розв'язати нерівність $(x-1)^{-\frac{2}{3}} + 5 > 0$. Її можна записати так:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} > -5.$$

При кожному дійсному значенні x, крім $x = 1$, значення виразу в лівій частині додатне, отже, більше за —5. Тому множина розв'язків цієї нерівності така: $]-\infty;\ 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$. А от у посібнику [24, 158] її розв'язано інакше: «Функція $y = (x-1)^{-\frac{2}{3}} + 5$ визначена при всіх значеннях $x > 1$ і додатна в цій області. Тому розв'язком даної нерівності буде будь-яке дійсне число $x > 1$». Помилка автора в тому, що він обмежив область визначення виразу $(x-1)^{-\frac{2}{3}}$: для зручності розглядав функцію виду $y = x^r$ при дробових r тільки на множині додатних значень x. А відомо, що розв'язати нерівність означає знайти множину всіх значень змінної чи змінних, які її задовольняють.

Дану нерівність задовольняють всі дійсні числа з множини $]-\infty;\ 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$.

Отже, розв'язуючи нерівність із змінною, не можна звужувати область її визначення.

Звичайно, все сказане вище про нерівності стосується і рівнянь.

Лінійні і квадратні рівняння

Розглянемо методику розв'язування рівнянь, які розглядаються в VI—VIII класах.

В VI класі розв'язують в основному рівняння першого степеня.

Обов'язково треба запропонувати учням кілька невизначених лінійних рівнянь і таких, які не мають жодного розв'язку.

Розв'яжіть рівняння:

$$\text{а) } 3(7-x)+2x=21-x; \quad \text{б) } 3(7x-1)=21x+2.$$

Р о з в'я з а н н я.

$$\text{а) } 21-3x+2x=21-x; \quad \text{б) } 21x-3=21x+2;$$

$$21-x=21-x;$$

$$21=21. \qquad\qquad -3=2.$$

В і д п о в і д ь. Рівняння а) задовольняє кожне значення змінної x; рівняння б) розв'язків не має.

П р и м і т к а. Рівняння а) і б) лінійні, але називати їх рівняннями першого степеня не можна.

Бажано дати учням і такі вправи.

1. Знайдіть значення змінної x, при якому значення виразу $5(2x-7)$ менше, ніж відповідне значення виразу $13x+1$, на 14.

Р о з в'я з а н н я.

$$13x+1-5(2x-7)=14;$$
$$13x+1-10x+35=14;$$
$$13x-10x=14-1-35;$$
$$3x=-22; \qquad x=-\frac{22}{3}.$$

В і д п о в і д ь. $x=-7\frac{1}{3}$.

2. Поясніть, чому рівняння

$$11x^5+29x^4+33x^3+25x^2+74x+256=0$$

не може мати додатних коренів.

Р о з в'я з а н н я. Якщо $x>0$, тоді всі доданки в лівій частині додатні і їх сума не може дорівнювати нулю.

3. Чи може рівняння

$$x^4-25x^3+13x^2-20x+1=0$$

мати від'ємні корені?

Р о з в'я з а н н я. Якщо $x<0$, то $x^4>0$, $-25x^3>0$, $13x^2>0$, $-20x>0$, а сума кількох додатних чисел ніколи не може дорівнювати нулю.

В і д п о в і д ь. Не може.

4. Знайдіть будь-які два значення змінної c, при яких істинне висловлення: а) $c^2 = c$; б) $|c| = -c$.

В і д п о в і д ь до вправи а) неважко вгадати; досить, щоб шестикласники розв'язали її випробуванням. Можна розв'язати цю вправу і так: $c^2 = c$, $c^2 - c = 0$, $c(c - 1) = 0$, звідки $c = 0$ або $c = 1$.

Два значення змінної c, що задовольняють рівність б), учні також можуть вгадати. Якщо учні не зможуть вказати всієї множини розв'язків, бажано зауважити, що розглядувана рівність правильна при кожному недодатному значенні c.

Основну увагу в VI класі звертають на розв'язування лінійних рівнянь, проте обмежуватися ними не можна. Шестикласники повинні вміти розв'язувати окремі види квадратних рівнянь і навіть рівнянь вищих степенів. Насамперед йдеться про рівняння типу $7(2x-10) \cdot (x + 0{,}3) = 0$, ліві частини яких — добутки, а праві — нулі.

Квадратні рівняння у загальному вигляді вперше розв'язують у VII класі. Спочатку учні ознайомлюються з розв'язуванням таких рівнянь способом виділення повного квадрата (див. [5, 210]), а вже потім — за формулами коренів. Пропонуємо користуватися тільки однією з них:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Записувати розв'язання квадратного рівняння зручно так.
Розв'язати рівняння

а) $5x^2 - 2x - 8 = 0$; б) $3x^2 - x + 1 = 0$.

Р о з в'я з а н н я. а) $D = 2^2 + 160 = 164$. Тому

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{164}}{10} = \frac{2 \pm 2\sqrt{41}}{10} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{5}.$$

б) $D = 1 - 12 = -11 < 0$, отже, рівняння дійсних коренів не має.

Деякі автори пропонують у VII класі оформляти розв'язання квадратних рівнянь так:

Знайти множину розв'язків рівняння

$$4x^2 + 6x = 9x^2 - 15x, \ x \in Q.$$

Р о з в'я з а н н я.

$$4x^2 - 9x^2 + 6x + 15x = 0;$$
$$-5x^2 + 21x = 0;$$
$$(x(-5x + 21) = 0) \Leftrightarrow (x = 0) \vee (-5x + 21 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x = 0) \vee (x = 4{,}2);$$
$$\{x \mid x \in Q, \ 4x^2 + 6x = 9x^2 - 15x\} = \{0; \ 4{,}2\}.$$

Можна користуватися й іншими формами запису, зокрема:

$$4x^2 - 9x^2 + 6x + 15x = 0,$$
$$5x^2 - 21x = 0,$$
$$x(5x - 21) = 0,$$
$$x = 0 \text{ або } 5x - 21 = 0, \ x = 4{,}2.$$

Відповідь. $x_1 = 0$; $x_2 = 4{,}2$.

Під час вивчення квадратних рівнянь семикласники мають розв'язувати і складати рівняння, які б мали певні властивості.

1. Складіть рівняння так, щоб один з його коренів дорівнював сумі коренів рівняння $8x^2 - 13x + 3 = 0$, а другий — їх добутку.

Розв'язання. За теоремою Вієта сума і добуток коренів даного рівняння дорівнюють відповідно $\frac{13}{8}$ і $\frac{3}{8}$. Ці числа є коренями рівняння $\left(x - \frac{13}{8}\right)\left(x - \frac{3}{8}\right) = 0$, або $(8x - 13)(8x - 3) = 0$.

Задача має безліч різних розв'язків, її задовольняють рівняння $x(8x - 13)(8x - 3) = 0$, $(8x - 13)^2(8x - 3) = 0$ і т. ін.

2. Складіть квадратне рівняння, корені якого відповідно дорівнювали б квадратам коренів рівняння $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

Цю задачу можна розв'язати так: визначити корені даного рівняння, піднести їх до квадратів і за знайденими двома числами скласти потрібне рівняння. Однак таке розв'язання не можна вважати раціональним. Краще міркувати так.

Позначимо корені даного рівняння буквами x_1 і x_2. Тоді $x_1x_2 = \frac{1}{2}$, $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$. Якщо шукане рівняння має вид

$$z^2 + pz + q = 0, \text{ то } q = x_1^2x_2^2 = \frac{1}{4},$$

$$-p = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}.$$

Отже, маємо рівняння

$$z^2 - \frac{21}{4}z + \frac{1}{4} = 0, \text{ або } 4z^2 - 21z + 1 = 0.$$

Неважко виявити також, що корені даного рівняння додатні. Тому, виконавши заміну $x^2 = z$, рівняння можна записати так: $2z - 5\sqrt{z} + 1 = 0$. Корені цього рівняння дорівнюють квадратам коренів даного. І якби в задачі не вказувалося, що треба скласти саме квадратне рівняння, то це рівняння можна було б вважати розв'язком задачі. Записавши знайдене рівняння у вигляді $2z + 1 = 5\sqrt{z}$, $(2z + 1)^2 = (5\sqrt{z})^2$, матимемо потрібне квадратне рівняння

$$4z^2 - 21z + 1 = 0.$$

3. Знайдіть множину значень a, при яких рівняння $ax^2 - 12x + 9 = 0$ має дійсні корені.

Р о з в 'я з а н н я. Щоб дане рівняння мало дійсні корені, необхідно, щоб його дискримінант був невід'ємний (тобто щоб виконувалась нерівність $144 - 36a \geqslant 0$, звідки $a \leqslant 4$). Однак таке міркування правильне тільки для випадку, коли дане рівняння квадратне, тобто коли $a \neq 0$. Щоб розв'язати задачу повністю, треба окремо розглянути випадок $a = 0$. При такому значенні параметра a дане рівняння лінійне: $-12x + 9 = 0$, воно теж має корінь.

В і д п о в і д ь. Рівняння має корені при всіх значеннях $a \leqslant 4$.

П р и м і т к а. Розв'язувати рівняння $ax^2 - 12x + 9 = 0$ при $a = 0$ за відомою учням формулою не можна. Розв'язуючи рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$ при довільних значеннях a, слід розглянути два випадки:

$$\text{якщо } a \neq 0, \text{ то } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$\text{якщо } a = 0, \text{ то } x = -\frac{c}{b}.$$

Однак можна скористатися (при $c \neq 0$) формулою

$$x = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

4. Доведіть, що коли дискримінант квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дорівнює нулю і $a > 0$, то ліва частина цього рівняння — квадрат двочлена.

Цю задачу можна розв'язати кількома способами.

П е р ш и й с п о с і б. Якщо $b^2 - 4ac = 0$ і $a > 0$, то $c = \frac{b^2}{4a}$. Тому

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = \left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2.$$

Д р у г и й с п о с і б. Якщо $b^2 - 4ac = 0$ і $a > 0$, то

$$a = \frac{b^2}{4c} \text{ і } c > 0.$$

Отже,

$$ax^2 + bx + c = \frac{b^2}{4c}x^2 + bx + c = \left(\frac{b}{2\sqrt{c}}\,x + \sqrt{c}\right)^2.$$

Т р е т і й с п о с і б. З $b^2 - 4ac = 0$ і $a > 0$ випливає $b = \pm 2\sqrt{ac}$. Отже,

$$ax^2 + bx + c = ax^2 \pm 2\sqrt{ac} \cdot x + c = (\sqrt{a} \cdot x \pm \sqrt{c})^2.$$

У кожному конкретному випадку з двох знаків $\pm$ треба тут брати тільки один залежно від того, додатне чи від'ємне число b. Наприклад, $4x^2-12x+9=(\sqrt{4}\,x-\sqrt{9})^2=(2x-3)^2$.

Лінійні і квадратні нерівності з однією змінною

Раніше в загальноосвітніх школах нерівності починали розв'язувати набагато пізніше, ніж рівняння. Тепер нерівності з однією змінною розв'язують майже одночасно з аналогічними видами рівнянь. Так, уже в § 3 підручника з алгебри для VI класу розглядаються найпростіші нерівності з однією змінною (включаючи й подвійні) і основний наголос робиться не на вивченні способів їх розв'язування, а на множинах розв'язків: вводиться поняття числових проміжків, символічні позначення і зображення числових проміжків на осі.

Порівняно складніші нерівності розв'язуються в VII класі після вивчення дробових виразів. Тут користуються основними теоремами про рівносильність нерівностей (хоч ці теореми формулюються без доведення).

Оформляти в зошитах і на дошці розв'язання нерівностей можна, наприклад, так.

Розв'яжіть нерівність

$$x-\frac{x-3}{5}+\frac{2x-1}{10}<4.$$

Розв'язання.

$$10x-2(x-3)+2x-1<40,$$
$$10x-2x+6+2x-1<40,$$
$$10x<35\,,\quad x<3{,}5.$$

Відповідь. $]-\infty;\ 3{,}5[$.

Перевірити правильність розв'язання нерівності можна так. Знайшовши множину розв'язків розглянутої вище нерівності, позначимо $x=3{,}5-\alpha$, де α — довільне додатне число. Підставивши це значення змінної в ліву частину даної нерівності, дістанемо:

$$3{,}5-\alpha-\frac{3{,}5-\alpha-3}{5}+\frac{2(3{,}5-\alpha)-1}{10}=\frac{1}{10}(35-10\alpha-7+2\alpha+$$
$$+6+7-2\alpha-1)=\frac{1}{10}(40-10\alpha)=4-\alpha.$$

Але $4-\alpha<4$ при кожному додатному (і тільки додатному) значенні α. Отже, множину розв'язків нерівності знайдено правильно.

З цим способом перевірки можна ознайомити учнів, але вимагати, щоб вони завжди користувались ним, не слід.

До вправ на розв'язання нерівностей бажано включити і такі.

1. Розв'яжіть нерівність $3x + 7 > (x + 2) + (2x + 1)$.

Розв'язання. $3x + 7 > 3x + 3$, $7 > 3$. Дістали правильну числову нерівність. Це означає, що дану нерівність із змінною x задовольняє кожне значення цієї змінної.

Відповідь. $]-\infty; +\infty[$.

2. Розв'яжіть нерівність $12x - 1 < 3(4x - 3)$.

Розв'язання. $12x - 1 < 12x - 9$, $-1 < -9$. Дістали неправильну числову нерівність. Отже, дана нерівність не має жодного розв'язку.

Відповідь. Множина розв'язків даної нерівності порожня.

У VII класі розв'язують і системи нерівностей з однією змінною.

3. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} 5(x-2) - x > 2, \\ 1 - 3(x-1) < -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Перетворимо і розв'яжемо кожну з нерівностей:

$$5x - 10 - x > 2, \quad 4x > 12, \quad x > 3; \quad]3; +\infty[.$$
$$1 - 3x + 3 < -2, \quad -3x < -6, \quad x > 2; \quad]2; +\infty[.$$

Отже, множина розв'язків системи

$$]3; +\infty[\ \cap \ ]2; +\infty[=]3; +\infty[.$$

Відповідь. $]3; +\infty[$.

У зошиті учні можуть записати коротше:

$$\begin{cases} 5(x-2) - x > 2, \\ 1 - 3(x-1) < -2, \end{cases} \left| \begin{matrix} 5x - 10 - x > 2, \\ 1 - 3x + 3 < -2, \end{matrix} \right| \begin{matrix} 4x > 12, \\ -3x < -6, \end{matrix} \left| \begin{matrix} x > 3, \\ x > 2, \end{matrix} \right| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x > 3.$$

Коли учні навчаться розв'язувати такі системи, вони зможуть розв'язувати дробові і квадратні нерівності з однією змінною.

Спочатку квадратні нерівності з однією змінною бажано розв'язувати, зводячи їх до системи лінійних нерівностей.

4. Розв'яжіть нерівність $(2x - 1)(x + 1) > 0$.

Розв'язання. Можливі такі випадки:

$$\text{а)} \begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ x + 1 > 0, \end{cases} \left| \begin{matrix} x > 0{,}5, \\ x > -1, \end{matrix} \right| \Rightarrow x > 0{,}5.$$

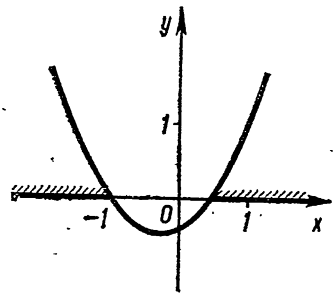
$$\text{б)} \begin{cases} 2x - 1 < 0, \\ x + 1 < 0, \end{cases} \left| \begin{matrix} x < 0{,}5, \\ x < -1, \end{matrix} \right| \Rightarrow x < -1.$$

Отже, множина розв'язків даної нерівності:

$$]-\infty; -1[\ \cup \ ]0{,}5; +\infty[.$$

Пізніше, коли учні добре засвоять властивості квадратного тричлена, такі нерівності вони розв'язуватимуть і усно.

У даному випадку можна міркувати так: корені квадратного тричлена $x = 0{,}5$ і $x = -1$. Графік цього тричлена — парабола, вітки якої напрямлені вгору. Отже, значення цього тричлена додатні при всіх значеннях $x < -1$ і при всіх значеннях $x > 0{,}5$. Наведені міркування можна ілюструвати графіком (мал. 63).



Мал. 63.

5. Розв'яжіть нерівність $y^2 (3 - y) > 0$.

Розв'язання. Вираз y^2 не може бути від'ємним. Отже, $3 - y > 0$, звідки $y < 3$. Однак з цієї множини значень змінної треба виключити $y = 0$, бо при такому значенні y ліва частина нерівності дорівнює 0, тобто не є додатною.

Відповідь. $]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]0;\ 3[$.

Дробові рівняння і нерівності

Починаючи з VII класу, учні розв'язують рівняння і нерівності із змінною в знаменниках дробів. Як відомо, замінюючи дробові вирази цілими, можна дістати рівняння з множиною розв'язків ширшою, ніж вихідне. Тому, розв'язуючи дробові рівняння способом наслідків, треба перевіряти знайдені корені. Зрозуміло, замість того щоб кожного разу виконувати перевірку, можна користуватися способом мішаних систем.

Спочатку слід розглянути такі рівняння із змінною у знаменнику, які зводяться до систем лінійних рівнянь. Розв'яжемо одне з таких рівнянь:

$$\frac{1}{x-3} = \frac{2}{3}.$$

Розв'язувати його можна так:

$$\frac{1}{x-3} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{x-3} - \frac{2}{3} = 0, \quad \frac{3 - 2x + 6}{3(x-3)} = 0,$$

$$\begin{cases} -2x + 9 = 0, \\ x - 3 \neq 0. \end{cases}$$

$$-2x + 9 = 0, \quad x = 4{,}5.$$

Висловлення $4{,}5 - 3 \neq 0$ правильне, тому $x = 4{,}5$.
Пізніше слід давати учням складніші вправи.

1. Розв'яжіть рівняння

$$(x + 3) \cdot \frac{x^2 - 49}{9 - x^2} = 0.$$

Р о з в'я з а н н я.

$$\begin{cases}(x+3)(x-7)(x+7)=0,\\ 9-x^2\neq 0,\end{cases}$$
$$x_1=-3,\ x_2=7,\ x_3=-7.$$

Висловлення $9-(-3)^2\neq 0$ неправильне, тому число -3 не задовольняє даного рівняння. Висловлення $9-(-7)^2\neq 0$ і $9-7^2\neq 0$ правильні.

В і д п о в і д ь. Дане рівняння має два корені: 7 і —7.

Чи можна, скоротивши спочатку дріб, що стоїть у лівій частині даного рівняння, розв'язати рівняння $\frac{x^2-49}{3-x}=0$? У цьому випадку так. Але, розв'язуючи таким способом рівняння

$$(x+7)\cdot\frac{2x+14}{49-x^2}=0,$$

дістали б неправильну відповідь. Щоб не ускладнювати дослідження, в VII класі таким способом краще не користуватися.

Чи можна, розв'язуючи такі рівняння, прирівнювати до нуля кожен множник окремо? Можна, але робити це треба обережно. Розв'язуючи дробові рівняння, іноді учні міркують так: добуток двох множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли перший множник дорівнює нулю або другий множник дорівнює нулю. Взагалі, це неправильно: добуток двох множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли жодний не втрачає змісту і принаймні один з них дорівнює нулю.

2. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x+2}{x+3}-\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{(x+3)(x-1)}.$$

Р о з в'я з а н н я.

$$\begin{cases}x^2+2x-x-2-x^2-3x-x-3=1,\\ x+3\neq 0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}\left|\begin{array}{l}-3x=6,\ x=-2,\\ x+3\neq 0,\\ x-1\neq 0.\end{array}\right.$$

Висловлення $-2+3\neq 0$ і $-2-1\neq 0$ правильні.

В і д п о в і д ь. $x=-2$.

3. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{2x+3}{x+3}-\frac{x^2-2x}{(x-2)(x+3)}=1.$$

Р о з в'я з а н н я.

$$\begin{cases}2x^2+3x-4x-6-x^2+2x=x^2-2x+3x-6,\\ x-2\neq 0,\\ x+3\neq 0,\end{cases}\left|\begin{array}{l}0=0,\\ x-2\neq 0,\\ x+3\neq 0.\end{array}\right.$$

Як бачимо, перше рівняння системи є тотожність.

Відповідь: Рівняння задовольняє кожне число, крім —3 і 2.

Множину всіх розв'язків можна записати і так:

$$]-\infty;\ -3[\cup]-3;\ 2[\cup]2,\ +\infty[.$$

Більш різноманітні ситуації можуть трапитися в процесі розв'язування рівнянь, що містять змінну у знаменнику і зводяться до квадратних. Такі рівняння мають один, два корені або не мають жодного.

Приклади.

Рівняння $\frac{2}{4-x^2}-\frac{1}{2x-4}+\frac{7}{x(x+2)}=0$ зводиться до квадратного $x^2-8x+28=0$, яке не має дійсних коренів. Отже, і дане рівняння коренів не має.

Рівняння $\frac{x+2}{x-3}-\frac{5}{x-2}=\frac{5}{(x-2)(x-3)}$ зводиться до квадратного $x^2-5x+6=0$, обидва корені якого $x_1=2$, $x_2=3$ не задовольняють даного. І в цьому випадку рівняння не має коренів.

Рівняння $\frac{x+2}{x+3}-\frac{5}{x-2}=\frac{25}{(2-x)(x+3)}$ зводиться до квадратного $x^2-5x+6=0$, один корінь якого $x=2$ сторонній, а другий задовольняє дане рівняння.

Рівняння $\frac{5}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{25}{(x+2)(x+3)}$ зводиться до такого самого квадратного $x^2-5x+6=0$, обидва корені якого задовольняють і дане рівняння.

У VII класі після ознайомлення з дробовими виразами бажано розв'язати з учнями кілька рівнянь з параметрами, в тому числі і лінійних.

1. Розв'яжіть відносно x рівняння $ax-42=7x-6a$.

Розв'язання. $(ax-42=7x-6a)\Rightarrow(x(a-7)=6(7-a))$. Якщо $a-7\neq 0$, то $x=\frac{6(7-a)}{a-7}=-6$.

Якщо $a-7=0$, то дане рівняння перетворюється в тотожність $7x-42=7x-42$.

Відповідь. Якщо $a\neq 7$, то $x=-6$, якщо $a=7$, рівняння задовольняє кожне значення змінної x.

Примітка. Учні іноді пишуть, що при $a=7$ рівняння має безліч розв'язків. Таку відповідь не можна вважати вичерпною, бо в ній йдеться тільки про кількість розв'язків і зовсім не вказується, які саме ці розв'язки. Рівняння $|x-3|+|x-4|=1$ також має безліч розв'язків (див. стор. 125), але сказати, що його задовольняє кожне значення змінної x було б неправильно.

2. Розв'яжіть відносно x рівняння

$$(a+1)x^2+(5a+2)x+(6a-3)=0.$$

Розв'язання. $D = (5a+2)^2 - 4(a+1)(6a-3) = a^2 + 8a + 16 = (a+4)^2$.

Отже, якщо $a + 1 \neq 0$, то

$$x_{1,2} = \frac{-5a-2 \pm |a+4|}{2(a+1)}; \quad x_1 = \frac{1-2a}{a+1}, \ x_2 = -3.$$

Якщо $a + 1 = 0$, то дане рівняння можна записати так: $-3x - 9 = 0$. Воно має один корінь $x = -3$.

Відповідь. Якщо $a = -1$, то $x = -3$; якщо $a \neq -1$, то $x_1 = \frac{1-2a}{a+1}$, $x_2 = -3$.

Розв'язування деяких нелінійних нерівностей з однією змінною можна звести до розв'язування систем лінійних нерівностей.

3. Розв'яжіть нерівність $\frac{a+5}{3a-6} > 0$.

Спочатку слід показати учням, як такі нерівності зводяться до систем:

$$\begin{cases} a+5<0, \\ 3a-6<0, \end{cases} \left| \begin{matrix} a<-5, \\ a<2, \end{matrix} \right| \Rightarrow a<-5, \text{ або}$$

$$\begin{cases} a+5>0, \\ 3a-6>0, \end{cases} \left| \begin{matrix} a>-5, \\ a>2, \end{matrix} \right| \Rightarrow a>2.$$

Відповідь. $]-\infty; -5[\cup]2; +\infty[$.

Пізніше можна пояснити, що дана нерівність рівносильна такій: $(a+5)(3a-6) > 0$. Знайшовши (усно) корені лівої частини ($a_1 = -5$, $a_2 = 2$) і пригадавши, що графік рівняння $y = (a+5)(3a-6)$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору, учні відразу можуть написати відповідь.

4. Розв'яжіть нерівність

$$\frac{x^2+4}{x-4} < x.$$

Розв'язання.

Перший спосіб. Перетворимо дану нерівність:

$$\frac{x^2+4}{x-4} - x < 0, \ \frac{x^2+4-x^2+4x}{x-4} < 0, \ \frac{4(1+x)}{x-4} < 0.$$

$$\text{а)} \begin{cases} 1+x>0, \\ x-4<0, \end{cases} \left| \begin{matrix} x>-1, \\ x<4. \end{matrix} \right.$$

Цю систему задовольняє множина значень x з проміжку $]-1; 4[$

$$\text{б)} \begin{cases} 1+x<0, \\ x-4>0, \end{cases} \left| \begin{matrix} x<-1, \\ x>4. \end{matrix} \right.$$

Ця система розв'язків не має.

Відповідь. $]-1; 4[$.

Другий спосіб. Діставши нерівність

$$\frac{4(1+x)}{x-4} < 0,$$

робимо висновок, що вона рівносильна нерівності: $(1+x)(x-4) < 0$; уявивши графік лівої частини останньої нерівності, відразу пишемо відповідь: $]-1;\ 4[$.

Третій спосіб. Перетворивши ліву частину даної нерівності

$$\frac{x^2+4}{x-4} = \frac{(x^2-4x)+(4x+4)}{x-4} = x + \frac{4(x+1)}{x-4},$$

дістанемо рівносильну їй нерівність

$$x + \frac{4(x+1)}{x-4} < x, \text{ або } \frac{4(x+1)}{x-4} < 0 \text{ і т. д.}$$

Цей спосіб найменш раціональний.

5. Розв'яжіть нерівність

$$\frac{1}{x+2} \leqslant \frac{1}{4x-1}.$$

Дуже часто, розв'язуючи такі нерівності, учні «обертають» їх, тобто вважають, що дана нерівність рівносильна нерівності

$$x+2 \geqslant 4x-1,$$

і приходять до неправильної відповіді. Причиною такої помилки є перенесення властивості

$$\left(\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b}\right) \Rightarrow (a \geqslant b),$$

яка правильна для додатних чисел, на множину будь-яких дійсних значень змінних a і b.

Дану нерівність можна розв'язати, розглянувши всі можливі припущення щодо знаменників поданих в умові виразів.

1) Нехай $x+2>0$ і $4x-1>0$. Тоді з даної нерівності випливає $x+2 \geqslant 4x-1$. В цьому випадку $\frac{1}{4} < x \leqslant 1$.

2) Нехай $x+2<0$ і $4x-1<0$. Тоді з даної нерівності випливає $x+2 \geqslant 4x-1$. В цьому випадку $x<-2$.

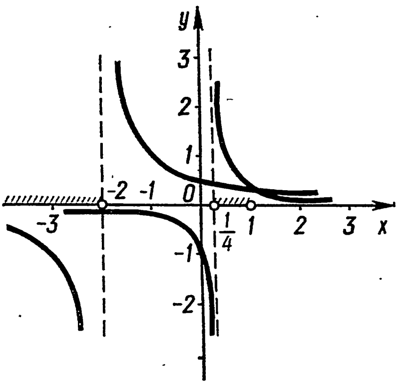
3) Нехай $x+2<0$, а $4x-1>0$. Таких значень x немає.

4) Нехай $x+2>0$, а $4x-1<0$. Ці значення x даної нерівності не задовольняють, бо не може додатне число бути меншим за від'ємне чи дорівнювати йому.

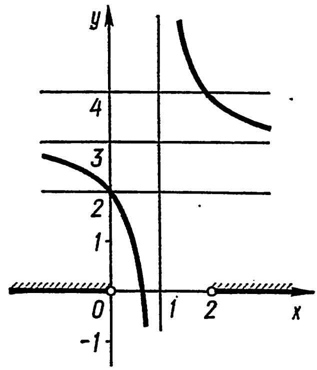
Відповідь. Нерівність має таку множину розв'язків: $\left]-\infty;\ -2\right[\cup \left]\frac{1}{4};\ 1\right]$.

Дану нерівність можна розв'язати графічно (мал. 64), побудувавши на одній координатній площині графіки функцій

$$y = \frac{1}{x+2} \text{ і } y = \frac{1}{4x-1}.$$



Мал. 64.



Мал. 65.

6. Розв'яжіть нерівність

$$2 < \frac{3x-2}{x-1} < 4.$$

Розв'язання.

Якщо $x - 1 > 0$, то $2x - 2 < 3x - 2 < 4x - 4$.

$$\begin{cases} 2x-2 < 3x-2, \\ 3x-2 < 4x-4, \end{cases} \left| \begin{matrix} x > 0, \\ x > 2, \end{matrix} \right| \Rightarrow x > 2.$$

Якщо $x - 1 < 0$, то $4x - 4 < 3x - 2 < 2x - 2$,

$$\begin{cases} 4x-4 < 3x-2, \\ 3x-2 < 2x-2, \end{cases} \left| \begin{matrix} x < 2, \\ x < 0, \end{matrix} \right| \Rightarrow x < 0.$$

Відповідь. Множина розв'язків: $]-\infty;\ 0\,[\,\cup\,]\,2;\ +\infty[$.

Цю нерівність можна розв'язати й графічно, подаючи вираз

$$\frac{3x-2}{x-1}$$

у вигляді

$$\frac{3x-2}{x-1} = \frac{3x-3+1}{x-1} = 3 + \frac{1}{x-1}.$$

Дістанемо гіперболу $y = \frac{1}{x}$, перенесену вздовж осі x на одну масштабну одиницю і вздовж осі y на 3 масштабних одиниці (мал. 65). Віткам цієї гіперболи, розміщеним між прямими $y = 2$ і $y = 4$, відповідають такі проміжки на осі x: $]-\infty;\ 0$ [і] $2;\ +\infty$ [. Об'єднання цих двох проміжків і є множиною розв'язків даної нерівності.

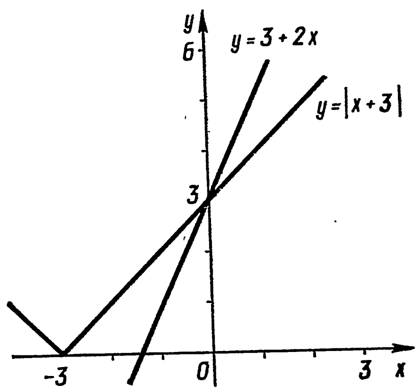
Рівняння і нерівності з модулями

У нових шкільних підручниках є багато таких рівнянь і нерівностей, в яких вирази із змінними беруться за модулями, наприклад: $|x+3| = 3 + 2x$, $|x-5| < 3$ та ін. Розглянемо, як можна виконувати такі вправи. Перед їх розв'язуванням бажано повторити з учнями, що таке модуль числа, пригадати, що

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Слід також зауважити, що $|x-a|$ — відстань між точками з координатами x і a на числовій прямій. Розуміння останнього факту дає можливість значно раціоналізувати розв'язання таких вправ.

Кілька рівнянь чи нерівностей з модулями доцільно розв'язати графічно. Для цього учні повинні вміти будувати графіки функцій виду $y = |x-a|$ та ін.



Мал. 66.

1. Розв'яжіть рівняння $|2x - 4{,}5| = 5{,}5$, $x \in Q$.

Р о з в' я з а н н я.
1) $2x - 4{,}5 = 5{,}5$, тоді $2x = 10$, $x = 5$.
2) $2x - 4{,}5 = -5{,}5$, тоді $2x = -1$, $x = -0{,}5$.

В і д п о в і д ь. $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 5$.

2. Розв'яжіть рівняння $|x+3| = 3 + 2x$.

Р о з в' я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Модуль числа — число невід'ємне, тому $3 + 2x \geqslant 0$, звідки $x \geqslant -1{,}5$. При цій умові $|x+3|$ тотожно дорівнює $x + 3$. Отже, дане рівняння рівносильне такому: $x + 3 = 3 + 2x$. Його задовольняє тільки одне значення: $x = 0$.

Д р у г и й с п о с і б. Якщо $x + 3 \geqslant 0$, то $x + 3 = 3 + 2x$, звідки $x = 0$. Якщо $x + 3 < 0$, то $-x - 3 = 3 + 2x$, звідки $x = -2$, але при $x = -2$ нерівність $x + 3 < 0$ неправильна. Отже, дане рівняння задовольняє тільки значення $x = 0$.

Графічно це рівняння можна розв'язати так, як показано на мал. 66.

3. При яких значеннях x

$$\frac{|x-6|}{x-6} = 1?$$

Р о з в'я з а н н я. Значення $x = 6$ не належить області визначення лівої частини рівняння. Якщо $x > 6$, то

$$\frac{|x-6|}{x-6} = 1 -$$

тотожність. Якщо $x < 6$, то

$$\frac{|x-6|}{x-6} = 1 -$$

рівність, яку не задовольняє жодне значення x.

В і д п о в і д ь. Дане рівняння задовольняє кожне значення $x > 6$.

4. Розв'яжіть рівняння $|5 - x| = |x + 4|$.

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Рівняння задовольняють ті значення x, при яких вирази $5 - x$ і $x + 4$ мають або рівні числові значення, або протилежні. Тому досить розглянути два випадки:

1) $5 - x = x + 4$; тоді $2x = 1$, $x = 0{,}5$.

2) $5 - x = -x - 4$; жодне значення x цієї рівності не задовольняє.

В і д п о в і д ь. $x = 0{,}5$.

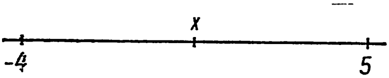
Д р у г и й с п о с і б. Якщо модулі двох чисел рівні, то й квадрати їх рівні. Отже, $(5 - x)^2 = (x + 4)^2$, $18x = 9$, $x = 0{,}5$.

П е р е в і р к а. $|5 - 0{,}5| = 4{,}5$ і $|0{,}5 + 4| = 4{,}5$.

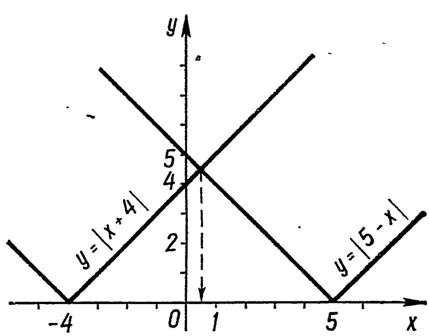
В і д п о в і д ь. $x = 0{,}5$.

У цьому випадку перевірка є невіддільною складовою частиною розв'язання, бо при піднесенні обох частин до квадрата утворене рівняння може мати сторонні корені.

Т р е т і й с п о с і б. $|5 - x|$ — відстань між точками з координатами 5 і x; $|x + 4|$ — від-



Мал. 67.



Мал. 68.

стань між точками з координатами x і -4. Отже x — координата точки, що є серединою проміжку з кінцями -4 і 5 (мал. 68). Тому

$$x = \frac{-4 + 5}{2} = 0{,}5.$$

Графічне розв'язання рівняння подано на мал. 68.

5. Розв'яжіть рівняння $|x-3|+|x-4|=1$.

Такі рівняння розв'язують здебільшого методом проміжків. Спочатку показують, що вирази $x-3$ і $x-4$ мають нульові значення відповідно при $x=3$ і $x=4$. Потім розбивають множину дійсних чисел на три підмножини: $]-\infty; 3[$, $[3; 4]$, $]4; +\infty[$ і розглядають дане рівняння на кожному з цих проміжків.

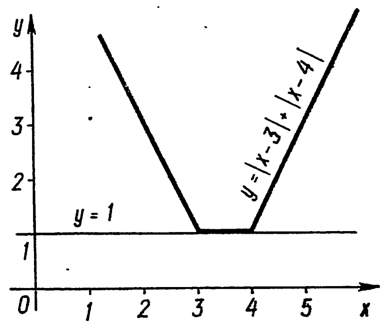
1) Якщо $x<3$, то вирази $x-3$ і $x-4$ від'ємні і дане рівняння можна записати у вигляді $3-x+4-x=1$. Звідси $2x=6$, $x=3$, а це суперечить тому, що $x<3$.

2) Якщо $3 \leqslant x \leqslant 4$, то вираз $x-3$ невід'ємний, а $x-4$ недодатний. На цій множині дане рівняння рівносильне рівнянню $x-3+4-x=1$, а його задовольняє кожне значення змінної x.

3) Якщо $x>4$, то вирази $x-3$ і $x-4$ мають додатні числові значення. В цьому випадку
$$x-3+x-4=1,$$
звідки $x=4$, що суперечить умові $x>4$.

Відповідь. Дане рівняння має множину розв'язків $\{x | 3 \leqslant x \leqslant 4\}$.

Таке розв'язання правильне, але громіздке. Доцільніше скористатися числовою віссю. Число x — це координата такої точки, сума відстаней від якої до точок з координатами 3 і 4 дорівнює 1.



Мал. 69.

Таку властивість має кожна точка, яка лежить на числовій осі між точками з координатами 3 і 4. Усі інші точки, що лежать поза проміжком $[3; 4]$, цієї властивості не мають. Отже, дане рівняння задовольняють усі значення x з проміжку $[3; 4]$, і тільки вони.

Як показують спостереження, учні спочатку з недовір'ям ставляться до цієї відповіді, бо досі вони мали справу тільки з такими рівняннями, множини розв'язків яких дискретні. В даному ж випадку дістали множину розв'язків, більш характерну для нерівностей, ніж для рівнянь. На такому прикладі бажано пояснити учням, що і рівняння можуть мати такі множини розв'язків. Щоб вони краще зрозуміли це, слід побудувати графік функції

$$y=|x-3|+|x-4|=\begin{cases}7-2x, & \text{якщо } x<3,\\ 1, & \text{якщо } 3 \leqslant x \leqslant 4,\\ 2x-7, & \text{якщо } x>4.\end{cases}$$

і розв'язати це рівняння графічно (мал. 69). Доцільно запропонувати учням, користуючись графіком, дослідити, скільки розв'язків має рівняння $|x-3|+|x-4|=a$.

Відповідь. Це рівняння:

має 2 розв'язки, якщо $a>1$;

має безліч розв'язків, якщо $a = 1$;
не має розв'язків, якщо $a < 1$.

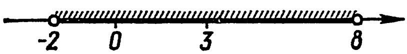
Складніших рівнянь з модулями у восьмирічній школі розв'язувати не треба.

Нерівності з модулями також зручно розв'язувати, використовуючи їх інтерпретацію на числовій осі.

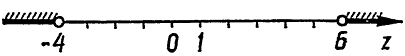
6. Розв'яжіть нерівність $|x - 3| < 5$.

Р о з в'я з а н н я. x — координата точки, яка від точки з координатою 3 віддалена менш як на 5 одиниць (мал. 70).

В і д п о в і д ь. Нерівність задовольняють усі значення x з проміжку $]-2; 8[$.



Мал. 70.



Мал. 71.

7. Розв'яжіть нерівність $|2x - 1| > 5$.

Р о з в'я з а н н я. Нехай $2x = z$. Тоді z — координата точки, яка від точки з координатою 1 віддалена більш як на 5 одиниць (мал. 71).

Маємо: $z < -4$ або $z > 6$,
тобто $2x < -4$, звідки $x < -2$
або $2x > 6$, звідки $x > 3$.

В і д п о в і д ь. $]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$.

8. Розв'яжіть нерівність

$$\left|\frac{2x+1}{3+x} + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}.$$

Іноді її розв'язують так («Математика в школе», 1954, № 5, стор. 40):

$$\left|\frac{4x+2+3+x}{2(3+x)}\right| < \frac{1}{2}; \quad \left|\frac{5x+5}{2(3+x)}\right| < \frac{1}{2}; \quad \frac{5}{2}\left|\frac{x+1}{3+x}\right| < \frac{1}{2};$$

$$\frac{|x+1|}{|3+x|} < \frac{1}{5}; \quad \frac{|3+x|}{|x+1|} > 5; \quad \left|\frac{2+x+1}{x+1}\right| > 5; \quad \left|\frac{2}{x+1} + 1\right| > 5;$$

$$\left|\frac{2}{x+1} - (-1)\right| > 5. \qquad (*)$$

Далі на основі властивості модуля різниці двох чисел

$$\left|\frac{2}{x+1} - (-1)\right| \geqslant \frac{2}{|x+1|} - 1.$$

Тому, щоб задовольнити нерівність (*), достатньо мати

$$\frac{2}{|x+1|} - 1 > 5,$$

або

$$\frac{2}{|x+1|} > 6; \quad \frac{|x+1|}{2} < \frac{1}{6}; \quad |x+1| < \frac{1}{3},$$

звідки $-\frac{1}{3} < x+1 < \frac{1}{3}$; остаточно $-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$.

Таке розв'язання неправильне, бо умова

$$\frac{2}{|x+1|} - 1 > 5$$

є тільки достатня, але не необхідна для того, щоб виконувалась нерівність (*). Дану нерівність можна розв'язувати так.

Позначимо:

$$\frac{2x+1}{3+x} = z.$$

Тоді

$$\left|z + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2},$$

звідки

$$-\frac{1}{2} < z + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}, \text{ або } -1 < z < 0.$$

Тому

$$-1 < \frac{2x+1}{3+x} < 0,$$

$$-1 < \frac{2x+6-5}{x+3} < 0, \quad -1 < 2 - \frac{5}{x+3} < 0, \quad -3 < -\frac{5}{x+3} < -2,$$

$$2 < \frac{5}{x+3} < 3, \quad \frac{1}{3} < \frac{x+3}{5} < \frac{1}{2}, \quad \frac{5}{3} < x+3 < \frac{5}{2}, \quad -\frac{4}{3} < x < -\frac{1}{2}.$$

Відповідь. Множина розв'язків: $\left]-\frac{4}{3}; \ -\frac{1}{2}\right[$.

9. Розв'яжіть нерівність $|2+x| \geqslant |x|$.

Розв'язання.

Перший спосіб. Розглянемо кілька випадків.

а) Якщо $x \geqslant 0$, то $2 + x - x \geqslant 0$. Цю нерівність задовольняє кожне значення x.

б) Якщо $-2 \leqslant x < 0$, то $2 + x + x \geqslant 0$, звідки $x \geqslant -1$.

Отже, значення x з проміжку $[-1; 0[$ також задовольняють дану нерівність.

в) Якщо $x < -2$, то $-x - 2 + x \geqslant 0$, звідки $-2 \geqslant 0$, що не можливо.

Відповідь. Дану нерівність задовольняє кожне значення $x \geqslant -1$.

Другий спосіб. Запишемо нерівність так: $|x-(-2)| \geqslant |x - 0|$. x — це координати точок, які від точки з координатою -2 віддалені більше або так само, як від точки з координатою 0. Цю властивість мають точки, координати яких $x \geqslant -1$.

Дану нерівність можна розв'язати і графічно (мал. 72).

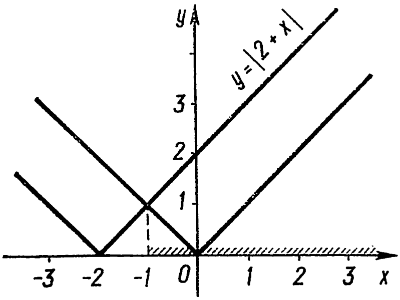
10. Розв'яжіть нерівність $|x-3|+|x-4|>1$.

Р о з в'я з а н н я. Розв'язком цієї нерівності є координата кожної точки, сума відстаней якої від точок з координатами 3 і 4 більша від 1. Як видно з мал. 73, кожна точка, яка на числовій осі розміщена поза проміжком [3; 4], задовольняє дану нерівність.

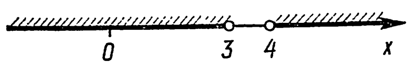
В і д п о в і д ь. Множиною розв'язків нерівності є $]-\infty; 3[\cup]4; +\infty[$.

Неважко розв'язати цю нерівність і графічно (див. мал. 69).

Інші способи розв'язування найпростіших нерівностей з модулями розглянуто в посібнику [5, 183[.



Мал. 72



Мал. 73.

Ірраціональні рівняння і нерівності

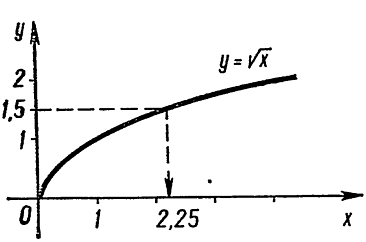
Найпростіші ірраціональні рівняння учні розв'язують у VII класі під час вивчення квадратних коренів.

1. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{x}=1{,}5$.

Р о з в'я з а н н я. За означенням, $\sqrt{x}$ — таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює x. Отже, $x=1{,}5^2$, або $x=2{,}25$.

В VII класі таке рівняння бажано розв'язати і графічно (мал. 74).

Слід запропонувати учням також кілька рівнянь на застосування тотожності $\sqrt{x^2}=|x|$.



Мал. 74.

2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{(x-3)^2}=$
$=17$.

Р о з в'я з а н н я. Запишемо рівняння, рівносильне даному: $|x-3|=17$. Можливі два випадки:

1) $x-3>0$, тоді $x-3=17$, звідки $x=20$.
2) $x-3<0$, тоді $-(x-3)=17$, звідки $x=-14$.

В і д п о в і д ь. $x_1=20$, $x_2=-14$.

Рівняння $|x-3|=17$ можна розв'язати й інакше. На числовій осі точка x має бути віддалена від точки з координатою 3 на 17 одиниць, отже, $x=3+17=20$ або $x=3-17=-14$. Можна скористатися і графіками функцій $y=|x-3|$ та $y=17$.

Іноді вчителі пропонують учням розв'язувати такі рівняння, підносячи обидві частини до квадрата. При цьому перетворенні можуть з'явитись сторонні корені. Їх не буде тільки тоді, коли обидві частини даного рівняння при всіх значеннях x невід'ємні. Справді, якщо при всіх допустимих значеннях x $f(x)$ і $\varphi(x)$ додатні числа, то рівняння $f(x) = \varphi(x)$ і $f^2(x) = \varphi^2(x)$ рівносильні.

Розглянемо ще кілька аналогічних прикладів.

3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+6} = 2x - 3$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини до квадрата:

$$x + 6 = 4x^2 - 12x + 9,$$

звідки $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{1}{4}$.

Перевірка. $\sqrt{3+6} = 3$, $2 \cdot 3 - 3 = 3$, $3 = 3$; $\sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{5}{2}$, $2 \cdot \frac{1}{4} - 3 = -\frac{5}{2}$, $\frac{5}{2} \neq -\frac{5}{2}$.

Відповідь. $x = 3$.

Чи можна було, розв'язуючи дане рівняння, уникнути обов'язкової перевірки, знайшовши спочатку область його визначення? Ні, бо ця область — множина всіх дійсних чисел з проміжку $[-6; +\infty[$, а значення $x = -\frac{5}{2}$, хоч і належить їй, все ж не задовольняє цього рівняння.

Можна було б, досліджуючи таке рівняння, максимально звужувати множину значень змінної, якій належать його корені, а не обмежуватись встановленням його області визначення. Оскільки ліва частина рівняння невід'ємна, то і права частина має бути невід'ємною: $2x - 3 \geqslant 0$, звідки $x \geqslant \frac{3}{2}$. Отже, якщо дане рівняння має корені, то вони належать проміжку $[\frac{3}{2}; +\infty[$. Значення $x = \frac{1}{4}$ не належить цьому проміжку, тому не є коренем даного рівняння.

Чи можна знайдений проміжок $[\frac{3}{2}; +\infty[$ назвати областю визначення даного рівняння? Ні, областю визначення рівняння називається множина значень змінної, при якій обидві частини рівняння мають зміст. Проміжок $[\frac{3}{2}; +\infty[$ можна було б назвати, наприклад, звуженою областю визначення рівняння. Але такий термін у восьмирічній школі краще не вводити.

Учням слід говорити про звуження множини, якій належать розв'язки рівняння чи нерівності. Наприклад, розв'язуючи наведене вище рівняння, можна міркувати так: область визначення рівняння $[-6; +\infty[$. Її можна звузити, бо $\sqrt{x+6}$ при кожному значенні x невід'ємний, тому і $2x - 3 \geqslant 0$, звідки $x \geqslant \frac{3}{2}$. Отже, якщо дане рівняння має корені, то вони належать проміжку $[\frac{3}{2}; +\infty[$ і т. д. Таке звуження області, якій можуть належати розв'язки рівняння чи нерівності, досить корисне. Часто буває доцільно розв'язування рівняння починати саме із звуження області його визначення. В деяких випадках знайдена множина може виявитися порожньою, і тоді, не виконуючи ніяких перетворень, відразу можна записати відповідь.

4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{7-x} = x - 8$.

Розв'язання. Область визначення даного рівняння: $x \leqslant 7$. Ліва, а отже, і права частини його при жодних значеннях змінної x не можуть бути від'ємними, тому $x \geqslant 8$. А такого числа, яке б задовольняло нерівності $x \leqslant 7$ і $x \geqslant 8$, немає.

Відповідь. Рівняння розв'язків не має.

До ірраціональних належать не тільки ті рівняння, в яких змінна знаходиться під знаком радикала, а й ті, які містять змінні з дробовими показниками степенів. Раніше в школі ірраціональні вирази записували переважно за допомогою радикалів, тому й ірраціональні рівняння також подавали в такій формі. Тепер ірраціональні вирази записують частіше за допомогою степенів з дробовими показниками.

5. Розв'яжіть рівняння $x^{-\frac{7}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} + 27 = 0$.

Розв'язання. $x^{-3} + 27 = 0$, $x^{-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$; $x = -\frac{1}{3}$.

Перевірка. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{7}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} = (-3)^{\frac{7}{3}} \cdot (-3)^{\frac{2}{3}} = (-3)^3 = -27$.

Відповідь. $x = -\frac{1}{3}$.

6. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{y-8}{y^{\frac{1}{3}} - 2} = 39$.

Розв'язання. Оскільки $y - 8 = (y^{\frac{1}{3}})^3 - 2^3 = (y^{\frac{1}{3}} - 2) \times (y^{\frac{2}{3}} + 2y^{\frac{1}{3}} + 4)$, то дане рівняння (при $y \neq 8$) рівносильне такому:

$$y^{\frac{2}{3}} + 2y^{\frac{1}{3}} + 4 = 39, \text{ або } y^{\frac{2}{3}} + 2y^{\frac{1}{3}} - 35 = 0.$$

Ввівши заміну $y^{\frac{1}{3}} = x$, дістанемо квадратне рівняння $x^2 + 2x - 35 = 0$, корені якого $x_1 = 5$, $x_2 = -7$. Отже, $y^{\frac{1}{3}} = 5$, звідки $y = 125$; або $y^{\frac{1}{3}} = -7$, звідки $y = -343$.

Перевірка. $\frac{125-8}{5-2}=\frac{117}{3}=39$; $\frac{-343-8}{-7-2}=\frac{-351}{-9}=39$.

Відповідь. $y_1 = 125$; $y_2 = -343$.

Не слід вимагати, щоб учні обов'язково замінювали $y^{\frac{1}{3}}$ якоюсь однією буквою. Якщо вони зрозуміють, що дістали квадратне рівняння відносно $y^{\frac{1}{3}}$, то зможуть відразу записати: $y_1^{\frac{1}{3}} = 5$, $y_2^{\frac{1}{3}} = -7$; отже, $y_1 = 125$, $y_2 = -343$.

7. Розв'яжіть рівняння $(x-6)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} = 2$.

Розв'язання. Область його визначення: $x \geqslant 6$. Ліва частина даного рівняння — монотонно зростаюча функція змінної x. Найменше її значення

$$(x-6)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}\Big|_{x=6} = 5^{\frac{1}{2}} > 2.$$

Відповідь. Рівняння дійсних розв'язків не має.

Такий спосіб розв'язування (з використанням властивостей монотонних функцій) в даному випадку найраціональніший, з ним обов'язково треба ознайомити учнів. Щоб вони краще зрозуміли його суть, можна запропонувати їм побудувати схематичний графік функції $y = (x-6)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}$ і дослідити, скільки розв'язків має рівняння $(x-6)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} = a$ при: 1) $a > \sqrt{5}$; 2) $a = \sqrt{5}$; 3) $a < \sqrt{5}$.

Відповідь. 1) Один; 2) один; 3) жодного.

8. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2.$$

Часто це рівняння розв'язують так.

Піднесемо обидві його частини до квадрата:

$$x + 2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x^2-4(x-1)} + x - 2\sqrt{x-1} = 4, \text{ звідки}$$
$$\sqrt{x^2-4(x-1)} = x-2, \sqrt{(x-2)^2} = x-2, \ |x-2| = x-2.$$

Остання рівність правильна при всіх $x \geqslant 2$. Отже, дане рівняння задовольняє кожне число з проміжку $[2, +\infty[$.

Таке розв'язання нестроге, бо з наведених міркувань не випливає, що рівняння $|x-2| = x-2$ рівносильне даному. Доцільно розв'язувати його інакше.

Зробимо заміну $\sqrt{x-1} = y$, звідки $x = y^2+1$. Тоді дане рівняння матиме такий вигляд:

$$\sqrt{y^2+1+2y} - \sqrt{y^2+1-2y} = 2, \text{ або } |y+1| - |y-1| = 2.$$

З рівності $\sqrt{x-1}=y$ випливає, що $y \geqslant 0$. Тому залишається розглянути два випадки.

1) Нехай $y \geqslant 1$, тоді $y+1-y+1=2$. Це — тотожність.

2) Нехай $0 \leqslant y < 1$, тоді $y+1-1+y=2$, звідки $y=1$.

Виходить, що рівняння з модулями задовольняє кожне дійсне число $y \geqslant 1$. Отже, $\sqrt{x-1} \geqslant 1$, звідки $x \geqslant 2$.

Відповідь. Рівняння задовольняє кожне дійсне значення $x \geqslant 2$.

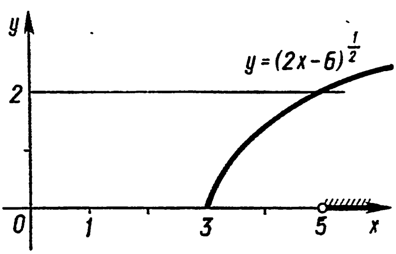
Зрозуміло, що на уроках не треба захоплюватись такими рівняннями. Досить розв'язати одне і показати на ньому, що є й такі ірраціональні рівняння, множини розв'язків яких подібні до множин розв'язків нерівностей. На заняттях математичного гуртка бажано таких рівнянь розв'язати більше, наприклад:

$$\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2;$$
(відповідь $-1 \leqslant x < 0$).

$$\sqrt{x+\sqrt{3x-1}}-\sqrt{x-\sqrt{3x-1}}=\sqrt{5x}; \text{ (відповідь } x<0).$$

$$\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6x}; \left(\text{відповідь } \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 3\right).$$

З ірраціональних нерівностей у восьмирічній школі слід розв'язувати тільки найпростіші. Ці вправи дуже важкі для учнів: позбуваючись радикалів, вони підносять обидві частини нерівності до степенів, а при цьому, як відомо, можуть з'явитися сторонні розв'язки. Коли таке трапляється під час розв'язування рівнянь, це не дуже ускладнює справу, бо відкинути кілька сторонніх коренів можна, наприклад, способом перевірки. Для нерівностей цей спосіб нічого не дає, адже перевірити безліч розв'язків не можна. Тому учням VII і VIII класів слід пропонувати тільки такі ірраціональні нерівності, які неважко розв'язувати на основі відомих їм властивостей функцій або графічно.



Мал. 75.

9. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x-6} > 2$.

Розв'язання. Функція $y=\sqrt{2x-6}$ монотонно зростає на всій області визначення $x \geqslant 3$. Отже, дану нерівність задовольняє кожне дійсне значення $x > a$, де a — корінь рівняння $\sqrt{2x-6}=2$. Розв'язавши це рівняння, дістанемо $x=5$. Отже, множина розв'язків даної нерівності $]5; +\infty[$.

Розв'язати дану нерівність можна і графічно (мал. 75).

У сильніших класах слід пояснити: коли обидві частини нерівності $f(x) > g(x)$ додатні або одна додатна, а друга невід'ємна, то їй рівносильна нерівність $(f(x))^2 > (g(x))^2$. Це випливає з тотожності $(f(x))^2 - (g(x))^2 = (f(x) + g(x))(f(x) - g(x))$. Використовуючи цю властивість, можна значно спростити розв'язання багатьох ірраціональних та інших нерівностей. Наприклад, наведену вище нерівність можна розв'язати ще й так.

Права частина нерівності — додатне число 2, ліва може набувати тільки невід'ємних значень, тому

$$(\sqrt{2x-6} > 2) \Leftrightarrow (2x - 6 > 4) \Leftrightarrow (x > 5).$$

10. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+1} > x$.

Розв'язання. Область її визначення $[-1;\ +\infty[$. Розіб'ємо цей проміжок на два так, щоб один з них містив тільки невід'ємні числа:

$$[-1;\ +\infty[= [-1;\ 0[\cup [0;\ +\infty[.$$

Кожне значення $x \in [-1;\ 0[$ задовольняє дану нерівність. Якщо $x \in [0;\ +\infty[$, то

$$(\sqrt{x+1} > x) \Leftrightarrow (x + 1 > x^2) \Leftrightarrow \left(0 \leqslant x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Об'єднавши дві знайдені множини розв'язків, дістанемо:

$$\left[-1;\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[.$$

11. Розв'яжіть нерівність $x - 4\sqrt{x+2} + 2 < 0$.

Розв'язання. Область визначення цієї нерівності: $[-2;\ +\infty[$. Позначивши $\sqrt{x+2} = y$, матимемо $y^2 - 4y < 0$. Цю нерівність задовольняють усі значення y з проміжку $]0;\ 4[$. Отже, $\sqrt{x+2} < 4$, звідки $-2 < x < 14$.

Відповідь. $]-2;\ 14[$.

12. Визначте множини розв'язків нерівностей

$$(x-6)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} > 1 \text{ і } (x-6)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} > 2.$$

Розв'язання. Згідно із сказаним на стор. 131, функція $y = (x-6)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}$ монотонно зростаюча на всій її області визначення $x \geqslant 6$, причому найменше її значення дорівнює $\sqrt{5}$. Тому кожна з двох даних нерівностей має таку саму множину розв'язків: $\{x \mid x \geqslant 6\}$.

Показникові й логарифмічні рівняння і нерівності

Раніше показникові й логарифмічні рівняння і нерівності учні розв'язували, починаючи з IX класу. Тепер найпростіші з таких видів вправ розв'язують і восьмикласники.

З багатьох відомих способів розв'язування показникових рівнянь у VIII класі досить розглянути способи зрівнювання основ, підстановки, логарифмування. Логарифмічні рівняння можна розв'язувати способом зрівнювання логарифмів, використанням основної логарифмічної тотожності, графічним способом.

У багатьох випадках досить ефективним є також використання властивостей показникової чи логарифмічної функції. При цьому у VIII класі слід обмежитись найпростішими вправами. Вправ, складніших від розглянутих нижче, учням давати не треба.

1. Розв'яжіть рівняння $0{,}5 \cdot 2^{x+3} = \frac{1}{8}$.

Розв'язання.

Перший спосіб. Запишемо рівняння так: $2^{-1} \cdot 2^{x+3} = 2^{-3}$, звідки $2^{x+2} = 2^{-3}$. Маємо рівні степені і рівні основи (основи відмінні від 0 і 1), тому і показники цих степенів рівні: $x + 2 = -3$, звідки $x = -5$.

Перевірка. $0{,}5 \cdot 2^{-5+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Відповідь. $x = -5$.

Другий спосіб. Помноживши на 2 обидві частини даного рівняння, дістанемо $2^{x+3} = 2^{-2}$, звідки $x + 3 = -2$, або $x = -5$.

Можливі й інші способи розв'язування, наприклад: помножимо обидві частини даного рівняння на 8. Дістанемо

$$4 \cdot 2^{x+3} = 1;\ 2^{x+5} = 1;\ x + 5 = 0,$$

звідки $x = -5$.

Усі ці способи рівноцінні.

2. Знайдіть множину розв'язків рівняння

$$6^{3x} + 6^{3x-1} + 6^{3x+1} = 43.$$

Розв'язання. Винесемо в лівій частині за дужки член з найменшим показником степеня:

$$6^{3x-1}(6 + 1 + 6^2) = 43,$$

звідки

$$6^{3x-1} \cdot 43 = 43,\ 6^{3x-1} = 1,\ 3x - 1 = 0,\ x = \frac{1}{3}.$$

Відповідь. $x = \frac{1}{3}$.

3. Розв'яжіть рівняння $9^x - 5 \cdot 3^{x+1} + 36 = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння так:

$$3^{2x} - 15 \cdot 3\ + 36 = 0.$$

Увівши зміну $3^x = z$, дістанемо квадратне рівняння $z^2 - 15z + 36$, корені якого $z_1 = 3$; $z_2 = 12$.

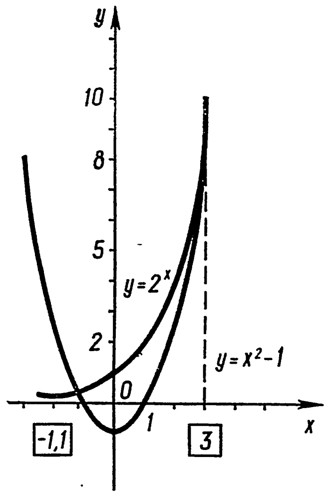
Маємо: 1) $3^x = 3$, звідки $x = 1$; 2) $3^x = 12$; корінь останнього рівняння можна записати за допомогою логарифмів: $x = \log_3 12$ або $x = 1 + \log_3 4$.

Якщо треба подати корінь у вигляді десяткового дробу, слід скористатися таблицями логарифмів: $x \cdot \lg 3 = \lg 12$, $0{,}4771x = 1{,}0792$, $x \approx 2{,}262$.

Відповідь. $x_1 = 1$, $x_2 \approx 2{,}262$.

Деякі трансцендентні рівняння у школі слід розв'язувати тільки графічно.

4. Розв'яжіть рівняння $2^x = x^2 - 1$.



Мал. 76.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 2^x$ і $y = x^2 - 1$ (мал. 76). Дві спільні точки цих графіків мають абсциси (приблизно) $-1{,}1$ і 3. Перевірка показує, що $x_1 = -1{,}1$ — наближений корінь, а $x_2 = 3$ — точний.

Чи існує ще й третя точка перетину цих графіків? Проведемо додаткове дослідження. При $0 < x < 3$, як видно з малюнка, значення $x^2 - 1$ менші, ніж відповідні значення 2^x. При $x = 3$ ці значення рівні, а при $x \geqslant 4$ значення $x^2 - 1$ знову менші, ніж відповідні значення 2^x. Це може бути тільки тоді, коли обидва графіки в точці з абсцисою $x = 3$ дотикаються один до одного або коли вони перетинаються ще в одній точці з абсцисою, трохи більшою від 3. З'ясувати це можна було б і за допомогою похідної. Але учні VIII класу похідної не знають, тому тут досить обчислити значення функцій $x^2 - 1$ і 2^x при кількох значеннях змінної x. Обчислення можна звести в таблицю.

x	2^x	x^2-1
3,1	8,57	8,61
3,2	9,19	9,24
3,3	9,85	9,89
3,4	10,55	10,56
3,5	11,31	11,25

Як бачимо, при $x = 3{,}4$ значення 2^x менше, ніж відповідне значення $x^2 - 1$, а вже при $x = 3{,}5$ — більше. Це й означає, що графіки двох розглянутих функцій перетинаються в точці, абсциса якої трохи більша від $x = 3{,}4$. Отже, дане рівняння має три корені:

$$x_1 \approx -1{,}1;\ x_2 = 3;\ x_3 \approx 3{,}4.$$

5. Розв'яжіть рівняння

$$\lg (x + 1) - 2 = \lg 7 - \lg 25 - \lg (x - 2).$$

Р о з в'я з а н н я.

$$\lg(x+1)+\lg(x-2)=\lg 7-\lg 25+\lg 100.$$

$$\lg(x+1)(x-2)=\lg\frac{700}{25},$$

$$(x+1)(x-2)=28,\ x^2-2x+x-2=28,$$

$$x^2-x-30=0,\ x_1=-5,\ x_2=6.$$

Значення $x=-5$ не задовольняє рівняння, бо при ньому вирази $\lg(x+1)$ і $\lg(x-2)$ не існують. Перевіримо, чи задовольняє рівняння $x=6$.

$$\lg 7-2\ =\lg 7-\lg\ 100=\lg\ 0{,}07,$$

$$\lg 7-\lg\ 25-\lg\ 4=\lg\ 0{,}07.$$

В і д п о в і д ь. $x=6$.

6. Розв'яжіть рівняння $\frac{2\lg x}{\lg(2-x)}=0$.

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Дріб може дорівнювати нулю тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю. Отже, $\lg x=0$, $x=$ $=1$.

Проте при $x=1$ $\lg(2-x)=\lg 1=0$, а на 0 ділити не можна.

В і д п о в і д ь. Дане рівняння розв'язків не має.

Д р у г и й с п о с і б. Дане рівняння рівносильне такій системі:

$$\left\{\begin{array}{l}\lg x=0,\\ 2-x>0,\\ 2-x\neq 1,\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}x=1\\ \\ \\ \end{array}\right.$$

Висловлення $2-1>0$ правильне, а $2-1\neq 1$ неправильне. Тому рівняння не має розв'язків.

Зрозуміло, що можна спочатку знайти область визначення рівняння. Розв'язавши систему

$$\left\{\begin{array}{l}x>0,\\ 2-x>0,\\ 2-x\neq 1,\end{array}\right.$$

дістанемо таку множину: $]0;\ 1]\cup\ ]1;\ 2[$.

Далі, знайшовши, як показано вище, значення $x=1$, помічаємо, що воно не належить області визначення рівняння. Отже, це рівняння розв'язків не має.

На такому прикладі ще раз переконуємося, що робити попереднє дослідження в процесі розв'язування рівнянь не завжди доцільно. Перший спосіб раціональніший.

Розв'язувати показникові й логарифмічні нерівності у VIII класі треба насамперед на основі властивостей відповідних функцій.

7. Знайдіть множину розв'язків нерівності $5^{2x-5} \geqslant 1$.

Розв'язання. Перетворимо дану нерівність:

$$\frac{5^{2x}}{5^5} \geqslant 1, \ 5^{2x} \geqslant 5^5.$$

Функція 5^{2x} зростаюча, тому $2x \geqslant 5$, звідки $x \geqslant 2{,}5$. Можна міркувати й так:

$5^{2x-5} \geqslant 5^0$, тому $2x - 5 \geqslant 0$, звідки $x \geqslant 2{,}5$.

Примітка.

Якби треба було знайти множину тільки цілих значень x, при яких $5^{2x-5} \geqslant 1$, то відповідь була б інша: $\{x \mid x \in Z, \ x \geqslant 3\}$.

8. Розв'яжіть нерівність: $0{,}01 < 100^x < \sqrt{10}$.

Розв'язання. Запишемо нерівність інакше

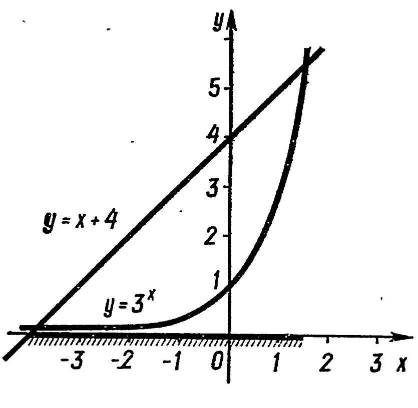
$$10^{-2} < 10^{2x} < 10^{\frac{1}{2}}.$$

Функція $y = 10^z$ зростаюча, тому $-2 < 2x < 0{,}5$, звідки $-1 < x < 0{,}25$.

Відповідь. $]-1; 0{,}25[$.

9. Розв'яжіть нерівність графічно.

$$3^x < x + 4.$$



Мал. 77.

Розв'язання. а) Побудуємо в одній системі координат графіки двох функцій $y = 3^x$ і $y = x + 4$ (мал. 77). Як бачимо, ці графіки перетинаються в точках, абсциси яких наближено дорівнюють $-3{,}9$ і $1{,}5$. На проміжку $]-3{,}9; 1{,}5[$ графік функції $y = 3^x$ розміщений нижче від графіка функції $y = x + 4$; отже, наближено множину розв'язків даної нерівності можна записати так: $-3{,}9 < x < 1{,}5$.

10. Розв'яжіть нерівність

$$\lg(x-1) + \lg(8-x) < 1.$$

Розв'язання. Знаходимо спочатку область її визначення

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ 8 - x > 0, \end{cases} \left| \begin{matrix} x > 1, \\ x < 8, \end{matrix} \right| \Rightarrow 1 < x < 8.$$

Перетворимо дану нерівність:

$$\lg (x-1)(8-x) < \lg 10.$$

звідки

$$(x-1)(8-x) < 10, \quad -x^2+9x-8 < 10,$$
$$x^2 - 9x + 18 > 0.$$

Корені тричлена $x^2 - 9x + 18$ знаходимо за теоремою Вієта: $x_1 = 3$; $x_2 = 6$. Тому множина розв'язків знайденої нерівності:

$$]-\infty;\ 3\,[\,\bigcup\,]\,6;\ +\infty\,[.$$

Врахувавши знайдену раніше область визначення нерівності, матимемо: $]\,1;\ 3\,[\,\bigcup\,]\,6;\ 8\,[$.

Можна дану нерівність перетворити інакше:

$$\lg(x-1) < 1 - \lg(8-x),$$
$$\lg(x-1) < \lg\frac{10}{8-x},$$

звідки $x - 1 < \frac{10}{8-x}$. (*)

На множині $]\,1;\ 8\,[$ вираз $8 - x$ має тільки додатні значення, тому знайдена нерівність на цій множині рівносильна такій: $(x-1)(8-x) < 10$ і т. д.

Розв'язувати нерівність (*), не враховуючи області її визначення нераціонально.

11. Розв'яжіть нерівність

$$x^{\lg x - 1} > 100.$$

Р о з в'я з а н н я. Область її визначення: $]\,0;\ +\infty\,[$.

Прологарифмуємо дану нерівність:

$$(\lg x - 1)\lg x > \lg 100, \quad \lg^2 x - \lg x - 2 > 0.$$

Якщо позначити $\lg x = z$, то матимемо квадратну нерівність $z^2 - z - 2 > 0$, множина розв'язків якої $]-\infty;\ -1\,[\,\bigcup\,]\,2;\ +\infty[$. Це — множина значень z. Тоді множина відповідних значень x буде:

$$]\,0;\ \frac{1}{10}\,[\,\bigcup\,]\,100;\ +\infty\,[.$$

Таких нерівностей ми не пропонуємо розв'язувати у VIII класі, вони посильні тільки окремим учням.

Рівняння і нерівності з функціями $[x]$ і $\{x\}$

Раніше в загальноосвітніх школах функцій $[x]$ і $\{x\}$ не розглядали. Тому і пов'язаних з ними рівнянь та нерівностей учні не розв'язували. У новому підручнику з алгебри для VIII класу є такі рівняння і нерівності.

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $[0{,}58 + x] = [0{,}58]$; б) $[y - 0{,}39] = [3{,}61]$; в) $[1{,}62 - x] = [9{,}37]$.

Р о з в'я з а н н я. а) $[0{,}58] = 0$. Отже, дане рівняння рівносильне такому: $[0{,}58 + x] = 0$. Тому $0 \leqslant 0{,}58 + x < 1$, звідки $-0{,}58 \leqslant x < 0{,}42$.

Коротше це розв'язання можна записати так:

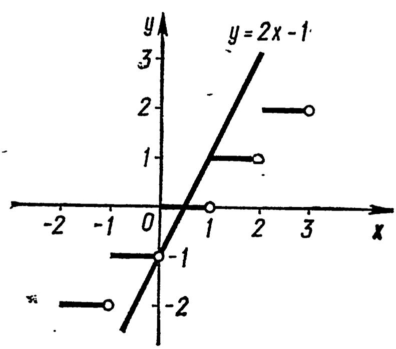
$$([0{,}58 + x] = [0{,}58]) \Leftrightarrow ([0{,}58 + x] = 0) \Leftrightarrow (0 \leqslant 0{,}58 + x < 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-0{,}58 \leqslant x < 0{,}42).$$

$$\text{б) } ([y - 0{,}39] = [3{,}61]) \Leftrightarrow ([y - 0{,}39] = 3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3 \leqslant y - 0{,}39 < 4) \Leftrightarrow (3{,}39 \leqslant y < 4{,}39).$$

$$\text{в) } ([1{,}62 - x] = [9{,}37]) \Leftrightarrow ([1{,}62 - x] = 9) \Leftrightarrow (9 \leqslant 1{,}62 -$$
$$- x < 10) \Leftrightarrow (7{,}38 \leqslant -x < 8{,}38) \Leftrightarrow (-8{,}38 < x \leqslant -7{,}38)$$

У позакласній роботі можна розв'язувати, наприклад, і такі рівняння: $[x] = 2x - 1$.

Розв'язати це рівняння найпростіше графічно (мал. 78). Проте можна міркувати й так: з означення цілої частини числа випливає така подвійна нерівність: $[x] \leqslant x < [x] + 1$. Підставивши в неї замість $[x]$ вираз $2x - 1$, дістанемо $2x - 1 \leqslant x < 2x$. Якщо від кожної частини відняти $2x$, матимемо: $-1 \leqslant -x < 0$, або $0 < x \leqslant 1$. З даного рівняння випливає, що значення виразу $2x-1$ має бути цілим числом. А це можливо, коли x — число ціле або дріб із знаменником 2. На проміжку $0 < x \leqslant 1$ таких чисел тільки два: $\frac{1}{2}$ і 1. Це — корені даного рівняння.



Мал. 78.

2. Розв'яжіть рівняння.

а) $\{0{,}58 + x\} = 0{,}58$; б) $\{1{,}62 + x\} = 0{,}65$.

Р о з в'я з а н н я.

а) П е р ш и й с п о с і б. Функція $y = \{x\}$ періодична з найменшим додатним періодом $l = 1$, тому робимо висновок, що дане рівняння задовольняє кожне ціле значення x.

Д р у г и й с п о с і б. Можна скористатися тотожністю $\{x\} = x - [x]$, яка випливає з означення цієї функції.

Маємо: $0{,}58 + x - [0{,}58 + x] = 0{,}58$, звідки $x = [0{,}58 + x]$. У правій частині цієї рівності — ціле число, тому і x може бути тільки цілим числом. Будь-яке ціле число задовольняє дане рівняння.

б) $1{,}62 + x - [1{,}62 + x] = 0{,}65$, звідки $x + 0{,}97 = [1{,}62 + x]$. У правій частині маємо ціле число. Тому і значення виразу $x + 0{,}97$ повинно бути цілим числом, що можливо тільки тоді, коли $x = m + 0{,}03$, де m — ціле число. Це і є загальний розв'язок даного рівняння.

3. Знайдіть кілька таких значень a, щоб виконувалась нерівність $\{a\} > \frac{2}{3}$.

Розв'язання. В задачі треба знайти не всі значення a, які задовольняють дану нерівність, а лише кілька. Досить навести хоч би такі приклади:

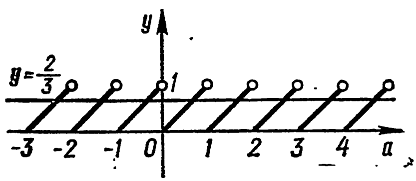
$$a = \frac{8}{9}, \text{ бо } \left\{\frac{8}{9}\right\} = \frac{8}{9} \text{ і } \frac{8}{9} > \frac{2}{3}.$$

$$a = 2\frac{5}{6}, \text{ бо } \left\{2\frac{5}{6}\right\} = \frac{5}{6} \text{ і } \frac{5}{6} > \frac{2}{3}.$$

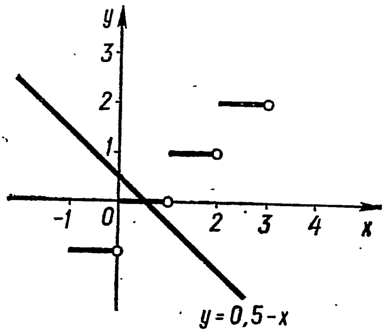
Сильнішим учням можна запропонувати знайти всю множину розв'язків (мал. 79) даної нерівності $\frac{2}{3} + m < a < 1 + m$, де m — ціле число.

4. Розв'яжіть нерівність $[x] > 0,5 - x$.

Такі вправи краще розв'язувати графічно. Побудувавши на



Мал. 79.



Мал. 80.

одній координатній площині графіки функцій $y = [x]$ і $y = 0,5 - x$ (мал. 80), бачимо, що вони перетинаються в точці з координатою $x = 0,5$. При такому значенні x значення цих функцій рівні. При всіх значеннях $x > 0,5$ графік функції $y = [x]$ розміщений вище від графіка функції $y = 0,5 - x$. Це означає, що дану нерівність задовольняють усі значення $x > 0,5$.

III. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ СКЛАДАННЯМ РІВНЯНЬ

1. Задачі без різнойменних величин

Як уже зазначалося, всі текстові задачі на складання рівнянь можна поділити на дві групи: без різнойменних величин і з різнойменними величинами. До першої групи належать задачі з абстрактними числовими даними або з однойменними величинами, тобто задачі таких типів:

1. на знаходження чисел (найпростіші);
2. на знаходження цифр;
3. на знаходження чисел за їх сумами і різницями;
4. на знаходження чисел за їх сумами або різницями і відношеннями;
5. на пропорційне ділення;
6. на змішування і т. п.

Розглянемо методику розв'язування названих типів задач.

Задачі на знаходження чисел

Найпростіші задачі на знаходження (відгадування) натуральних чисел можна пропонувати навіть учням початкових класів. Наприклад: «Я задумав число, помножив його на 3, до добутку додав 12 і в результаті дістав 33. Яке число я задумав?».

Розв'язання кількох перших таких задач на дошці і в зошитах можна оформити так:

x — задумане число;
$3x$ — добуток його та числа 3;
$3x + 12$ — сума добутку та числа 12;
33 — знайдене число.

Отже, $3x + 12 = 33$.

Лишається розв'язати це рівняння й дістати задумане число; $x = 7$.

Уже в IV класі, крім задач, що мають один розв'язок, можна пропонувати й невизначені, наприклад, такі: «Я задумав число, додав до нього 10, суму помножив на 2, від добутку відняв число, вдвоє більше від задуманого, в результаті дістав 20. Яке число я задумав?»

Звичайно цю задачу розв'язують так:

x — задумане число;
$x + 10$ — сума його й числа 10;
$(x + 10) \cdot 2$ — добуток суми й числа 2;
$(x + 10) \cdot 2 - 2x$ — різниця добутку й $2x$;
20 — знайдене число.

Отже, $(x + 10) \cdot 2 - 2x = 20$.

$$2x + 20 - 2x = 20,$$
$$20 = 20.$$

Часто учні помилково вважають, що задуманого числа немає. Насправді ж кожне значення x задовольняє складене за умовою задачі рівняння, бо в результаті його розв'язування дістаємо правильну числову рівність.

Якби в умові задачі замість числа 20 було якесь інше, наприклад 30, то дістали б рівняння $(x + 10) \cdot 2 - 2x = 30$, яке не має жодного розв'язку. В цьому випадку мали б іншу відповідь: немає такого числа, яке б задовольняло умову задачі.

Розглянемо ще кілька задач, які доступні учням VI класу.

1. Знайдіть число, яке при діленні на 12 дає в частці 7, а в остачі 3.

Р о з в'я з а н н я. Нехай x — шукане число. Коли від нього відняти остачу 3, дістанемо число $x - 3$, яке при діленні на 12 дає в частці 7. Отже, $\frac{x-3}{12} = 7$, звідки $x = 87$.

В і д п о в і д ь. 87.

Цю задачу можна розв'язати інакше, використавши співвідношення $a = bq + r$ між діленим, дільником, часткою і остачею: $12 \cdot 7 + 3 = 87$.

2. Частка від ділення числа 37 на число q дорівнює p, а остача 2. Складіть рівняння і знайдіть усі його розв'язки, що відповідають умові задачі.

Р о з в'я з а н н я. Умову задачі скорочено запишемо так:

$$37 : q = p \text{ (ост. 2)}.$$

Шестикласники мають пригадати (можливо, з допомогою вчителя), що коли від діленого відняти остачу, то різниця без остачі ділитиметься на дільник. Отже, треба розв'язати рівняння: $35 : q = p$, тобто знайти всі дільники числа 35. Дільники числа 35: 1, 5, 7, 35. Число 1 задачу не задовольняє. Задача має три розв'язки:

$$1)\ q = 5,\ p = 7;\ 2)\ q = 7,\ p = 5;\ 3)\ q = 35,\ p = 1.$$

3. Якщо до даного числа дописати справа цифру 9 і до утвореного числа додати подвоєне дане число, то сума дорівнюватиме 633. Знайдіть дане число.

Р о з в'я з а н н я. Перед тим, як розв'язувати задачу, учні мають усвідомити, що дописати до будь-якого числа справа цифру

9 означає помножити дане число на 10 і додати до нього 9. Тоді вони легко складуть рівняння:

$$10x + 9 + 2x = 633.$$

Розв'язавши його, знайдуть: $x = 52$.

Перевірка. $529 + 2 \cdot 52 = 633$.

4. Якщо до трицифрового числа зліва дописати цифру 8 і до утвореного чотирицифрового числа додати 619, то сума буде у 40 раз більша від трицифрового числа. Знайдіть трицифрове число.

Розв'язання. Шукане трицифрове число позначимо $\overline{xyz}$. Якщо дописати до нього зліва цифру 8, дістанемо число

$$\overline{8xyz} = 8000 + \overline{xyz}.$$

За умовою задачі маємо:

$$8000 + \overline{xyz} + 619 = 40 \cdot \overline{xyz}.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно шуканого числа $\overline{xyz}$.

$$39 \cdot \overline{xyz} = 8619, \ \overline{xyz} = 221.$$

Відповідь. 221.

Отже, в цьому разі не треба було визначати кожну цифру шуканого числа окремо. Очевидно, що шукане трицифрове число можна позначити й однією буквою, наприклад a, записавши $8000 + a + 619 = 40a$, але, щоб уникнути помилок, краще додержувати попередньої форми запису.

Розглянуті вище задачі бажано розв'язувати під час вивчення розділу «Многочлени». Взагалі задачі на складання рівнянь не треба зосереджувати, як це було раніше, в одному-двох розділах. У нових підручниках з алгебри кожний розділ містить задачі, які розв'язуються складанням рівнянь.

До розглядуваного типу доцільно віднести також задачі на визначення одного з компонентів дробу. Зокрема, вже в V класі під час вивчення звичайних дробів, можна розв'язати таку, наприклад, задачу.

5. На скільки треба збільшити знаменник дробу $\frac{6}{11}$, щоб дістати $\frac{1}{3}$?

Розв'язання. Позначимо шукане число через x. Тоді $\frac{6}{11 + x} = \frac{1}{3}$.

Тут $11 + x$ — невідомий дільник. Щоб знайти його, треба ділене поділити на частку: $11 + x = 6 : \frac{1}{3}$, $11 + x = 18$.

Щоб знайти x — невідомий доданок — треба від суми відняти доданок: $x = 18 - 11$, $x = 7$.

Відповідь. Знаменник дробу треба збільшити на 7.

Складніші задачі на знаходження компонентів дробу можна пропонувати учням VII і VIII класів, які обізнані вже із способами розв'язування рівнянь із змінною в знаменнику дробу.

6. Знаменник дробу на 5 більший від його чисельника. Якщо до чисельника цього дробу додати 14, а від знаменника відняти 1, то дістанемо дріб, обернений до даного. Визначте даний дріб.

Р о з в'я з а н н я. Нехай x — чисельник даного дробу. Тоді

$$\frac{x}{x+5} \text{ — даний дріб,}$$

$$\frac{x+14}{x+5-1} \text{ — утворений дріб,}$$

$$\frac{x+5}{x} \text{ — дріб, обернений до даного.}$$

Отже,

$$\frac{x+14}{x+4} = \frac{x+5}{x}.$$

Розв'яжемо це рівняння.

$$x(x+14) = (x+4)(x+5).$$

$$x^2 + 14x = x^2 + 9x + 20,$$

$$5x = 20; \ x = 4.$$

П е р е в і р к а. $\frac{4+14}{9-1} = \frac{9}{4}$.

В і д п о в і д ь. $\frac{4}{9}$.

7. Якщо до чисельника і знаменника дробу додати по 1, то дістанемо дріб, що дорівнює $\frac{1}{3}$, а якщо від його чисельника і знаменника відняти по 3, дістанемо дріб, що дорівнює $\frac{1}{5}$. Знайдіть цей дріб.

Р о з в'я з а н н я. Нехай $\frac{x}{y}$ — шуканий дріб. Тоді з умови задачі випливає система таких двох рівнянь:

$$\frac{x+1}{y+1} = \frac{1}{3} \text{ і } \frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{5}.$$

Розв'язавши її, дістанемо: $x = 7$, $y = 23$.

В і д п о в і д ь. $\frac{7}{23}$.

Цю задачу слід пропонувати учням тільки тоді, коли вони вже вміють розв'язувати системи рівнянь, оскільки розв'язання її за допомогою рівняння з однією змінною досить громіздке. Справді, позначимо чисельник знайденого спочатку дробу через x. Тоді його знаменник дорівнюватиме $3x$. Кожний з компонентів даного дробу на 1 менший, ніж відповідний компонент знайденого, тобто даний дріб має вигляд $\frac{x-1}{3x-1}$. Якщо від чисельника і знаменника його відняти по 3, то дістанемо $\frac{1}{5}$. Отже,

$$\frac{x-4}{3x-4}=\frac{1}{5},$$

звідки $x = 8$ і т. д.

8. Різниця двох нескоротних дробів дорівнює $\frac{22}{75}$. Чисельники дробів відносяться, як $4:3$, а знаменники — як $3:5$. Знайдіть ці дроби.

Розв'язання. Нехай чисельник першого дробу дорівнює $4x$, а знаменник $3y$. Тоді чисельник другого дробу $3x$, а знаменник $5y$. Маємо дроби:

$$\frac{4x}{3y} \text{ і } \frac{3x}{5y}.$$

В умові задачі сказано, що їх різниця дорівнює $\frac{22}{75}$, тобто

$$\frac{4x}{3y}-\frac{3x}{5y}=\frac{22}{75},$$

звідки

$$\frac{11x}{15y}=\frac{22}{75},\quad 5x=2y.$$

Оскільки дані дроби нескоротні і, отже, числа x та y взаємно прості то, $x=2$, $y=5$.

Відповідь. $\frac{8}{15}$ і $\frac{6}{25}$.

9. Сума чисел дорівнює 28; різниця їх квадратів 168. Знайдіть ці числа.

Розв'язання. Позначимо шукані числа через x та y і складемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x+y=28, \\ x^2-y^2=168. \end{cases}$$

Розв'язати її можна способом підстановки або розкладанням лівої частини другого рівняння на множники: $(x-y)(x+y) = 168$.

Відповідь. 17 і 11.

Ця задача розв'язується і за допомогою рівняння з однією змінною. Позначимо перше число через x, тоді друге буде $28-x$. Маємо рівняння:

$$x^2-(28-x)^2=168,$$

звідки $x=17$, тоді $28-x=11$.

Учням VII—VIII класів бажано запропонувати кілька задач на визначення чисел, що зводяться до ірраціональних рівнянь.

10. Знайдіть число, від збільшення якого на 2 його квадратний корінь збільшується на 1.

Р о з в'я з а н н я. Позначимо шукане число через x. Тоді квадратний корінь з нього дорівнюватиме $\sqrt{x}$. Якщо шукане число збільшимо на 2, дістанемо $x + 2$, а квадратний корінь з нього буде $\sqrt{x+2}$.

Маємо рівняння:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x} = 1.$$

Розв'язавши його, дістанемо: $x = 0{,}25$.

В і д п о в і д ь. 0,25.

Задачі на знаходження цифр

Перед розв'язуванням задач на знаходження цифр бажано повторити з учнями основні відомості про десяткову систему числення, щоб учні знали, наприклад, що $327 = 100 \cdot 3 + 2 \cdot 10 + 7$ і т. д. Водночас доцільно ввести й позначення:

$$\overline{xyz} = 100x + 10y + z,$$
$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$$

тощо.

1. Двоцифрове число закінчується цифрою 3. Якщо це число додати до числа, записаного тими самими цифрами, але в зворотному порядку, то буде 55. Знайдіть двоцифрове число.

Р о з в' я з а н н я. Двоцифрове число, яке закінчується цифрою 3, можна позначити так: $\overline{x3}$, або $10x + 3$. Число, записане цими самими цифрами, але в зворотному порядку, буде $\overline{3x}$, $30 + x$. Сума цих двох чисел дорівнює 55, отже,

$$(10x + 3) + (30 + x) = 55,$$

звідки $x = 2$.

В і д п о в і д ь. 23.

2. Якщо до задуманого двоцифрового числа дописати справа і зліва цифру 4, то утворене чотирицифрове число буде в 54 рази більше від задуманого. Яке число задумали?

Р о з в'я з а н н я. Нехай задумали двоцифрове число $\overline{xy}$. Дописати до нього справа і зліва цифру 4 означає замінити його числом $\overline{4xy4} = 4004 + 10 \cdot \overline{xy}$, яке в 54 рази більше від задуманого, тобто

$$4004 + 10\overline{xy} = 54\overline{xy},$$

звідки

$$44\overline{xy} = 4004,$$
$$\overline{xy} = 91.$$

В і д п о в і д ь. 91.

3. Перша зліва цифра шестицифрового числа дорівнює 1. Якщо цю цифру переставити на останнє місце, то число збільшиться у 3 рази. Знайдіть шестицифрове число.

Р о з в'я з а н н я. Позначимо дане шестицифрове число так: $\overline{1abcde} = 100000 + \overline{abcde}$. Переставивши цифру 1 на останнє місце, дістанемо: $\overline{abcde1} = 10 \cdot \overline{abcde} + 1$.

Знайдене число в 3 рази більше, ніж дане, тому

$$3(100000 + \overline{abcde}) = 10 \quad \overline{abcde} + 1.$$

звідки $7 \cdot \overline{abcde} = 299999$, $\overline{abcde} = 42857$.

В і д п о в і д ь. 142 857.

4. Сума цифр двоцифрового числа 15. Якщо це число помножити на 7 і від добутку відняти двоцифрове число, записане тими самими цифрами, що і початкове, але в зворотному порядку, то дістанемо 387. Знайдіть двоцифрове число.

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Позначимо цифру десятків шуканого двоцифрового числа через x. Тоді цифра його одиниць буде $15 - x$, отже, шукане число дорівнюватиме $10x + 15 - x$; $10(15 - x) + x$ —число, записане тими самими цифрами, але в зворотному порядку. Маємо рівняння:

$$(10x + 15 - x) \cdot 7 - ((15 - x) \cdot 10 + x) = 387,$$

звідки $x = 6$ (цифра десятків). Цифра одиниць: $15 - 6 = 9$.

В і д п о в і д ь. 69.

Д р у г и й с п о с і б. Позначимо цифру десятків через x, а цифру одиниць — через y. Оскільки сума цих цифр дорівнює 15, маємо рівняння $x + y = 15$. Крім того, з умови задачі випливає ще одне рівняння:

$$(10x + y) \cdot 7 - (10y + x) = 387,$$

або

$$23x - y = 129.$$

Система рівнянь $\begin{cases} x + y = 15, \\ 23x - y = 129 \end{cases}$

має один розв'язок: $x = 6$, $y = 9$.

В і д п о в і д ь. 69.

Іноді під час розв'язання таких задач створюється враження, ніби в них не вистачає даних. Наведемо одну з таких задач.

5. Якщо між цифрами двоцифрового числа вписати це двоцифрове число, то утворене чотирицифрове число буде більше за початкове у 77 раз. Знайдіть це число.

Р о з в'я з а н н я. Нехай шукане двоцифрове число дорівнює $10x + y$ (x — цифра десятків , а y — цифра одиниць). Тоді чотирицифрове число, утворене згідно з умовою задачі, дорівнює $1000x + 100x + 10y + y$, або $1100x + 11y$. Це число в 77 раз більше від шуканого, тобто

$$1100x + 11y = 77(10x + y),$$

звідки $y = 5x$.

Дістали одне рівняння з двома змінними. В умові задачі немає даних, за якими можна було б скласти ще одне рівняння. Проте друге рівняння й не потрібне. Продовжити розв'язання можна так.

x і y — це одноцифрові числа (цифри), тому вони не можуть бути більшими за 9. Якщо $x \geqslant 2$, то $y \geqslant 10$. Ці значення задачу не задовольняють. Якщо $x = 0$, то й $y = 0$. Ці значення також не задовольняють задачу. Отже, $x = 1$, а $y = 5$.

Відповідь. 15.

Серед задач такого типу трапляються й такі, що містять зайві дані.

6. Цифра десятків задуманого числа на 4 менша від цифри одиниць. Якщо між цифрами цього числа вписати двоцифрове число, менше від задуманого на 1, то утворене чотирицифрове число буде в 91 раз більше від задуманого. Яке число задумано?

Звичайно цю задачу розв'язують так.

Розв'язання.

Перший спосіб. Цифру десятків задуманого числа позначимо через x. Тоді цифра його одиниць дорівнюватиме $x + 4$. Саме задумане число дорівнює $10x + x + 4$, або $11x + 4$. Якщо між його цифрами x і $x + 4$ вписати двоцифрове число з цифрами x і $x + 3$, то утвориться чотирицифрове число $1000x + 100x + (x + 3) \cdot 10 + x + 4$, або $1111x + 34$, у 91 раз більше від числа $11x + 4$. Отже, $1111x + 34 = 91 \cdot (11x + 4)$, звідки $x = 3$ (цифра десятків шуканого числа). Цифра одиниць на 4 більша, тобто 7.

Відповідь. 37.

Другий спосіб. Нехай задумали двоцифрове число $10x + y$. Якщо між його цифрами вписати число $10x + y - 1$, то утвориться чотирицифрове число $1000x + 10(10x + y - 1) + y$, у 91 раз більше від задуманого, отже,

$$1000x + 10(10x + y - 1) + y = 91(10x + y),$$

звідки

$$1000x + 100x + 10y - 10 + y = 91(10x + y),$$
$$190x - 80y = 10,$$
$$19x - 8y = 1.$$

Крім того, x на 4 менше від y, тобто $x - y = -4$.

Розв'язавши систему двох добутих рівнянь:

$$\begin{cases} 19x - 8y = 1, \\ x - y = -4, \end{cases}$$

дістанемо $x = 3$, $y = 7$.

Третій спосіб. У позначеннях, застосованих у другому способі, дістанемо рівняння $19x - 8y = 1$. Досить проаналізувати його, врахувавши, що x і y — натуральні одноцифрові числа. Складати ще одне рівняння немає потреби. Виявляється, рівняння

$$19x - 8y = 1.$$

у множині натуральних одноцифрових чисел має тільки один розв'язок. Справді, число x має бути непарним (бо $8y$ парне, а 1 непарне) і меншим від 5, бо при $x \geqslant 5$ $y > 10$, що неможливо. Тому досить випробувати два значення x: 1 і 3.

Якщо $x = 1$, то $y = \frac{19 - 1}{8}$ не ціле. Отже, $x \neq 1$.

Якщо $x = 3$, то $y = \frac{19 \cdot 3 - 1}{8} = 7$.

Відкинувши першу частину умови цієї задачі, дістанемо цілком визначену нову задачу, яка має єдиний розв'язок 37.

7. Якщо деяке двоцифрове число помножити на суму його цифр, то в результаті буде 418. Якщо це двоцифрове число поділити на суму його цифр, то в частці буде 3 і в остачі 5. Знайдіть це число.

Розв'язання.

Перший спосіб. Цифри десятків і одиниць деякого числа позначають відповідно через x і y. З першої частини умови задачі випливає рівняння

$$(10x + y)(x + y) = 418,$$

а з другої

$$\frac{10x + y - 5}{x + y} = 3.$$

Розв'язавши систему цих рівнянь, знаходять її єдиний розв'язок $x = 3$, $y = 8$. Отже, шукане число 38.

Наведений спосіб дуже громіздкий. Значно раціональніше, склавши перше рівняння, продовжувати розв'язання задачі так.

Розкладемо число 418 на множники:

$$(10x + y) \cdot (x + y) = 2 \cdot 11 \cdot 19.$$

Числа $10x + y$ і $x + y$ натуральні $(x + y < 19)$, тому $x + y = 2$, або $x + y = 11$. Але коли $x + y = 2$, тоді $(10x + y) \cdot (x + y) \neq 418$.

Отже, $x + y = 11$. Тоді $10x + y = 2 \cdot 19 = 38$. Це і є шукане число.

Як бачимо, тільки перша частина умови задачі визначає едине число. Цікаво, що й друга частина умови визначає це саме число.

Справді, з рівняння $\frac{10x + y - 5}{x + y} = 3$ випливає рівняння $7x - 2y = 5$.

Тут x і y — одноцифрові числа, тому $2y \leqslant 18$. Звідси випливає, що $7x \leqslant 5 + 18$, $x < 4$.

Крім того, x не може бути парним, бо різниця двох парних чисел ніколи не дорівнює 5. Лишається випробувати два значення x: 1 і 3.

а) Якщо $x = 1$, то $y = 1$. Але шукане число не може дорівнювати 11, бо при діленні 11 на суму його цифр в остачі не можна дістати 5.

б) Якщо $x = 3$, то $y = \frac{7 \cdot 3 - 5}{2} = 8$. Число 38 задовольняє задачу, бо $38 : 11 = 3$ (ост. 5).

Відповідь. 38.

8. Знайдіть трицифрове число, цифри якого утворюють геометричну прогресію, знаючи, що коли від нього відняти 297, то утвориться число, записане тими самими цифрами, але в зворотному порядку.

Розв'язання. Нехай $\overline{xyz}$ — шукане число. Тоді з умови а) маємо:

$$x : y = y : z, \text{ або } y^2 = xz;$$

б) випливає рівняння

$$100x + 10y + z - 297 = 100z + 10y + x,$$

або $z = x - 3$. Отже,

$$y^2 = x(x - 3).$$

Врахувавши, що x і y — цифри числа і випробувавши $x \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, дістанемо $x = 4$, $y = 2$, $z = 1$.

Відповідь: 421.

Досі йшлося тільки про задачі з абстрактними числовими даними. Нижче розглянемо задачі на складання рівнянь з однойменними величинами. Такі задачі бувають багатьох типів: на знаходження чисел за їх сумами і різницями, за їх сумами або різницями і відношеннями тощо. Розглянемо методику розв'язування таких задач.

Задачі на знаходження чисел за їх сумами та різницями

До задач на знаходження двох чисел за їх сумою і різницею належать задачі з абстрактними числами або однойменними величинами, що зводяться до системи рівнянь.

$$\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = b. \end{cases}$$

1. На двох полицях було 80 книжок, причому на першій на 6 книжок більше, ніж на другій. Скільки книжок на кожній полиці?

Схематично умови таких задач зручно ілюструвати відрізками (мал. 81). Розв'язувати їх можна, зводячи до системи рівнянь чи до рівняння з однією змінною, а також арифметичним способом.

Найпоширеніший такий арифметичний спосіб розв'язування.

1) Скільки книжок було б на обох полицях, якби на другій було стільки ж, як і на першій?

$$80 - 6 = 74 \text{ (книжки).}$$

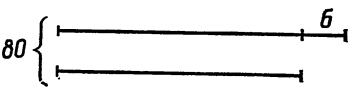
2) Скільки книжок було на другій полиці?

$$74 : 2 = 37 \text{ (книжок).}$$

3) Скільки книжок було на першій полиці?

$$37 + 6 = 43 \text{ (книжки)}$$

Цю задачу можна розв'язати іншим, арифметичним способом: спочатку знайти, скільки книжок треба перекласти з першої полиці на другу, щоб на обох полицях було порівну, і т. д.



Мал. 81.

Проте раціональніше такі задачі розв'язувати за допомогою рівнянь.

Нехай на першій полиці було x книжок,

тоді на другій $x - 6$ книжок,

на обох разом $x + (x - 6)$ книжок.

У задачі сказано, що на обох полицях було 80 книжок. Отже,

$$x + (x - 6) = 80.$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо: $x = 43$.

В і д п о в і д ь. На першій полиці було 43 книжки, на другій 37 книжок.

Коли учні ознайомляться із системами рівнянь, цю задачу можна розв'язувати й так.

Припустимо, що на першій полиці x книжок, а на другій y. Оскільки на обох полицях 80 книжок, то $x + y = 80$.

Відомо також, що на першій полиці на 6 книжок більше, ніж на другій, отже, $x - y = 6$.

Розв'яжемо систему цих двох рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 80, \\ x - y = 6, \end{cases}$$
$$2x = 86,$$
$$x = 43,$$
$$y = 37.$$

В і д п о в і д ь. 43 і 37.

2. У двох хлопчиків 300 поштових марок. Якщо один з них віддасть другому 30 марок, то в них марок буде порівну. Скільки марок у кожного хлопчика?

У цій задачі дано суму обох чисел (300) і легко знайти їх різницю: в одного хлопчика на 60 марок більше, ніж у другого.

За допомогою рівняння з однією змінною цю задачу можна розв'язати так.

Перший спосіб. Припустимо, що в першого хлопчика x марок, тоді в другого $(300 - x)$ марок. Якщо перший віддасть другому 30 марок, то в нього буде $x - 30$, а в другого $(300 - x + 30)$ марок. Оскільки в обох хлопчиків марок буде порівну, то $x - 30 = 330 - x$, звідки $x = 180$ (кількість марок у першого хлопчика). Тоді в другого хлопчика $300 - 180 = 120$ (марок).

Другий спосіб. З умови задачі випливає, що в одного хлопчика на 60 марок більше, ніж у другого. Отже, якщо в першого x марок, то в другого $x - 60$. У них є всього 300 марок. Тому $x + (x - 60) = 300$, звідки $x = 180$ і т. д.

Ще легше розв'язати задачу за допомогою системи рівнянь. Якщо припустити, що в першого хлопчика x марок, а в другого y, то з умови задачі випливає така система:

$$\begin{cases} x + y = 300, \\ x - 30 = y + 30. \end{cases}$$

Її розв'язок $x = 180$, $y = 120$ і є розв'язком задачі.

З учнями розв'язують багато і таких задач, які відрізняються від задач розглядуваного типу.

3. Периметр прямокутника 30 *м*, його довжина більша від ширини на 1 *м*. Чому дорівнює площа прямокутника?

Розв'язання. Нехай більша сторона прямокутника x *м*, а менша y *м*. Тоді

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ x - y = 1, \end{cases}$$

звідки $x = 8$, $y = 7$. Площа цього прямокутника дорівнює:

$$S = 8 \cdot 7 = 56\ (м^2).$$

До задач розглядуваного типу треба віднести і такі задачі, в яких треба знайти три чи більше чисел або значень якоїсь величини, якщо відомі їх сума і різниці.

4. Три трактори зорали 140 *га*. Перший зорав на 5 *га* більше від другого, а другий на 6 *га* більше від третього. Скільки гектарів зорав кожен трактор?

У цій задачі відома сума трьох чисел і дві їх попарні різниці 5 *га* і 6 *га*. За умовою задачі легко скласти систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + z = 140, \\ x - y = 5, \\ y - z = 6. \end{cases}$$

Проте, такі задачі доцільніше розв'язувати за допомогою рівняння з однією змінною:

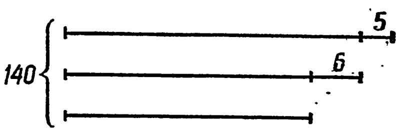
третій трактор зорав a *га*;
другий —»— —»— $a+6$ *га*;
перший —»— —»— $a+6+5$ *га*;

Відомо, що три трактори всього зорали 140 *га*. Отже, $a+(a+6)+(a+6+5)=140$, звідки $a=41$. Тоді $a+6=47$, $a+11=52$.

Відповідь. Перший трактор зорав 52 *га*, другий — 47 *га*, третій — 41 *га*.

Можна розв'язати цю задачу і арифметично, але бажано в цьому випадку застерегти учнів від поширеної помилки: вони часто перше запитання формулюють так: на скільки гектарів більше зорали перший і другий трактори разом, ніж третій?

$$5+6+6=17\ (га).$$



Мал. 82.

Це запитання сформульовано неправильно: адже на 17 *га* більше зорали перші два трактори не від третього, а від подвійної площі, яку зорав третій трактор (мал. 82). Щоб не вимагати від учнів дуже штучних запитань, краще такі задачі розв'язувати алгебраїчно.

Зауважимо, що особливості задач розглядуваного типу ілюструвалися на задачах з однойменними величинами, але замість кожної з них можна сформулювати аналогічну задачу з абстрактними числами, наприклад: «Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 80, а різниця 6» тощо.

Задачі на знаходження чисел за їх сумами або різницями і відношеннями

До цього типу належать насамперед задачі, в яких дано суму двох чисел або двох значень величин і їх відношення.

1. Колгосп вивіз на елеватор 720 *т* пшениці і жита, причому пшениці втроє більше, ніж жита. Скільки жита й пшениці окремо вивіз колгосп на елеватор?

Арифметично такі задачі розв'язувались за допомогою введення допоміжної умовної одиниці. Такий спосіб розв'язування нераціональний.

Краще міркувати так.

Припустимо, що колгосп вивіз жита x *т*, тоді пшениці він вивіз $3x$ *т*. Маємо рівняння:

$$x+3x=720,\qquad 4x=720,\qquad x=180.$$

Отже, колгосп вивіз на елеватор жита 180 *т*, а пшениці 540 *т*.

Аналогічно можна розв'язувати задачі, в яких дано різницю і відношення двох чисел або двох значень деяких величин.

2. Різниця двох чисел, а також їх відношення дорівнюють 0,8. Знайдіть ці числа.

Розв'язання.

Перший спосіб. Нехай перше число дорівнює a, тоді друге $a - 0{,}8$. Оскільки їх відношення дорівнює 0,8, маємо рівняння:

$$\frac{a}{a-0{,}8} = 0{,}8,$$

корінь якого $a = -3{,}2$ — перше число; друге дорівнює: $-3{,}2 - 0{,}8 = -4$.

Другий спосіб. Нехай друге число дорівнює b, тоді перше $0{,}8\,b$. Їх різниця дорівнює 0,8. Маємо рівняння:

$$0{,}8\,b - b = 0{,}8,$$

корінь якого $b = -4$ — друге число; перше дорівнює: $0{,}8 \times (-4) = -3{,}2$.

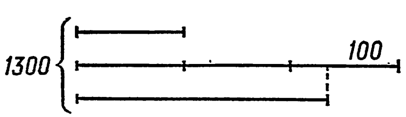
Третій спосіб. Позначимо шукані числа буквами a і b. Тоді

$$\begin{cases} a - b = 0{,}8, \\ \frac{a}{b} = 0{,}8. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо: $a = -3{,}2$; $b = -4$.

У шкільних підручниках є також задачі, які поєднують в собі особливості обох розглянутих типів задач (крім суми чи різниці і відношення, дано і суму, і різницю, і відношення).

3. На трьох складах є 1300 m вугілля, причому на другому складі в 3 рази більше, ніж на першому, а на третьому на 100 m менше, ніж на другому. Скільки вугілля на кожному складі?



Мал. 83.

Схематично умову задачі подано на мал. 83.

Розв'язуючи її, доцільно скласти рівняння з однією змінною.

Розв'язання.

Нехай на першому складі є x m вугілля.

Тоді на другому складі $3x$ m,

на третьому складі $(3x - 100)$ m,

на трьох складах $(x + 3x + 3x - 100)$ m.

За умовою на трьох складах разом 1300 m вугілля. Маємо рівняння:

$$x + 3x + 3x - 100 = 1300,$$

звідки $x = 200$.

Отже, на першому складі 200 m, на другому $3 \cdot 200 = 600$ (m), на третьому $600 - 100 = 500$ (m).

Як показує досвід, учні легко розв'язують такі задачі, коли дане відношення виражається словами: «у 3 рази більше», «вдвоє менше» тощо. Якщо відношення задається у вигляді частки, їм буває важко скласти рівняння. На такі задачі слід звернути особливу увагу.

4. Вірьовку завдовжки 20 *м* поділили на дві частини у відношенні 2 : 3. Визначте довжину кожної частини.

У цій задачі дано суму двох шуканих частин і їх відношення.

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Нехай довжина першої частини $2l$ *м*, тоді довжина другої частини $3l$*м*, а всієї вірьовки $(2l + 3l)$ *м*. Отже, $2l + 3l = 20$, звідки $l = 4$.

В і д п о в і д ь. Довжина першої частини $4 \cdot 2 = 8$ *м*, а другої $4 \cdot 3 = 12$ (*м*).

Д р у г и й с п о с і б. За умовою довжина першої частини вірьовки відноситься до довжини другої, як 2 : 3. Це означає, що перша частина становить $\frac{2}{3}$ другої. Позначимо довжину другої частини через x(*м*). Тоді довжина першої становитиме $\frac{2}{3}x$(*м*). Отже,

$$x + \frac{2}{3}x = 20,$$

звідки $x = 12$ (*м*) — довжина другої частини вірьовки; довжина першої: $\frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ (*м*).

Т р е т і й с п о с і б. Позначимо довжину двох кусків вірьовки через l і x (в метрах). Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} l + x = 20, \\ l : x = 2 : 3, \end{cases}$$

звідки $l = 8$(*м*), $x = 12$(*м*).

Ще важче розв'язувати учням задачі, в яких відношення величин виражене в процентах.

5. Вірьовку завдовжки 22 *м* розрізали на дві частини так, що одна з них стала на 20% довша, ніж друга. Визначте довжину кожної частини.

У цій задачі дано суму (22 *м*), а відношення шуканих довжин виражено в процентах. Якщо одна частина на 20% довша від другої, то це означає, що перша на $\frac{1}{5}$ довша від другої, тобто шукані частини відносяться, як 6 : 5.

Арифметично цю задачу звичайно розв'язують так: другу частину беруть за 100%, тоді перша становитиме 120%, а обидві частини, тобто 22 *м*, становитимуть 220%. Отже, довжина першої частини

$$\frac{22 \quad 120}{220} = 12\,(м),$$

а другої

$$\frac{22 \cdot 100}{220} = 10\,(м).$$

П е р е в і р к а: $12 + 10 = 22$, $12 - 10 = 2$, $2 : 10 = 0{,}2 = 20\%$.

Іноді учні вважають, що коли перша частина більша від другої на 20%, то й друга менша від першої на 20% (аналогічно: коли одне число більше від другого на 20, то друге менше від першого теж на 20), тому довжину першої частини беруть за 100%, а другої за 80%. Таке розв'язання неправильне. Справа в тому, що в кожному з цих випадків 20% береться від різних чисел. В задачі сказано, що перша частина на 20% більша від другої. Це означає, що перша частина вірьовки більша від другої на 20% д р у г о ї. Якщо першу частину беремо за 100%, а другу за 80%, то це означає, що перша більша від другої на 20% п е р ш о ї. А 20% першої частини і 20% другої — нерівні між собою. Отже, розв'язуючи задачі на проценти, треба кожного разу звертати увагу на те, від якого числа беруться проценти.

Іноді цю задачу розв'язують ще й так: беруть за 100% довжину всієї вірьовки; поділивши ці 100% на дві частини так, щоб перша була на 20% більша, дістають: 60% і 40%, потім обчислюють:

$$\frac{22 \cdot 60}{100} = 13{,}2\,(м), \quad \frac{22 \cdot 40}{100} = 8{,}8\,(м).$$

Це розв'язання також неправильне. Хоч сума знайдених довжин обох частин і дорівнює 22 *м*, проте перша частина не на 20% більша від другої.

За допомогою рівняння задачу можна розв'язати так.

П е р ш и й с п о с і б. Нехай довжина першої частини вірьовки x *м*, тоді довжина другої: $(22 - x)$ *м*. Перша частина на 20% довша від другої, тобто

$$\frac{x}{22 - x} = 1{,}2,$$

звідки

$$x = 12, \qquad 22 - x = 10.$$

В і д п о в і д ь. 12 *м* і 10 *м*.

Д р у г и й с п о с і б. Нехай довжина першої частини x *м*, а довжина другої y *м*. Тоді

$$\begin{cases} x + y = 22, \\ \dfrac{x}{y} = 1{,}2. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, дістанемо $x = 12\,(м)$, $y = 10\,(м)$.

Особливо важко розв'язувати арифметичним способом такі задачі, в яких дано не відношення двох чисел чи однойменних величин, а співвідношення їх певних частин.

6. Колгосп засіяв пшеницею і житом 1100 *га* землі. Скільки гектарів засіяв колгосп пшеницею і скільки житом, якщо 0,3 площі, засіяної пшеницею, дорівнюють 0,8 площі, засіяної житом?

У цій задачі відома сума шуканих площ (1100 *га*), а відношення їх, хоч його й не дано явно, можна визначити. Міркуватимемо так: якщо 0,3 площі під пшеницею дорівнюють 0,8 площі під житом, то вся площа під пшеницею дорівнює $\frac{0,8}{0,3}$, або $\frac{8}{3}$ площі під житом. Отже, якщо всю площу під житом візьмемо за 1 частину, то площа під пшеницею становитиме $\frac{8}{3}$ таких частин, тобто площа під пшеницею відноситься до площі під житом, як 8 : 3.

Раніше, коли такі задачі розв'язувались тільки арифметично, доводилося міркувати саме так. Такі міркування важкі для сприймання більшості учнів. Щоб зробити їх дохідливішими, вчителі супроводжували свої пояснення малюнками, вживаючи при цьому некоректні з математичного боку записи (див. стор. 25). Тому тепер у школі такі задачі розв'язують за допомогою рівнянь.

Перший спосіб. Припустимо, що колгосп засіяв пшеницею x *га*. Тоді житом він засіяв $(1100 - x)$ *га*. Оскільки 0,3 площі, засіяної пшеницею, тобто $0,3\,x$ *га*, дорівнюють 0,8 площі, засіяної житом, тобто $0,8\,(1100 - x)$ *га*, то маємо рівняння:

$$0,3\,x = 0,8\,(1100 - x),$$

звідки $x = 800$.

Відповідь 800 *га* під пшеницею, 300 *га* під житом.

Другий спосіб. Нехай колгосп засіяв x *га* пшеницею і y *га* житом. Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 1100, \\ 0,3x = 0,8y. \end{cases}$$

Розв'язавши її, знаходимо: $x = 800$ (*га*) і $y = 300$ (*га*).

До задач на знаходження чисел за їх різницею і відношенням слід віднести й таку.

7. У групі з 25 чоловік кожний студент вивчає англійську або німецьку мови. Кількість студентів, які вивчають німецьку мову, відноситься до кількості студентів, що вивчають англійську мову, як 3 : 5, причому німецьку мову вивчає на 8 чоловік менше, ніж англійську. Скільки студентів вивчають обидві мови? тільки німецьку? тільки англійську?

На перший погляд здається, що в цій задачі йдеться про дві підгрупи студентів: одні вивчають англійську мову, інші — німецьку. В задачі дано суму, відношення і різницю кількостей студентів, що належать до цих підгруп. Чи не забагато умов? Проте глибший аналіз показує, що в задачі йдеться про три підгрупи студентів: 1) які вивчають тільки англійську, 2) які вивчають тільки німецьку, 3) які вивчають англійську і німецьку мови

Якщо позначити кількість студентів в кожній з цих підгруп відповідно через x, y і z, то за умовою задачі неважко скласти таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + z = 25, \\ \dfrac{x+z}{y+z} = \dfrac{3}{5}, \\ x - y = 8. \end{cases}$$

Однак ця задача вміщена в другому розділі підручника з алгебри для VI класу, який вивчають учні, ще не обізнані із системами рівнянь. Тому її треба вміти розв'язувати й іншими способами.

Розв'язання. Припустимо, що всіх студентів, які вивчають німецьку мову, в групі було x. Їх було на 8 менше, ніж тих, які вивчають англійську мову. Отже, англійську мову в групі вивчають $(x + 8)$ студентів. В умові задачі сказано, що кількість студентів, які вивчають німецьку мову, відноситься до кількості студентів, що вивчають англійську мову, як 3 : 5. Отже,

$$\frac{x}{x+8} = \frac{3}{5},$$

звідки $x = 12$.

Як бачимо, німецьку мову вивчають 12 студентів; англійську вивчають на 8 більше, тобто 20 студентів.

Сума $12 + 20 = 32$ на 7 більша від кількості всіх студентів групи ($32 - 25 = 7$). Це означає, що 7 студентів вивчають англійську і німецьку мови. Тільки англійську мову вивчають 13 студентів групи, тільки німецьку — 5.

Узагальнювати задачі на знаходження двох чисел за їх сумами чи різницями і відношеннями можна в двох напрямах: замість рівнянь $x \pm y = n$ і $x = ky$ слід розглядати більш загальні рівняння виду $ax + by = c$, замість одного відношення задавати два або більше відношень. У першому випадку матимемо задачі на знаходження чисел за двома лінійними залежностями, в другому — задачі на пропорційне ділення.

Задачі на знаходження двох чисел за двома лінійними залежностями

Так називатимемо задачі, що зводяться до системи рівнянь

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a_1x + b_1y = c_1. \end{cases}$$

Такі задачі можна розв'язувати за допомогою системи рівнянь і за допомогою рівняння з однією змінною. Взагалі, кожну задачу, яку можна розв'язати за допомогою системи двох лінійних рівнянь з двома змінними, можна розв'язати і за допомогою одного рівняння з однією змінною. Тільки систему буває легше складати.

1. Колгосп засіяв пшеницею і ячменем 1000 *га* землі. Скільки гектарів землі засіяв він пшеницею і скільки ячменем, якщо 0,3 площі, засіяної пшеницею, на 80 *га* більше за 0,8 площі, засіяної ячменем?

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б.

Пшеницею засіяно	x *га*;
ячменем —»—	$1000 - x$ —»—
0,3 площі під пшеницею становлять	$0{,}3\,x$ —»—
0,8 площі під ячменем становлять	$0{,}8(1000 - x)$ —»—.

Якщо від 0,3 площі, засіяної пшеницею, відняти 0,8 площі, засіяної ячменем, то дістанемо 80 *га*. Маємо рівняння:

$$0{,}3x - 0{,}8(1000 - x) = 80.$$

Корінь цього рівняння $x = 800$. Отже, пшеницею було засіяно 800 *га*, а ячменем 200 *га*.

Д р у г и й с п о с і б. Припустимо, що колгосп засіяв x *га* пшеницею і y *га* ячменем. Тоді з умови задачі випливає така система рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 1000, \\ 0{,}3x - 0{,}8y = 80. \end{cases}$$

Розв'язавши її, дістанемо $x = 800$ (*га*) і $y = 200$ (*га*).

Раніше такі задачі розв'язувались й арифметично. Тепер від арифметичного способу їх розв'язування повністю відмовились.

2. Підручник і збірник задач разом коштували 90 коп. Після того, як підручник подешевшав на 20%, а збірник задач на 10%, їх загальна вартість становила 76 коп. Скільки коштував підручник і скільки збірник задач спочатку?

Р о з в'я з а н н я. Припустимо, що підручник коштував спочатку x коп., а збірник задач y коп. Тоді з першої частини умови випливає таке рівняння: $x + y = 90$.

Після того як підручник подешевшав на 20%, він став коштувати $x - 0{,}2x = 0{,}8x$, а збірник задач, який подешевшав на 10%, став коштувати $y - 0{,}1y = 0{,}9y$ (все в копійках). Отже,

$$0{,}8x + 0{,}9y = 76.$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 90, \\ 0{,}8x + 0{,}9y = 76, \end{cases}$$

дістанемо: $x = 50$ (коп.), $y = 40$ (коп.).

Після цієї задачі бажано розв'язати задачу з такою самою умовою, але іншою вимогою.

3. Підручник і збірник задач разом коштували 90 коп. Після того як підручник подешевшав на 20%, а збірник задач на 10%, їх загальна вартість становила 76 коп. Скільки став коштувати підручник і скільки збірник задач?

За допомогою системи рівнянь цю задачу можна розв'язати двома способами. Спочатку знайти початкову вартість підручника і збірника задач (тобто розв'язати попередню задачу), а потім доповнити розв'язання.

$$0{,}8x = 0{,}8 \cdot 50 = 40 \text{ (коп.)}, \qquad 0{,}9y = 0{,}9 \cdot 40 = 36 \text{ (коп.)}.$$

Крім того, можна було б із самого початку ввести інші позначення. Припустимо, що підручник став коштувати a коп., а збірник задач b коп. Тоді з другої частини умови задачі маємо рівняння: $a + b = 76$.

Підручник став коштувати a коп. після того, як його попередню ціну було знижено на 20%, отже, спочатку він коштував $\frac{a}{0{,}8}$ коп. Збірник задач спочатку коштував $\frac{b}{0{,}9}$ коп. Отже, $\frac{a}{0{,}8} + \frac{b}{0{,}9} = 90$. Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} a + b = 76, \\ \frac{a}{0{,}8} + \frac{b}{0{,}9} = 90, \end{cases}$$

дістанемо відповідь: $a = 40$ коп., $b = 36$ коп.

Який з цих двох способів розв'язування задачі кращий? Для того, хто добре обізнаний з процентами, другий спосіб може здатися кращим, бо він не потребує додаткових обчислень після розв'язування системи. Але складати систему рівнянь другим способом набагато важче. Тому вважаємо, що в школі такі задачі краще розв'язувати першим способом. Ні в якому разі його не можна вважати нераціональним.

4. Комплект з 10 конвертів і 8 поштових листівок коштує 82 коп., а комплект з 3 конвертів і 5 листівок коштує 35 коп. Скільки коштує конверт і скільки поштова листівка?

Скорочено умову задачі прийнято записувати так:

10 конв. і 8 лист. коштують 82 коп.
3 —»— і 5 —»— —»— 35 —»—

Але не обов'язково щоразу робити такі записи. Задача досить «прозора», і, прочитавши її, учні відразу зможуть скласти відповідну їй систему рівнянь.

Розв'яжемо цю задачу, склавши рівняння з однією змінною.

Розв'язання. Нехай один конверт коштує x коп. Тоді 10 конвертів коштує $10x$ коп., а 8 листівок $(82 - 10x)$ коп. Отже, одна листівка коштує $\frac{82 - 10x}{8}$ коп.

За другою частиною умови задачі складаємо рівняння:

$$3x + \frac{5}{8}(82 - 10x) = 35,$$

звідки $x = 5$. Тоді

$$\frac{82 - 10x}{8} = \frac{82 - 50}{8} = 4.$$

Відповідь. 5 коп. і 4 коп.

Значно простіше розв'язувати цю задачу за допомогою системи рівнянь з двома змінними. З її умови відразу випливає система рівнянь:

$$\begin{cases} 10x + 8y = 82, \\ 3x + 5y = 35, \end{cases}$$

звідки $x = 5$, $y = 4$.

Можливо, хто-небудь з учнів розв'яже цю систему й інакше, міркуючи, наприклад, так: x і y — натуральні числа; з другого рівняння випливає, що x — натуральне число, кратне 5 і не більше від 10. Отже, досить випробувати два значення x: 5 і 10. Значення $x = 10$ не задовольняє першого рівняння. Отже, $x = 5$, тоді $y = 4$.

Розв'яжемо одну з важких задач на складання системи двох лінійних рівнянь з двома змінними.

5. В одній посудині 49 *л* води, а в другій 56 *л*. Якщо долити першу посудину доверху водою з другої посудини, то друга посудина буде наповнена тільки наполовину. Якщо другу посудину долити доверху водою з першої посудини, то перша буде наповнена тільки на одну третину. Визначте місткість кожної посудини.

Розв'язання.

Перший спосіб. Позначимо місткості першої і другої посудини (в літрах) через x і y. Щоб долити доверху першу посудину, треба влити в неї $(x - 49)$ *л*. Якщо з другої відлити ці $(x - 49)$, в ній залишиться $56 - (x - 49)$ *л*, або $0,5y$ *л*. Отже,

$$56 - (x - 49) = 0,5y.$$

Аналогічно можна скласти ще одне рівняння: $49 - (y - 56) = \frac{x}{3}$.

Розв'язавши систему цих двох рівнянь, дістанемо: $x = 63$, $y = 84$.

Відповідь. Місткість першої посудини 63 *л*, другої 84 *л*.

Другий спосіб. Позначимо місткості посудин через x і y. В задачі сказано, що коли долити першу посудину доверху, то друга буде наповнена тільки наполовину. Тому в обох посудинах є всього $\left(x + \frac{1}{2}y\right)$ *л* води. Маємо рівняння:

$$x + \frac{1}{2}y = 56 + 49.$$

Якщо долити другу посудину доверху з першої, то перша буде наповнена тільки на одну третину. Виходить, що в обох посудинах було $\left(y + \frac{1}{3}x\right)$ *л*. Маємо ще одне рівняння:

$$y + \frac{1}{3}x = 49 + 56.$$

Спростивши ці рівняння, дістанемо систему:

$$\begin{cases} 2x + y = 210, \\ x + 3y = 315, \end{cases}$$

звідки $x = 63$, $y = 84$.

Т р е т і й с п о с і б. Позначивши місткості посудин через x і y, знайдемо, що їх загальна місткість дорівнює $x + y$ (у літрах). Всього в них води $56 + 49 = 105$ (*л*). Щоб наповнити обидві посудини, треба влити в них $(x + y - 105)$ *л*; цей об'єм дорівнює половині об'єму другої посудини, або $\frac{1}{3}$ частині об'єму першої. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y - 105 = \frac{1}{2}y, \\ x + y - 105 = \frac{1}{3}x. \end{cases}$$

Ця система рівносильна кожній з двох попередніх, вона має той самий розв'язок: $x = 63$, $y = 84$.

Покажемо тепер, як можна розв'язати цю задачу, склавши просте лінійне рівняння з однією змінною.

Ч е т в е р т и й с п о с і б. Якщо першу посудину наповнити водою доверху, то друга буде наповнена наполовину; якщо другу посудину наповнити доверху, то перша буде наповнена на одну третину. Звідси випливає, що половина другої посудини має такий самий об'єм, як і дві третини першої, а вся друга посудина має такий самий об'єм, як і $\frac{4}{3}$ першої. Отже, якщо перша посудина вміщує x *л*, то друга вміщує $\frac{4}{3}x$ *л*. Вода, що міститься в обох посудинах, 105 *л*, займає всю першу посудину і половину другої, тобто

$$x + \frac{2}{3}x = 105,$$

звідки $x = 63$ (*л*). Тоді $\frac{4}{3}x = \frac{4}{3} \cdot 63 = 84$ (*л*).

Можливі також інші способи розв'язування цієї задачі.

Задачі на пропорційний поділ

Іншим узагальненням задач на знаходження двох чисел за їх сумою і відношенням є задачі на пропорційний поділ. Для прикладу розглянемо дві задачі.

1. Дріт завдовжки 90 *м* розрізали на два куски, з яких перший втроє довший від другого. Знайдіть довжини цих кусків.

2. Дріт завдовжки 90 *м* розрізали на два куски, довжини яких відносяться, як 3 : 1. Знайдіть довжини цих кусків.

Зрозуміло, що це однакові задачі. Кожну з них можна вважати і задачею на визначення двох чисел за їх сумою і відношенням, і задачею на пропорційний поділ. Це найпростіші задачі на пропорційний поділ, в них треба поділити число (значення якоїсь величини) на дві частини. Але бувають і такі задачі, в яких число чи значення величини треба поділити на три або більше частин, пропорційних даним числам. Такі задачі зручно розв'язувати або за допомогою коефіцієнта пропорційності, або використовуючи властивість ряду рівних відношень. Нагадаємо спочатку цю властивість, тим більше, що в шкільному підручнику з алгебри для VI класу є задача 294, в якій треба її довести.

Доведіть, що коли маємо ряд відношень, які дорівнюють одне одному, то сума всіх попередніх членів так відноситься до суми всіх наступних, як один з попередніх відноситься до свого наступного, тобто коли $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{l}{f} = \frac{m}{n}$, то $\frac{a+c+l+m}{b+d+f+n} = \frac{a}{b}$.

Доведення. Позначимо кожне з даних відношень буквою t:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{l}{f} = \frac{m}{n} = t,$$

тобто

$$a = bt,\ c = dt,\ l = ft,\ m = nt.$$

Додавши почленно всі ці рівності, дістанемо:

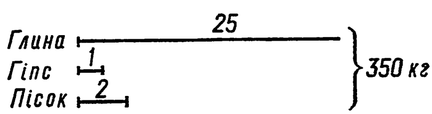
$$a + c + l + m = t(b + d + f + n),$$

звідки

$$\frac{a+c+l+m}{b+d+f+n} = t = \frac{a}{b}.$$

Властивість ряду рівних відношень бажано учням пояснити.

Далі покажемо, як, використовуючи властивість ряду рівних відношень або коефіцієнти пропорційності, можна розв'язувати задачі на пропорційний поділ.



Мал. 84.

3. Фарфор складається з глини, гіпсу і піску, маси яких пропорційні числам 25, 1, 2. Скільки треба глини, гіпсу і піску, щоб виготовити 350 *кг* суміші?

Схематично задачу можна зобразити за допомогою відрізків (мал. 84) або стрічкової діаграми (мал. 85).

Розв'язання.

Перший спосіб. Припустимо, що для виготовлення 350 *кг* суміші треба взяти x *кг* глини, y *кг* гіпсу і z *кг* піску. Оскільки x, y, і z пропорційні числам 25, 1 і 2, то $\frac{x}{25} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$. Позначивши кожне з цих рівних відношень буквою t, матимемо:

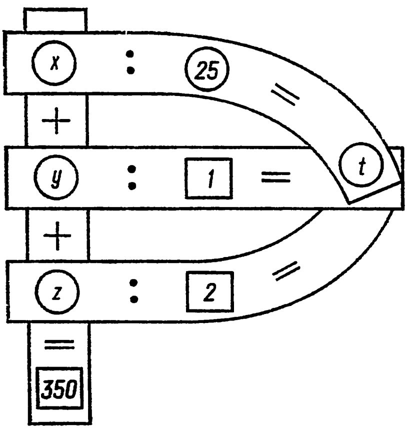
$$x = 25t, \quad y = t, \quad z = 2t.$$

Отже, $25t + t + 2t = 350$, звідки $t = 12{,}5$. Тоді

$$x = 25 \cdot 12{,}5 = 312{,}5; \quad y = 12{,}5; \quad z = 2 \cdot 12{,}5 = 25.$$

Відповідь. 312,5 *кг*, 12,5 *кг* і 25 *кг*.

Другий спосіб. Позначивши, як і раніше, шукані маси глини, гіпсу і піску через x, y і z, запишемо рівність трьох відношень:



Мал. 85.

$$\frac{x}{25} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} = \frac{x+y+z}{28} = \frac{350}{28} = 12{,}5.$$

Отже,

$$x = 25 \cdot 12{,}5 = 312{,}5;$$
$$y = 12{,}5; \; z = 2 \cdot 12{,}5 = 25.$$

До останнього часу задачі на пропорційний поділ розв'язували, використовуючи поняття «відношення кількох чисел» і основну властивість такого відношення. Ось як розв'язували в VI класі таку, наприклад, задачу.

4. Колгосп засіяв зерновими культурами три ділянки землі, площі яких відносяться між собою як $0{,}6 : \frac{5}{6} : \frac{8}{15}$, причому площа першої ділянки на 120 *га* більша від площі третьої. Пшеницею засіяли 72% площі другої ділянки і 0,4 площі третьої ділянки. Скільки гектарів землі було засіяно пшеницею?

Розв'язання.

1) Позначимо площі першої, другої і третьої ділянок відповідно через x_1, x_2 і x_3. За умовою маємо:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 0{,}6 : \frac{5}{6} : \frac{8}{15},$$

або

$$x_1 : x_2 : x_3 = 18 : 25 : 16.$$

2) Узнаємо, скільки рівних частин припадає на 120 *га*. Відомо, що площа першої ділянки містить 18 частин, а площа третьої — 16 таких частин. Площа першої ділянки більша від площі третьої на 120 *га*, отже, на 120 *га* припадає $18 - 16 = 2$ (частини), а одній частині відповідають $120 : 2 = 60$ (*га*).

3) Площі другої і третьої ділянок відповідно дорівнюють $60 \times 25 = 1500$ (*га*) і $60 \cdot 16 = 960$ (*га*).

4) Узнаємо, скільки гектарів засіяно пшеницею на другій і третій ділянках окремо.

а) 72% від 1500 *га*; $72\% = 0{,}72$; $1500 \cdot 0{,}72 = 1080$(*га*).

б) 0,4 від 960 *га*; $960 \cdot 0{,}4 = 384$ (*га*).

5) Пшениця займала $1080 + 384 = 1464$ (*га*).

Перевірка:

$$1080 : 1500 : 960 = 18 : 25 : 16 = (18 : 30) : (25 : 30) : (16 : 30) = \frac{3}{5} : \frac{5}{6} : \frac{8}{15} = 0{,}6 : \frac{5}{6} : \frac{8}{15}.$$

Відповідь. Пшеницею засіяно 1464 *га*.

Таке розв'язання не можна вважати вдалим. По-перше, тут вживається поняття «відношення трьох чисел», зміст якого, по суті, не визначений (спробуйте означити це поняття). По-друге, в цьому розв'язанні використано «основну властивість відношення трьох чисел», за якою записано, зокрема: $1080 : 1500 : 960 = 18 : 25 : 16 = \frac{3}{5} : \frac{5}{6} : \frac{8}{15}$. Але ця рівність неправильна, бо $1080 : 1500 : 960 = 0{,}00075$, $18 : 25 : 16 = 0{,}045$, $\frac{3}{5} : \frac{5}{6} : \frac{8}{15} = 1{,}35$ і, отже,

$$1080 : 1500 : 960 \neq 18 : 25 : 16 \neq \frac{3}{5} : \frac{5}{6} : \frac{8}{15}.$$

Раціональніше розв'язувати цю задачу за допомогою пропорційності. Зауважимо, що її формулювання цієї задачі слід змінити: замість слів «площі яких відносяться між собою, як $0{,}6 : \frac{5}{6} : \frac{8}{15}$» слід вжити: «площі яких пропорційні числам 0,6, $\frac{5}{6}$ і $\frac{8}{15}$».

Нехай площі першої, другої і третьої ділянок дорівнюють відповідно x, y і z (*га*). Тоді, ввівши коефіцієнт пропорційності t, за умовою задачі дістанемо:

$$x = 0{,}6t, \quad y = \frac{5}{6}t, \quad z = \frac{8}{15}t.$$

Відомо, що площа першої ділянки на 120 *га* більша від площі третьої. Отже,

$$0{,}6t - \frac{8}{15}t = 120, \quad \frac{1}{15}t = 120, \quad t = 1800.$$

Тоді площа другої ділянки $y = \frac{5}{6} \cdot 1800 = 1500$ (*га*), а третьої, $z = \frac{8}{15} \cdot 1800 = 960$ (*га*).

Пшеницею було засіяно 72% площі другої ділянки, тобто $1500 \cdot 0{,}72 = 1080$ (*га*), і 0,4 площі третьої ділянки, тобто $960 \times 0{,}4 = 384$ (*га*). Тому всього засіяли пшеницею $1080 + 384 = 1464$ (*га*).

Такі задачі можна розв'язувати і за допомогою узагальненої властивості ряду рівних відношень. Коли маємо кілька рівних відношень, то різниця будь-яких попередніх членів відноситься до різниці відповідних наступних, як один з попередніх до свого наступного: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{l}{f}=\frac{m}{n}=\frac{a-l}{b-f}=\frac{a+c-m}{b+d-n}$ і т. д.

5. Сторони трикутника пропорційні числам 3, 5, 6. Найбільша із сторін більша від найменшої на 64,2 *см*. Які сторони трикутника?

Р о з в ' я з а н н я. Позначимо сторони трикутника через a, b і c. Тоді $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}=\frac{c-a}{6-3}=\frac{64{,}2}{3}=21{,}4$.

Отже, $a=3\cdot 21{,}4=64{,}2$ (*см*), $b=5\cdot 21{,}4=107$ (*см*), $c=6\cdot 21{,}4=128{,}4$ (*см*).

У VI класі немає можливості розглядати різні узагальнення властивості ряду рівних відношень, тому вважаємо, що розглядувані задачі краще розв'язувати за допомогою ксефіцієнта пропорційності.

6. У школі є гімнастична, баскетбольна і волейбольна секції. Кількість гімнастів відноситься до кількості баскетболістів, як 5 : 3, а кількість баскетболістів до кількості волейболістів, як 2 : 3. Відомо, що гімнастикою займається на 5 чоловік більше, ніж волейболом. Скільки чоловік у кожній секції?

Р о з в ' я з а н н я. Припустимо, що в школі є x гімнастів, y баскетболістів і z волейболістів. Тоді $\frac{x}{5}=\frac{y}{3}$ і $\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$, або $\frac{x}{10}=\frac{y}{6}$ і $\frac{y}{6}=\frac{z}{9}$. Отже, $\frac{x}{10}=\frac{y}{6}=\frac{z}{9}=t$, $x=10t$, $y=6t$, $z=9t$.

Оскільки гімнастикою займається на 5 чоловік більше, ніж волейболом, можна скласти таке рівняння: $10t-9t=5$, $t=5$.

Отже, $x=10\cdot 5=50$, $y=6\cdot 5=30$, $z=9\cdot 5=45$.

Аналогічно розв'язуються задачі, в яких треба значення якоїсь величини поділити на частини, обернено пропорційні даним числам.

7. Поділити число 770 на чотири частини, які були б обернено пропорційні числам 2, 3, 4 і 5.

Р о з в ' я з а н н я. Позначимо шукані частини через a, b, c і d.
Тоді

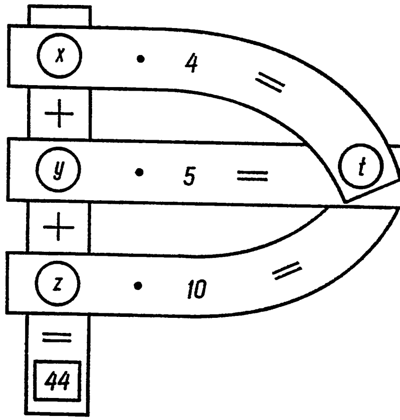
$$\frac{a}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{1}{3}}=\frac{c}{\frac{1}{4}}=\frac{d}{\frac{1}{5}}=\frac{a+b+c+d}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}=\frac{770}{\frac{77}{60}}=600.$$

Отже,

$$a = \frac{1}{2} \cdot 600 = 300,\ b = \frac{1}{3} \cdot 600 = 200,\ c = \frac{1}{4} \cdot 600 = 150,\ d = \frac{1}{5} \cdot 600 = 120.$$

8. Хлопчик купив 44 марки вартістю 4 коп., 5 коп. і 10 коп. за штуку, заплативши за марки кожного виду однакові суми грошей. Скільки марок кожного виду купив хлопчик?

Умову задачі можна проілюструвати стрічковою діаграмою, як показано на мал. 86.



Мал. 86.

Замінивши множення на числа 4, 5, 10 відповідно діленням на $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, дістанемо діаграму, характерну для задач на прямо пропорційний поділ (див. стор. 164). Позначимо через t суму грошей, яку хлопчик заплатив за марки кожного з трьох видів.

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Припустимо, що хлопчик купив a марок по 4 коп., b марок по 5 коп. і c марок по 10 коп. і за марки кожного виду заплатив по t коп. Тоді

$$4a = 5b = 10c = t,$$

звідки

$$a = \frac{t}{4},\ b = \frac{t}{5},\ c = \frac{t}{10}.$$

За умовою хлопчик купив 44 марки. Маємо рівняння:

$$\frac{t}{4} + \frac{t}{5} + \frac{t}{10} = 44.$$

Розв'язавши це рівняння дістанемо: $t = 80$.

Отже, $a = \frac{80}{4} = 20$, $b = \frac{80}{5} = 16$, $c = \frac{80}{10} = 8$.

Д р у г и й с п о с і б. Якщо хлопчик купив a марок по 4 коп., b марок по 5 коп. і c марок по 10 коп., то $4a = 5b = 10c = \frac{a}{\frac{1}{4}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} = \frac{c}{\frac{1}{10}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}} = \frac{44}{\frac{11}{20}} = 80$, звідки

$$a = \frac{1}{4} \cdot 80 = 20,\quad b = \frac{1}{5} \cdot 80 = 16,\ c = \frac{1}{10} \cdot 80 = 8.$$

В і д п о в і д ь. 20 марок по 4 коп., 16 марок по 5 коп. і 8 марок по 10 коп.

Задачі на змішування

До задач з однойменними величинами і їх відношеннями можна віднести більшість задач, в яких йдеться про суміші, розчини, сплави. Називатимемо їх задачами на змішування.

Розв'язування задач на змішування потребує додаткового пояснення таких понять, як «процентна концентрація», «міцність», «проба» тощо.

Процентною концентрацією розчину називається відношення маси розчиненої речовини до маси всього розчину, виражене в процентах. Наприклад, якщо в 100 *г* розчину міститься 20 *г* розчиненої речовини, то концентрація цього розчину становить 20%; такий розчин називають 20-процентним.

Тут йдеться про відношення мас, а не об'ємів, 20-процентним розчином кислоти називається такий розчин, в якому на кожні 100 *г* розчину припадає 20 *г* чистої безводної кислоти (а не на 100 *л* розчину 20 *л* безводної кислоти!). Хіміки коротко це називають ваговими процентами. Якщо маються на увазі об'ємні проценти, то тут часто вживають термін «міцність».

Наприклад, якщо на 10 *л* спирту припадає 4 *л* чистого безводного спирту, то кажуть, що міцність цього спирту дорівнює 40°. Зауважимо, що 40-процентний спирт і 40-градусний спирт — це не те саме.

Вміст різних металів і домішок у сплавах виражається також процентами. Якщо, наприклад, кажуть, що чавун містить 3% кремнію і 1% марганцю, то це означає, що на 100 *кг* всього сплаву припадає 3 *кг* кремнію і 1 *кг* марганцю. Вміст дорогоцінних металів у сплавах виражається пробою. Пробою називається кількість грамів чистого золота (срібла, платини) в одному кілограмі сплаву. Наприклад, якщо в одному кілограмі сплаву є 875 *г* чистого золота, то його називають сплавом золота 875-ї проби, або золотом 875-ї проби.

Перед тим, як розв'язувати задачі на змішування, бажано повторити з учнями способи розв'язування основних видів задач на проценти, добитися, щоб вони свідомо й швидко могли відповісти на такі, наприклад, запитання: Скільки грамів солі в m грамах p-процентного її розчину? В скількох грамах p-процентного розчину солі є n грамів цієї солі? В m грамах розчину є n грамів солі. Яка процентна концентрація цього розчину?

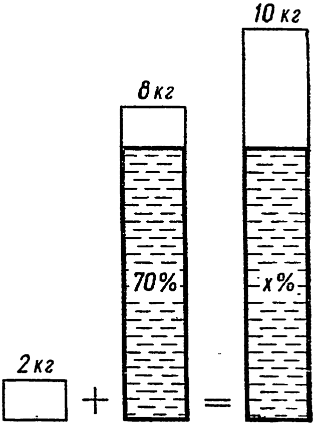
Слід звернути увагу учнів і на основну залежність між кількостями речовин, взятих до змішування і добутих після змішування, яку найчастіше використовують, розв'язуючи задачі на змішування. Цю залежність часто формулюють так: кількість речовини, взятої до змішування, дорівнює кількості цієї речовини, добутої після змішування. Щоб учні правильно розуміли цю залежність, слід на прикладах розкрити її зміст.

Якщо до розчину, в якому є m грамів солі, долити води, то і в добутому розчині буде m грамів цієї солі. Якщо змішати два розчини, в одному з яких є m, а в другому n грамів солі, то в добутому розчині буде $m + n$ грамів цієї солі. Загальна маса суміші завжди дорівнює сумі мас її складових частин.

За традицією всі задачі на змішування поділяють на два роди. До задач першого роду відносять порівняно легші задачі, в яких дано кількості змішуваних речовин (сплавів) і їх процентні концентрації (проби), а треба знайти процентну концентрацію (пробу) утвореної суміші (сплаву). Ці задачі найдоцільніше розв'язувати арифметичним способом. Розв'яжемо одну з таких задач.

1. До 2 *кг* води долили 8 *кг* 70-процентного розчину сірчаної кислоти. Визначте процентну концентрацію добутого розчину.

Схематично умову задачі зручно проілюструвати стовпчиковими діаграмами (мал. 87).



Мал. 87.

Р о з в'я з а н н я.

1) Скільки чистої (безводної) кислоти міститься в даному розчині?

$$8 \cdot 0{,}7 = 5{,}6\ (кг).$$

2) Яка маса добутого розчину?

$$2 + 8 = 10\ (кг).$$

3) Чому дорівнює процентна концентрація розчину?

$$5{,}6 : 10 = 0{,}56 = 56\%.$$

В і д п о в і д ь: Дістали 56-процентний розчин.

Іноді в збірниках задач трапляються задачі, в яких кількість кислоти виражена не в кілограмах, а в літрах. Деякі вчителі розв'язують їх так само, замінюючи тільки кілограми на літри. В результаті дістають таку саму відповідь. Це неправильно. Розглянемо для прикладу задачу.

2. До 2 *л* води долили 8 *л* 70-процентного розчину сірчаної кислоти. Визначте процентну концентрацію добутого розчину.

Р о з в'я з а н н я. Знаходимо в таблицях густину 70-процентного розчину сірчаної кислоти: 1,6. Отже, маса 8 *л* цього розчину $1{,}6 \cdot 8 = 12{,}8$ (*кг*). Безводної кислоти в ньому є $12{,}8 \times 0{,}7 = 8{,}96$ (*кг*). Загальна маса добутого розчину дорівнює $12{,}8 + 2 = 14{,}8$ (*кг*). Отже, процентна концентрація цього розчину $8{,}96 : 14{,}8 \approx 0{,}6 = 60\%$.

У задачах на змішування звичайно йдеться про маси $m_1, m_2, \ldots, m_k$ змішуваних компонентів, їх процентні концентрації (проби) $p_1, p_2, \ldots, p_k$, а також про масу $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ і процентну концентрацію p утвореної суміші. При цьому завжди правильне співвідношення:

$$m_1p_1 + m_2p_2 + \ldots + m_kp_k = (m_1 + m_2 + \ldots + m_k)p.$$

Звичайно у школі розглядають найпростіший випадок, коли змішують тільки два компоненти. В цьому випадку

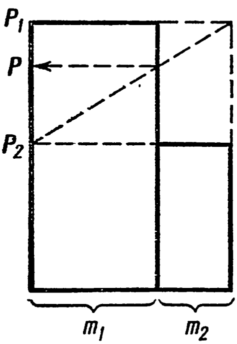
$$m_1p_1 + m_2p_2 = (m_1 + m_2)p.$$

Якщо в задачі відомі значення m_1, m_2, p_1, p_2 і треба визначити p, то це задача на змішування першого роду. Її можна розв'язати за формулою:

$$p = \frac{m_1p_1 + m_2p_2}{m_1 + m_2}.$$

Звертаємо увагу вчителів і на геометричне розв'язання такої задачі (мал. 88).

Якщо в задачі треба знайти m_1, m_2, p_1, p_2, або їх відношення, то це задача на змішування другого роду. Такі задачі важчі від задач першого роду, їх можна розв'язувати й арифметичним способом, але краще — за допомогою рівнянь.



Мал. 88.

3. З двох розчинів солі — 10-процентного і 15-процентного — треба утворити 40 *г* 12-процентного розчину. Скільки треба взяти грамів кожного розчину?

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б.

1) Скільки солі міститься в 40 *г* 12-процентного розчину?

$$40 \cdot 0{,}12 = 4{,}8\ (г).$$

2) Скільки солі міститься в 40 *г* 10-процентного розчину?

$$40 \cdot 0{,}1 = 4\ (г).$$

3) На скільки більше солі в 40 *г* 12-процентного розчину, ніж в 40 *г* 10-процентного розчину?

$$4{,}8 - 4 = 0{,}8\ (г).$$

4) На скільки більше солі в 1 *г* 15-процентного розчину, ніж в одному грамі 10-процентного розчину?

$$0{,}15 - 0{,}1 = 0{,}05\ (г).$$

5) Скільки грамів 15-процентного розчину треба взяти?

$$0{,}8 : 0{,}05 = 16\ (г).$$

6) Скільки треба взяти 10-процентного розчину?

$$40 - 16 = 24\ (г).$$

В і д п о в і д ь. 24 *г* і 16 *г*.

Другий спосіб. Нехай для утворення потрібного розчину треба взяти x г 10-процентного розчину. Тоді 15-процентного розчину треба взяти $(40 - x)$ г. Отже,

$$0{,}1x + 0{,}15(40 - x) = 0{,}12 \cdot 40,$$

звідки $x = 24$. Стільки треба взяти 10-процентного розчину, а 15-процентного треба взяти 16 г.

Складаючи рівняння за умовою такої задачі, доцільно заповнити таку, наприклад, таблицю.

Розчини	%	Загальна маса (в г)	Маса солі (в г)
Перший	10	x	$0{,}1x$
Другий	15	$40-x$	$0{,}15(40-x)$
Добутий	12	40	$40 \cdot 0{,}12$

Врахувавши, що маса солі в добутому розчині дорівнює сумі мас її в складових частинах, можна відразу написати потрібне рівняння:

$$0{,}1x + 0{,}15(40 - x) = 40 \cdot 0{,}12.$$

Таке розв'язання набагато простіше і зрозуміліше, ніж арифметичне.

Ця задача розв'язується також за допомогою системи рівнянь з двома змінними.

Нехай для утворення 12-процентного розчину треба взяти x г 10-процентного і y г 15-процентного. Тоді

$$x + y = 40,$$
$$0{,}1x + 0{,}15y = 0{,}12 \cdot 40.$$

Розв'язавши систему рівнянь, дістанемо такий самий розв'язок задачі: $x = 24$ г, $y = 16$ г.

Для ілюстрації умови цієї задачі використаємо прямокутники. Правда, відразу не можна сказати, який прямокутник малювати більшим. Але це не має істотного значення. Знаходячи спосіб розв'язування, ці прямокутники намалюємо довільно, а знайшовши відповідь, підправимо малюнок.

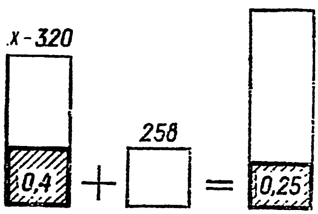
Над першим і другим прямокутниками напишемо відповідно x і y, якщо розв'язуватимемо задачу за допомогою системи рівнянь. Якщо хочемо розв'язати її за допомогою рівняння з однією змінною, замість y слід написати $40 - x$.

Вважаємо, що в школі задачі на змішування другого роду треба розв'язувати тільки алгебраїчно, тобто за допомогою складання рівнянь.

Розв'яжемо кілька важчих задач на змішування.

4. З колби, наповненої 40-процентною сірчаною кислотою, взяли 320 *г* кислоти і долили в колбу 258 *г* води. В результаті концентрація кислоти в колбі знизилася до 25%. Визначте, скільки грамів 40-процентної кислоти було в колбі спочатку.

Проілюструвати умову задачі можна таким малюнком (мал. 89). Малюємо спочатку довільний прямокутник, відокремлюємо знизу 0,4 його площі. Основу другого прямокутника беремо таку саму, як і першого, а у висоту залишаємо його недомальованим. У третьому прямокутнику спочатку малюємо нижню (заштриховану) частину яка дорівнює заштрихованій частині першого. Оскільки цій частині відповідає 0,25 всього третього прямокутника, робимо висоту третього прямокутника в чотири рази більшою. Різниця висот незаштрихованих частин третього і першого прямокутників дасть висоту другого. Тепер можна домалювати другий прямокутник.



Мал. 89.

Над першим прямокутником краще відразу написати x — 320. Якщо написати над ним x і скласти за даним малюнком рівняння, його корінь не буде відповіддю до задачі. Від цього кореня треба ще відняти 320 *г*. Саме ж рівняння в цьому випадку буде простіше.

Р о з в'я з а н н я.

Спочатку в колбі було x *г* кислоти; коли відлили 320 *г*, стало $(x - 320)$ *г* кислоти; чистої безводної кислоти в ній стало $(x - 320) \cdot 0{,}4$ *г*;

коли долили води, всього стало $(x - 62)$ *г*; маса чистої кислоти в колбі не змінилася.

Оскільки добуто 25-процентний розчин кислоти, то

$$\frac{(x - 320) \cdot 0{,}4}{x - 62} = 0{,}25,$$

звідки $x = 750$.

В і д п о в і д ь. Спочатку в колбі було 750 *г* кислоти.

5. Один сплав складається з двох металів, маси яких відносяться, як 1 : 2, а другий містить ті самі метали, але маси їх відносяться як 3 : 4. Скільки частин кожного сплаву треба взяти, щоб добути третій сплав, в якому маси тих самих металів відносилися б, як 15 : 22?

Р о з в'я з а н н я. Нехай першого сплаву треба взяти x, а другого y частин. Тоді першого металу в першому сплаві буде $\frac{1}{3}x$, а в другому $\frac{3}{7}y$ частин. У третьому сплаві цього самого металу буде $\frac{15}{37}(x + y)$ частин. Отже,

$$\frac{1}{3}x + \frac{3}{7}y = \frac{15}{37}(x + y),$$

звідки

$$\left(\frac{3}{7}-\frac{15}{37}\right)y=\left(\frac{15}{37}-\frac{1}{3}\right)x, \quad \frac{x}{y}=\frac{9}{28}.$$

Відповідь. 9 частин і 28 частин.

Примітка. Аналогічно можна було б порівняти кількості другого металу в усіх трьох сплавах і скласти рівняння

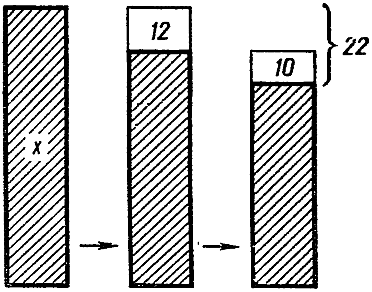
$$\frac{2}{3}x+\frac{4}{7}y=\frac{22}{37}(x+y)$$

або порівняти відношення цих металів у двох перших і третьому сплавах і дістати ще одне рівняння:

$$\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{7}y\right):\left(\frac{2}{3}x+\frac{4}{7}y\right)=15:22.$$

Усі ці рівняння еквівалентні, тому з них не можна визначити окремо значення x і y.

6. З бака, наповненого чистим спиртом, узяли 12 *л* спирту і долили бак водою, потім узяли ще 12 *л* розбавленого спирту. Після цього в баці залишилося чистого спирту на 22 *л* менше, ніж було спочатку. Скільки літрів чистого спирту залишилося в баці?



Мал. 90.

Проілюструємо умову задачі малюнком (мал. 90).

Розв'язання. Припустимо, що спочатку в баці було x *л* чистого спирту. Якщо з нього взяли 12 *л* спирту і долили 12 *л* води, то в ньому стало x *л* розчину, причому чистого спирту тільки $(x-12)$ *л*. Отже, концентрацію цього розчину можна характеризувати відношенням $\frac{x-12}{x}$. Після того, як з цього розчину взяли 12 *л*, залишилося $(x-12)$ *л* розчину такої самої концентрації. За умовою, чистого спирту у ньому було на 22 *л* менше, ніж спочатку, тобто $(x-22)$ *л*. Отже, концентрацію добутого розчину можна виразити ще й так: $\frac{x-22}{x-12}$. Маємо рівняння:

$$\frac{x-22}{x-12}=\frac{x-12}{x},$$

звідки $x=72$, тобто 72 *л* чистого спирту було в баці спочатку. Залишилось його на 22 *л* менше, тобто 50 *л*.

Зрозуміло, що буквою x можна позначити ту кількість чистого спирту, яка залишилась. Отже, спочатку в баці було $(x + 22)$ *л*. Цей спосіб розв'язування приводить до рівняння

$$\frac{x+10}{x+22}=\frac{x}{x+10},$$

корінь якого $x = 50$ (*л*) є розв'язком задачі.

Можна було б міркувати й інакше. Якщо під кінець в баці залишилося x *л* чистого спирту і 10 *л* води, то перед цим було $(x + 10)$ *л* чистого спирту і 12 *л* води. Оскільки концентрація розчину не змінилася, то і відношення об'єму чистого спирту до об'єму води в обох випадках однакове. Отже,

$$\frac{x}{10}=\frac{x+10}{12},$$

звідки: $x = 50$ (*л*).

Зауважимо, що таке розв'язання і постановка самої задачі не зовсім реальні. Справа в тому, що чистий спирт дуже важко дістати. Найвища процентна концентрація спирту (спирт-ратифікат), який потрапляє на виробництво, 96°. Крім того, розв'язуючи задачу, ми припустили, що коли до 60 *л* спирту долити 12 *л* води, то утвориться 72 *л*, суміші. Насправді це не так, бо, як відомо з хімії, коли змішати, наприклад, 50 *л* спирту і 50 *л* води, то розчину утвориться не 100 *л*, а 96,5 *л*.

Майже всі задачі на змішування зводяться до рівнянь першого степеня. Це не випадково, бо кожну із змінних, пов'язаних залежністю $m_1p_1 + m_2p_2 = (m_1 + m_2) \cdot p$, можна виразити лінійно через інші змінні. Тільки коли в задачі даються ще співвідношення між цими змінними, її розв'язування можна звести до квадратного рівняння.

7. Зливок золота із сріблом, який містить 80 *г* золота, сплавлено з 100 *г* чистого золота. Вміст золота в зливку підвищився порівняно з попереднім на 20%. Скільки срібла в зливку?

В умові задачі не сказано, чому дорівнюють p_1 і p_2, а відома тільки їх різниця (20%). Тому задача зводиться до квадратного рівняння.

Р о з в' я з а н н я. Припустимо, що спочатку в зливку було x *г* срібла. Отже, маса його становила $(x + 80)$ *г*. Коли до зливка добавили 100 *г* чистого золота, то маса його стала дорівнювати $(x + 180)$ *г* з яких 180 *г* — золото. Спочатку вміст золота в зливку становив $\frac{80}{80+x}\cdot 100\%$, а потім $\frac{180}{x+180}\cdot 100\%$. За умовою вміст золота в зливку підвищився на 20%. Отже,

$$\frac{180}{x+180}\cdot 100\% - \frac{80}{x+80}\cdot 100\% = 20\%,$$

або

$$\frac{180}{x+180}-\frac{80}{x+80}=0{,}2.$$

Розв'язавши це рівняння, дістанемо $x = 120$ (кількість грамів срібла в зливку).

Якщо позначимо масу першого зливка через y, дістанемо таке рівняння:

$$\frac{180}{y+100}-\frac{80}{y}=0{,}2,$$

звідки $y = 200$. Таку масу в грамах мав зливок спочатку. В ньому було 80 *г* золота і 120 *г* срібла.

2. Задачі на роботу

Вступні зауваження Досі ми розглядали задачі на складання рівнянь з абстрактними числами або однойменними величинами та їх відношеннями. Але в школі, як уже зазначалось, учні часто розв'язують задачі з трьома різнойменними величинами, насамперед такими, як продуктивність праці, час і кількість виконаної роботи,— це задачі на роботу. В цих задачах йде мова про сівбу, збирання врожаю, риття котлованів, виплавляння чавуну, виготовлення деталей, добування нафти, друкування рукописів тощо. Мається на увазі, що люди чи механізми, про які йдеться в задачі, працюють рівномірно, тобто за однакові проміжки часу виконують однакову роботу. До такого типу задач можна було б віднести і задачі на рух, адже кожне тіло, рухаючись, виконує роботу. Проте останні мають багато особливостей, не характерних для всіх задач на роботу, тому віднесемо їх до окремого типу й розглянемо пізніше.

У методичній літературі досить поширений термін «задачі на спільну роботу». Але він охоплює тільки частину задач на роботу, саме ті, в яких йдеться про кількох працюючих. Якщо в задачі йде мова про одного робітника, одну ланку, один трактор та ін., то говорити про спільну роботу не можна. Ось чому задачі на спільну роботу вважатимемо окремим видом задач на роботу.

Серед задач на роботу є й досить прості: на одну дію і такі, що їх зручно розв'язувати, не складаючи рівнянь. Зокрема, деякі задачі на спільну роботу можна віднести до задач на пропорційний поділ.

1. Одна бригада виконує норму за 8 *год*, друга — за 6 *год*, третя — за 5 *год*. Працюючи разом, бригади виготовили 118 виробів. Скільки виробів виготовила кожна бригада?

Зрозуміло, що продуктивність праці кожної бригади обернено пропорційна кількості годин, протягом яких вона виконує якусь роботу. Отже, розв'язування задачі зводиться до того, щоб поділити 118 виробів на три частини, обернено пропорційні числам 8, 6 і 5.

Р о з в'я з а н н я. Нехай перша, друга і третя бригади виготовили відповідно x, y і z виробів. Кількість виробів, виготовлених однією бригадою, обернено пропорційна кількості годин, за які вона виконує норму. Отже,

$$x = \frac{1}{8}t, \quad y = \frac{1}{6}t, \quad z = \frac{1}{5}t, \quad \frac{1}{8}t + \frac{1}{6}t + \frac{1}{5}t = 118, \quad t = 240;$$

$$x = \frac{1}{8} \cdot 240 = 30, \quad y = \frac{1}{6} \cdot 240 = 40, \quad z = \frac{1}{5} \cdot 240 = 48.$$

В і д п о в і д ь. Перша бригада виготовила 30, друга — 40, а третя — 48 виробів.

Переважну більшість задач на роботу можуть розв'язувати тільки учні, обізнані з дробовими числами; адже нерідко доводиться всю виконану роботу брати за одиницю і розглядати дробові частини цієї одиниці. Щоб такі задачі були доступні й учням, які ще не обізнані з дробовими числами, до їх умови іноді вводять зайві дані.

2. Бібліотеці треба оправити 1800 книжок. Перша майстерня може виконати цю роботу за 3 дні, а друга — за 6 днів. За скільки днів оправлять усі книжки обидві майстерні, якщо вони працюватимуть одночасно?

Цю задачу можна розв'язати так.

1) Скільки книжок оправить за день перша майстерня?

$$1800 : 3 = 600 \text{ (кн.)}.$$

2) Скільки книжок оправить за день друга майстерня?

$$1800 : 6 = 300 \text{ (кн.)}.$$

3) Скільки книжок оправлять за день обидві майстерні?

$$600 + 300 = 900 \text{ (кн.)}.$$

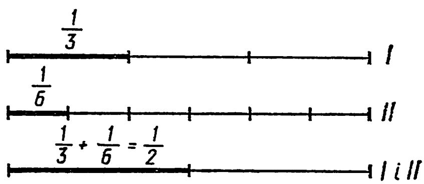
4) За скільки днів оправлять усі книжки обидві майстерні?

$$1800 : 900 = 2 \text{ (дн.)}.$$

Коли учні ознайомляться з дробовими числами, їм цю саму задачу можна дати без числа 1800 (воно зайве!). Тоді вони розв'яжуть її так.

Перша майстерня за день може виконати $\frac{1}{3}$ частину всієї роботи, а друга $\frac{1}{6}$. Працюючи одночасно, вони за день виконають $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ частину роботи. Тому всю роботу обидві майстерні зможуть виконати за 2 дні.

Останнє розв'язання задачі бажано проілюструвати малюнком. Якщо позначити всю роботу яким-небудь відрізком, а її частини, які виконують перша, друга чи обидві майстерні разом за день, виділити жирними лініями, то умова задачі зобразиться так, як показано на мал. 91.



Мал. 91.

Отже, обидві майстерні, працюючи разом, виконують за день половину всієї роботи, а всю роботу — за 2 дні.

Наведене графічне розв'язання задачі важке для учнів, з ним треба їх ознайомити. Навчити учнів створювати різні моделі задач — справа дуже корисна.

У VI класі всю роботу краще позначити не одиницею, а якою-небудь буквою. Наприклад, якщо всю роботу, про яку йдеться в розглядуваній задачі, позначити через a, а шукане число днів — через x, то можна скласти таку таблицю:

Майстерні	Продуктивність	Час	Робота
I	$\frac{a}{3}$	3	a
II	$\frac{a}{6}$	6	a
Обидві		x	a

Незаповнена клітка таблиці відповідає спільній продуктивності праці обох майстерень. Її можна визначити двома способами: додати продуктивності праці кожної майстерні, або поділити всю роботу a на час x. Отже, $\frac{a}{3} + \frac{a}{6} = \frac{a}{x}$.

За змістом задачі $a \neq 0$, тому $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$, звідки $x = 2$ (дні).

Слід мати на увазі, що задачі на роботу розв'язують і на уроках фізики. Але в курсі фізики у VI — VIII класах розглядається тільки механічна робота — величина, що дорівнює скалярному добутку векторів сили і переміщення: $A = Fs\cos\alpha$; її подають в джоулях, ергах, ват-секундах тощо. Значення механічної роботи може виражатися і додатним, і від'ємним (коли $\alpha > 90°$) числом. На уроках математики, говорячи про задачі на роботу, мають на увазі не тільки механічну роботу, а й різні види повсякденної праці, яка характеризується кілометрами (прокладеного газопроводу), гектарами (скошеної пшениці), літрами (надоєного молока), тоннами (видобутого вугілля), кількістю штук (зроблених моторів) тощо. Для розв'язування таких задач використовують здебільшого залежність $A = Nt$, де A — робота, N — продуктивність праці або потужність, t — час.

Задачі про одного працюючого

Розглянемо методику розв'язування найскладніших задач на роботу, які є в підручниках з алгебри для VI — VIII класів. Почнемо з тих, в яких йдеться про одного працюючого: одного робітника, один завод, один екскаватор, один комбайн, одну бригаду та ін. Такі задачі іноді зводяться до лінійних рівнянь, до квадратних або навіть до рівнянь вищих степенів. Їх можна розв'язувати багатьма способами.

1. Замовлення на випуск машин завод мав виконати за 15 днів. Випускаючи щодня 2 машини понад план, він уже за два дні до строку не тільки виконав план, а й випустив ще 6 машин. Скільки машин мав випустити завод за планом?

Розв'язання.

Перший спосіб. Нехай завод мав за планом випустити x машин, а випустив $x + 6$ машин. Щодня він мав випустити $\frac{x}{15}$ машин, а випускав $\frac{x+6}{13}$. У задачі сказано, що завод випускав щодня дві машини понад план, отже,

$$\frac{x+6}{13} - \frac{x}{15} = 2.$$

Це рівняння має один розв'язок: $x = 150$.

Перевірка. Якщо завод мав випустити 150 машин, то випустив 156 машин. Щодня він мав випускати 10 машин ($150 : 15 = 10$), а випускав 12 ($156 : 13 = 12$). $12 - 10 = 2$ (машини).

Відповідь. Завод мав випустити 150 машин.

Другий спосіб. Нехай завод мав випустити всього x машин, тобто за день випускати $\frac{x}{15}$ машин, фактично він випускав щодня $\left(\frac{x}{15} + 2\right)$ машин, і за 13 днів випустив $\left(\frac{x}{15} + 2\right) \cdot 13$ машин. Відомо, що завод випустив на 6 машин більше, ніж передбачалось планом. Отже,

$$\left(\frac{x}{15} + 2\right) \cdot 13 - x = 6, \quad x = 150.$$

Третій спосіб. Припустимо, що завод, випускаючи щодня x машин, мав випустити їх усього $15x$ штук. Насправді він випускав щодня $(x + 2)$ машини і за 13 днів випустив їх $(x + 2) \cdot 13$ штук. У задачі сказано, що він випустив на 6 штук більше, ніж передбачалось планом. Отже,

$$(x + 2) \cdot 13 - 15x = 6,$$

звідки $x = 10$ — стільки машин завод мав випускати щодня. За 15 днів він мав випустити 150 машин.

Четвертий спосіб. Нехай завод, випускаючи щодня x машин, мав випустити за 15 днів $15x$ машин. Насправді він випустив $(15x + 6)$ машин, тобто щодня випускав по $\frac{15x+6}{13}$ машин. Отже, $\frac{15x+6}{13} - x = 2$,

звідки $x = 10$ і т. д.

Покажемо, як можна відразу виявити різні способи розв'язання цієї задачі. Запишемо дані її в таку таблицю:

Робота	Днів	Випускав щодня машин	Випустив усього машин
За планом	15	A	B
Фактично	13	на 2 більше A_1	на 6 більше B_1

Як видно з таблиці, в задачі йдеться про два відповідні значення (за планом і фактично) трьох величин: кількість днів, кількість машин, які випускались щодня, і загальна кількість випущених машин. Для цих значень у таблиці відведено всього 6 кліток. Дві з них заповнені, а чотири, позначені буквами A, B, A_1, B_1, слід заповнити. В них треба поставити числа, які б задовольняли такі чотири співвідношення:

1) $A_1 - A = 2$,
2) $B_1 - B = 6$,
3) $15 \cdot A = B$,
4) $13 \cdot A_1 = B_1$.

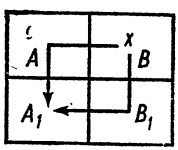
Співвідношення 1) і 2) в умові задачі подані явно («випустив ще 6 машин» і «щодня 2 машини понад план»), а співвідношення 3) і 4) можна встановити, врахувавши залежність між продуктивністю праці, кількістю днів і виконаною роботою.

У будь-якій з незаповнених кліток поставимо букву x і, використовуючи згадані вище співвідношення, заповнимо виразами із змінною клітки, причому одну з них — двома способами. Прирівнявши два останні вирази, ми й дістанемо потрібне рівняння для визначення x.

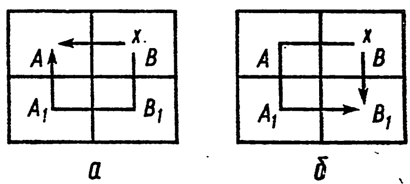
Поставимо, наприклад, замість B букву x. Тоді відразу можна заповнити дві суміжні клітки, використавши співвідношення між A і B та між B_1 і B. Дістанемо частково заповнену таблицю:

Робота	Днів	Випускав щодня	Випустив всього
За планом	15	$\frac{x}{15}$	x
Фактично	13	на 2 більше	$x+6$

Тепер залишається заповнити клітку, в якій записано A_1. Це зробимо двома способами. Якщо використаємо співвідношення «по вертикалі» («на 2 машини більше»), дістанемо $\frac{x}{15}+2$. Якщо використаємо співвідношення «по горизонталі» ($13A_1 = B_1$), дістанемо $\frac{x+6}{13}$.



Мал. 92.

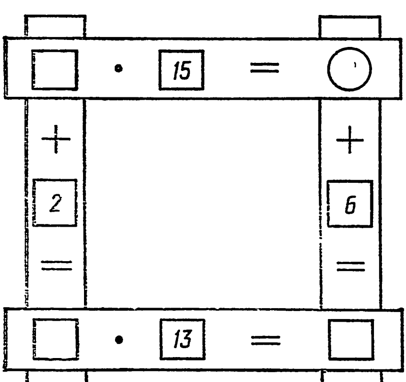


Мал. 93.

Але ці два вирази мають те саме числове значення, тому $\frac{x}{15}+$ $+2=\frac{x+6}{13}$ (шукане рівняння).

Описану послідовність заповнення кліток можна зобразити схематично, як показано на мал. 92. Клітки можна заповнювати й інакше (мал. 93, *а*, *б*). На основі цих таблиць складемо рівняння:

$$\frac{x+6}{13}-2=\frac{x}{15}, \quad x+6=\left(\frac{x}{15}+2\right)\cdot 13.$$



Мал. 94.

Звичайно, можна вписати x в будь-яку з трьох інших кліток і кожного разу діставати різні рівняння.

Наведемо ще стрічкову діаграму розглянутої задачі (мал. 94). На ній колом позначене місце для шуканого значення, а порожніми квадратами — для значень, які не треба знаходити, але знаючи які, можна легко відповісти на запитання задачі.

Наприклад, запишемо в крузі букву x і виражатимемо через неї значення інших величин (заповнимо всі квадрати). В результаті дістанемо рівняння:

$$\frac{x}{15}+2=\frac{x+6}{13},$$

або

$$\left(\frac{x}{15}+2\right)\cdot 13=x+6.$$

Якщо запишемо у верхньому лівому квадраті букву m (стільки машин передбачали випускати щодня), то дістанемо рівняння:

$$15m+6=(m+2)\cdot 13,$$

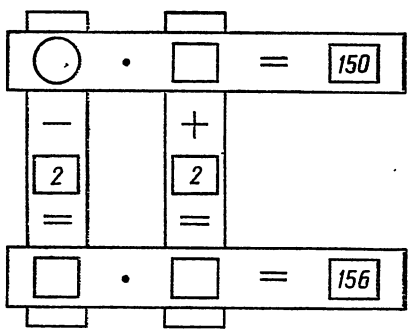
або:

$$\frac{15m+6}{13}=m+2,\ (m+2)\cdot 13-6=15m.$$

Правда, в задачі не треба знаходити значення m, але знаючи його, дуже легко можемо визначити шукане значення $x = 15\ m$.

Зрозуміло, що учнів восьмирічної школи не обов'язково ознайомлювати із способами розв'язування задач за допомогою таблиці чи, тим більше, за допомогою стрічкових діаграм. Але вчителеві математики про них бажано знати.

Щоб краще вивчити структуру розв'язування цього типу задач, розглянемо кілька задач, обернених до даної.



Мал. 95.

2. Замовлення на випуск 150 машин завод мав виконати за кілька днів. Але вже за 2 дні до строку, випускаючи 2 щодня машини понад план, він не тільки виконав замовлення, а й випустив ще 6 машин.

За скільки днів завод мав виконати замовлення?

Цій задачі відповідає інша стрічкова діаграма (мал. 95) й інша таблиця. Позначивши шукану кількість днів через t, складемо таку таблицю:

Робота	Днів	Випускав щодня машин	Випустив всього машин
За планом	t	$\frac{150}{t}$	150
Фактично	на 2 менше $t-2$	на 2 більше $\frac{156}{t-2}$.	156

З неї неважко дістати рівняння:

$$\frac{150}{t} + 2 = \frac{156}{t-2},$$

або

$$t^2 - 5t - 150 = 0.$$

Додатний корінь рівняння $t = 15$ (днів).

Кілька інших способів розв'язування задачі, які випливають з таблиці, пропонуємо читачам знайти самостійно.

3. Замовлення на випуск машин завод мав виконати за кілька днів. Але вже за два дні до строку, випускаючи щодня не 10 машин, як передбачалося планом, а 12, він не тільки виконав все замовлення, а й випустив ще 6 машин. За скільки днів завод мав виконати замовлення?

Цій задачі відповідає така таблиця:

Робота	Днів	Випускав щодня машин	Випустив всього машин
За планом		10	
Фактично	на 2 менше	12	на 6 більше

Якщо позначити шукану кількість днів через t і заповнити таблицю, неважко скласти таке рівняння:

$$12(t-2) - 10t = 6,$$

звідки $t = 15$ (днів).

Виникає запитання: чому розв'язування першої й третьої з розглянутих задач зводиться до лінійних рівнянь, а другої до — квадратного?

Справа в тому, що в першій і третій задачах були відомі значення часу або продуктивності праці, а невідомі — кількості виробленої продукції. В цьому випадку значення шуканих величин входили до складених рівнянь як співмножники, ці частини рівняння являли собою цілі вирази першого степеня. В другій задачі значення всієї виконаної заводом роботи (150 і 156) відомі; складаючи рівняння, доводилося ці значення ділити на вирази із змінною. В результаті діставали дробові вирази, до яких змінна входить у другому степені.

Нерідко в таких задачах на роботу перевиконання норми виражають у процентах.

Завод за кілька днів мав виготовити партію верстатів. Перевиконуючи денне завдання на 9 верстатів, він уже за 3 дні до строку виготовив 588 верстатів, що становило 98% планового завдання. Скільки верстатів виготовляв завод за день?

Розв'язуючі такі задачі, бажано спочатку виконати процентні розрахунки. Нехай за планом завод мав виготовити N верстатів, тоді:

$$588 = \frac{98}{100} \cdot N, \text{ звідки } N = \frac{588 \cdot 100}{98} = 600.$$

Тепер складемо таблицю, що відповідає умові задачі:

Робота	Кількість днів	Виготовляв щодня верстатів	Виготовив всього верстатів
За планом			600
Фактично	на 3 менше	на 9 більше	588

З багатьох можливих способів розв'язування задачі спинимося тільки на одному. Нехай:

x верстатів завод виготовляв щодня;

$x - 9$ верстатів він мав виготовляти щодня;

$\frac{588}{x}$ днів завод виготовляв верстати;

$\frac{600}{x-9}$ днів він мав виготовляти верстати.

Значення останнього виразу має бути на 3 більше від передостаннього, отже

$$\frac{600}{x-9} - \frac{588}{x} = 3.$$

Додатний корінь цього рівняння: $x = 49$.

Відповідь. Завод виготовляв за день 49 верстатів.

Деякою різновидністю розглядуваного типу задач є задачі, в яких не треба визначати загального значення виконаної роботи.

5. На будівництві гідроелектростанції бригада екскаваторників за планом повинна була щодня виймати 860 $м^3$ грунту. Перевиконуючи щоденну норму на 20%, бригада закінчила роботу на 2 дні раніше від наміченого строку. За скільки днів бригада мала закінчити роботу за планом?

Щоб розв'язати задачу, визначимо спочатку, скільки кубометрів грунту фактично виймала бригада щодня:

$$\frac{860 \cdot 120}{100} = 1032\ м^3.$$

Тепер за умовою задачі складемо рівняння. Припустимо, що бригада мала закінчити роботу за x днів, а закінчила за $(x - 2)$ дні. Ці значення мають бути обернено пропорційні числам 860 і 1032. Отже, $\frac{x}{x-2} = \frac{1032}{860}$, звідки $x = 12$.

Можна міркувати й інакше. Задачу ілюструє така таблиця:

Робота	Днів	Норма виробітку	Зроблено всього
За планом	x	860	
Фактично	на 2 менше	на 20% більше	

Користуючись цією таблицею, складемо рівняння:

$$860x = 1032(x - 2).$$

Це рівняння рівносильне попередньому і тому має такий самий розв'язок: $x = 12$ (днів).

6. Токар мав виготовити до певного строку 264 деталі. Попрацювавши 3 дні, він перейшов на другий верстат і почав перевиконувати денну норму на 7 деталей. До заданого строку він виготовив 320 деталей. Скільки деталей виготовляв токар щодня на новому верстаті?

Розв'язання.

Перший спосіб. Нехай токар мав виготовляти щодня x деталей. Тоді йому треба було працювати $\frac{264}{x}$ днів. Оскільки на старому верстаті він працював 3 дні, то на новому $\left(\frac{264}{x}-3\right)$ днів. На старому верстаті він щодня виготовляв x деталей, а на новому $(x+7)$ деталей. Маємо рівняння:

$$3x+\left(\frac{264}{x}-3\right)(x+7)=320,$$

звідки $x=24$.

Другий спосіб. Нехай токар мав працювати t днів і щодня виготовляти x деталей. Відомо, що всього він мав виготовити 264 деталі. Отже, $xt=264$.

Відомо також, що за 3 дні на старому верстаті він виготовив $3x$ деталей, а за $(t-3)$ днів на новому верстаті виготовив ще $(x+7)(t-3)$ деталей. А всього він виготовив 320 деталей, тому

$$3x+(x+7)(t-3)=320.$$

Лишається розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} xt=264, \\ 3x+(x+7)(t-3)=320. \end{cases}$$

Вона має один розв'язок: $t=11$, $x=24$.

Відповідь. На новому верстаті токар виготовляв щодня 31 деталь.

Від розглянутого типу майже не відрізняються задачі, в яких йдеться про двох працюючих, але не про їх спільну роботу.

7. Одна ланка мала прополоти овочеві культури на ділянці площею 3 *га*, а друга — на ділянці площею, на 40% більшою від першої ділянки. Прополюючи щодня на 0,1 *га* менше від другої ланки, перша все ж таки закінчила работу на день раніше від другої.

Скільки днів працювала кожна ланка?

Розв'язання. Нехай перша ланка працювала t днів, тоді друга працювала $(t+1)$ день. Перша за день прополювала $\frac{3}{t}$ *га*, а друга $\frac{3+0{,}4\cdot 3}{t+1}$ *га*. В задачі сказано, що перша ланка за день прополювала на 0,1 *га* менше, ніж друга. Отже,

$$\frac{4{,}2}{t+1}-\frac{3}{t}=0{,}1,$$

або

$$t^2-11t+30=0.$$

Корені цього рівняння: $t_1=5$, $t_2=6$.

Отже, задача має два розв'язки: а) перша ланка працювала 5 днів, тоді друга 6 днів; б) перша ланка працювала 6 днів, тоді друга 7 днів.

Ця задача і її розв'язання майже не відрізняються від попередніх, хоча в ній йдеться не про одну, а про дві ланки. Коли те, що сказано в ній про дві ланки, перефразуємо про одну (як вона виконала завдання і як мала виконати за планом), дістанемо звичайну задачу про роботу однієї ланки.

Задачі на спільну роботу

Від таких задач треба відрізняти задачі на спільну роботу, в яких йде мова про те, що ту саму роботу виконували (принаймні частково) два робітники, два комбайни, три бригади та ін.

Звичайно, розв'язуючи такі задачі, припускають, що продуктивність кожного працюючого не залежить від того, працює він один, чи в колективі. Насправді це не так, але ми додержуємось такого припущення, щоб не ускладнювати розв'язання. Про це бажано сказати учням. Отже, розв'язуючи задачі на спільну роботу, вважатимемо, що продуктивність праці колективу є арифметичною сумою продуктивностей праці всіх його членів.

1. Два ковалі, працюючи разом, можуть виконати певну роботу за 8 днів. За скільки днів другий коваль може виконати цю роботу один, якщо перший коваль виконує її за 12 днів?

Розв'язання. Нехай другий коваль може виконати всю роботу за x днів. Тоді за день він виконає $\frac{1}{x}$ частину роботи. Перший за день виконує $\frac{1}{12}$ частину роботи. Тому, працюючи разом, вони за день виконають $\frac{1}{x}+\frac{1}{12}$ частину роботи. Маємо рівняння:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8},$$

звідки $x = 24$ (дні).

Розв'яжемо цю задачу, не складаючи рівняння.

Обидва ковалі разом за день виконують $\frac{1}{8}$ частину всієї роботи. Перший за день виконує $\frac{1}{12}$ частину роботи, а другий $\frac{1}{8}-\frac{1}{12}=$ $=\frac{1}{24}$ її частину. А це означає, що всю роботу другий коваль міг би виконати за 24 дні.

Правильне є й таке міркування. Припустимо, що виконати всю роботу означає зробити 24 деталі (для зручності взяли $24 = K(12,8)$). Тоді, працюючи вдвох, ковалі за день виготовлять $24 : 8 = 3$ деталі, причому перший за день виготовить $24 : 12 = 2$ деталі. Отже, другий за день виготовляє $3 - 2 = 1$ деталь, а всю роботу (24 деталі) він може виконати за 24 дні.

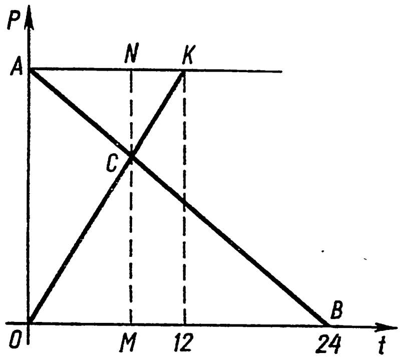
Таке розв'язання доступне і для тих учнів, які ще не знають дробових чисел, але прийти до нього досить важко. Якби в задачі було дано 24 деталі (хоч це уточнення зайве) вона б стала доступною навіть учням III класу.

2. Один коваль може виконати замовлення за 12 днів, а другий — за 24. За скільки днів виконають це замовлення обидва ковалі, працюючи разом?

Ця задача обернена до попередньої. Звичайно її розв'язують так.

Перший коваль може виконати $\frac{1}{12}$, а другий $\frac{1}{24}$ всього замовлення. Тому обидва разом за день виконають $\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$, тобто $\frac{1}{8}$ частину всього замовлення. Отже, все замовлення вони можуть виконати за 8 днів.

Запропонуємо й графічне розв'язання цієї задачі. Побудуємо в прямокутній системі координат (мал. 96) графіки роботи першого і другого ковалів (відрізки OK і AB). Залишається визначити абсцису x точки перетину цих відрізків. Оскільки трикутники ACK і OCB подібні, причому $|OB|:|AK| = 24 : 12 = 2 : 1$, то і $|OM|:|NK| = 2 : 1$, або $x : (12 - x) = 2 : 1$, звідки $x = 8$ *год.*



Мал. 96.

3. Дві землечерпалки, працюючи разом, можуть поглибити дно річки за 12 днів. За скільки днів виконала б цю саму роботу кожна землечерпалка окремо, коли відомо, що продуктивність однієї з них у 1,5 раза вища від продуктивності другої?

Умову задачі можна подати у вигляді таблиці:

Землечерпалки	Дні	Продуктивність	Робота
перша		в 1,5 раза вища	1
друга	x		1
обидві разом	12	$\frac{1}{12}$	1

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Припустимо, що друга землечерпалка могла б виконати всю роботу за x днів. Тоді за день вона виконувала б $\frac{1}{x}$ частину роботи. А обидві разом за день виконують $\frac{1}{12}$

частину роботи. Отже, перша землечерпалка може виконати за день $\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{x}\right)$ частину роботи. За умовою продуктивність першої землечерпалки в 1,5 раза більша від продуктивності другої. Отже,

$$\frac{1,5}{x}=\frac{1}{12}-\frac{1}{x},$$

звідки $x = 30$. Друга землечерпалка могла б виконати всю роботу за 30 днів. Тоді перша, продуктивність якої в 1,5 раза вища, виконала б цю роботу в 1,5 раза швидше: $30 : 1,5 = 20$ (днів).

Зрозуміло, що можемо взяти за x кількість днів, за які перша землечерпалка виконає всю роботу. Тоді дістанемо рівняння

$$\frac{1}{x}=1,5\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{x}\right)$$

і т. д.

Якщо взяти за невідоме продуктивність другої землечерпалки, позначивши її через n, то продуктивність першої дорівнюватиме, з одного боку, $\frac{1}{12}-n$ і, з другого боку, $1,5\,n$. Маємо рівняння:

$$1,5n=\frac{1}{12}-n,$$

звідки $n=\frac{1}{30}$. Тоді продуктивність першої землечерпалки $\frac{1}{30}\cdot 1,5 = \frac{1}{20}$ (частин всієї роботи за день). Отже, перша землечерпалка всю роботу може виконати за 20 днів, а друга — за 30.

Другий спосіб. Ще простіше розв'язується ця задача, якщо ввести дві змінні.

Припустимо, що перша землечерпалка могла б виконати всю роботу за x днів, а друга — за y днів. Тоді перша за день виконає $\frac{1}{x}$ частину всієї роботи, а друга $\frac{1}{y}$ частину. Працюючи разом, вони за день виконають $\frac{1}{12}$ частину роботи. Отже,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}.$$

Крім того, в задачі сказано, що продуктивність першої землечерпалки в 1,5 раза вища від продуктивності другої. Маємо ще одне рівняння:

$$\frac{1}{x}=1,5\cdot\frac{1}{y}.$$

Розв'язавши систему цих двох рівнянь, дістанемо ту саму відповідь: $x = 20$ днів, $y = 30$ днів.

4. Цех заводу дістав замовлення виготовити до певного строку партію деталей. Якщо замовлення доручити першій бригаді, то вона закінчить роботу на три дні пізніше від строку. Друга бригада,

працюючи одна, могла б виконати замовлення на 8 днів пізніше від строку. Над виконанням замовлення працювали разом обидві бригади і закінчили роботу за день до строку. За скільки днів кожна бригада, працюючи одна, могла б виконати замовлення?

Розв'язання. Припустимо, що цех дістав замовлення виготовити n деталей за t днів. Тоді перша бригада могла виконати замовлення за $(t+3)$ днів, друга — за $(t+8)$, а обидві разом — за $(t-1)$ днів. Отже, за день перша бригада виготовляла $\frac{n}{t+3}$ деталей, друга — $\frac{n}{t+8}$, обидві бригади разом виготовляли $\frac{n}{t-1}$ деталей.

Маємо рівняння:

$$\frac{n}{t+3}+\frac{n}{t+8}=\frac{n}{t-1}, \text{ або } \frac{1}{t+3}+\frac{1}{t+8}=\frac{1}{t-1}.$$

Додатний корінь цього рівняння $t = 7$. Такий був строк виконання замовлення. Отже, перша бригада могла виконати все замовлення за 10 днів, а друга — за 15.

Зрозуміло, можна було б припустити, що першій бригаді на виконання всього замовлення треба x днів, тоді другій $(x+5)$ днів, а обом разом $(x-4)$ дні і т. д.

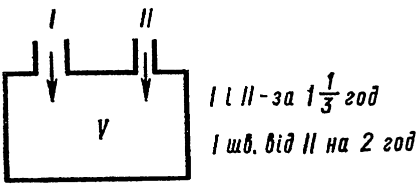
Слід звернути увагу учнів і на таке загальне твердження про спільну роботу. Якщо один виконавець роботи (робітник, трактор, бригада тощо) може виконати деяку роботу за a *год*, а другий — за b *год*, то, працюючи разом, вони можуть виконати цю роботу за $\frac{ab}{a+b}$ *год*.

Справді, за годину перший виконує $\frac{1}{a}$ частину роботи, а другий $\frac{1}{b}$, тому, працюючи разом, вони виконують за годину $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ частину роботи. Всю роботу вони виконують за $1:\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, або $\frac{ab}{a+b}$ *год*.

Якщо врахувати останнє співвідношення, задачу можна розв'язати простіше. Припустимо, що перша бригада може виконати завдання за x днів, тоді друга — за $(x+5)$ днів, а обидві разом — за $(x-4)$ днів. Отже, за сформульованим вище загальним твердженням можна відразу написати потрібне рівняння:

$$x-4=\frac{x(x+5)}{x+x+5}.$$

5. Водонапірний бак наповнюється двома трубами за 1 *год* 20 *хв*. Перша труба може наповнити його на 2 *год* швидше, ніж друга. За який час кожна труба окремо може наповнити бак?



Мал. 97.

На дошці умову задачі схематично зобразимо так, як показано на мал. 97. Скориставшись загальним твердженням про спільну роботу, задачу можна розв'язати дуже швидко.

Справді, якщо припустити, що перша труба наповнює бак за x *год*, то друга наповнить його за $(x + 2)$ *год*. Маємо рівняння:

$$1\frac{1}{3} = \frac{x(x+2)}{x+x+2},$$

додатний корінь якого $x = 2$. Отже, перша труба може наповнити бак за 2 *год*. Тоді друга наповнить його за 4 *год*.

З таким способом доцільно ознайомити учнів на заняттях математичного гуртка. Але треба, щоб вони вміли розв'язувати задачі цього виду, не використовуючи загального твердження про спільну роботу.

Розглядуваній задачі відповідає така таблиця:

Труби	Години	Швидкість	Об'єм
перша	на 2 швидше		V
друга			V
разом	$1\frac{1}{3}$		V

Користуючись такою таблицею, можна розв'язати задачу кількома способами.

Нехай перша труба наповнює бак за x *год*,
тоді друга » » » $x + 2$ *год*.

Через першу трубу за годину вливається $\frac{V}{x}$ *л*.

Через другу трубу » » » $\frac{V}{x+2}$ *л*.

Через обидві труби » » » $\left(\frac{V}{x} + \frac{V}{x+2}\right)$ *л*.

За умовою обидві труби наповнюють весь бак за 1 *год* 20 *хв*, або за $1\frac{1}{3}$ *год*. Отже, за годину через обидві труби вливається $\frac{V}{1\frac{1}{3}}$ *л*.

Маємо рівняння:

$$\frac{V}{x}+\frac{V}{x+2}=\frac{V}{1\frac{1}{3}}.$$

Розв'язавши це рівняння відносно x, дістанемо корені: $x_1 = 2$, $x = -1\frac{1}{3}$. Від'ємний корінь задачі не задовольняє.

Відповідь. Перша труба наповнює бак за 2 *год*, друга — за 4 *год*.

Можливе й таке міркування. Нехай весь бак (V *л*) перша труба наповнить за x *год*. Тоді через неї за годину ввіллється $\frac{V}{x}$ *л*, а за $1\frac{1}{3}$ *год* — $1\frac{1}{3}\cdot\frac{V}{x}$ *л*. Друга труба весь бак наповнить за $(x+2)$ *год*. Тоді за $1\frac{1}{3}$ *год* через неї ввіллється $1\frac{1}{3}\cdot\frac{V}{x+2}$ *л*. За $1\frac{1}{3}$ *год* через обидві труби разом увіллється V *л*. Отже,

$$1\frac{1}{3}\cdot\frac{V}{x}+1\frac{1}{3}\cdot\frac{V}{x+2}=V.$$

Маємо рівняння, рівносильне попередньому. Його додатний корінь $x = 2$.

Розв'яжемо цю задачу за допомогою системи рівнянь.

Нехай перша труба наповнить V *л* за x *год*, а друга — за y *год*. Тоді через першу трубу за годину ввіллється $\frac{V}{x}$ *л*, а через другу $\frac{V}{y}$ *л*. Маємо рівняння:

$$\frac{V}{x}+\frac{V}{y}=\frac{V}{1\frac{1}{3}}.$$

Друге рівняння випливає з того, що перша труба може наповнити весь бак на 2 *год* швидше, ніж друга:

$$y-x=2.$$

Розв'язавши систему цих двох рівнянь, дістанемо $x = 2$, $y = 4$. Отже, перша труба весь бак може наповнити за 2 *год*, а друга — за 4 *год*.

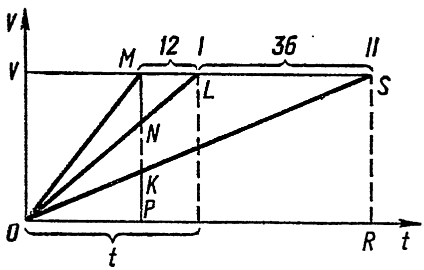
6. У басейн проведено дві труби. Якщо відкрити одночасно обидві труби, то вони наповнять басейн на 12 *хв* швидше, ніж одна перша, і на 48 *хв* швидше, ніж одна друга. За скільки хвилин може наповнити басейн кожна труба окремо?

Розв'язання. За умовою перша труба наповнює басейн на 36 *хв* швидше, ніж друга ($48 - 12 = 36$).

Нехай перша труба наповнить басейн за t *хв*, тоді друга наповнить його за $(t+36)$ *хв*; за хвилину перша наповнить $\frac{1}{t}$ частину басейну, друга $\frac{1}{t+36}$ частину, а обидві разом $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+36}$ частину. Весь басейн обидві труби разом наповнять за $1:\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+36}\right)=$ $=\frac{t(t+36)}{2t+36}$ *хв*. За умовою це число має бути на 12 менше від t, тобто

$$t-12=\frac{t(t+36)}{2t+36}.$$

Добуте рівняння має корені $t_1=36$, $t_2=-12$. Задачу задовольняє (перевірте!) додатне значення $t=36$.



Мал. 98.

Відповідь. Перша труба може наповнити басейн за 36 *хв*, а друга — за 72 *хв*.

Умові розглядуваної задачі відповідає мал. 98. За цим малюнком розв'яжемо її геометрично.

З подібності двох пар трикутників випливають такі пропорції:

$$\frac{|VO|}{|MN|}=\frac{|VL|}{|ML|},\quad \frac{|SR|}{|KP|}=\frac{|OR|}{|OP|}.$$

Але $|MN|=|PK|$, $|SR|=|VO|$, тому $\frac{|VL|}{|ML|}=\frac{|OR|}{|OP|}$. За умовою задачі $|VL|=t$, $|ML|=12$, $|OR|=t+36$, $|OP|=t-12$. Маємо рівняння:

$$\frac{t}{12}=\frac{t+36}{t-12},$$

додатний корінь якого $t=36$.

7. Одна труба може наповнити басейн на 36 *хв* швидше, ніж друга. Якщо спочатку половину басейну наповнить перша труба, а потім половину басейну друга, то басейн наповнюватиметься на півгодини довше, ніж при одночасній дії обох труб. За скільки хвилин може наповнити басейн кожна труба окремо?

Розв'язання. Припустимо, що перша труба може наповнити басейн за x *хв*, тоді друга наповнить його за $(x+36)$ *хв*. Половину басейну перша труба наповнить за $\frac{x}{2}$ *хв*, а друга — за $\frac{x+36}{2}$ *хв*. Якщо спочатку половину басейну наповнить перша труба, а потім половину — друга, то на це піде $\left(\frac{x}{2}+\frac{x+36}{2}\right)$ *хв*, або $(x+18)$ *хв*.

За хвилину перша труба наповнить $\frac{1}{x}$ частину басейну, а друга $\frac{1}{x+36}$ частину. Обидві труби разом за хвилину наповнять $\left(\frac{1}{x}+\right.$

$+ \frac{1}{x+36}\Big)$ частину басейну, а весь басейн — за $1:\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+36}\right)$ *хв*, або за $\frac{x(x+36)}{2x+36}$ *хв*.

Маємо рівняння:

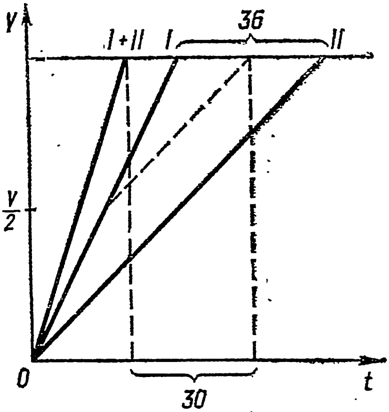
$$x + 18 - \frac{x(x+36)}{2x+36} = 30.$$

Розв'язавши його, дістанемо два корені: $x_1 = 36$, $x_2 = -12$. Від'ємний корінь задачу не задовольняє. Отже, перша труба може наповнити басейн за 36 *хв*, а друга — за 72 *хв*.

Перевірка. Перша труба за хвилину наповнить $\frac{1}{36}$ частину басейну, а друга — $\frac{1}{72}$. Тому обидві труби за хвилину наповнять $\frac{1}{36} + \frac{1}{72} = \frac{1}{24}$ частину басейну, а весь басейн вони наповнять за 24 *хв*. Перша труба наповнить пів-басейну за 18 *хв*, а друга — за 36 *хв*. $18 + 36 = 54$, $54 - 24 = 30$. Все відповідає задачі.

Відповідь. 36 *хв* і 72 *хв*.

У прямокутній системі координат цій задачі відповідає мал. 99.



Мал. 99.

Як бачимо, розглядувана задача аналогічна до попередньої. По суті, це і є попередня задача, тільки інакше сформульована.

Вище ми розв'язали три задачі на «басейни». Нагадаємо, що деякі методисти дуже критикували ці задачі, як непрактичні. Однак такі задачі не можна зовсім виключити з підручників з алгебри.

3. Задачі на рух

Попередні зауваження

Задачі на рух бувають багатьох видів. Здебільшого в них ідеться про три величини: швидкість, час і відстань. Є і такі задачі, в яких дано і треба знайти значення якоїсь однієї з цих величин.

1. Автомобіль за три дні проїхав 980 *км*. За перші два дні він проїхав 725 *км*. Скільки кілометрів проїжджав автомобіль кожного дня, якщо за другий день він проїхав на 123 *км* більше, ніж за третій?

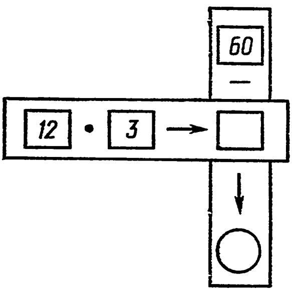
У цій задачі йде мова про одну величину — відстань. Час і швидкість тут не згадуються. Методику розв'язування аналогічних задач ми розглянули в попередньому параграфі. Хоч такі задачі також можна вважати задачами на рух, проте ми їх не розглядатимемо. У цьому параграфі йтиметься тільки про такі задачі, в процесі розв'язування яких доводиться використовувати залежність між швидкістю, часом і відстанню.

Деякі задачі на рух зручно розв'язувати арифметично. Це насамперед задачі з розв'язуваними співвідношеннями.

2. Від села до міста 60 *км*. Велосипедист їде від села до міста з швидкістю 12 *км/год*. На якій відстані від міста він буде через 3 *год* після виїзду із села?

Р о з в'я з а н н я. 1) Скільки кілометрів велосипедист проїде за 3 *год*? $12 \cdot 3 = 36$ (*км*).

2) На якій відстані від міста буде велосипедист через 3 *год*? $60 - 36 = 24$ (*км*).



Мал. 100.

За умовою задачі можна скласти і рівняння $x + 12 \cdot 3 = 60$, але перший спосіб природніший.

Умову цієї задачі можна проілюструвати малюнком 100. З нього добре видно, що задача має два співвідношення. Одне з них, а саме: $12 \cdot 3 = 36$, розв'язуване. Не складаючи ніяких рівнянь, можна відразу визначити, яке число треба написати всередині квадрата. Якщо визначимо цей результат, то стане розв'язуваним і друге співвідношення: $60 - 36 = 24$.

Такі задачі звичайно розв'язують у III і IV класах. У курсі алгебри пропонують учням складніші задачі на рух, в яких немає розв'язуваних співвідношень і, отже, які зручніше розв'язувати складанням рівнянь.

Задачі на рух поділяють на види залежно від того, скільки рухомих тіл розглядають в задачі і як вони рухаються: рівномірно чи нерівномірно, прямолінійно чи непрямолінійно тощо. Правда, в задачах часто не вказується на те, як рухається тіло — прямолінійно чи непрямолінійно, бо це іноді не має істотного значення. Наприклад, коли йде мова про рух автобуса на великій відстані, то не можна стверджувати, що автобус весь час їде прямолінійно. Проте, і в таких випадках використовують залежності між швидкістю, часом і відстанню, характерні для прямолінійного руху, розглядаючи тільки лінійну швидкість і вимірюючи відстані між пунктами не по прямій, а по довжині дороги.

Задачі на рух, аналогічні до тих, які є в підручниках з алгебри, учні розв'язують і на уроках фізики. Тому вчителі математики мають домовитися з учителями фізики про способи їх розв'язування, про вимоги до розв'язань тощо.

На уроках фізики, говорячи про рух тіла, часто підкреслюють відносно чого воно рухається. Не треба і на уроках математики забувати про відносність руху. Іноді, врахувавши її, можна значно спростити розв'язання задачі. Розглянемо, наприклад, відому задачу про плавця і флягу.

3. Плавець плив проти течії Неви. Біля Республіканського мосту загубив порожню флягу. Через 20 *хв* він помітив свою втрату і повернувся, щоб наздогнати флягу. Догнав він її біля мосту Лейтенанта Шмідта. Визначити швидкість течії Неви, якщо відстань між мостами 2 *км*.

Перший спосіб. Припустимо, що швидкість течії річки x *км/год*, а швидкість плавця в стоячій воді v *км/год*. Тоді за течією він плив із швидкістю $(v+x)$ *км/год*, а проти течії — з швидкістю $(v-x)$ *км/год*. Фляга пливла з швидкістю течії річки, тобто з швидкістю x *км/год*. Вона була на воді всього $\frac{2}{x}$ *год*. Проти течії плавець плив $\frac{1}{3}$ *год*, а за течією $\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{3}\right)$ *год*; проти течії він проплив $\frac{1}{3}(v-x)$ *км*, а за течією $\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{3}\right)(v+x)$ *км*. Маємо рівняння:

$$\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{3}\right)(v+x)-\frac{1}{3}(v-x)=2,$$

звідки

$$\frac{2}{3}v=\frac{2}{x}v,\ \ x=3\ (\textit{км/год}).$$

Другий спосіб. Позначення ті самі, що і в попередньому розв'язанні. Фляга пропливла 2 *км* за $\frac{2}{x}$ *год*. Проти течії плавець проплив $\frac{1}{3}(v-x)$ *км*, а за течією $\left(\frac{1}{3}(v-x)+2\right)$ *км*. Останню відстань він проплив за $\left(2+\frac{1}{3}(v-x)\right):(v+x)$ *год*. Отже,

$$\frac{2+\frac{1}{3}(v-x)}{v+x}+\frac{1}{3}=\frac{2}{x},$$

звідки

$$(2v+6)x=6(v+x),\ \ x=3\ (\textit{км/год}).$$

Третій спосіб. Припустимо, що плавець проти течії проплив s *км*. Отже, проти течії він плив з швидкістю $3s$ *км/год* $\left(s:\frac{1}{3}=3s\right)$. Якщо швидкість течії x *км/год*, то в стоячій воді плавець плив би з швидкістю $(3s+x)$ *км/год*, за течією $(3s+2x)$ *км/год*.

За течією він проплив всього $(2+s)$ *км*, витративши на це $\frac{2+s}{3s+2x}$ *год*. Маємо рівняння:

$$\frac{2+s}{3s+x}+\frac{1}{3}=\frac{2}{x}, \text{ або } x^2-3(1-s)x-9s=0.$$

Корені цього рівняння: $x_1=3$; $x_2=-3s$. Задачу задовольняє перший корінь.

Звертаємо увагу на той факт, що кожного разу ми складали рівняння з двома змінними, але одна з них «зникала» або не впливала на значення другої. І це не випадково, адже значення x не залежить від значення v. Виявляється, що задачу можна розв'язати набагато простіше і раціональніше, якщо не враховувати v. Але для цього треба добре зрозуміти фізичну суть описаної в задачі ситуації.

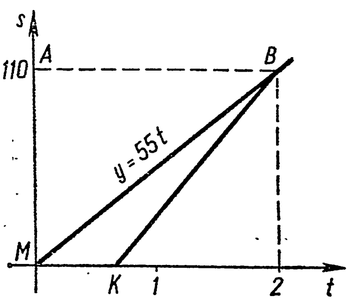
Четвертий спосіб. Течія діяла на флягу так само, як і на плавця. Розглянемо рух плавця відносно фляги. Оскільки він плив від неї $\frac{1}{3}$ *год*, то і до неї $\frac{1}{3}$ *год*; усього фляга була у воді $\frac{2}{3}$ *год*. Відомо, що за цей час вона перемістилася відносно берега на 2 *км*. Отже, швидкість течії

$$2:\frac{2}{3}=3\ (км/год).$$

Саме так розв'язують аналогічні задачі на уроках фізики. Учитель математики не повинен уникати застосування такого способу.

Крім того, на уроках фізики багато задач на рух розв'язують графічно. Бажано й на уроках математики хоч кілька задач на рух розв'язати графічно.

Розглянемо одну задачу, що є в багатьох методичних посібниках з фізики.



Мал. 101

4. З Москви до Хабаровська вирушає швидкий поїзд, а через 40 *хв* слідом на ним виїжджає автомобіль з пасажиром, що відстав від поїзда. З якою швидкістю має їхати автомобіль, щоб наздогнати поїзд на станції Александров, розташованій на відстані 110 *км* від Москви? Швидкість руху поїзда 55 *км/год*, а довжина залізничної колії така сама, як і автотраси.

Графічно цю задачу можна розв'язати так. Побудуємо прямокутну систему координат, на осі абсцис якої відкладемо час руху в годинах, а на осі ординат — відстань в кілометрах (мал. 101). Побудуємо в цій системі координат графік руху поїзда за рівнянням $s = 55t$. Позначимо на графіку точку з ординатою, що дорівнює 110. Через цю точку і має проходити графік руху автомобіля. Крім того, відомо, що автомобіль виїхав через 40 *хв* $= \frac{2}{3}$ *год* після початку руху поїзда. Отже, точка K ($\frac{2}{3}$; 0) також має належати графікові руху автомобіля. Відрізок KB і є графіком його руху. Щоб знайти швидкість руху автомобіля, треба поділити ординату точки B (110) на різницю абсцис точок B і K ($1\frac{1}{3}$ *год*). Дістанемо:

$$v = 110 : \frac{4}{3} \approx 83 \quad (км/год).$$

«Алгебраїчно» такі задачі у фізиці часто розв'язують не так, як на уроках алгебри (див. Іванов О. С. Задачі з фізики в середній школі. К., «Радянська школа», 1971, стор. 62).

$$s = 110\ км;\ t = 40 хв = \frac{2}{3}\ год,\ v_п = 55\ км/год;\ v_{ав} — ?$$

Час руху автомобіля:

$$t_{ав} = t_п - t.$$

Швидкість, з якою має їхати автомобіль:

$$v_{ав} = \frac{s}{t_{ав}}.$$

Час руху поїзда:

$$t_п = \frac{s}{v_п}.$$

Підставивши добуті дані у вихідну формулу, матимемо:

$$v_{ав} = \frac{s}{\frac{s}{v_п} - t}.$$

Обчислимо швидкість, з якою має їхати автомобіль:

$$v_{ав} = \frac{110}{\frac{110}{50} - \frac{2}{3}},\quad v_{ав} \approx 83\ км/год.$$

Отже, автомобіль має їхати із швидкістю, не меншою, ніж 83 *км/год*.

На уроках алгебри такі задачі прийнято розв'язувати за допомогою рівняння з однією змінною: учителі вважають недоцільним вводити так багато різних позначень (s, $v_{ав}$, $v_п$, $t_{ав}$, $t_п$, t).

Нехай шукана швидкість автомобіля x *км/год*. Тоді відстань 110 *км* поїзд проїде за 2 *год*, а автомобіль за $\frac{110}{x}$ *год*. У задачі сказано, що автомобіль виїхав на $\frac{2}{3}$ *год* пізніше, ніж поїзд, тому

$$\frac{110}{x} + \frac{2}{3} = 2,$$

звідки

$$x = \frac{330}{4} \approx 83 \ (км/год).$$

Зрозуміло, якщо учень розв'яже задачу так, як прийнято у фізиці, знижувати йому оцінку не слід.

На уроках алгебри учням найчастіше доводиться розв'язувати задачі на прямолінійний рівномірний рух. У цих задачах йдеться: а) про одне рухоме тіло; б) про два рухомих тіла, в) про три рухомих тіла і т. ін. У такій послідовності розглянемо методику розв'язування цих задач.

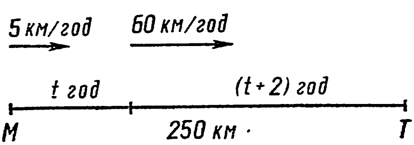
Задачі про одне рухоме тіло

Задачі про одне рухоме тіло досить різноманітні. Рухоме тіло може змінювати швидкість на різних ділянках руху, змінювати напрям руху на протилежний. Його можуть затримати в дорозі тощо.

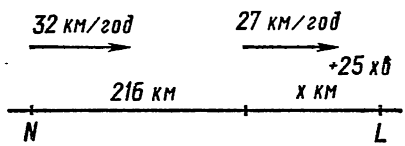
1. Турист вийшов з міста і прибув на турбазу, що знаходиться на відстані 250 *км* від міста. Частину шляху він ішов із швидкістю 5 *км/год*, а решту проїхав автомобілем із швидкістю 60 *км/год*, причому автомобілем він їхав на 2 *год* довше, ніж ішов. Скільки всього годин турист був у дорозі?

Схематично задачу можна зобразити так, як показано на мал. 102. Припустимо, що турист ішов пішки t *год*. Тоді він їхав на автомобілі $(t+2)$ *год*; пройшов він $5t$ *км*, а проїхав $60(t+2)$ *км*. Сума цих відстаней дорівнює 250 *км*. Маємо рівняння:

$$5t + 60(t+2) = 250,$$



Мал. 102.



Мал. 103.

звідки $t = 2$. Отже, турист ішов пішки 2 *год*, їхав машиною 4 *год*, а всього в дорозі був 6 *год*.

Є багато інших варіантів розв'язування цієї задачі. Можна було б припустити, що турист на машині їхав t *год*, а йшов пішки $(t - 2)$ *год* і т. д. Можна загальну кількість годин, протягом яких турист був у дорозі, позначити через t і поділити t на дві частини, з яких одна менша за другу на 2. $\frac{t-2}{2}$ і $\frac{t+2}{2}$ — шукані частини. В цьому випадку маємо рівняння.

$$5\left(\frac{t}{2} - 1\right) + 60\left(\frac{t}{2} + 1\right) = 250,$$

корінь якого $t = 6$ (*год*).

Якби за невідоме взяли відстань s, яку турист пройшов пішки, дістали б рівняння $\frac{250-s}{60}-\frac{s}{5}=2$, звідки $s=10$ *км*. Отже, пішки турист ішов $\frac{10}{5}=2$ (*год*), їхав $2+2=4$ (*год*), а всього був у дорозі $2+4=6$ (*год*).

Є й інші способи розв'язування цієї задачі, але найкращий з них перший.

2. Теплохід вийшов з порту N у порт L з швидкістю 32 *км/год*. На відстані 216 *км* від порту N він потрапив у шторм і повинен був зменшити швидкість на 5 *км/год*. У результаті теплохід прибув у порт L із запізненням на 25 *хв*. Яка відстань між N і L?

Розв'язання (мал. 103). Нехай теплохід пройшов відстань x *км* з швидкістю $32-5=27$ (*км*). Він мав витрати $\frac{x}{27}$ *год*, а витратив $\frac{x}{32}$ *год* і запізнився на 25 *хв* $=\frac{5}{12}$ *год*. Отже,

$$\frac{x}{27}-\frac{x}{32}=\frac{5}{12}, \qquad (*)$$

звідки $x=72$ (*км*). Відстань між N і L дорівнює $216+72=288$ (*км*).

Це розв'язання найпростіше, хоч у ньому не відразу знайдено всю відстань, як корінь рівняння. Якби за невідоме ми взяли всю шукану відстань s, дістали б рівняння:

$$\frac{s-216}{27}-\frac{s-216}{32}=\frac{5}{12},$$

яке складніше від рівняння (*).

3. Електровоз мав пройти 840 *км*. На середині шляху він був затриманий на 20 *хв*, тому, щоб прибути своєчасно, збільшив свою швидкість на 6 *км/год*. Скільки часу витратив електровоз на весь шлях?

Ця задача багато в чому подібна до попередньої. Тільки в попередній відома швидкість і невідома відстань, а в цій задачі відомі значення відстані. Тому дану задачу слід розглядати в VII класі, коли учні вмітимуть розв'язувати квадратні рівняння, а попередню можна пропонувати в VI класі.

Розв'язують цю задачу багатьма способами. Розглянемо тільки один спосіб, що випливає з такої таблиці:

Половини шляху	Швидкість	Час	Відстань
перша			420
друга	на 6 більше		420

Маємо рівняння:

$$\frac{420}{t-\frac{1}{3}}-\frac{420}{t}=6,$$

додатний корінь якого $t=5$. На весь шлях електровоз витратив $2t=10$ *год*.

4. Автотурист, виїхавши ранком з деякою швидкістю, передбачав до 12 *год* дня проїхати 420 *км*. Перші дві години він їхав з наміченою швидкістю, а потім, збільшивши її на 5 *км/год*, проїхав до призначеного строку 445 *км*. О котрій годині виїхав автотурист?

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Припустимо, що турист до 12 *год* повинен бути в дорозі x *год*. В цей час він мав їхати із швидкістю $\frac{420}{x}$ *км/год*. З такою швидкістю він їхав 2 *год*, отже, проїхав всього $2\cdot\frac{420}{x}$ *км*. Потім він їхав $(x-2)$ *год* із швидкістю $\left(\frac{420}{x}+5\right)$ *км/год* і проїхав за цей час $\left(\frac{420}{x}+5\right)(x-2)$ *км*. Всього до 12 *год* він проїхав 445 *км*.
Отже,

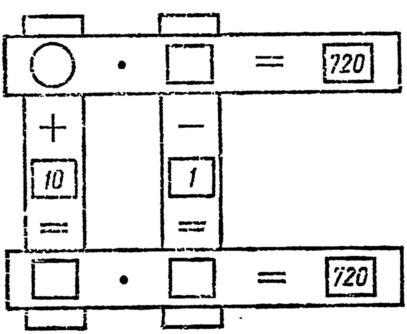
$$2\cdot\frac{420}{x}+\left(\frac{420}{x}+5\right)(x-2)=445,$$

звідки $x=7$ *год*. Таким чином, до 12 *год* турист був у дорозі 7 *год*. А це означає, що виїхав він о 5 *год* ранку.

Д р у г и й с п о с і б. Нехай спочатку автотурист їхав із швидкістю v *км/год*, маючи на меті проїхати 420 *км* за t *год*. Потім із швидкістю $(v+5)$ *км/год* він їхав ще $(t-2)$ *год*. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} vt=420, \\ 2v+(v+5)(t-2)=445. \end{cases}$$

Це — система рівнянь другого степеня, але вона легко зводиться до лінійного рівняння $5t=35$, звідки $t=7$ *год* і т. д.



Мал. 104.

5. Підвищивши швидкість поїзда на 10 *км/год*, вдалося скоротити на одну годину час, що його витрачає він на проходження шляху в 720 *км*. Визначте початкову швидкість поїзда.

За допомогою стрічкової діаграми описану в задачі ситуацію можна подати, як показано на мал. 104. Маємо 4 співвідношення, причому жодне з них нерозв'язне (див. стор. 194). Тому розв'язувати цю задачу треба за допомогою рівняння чи системи рівнянь.

Нехай початкова швидкість поїзда x *км/год*. Тоді він мав проїхати відстань 720 *км* за $\frac{720}{x}$ *год*. Він проїхав цю відстань за $\frac{720}{x+10}$ *год* з швидкістю $(x+10)$ *км/год*, зекономивши 1 *год*. Отже,

$$\frac{720}{x}-\frac{720}{x+10}=1.$$

Розв'язавши це рівняння, дістанемо два корені: $x_1 = -90$ і $x_2 = 80$. Перший корінь задачу не задовольняє. Перевіримо, чи задовольняє її другий корінь.

Якщо початкова швидкість поїзда 80 *км/год*, то відстань 720 *км* він проїде за $\frac{720}{80} = 9$ (*год*). Якщо швидкість поїзда збільшиться на 10 *км/год*, тобто дорівнюватиме 90 *км/год*, то цю саму відстань він проїде за $\frac{720}{90} = 8$ (*год*). А 9 *год* — 8 *год* = 1 *год*.

В і д п о в і д ь. Початкова швидкість поїзда 80 *км/год*.

Цю задачу можна розв'язати й іншим способом. Наприклад, позначивши через t час, протягом якого поїзд проїде з початковою швидкістю відстань 720 *км*, дістанемо рівняння $\frac{720}{t-1}-\frac{720}{t}=10$, додатний корінь якого $t = 9$ *год*. Поділивши 720 *км* на 9 *год*, дістанемо початкову швидкість поїзда.

Неважко розв'язати цю задачу і за допомогою системи рівнянь з двома змінними.

Позначивши початкову швидкість через v, а час руху поїзда при цій швидкості через t, дістанемо систему:

$$\begin{cases} vt = 720, \\ (v+10)(t-1) = 720. \end{cases}$$

Це — система двох рівнянь, кожне з яких другого степеня. Розв'яжемо її відносно v. Перемножимо двочлени в другому рівнянні і віднімемо від другого рівняння перше. Дістанемо: $t = \frac{v}{10} - 1$. Підставивши це значення у перше рівняння, матимемо рівняння $v^2 - 10v - 7200 = 0$, додатний корінь якого $v = 80$.

6. Швидкий поїзд за розкладом мав пройти перегін AB без зупинки за 4 *год*. Однак на відстані 150 *км* від A його було затримано на 20 *хв*. Щоб прибути на станцію B за розкладом, він пройшов решту шляху із швидкістю, більшою від початкової на 15 *км/год*. Знайдіть довжину перегону AB.

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Позначимо довжину перегону через l (*км*). Поїзд мав рухатися із швидкістю $\frac{l}{4}$ *км/год*. Після зупинки він рухався із швидкістю $\left(\frac{l}{4}+15\right)$ *км/год*. Отже, до зупинки він проїхав $150:\frac{l}{4}$, або $\frac{600}{l}$ *год*, а після зупинки $(l-150):\left(\frac{l}{4}+15\right)$, або $\frac{4(l-150)}{l+60}$ *год*. Всього він їхав $\frac{11}{3}$ *год*. Отже,

$$\frac{600}{l}+\frac{4(l-150)}{l+60}=\frac{11}{3},$$

звідки

$$l^2-660l+108000=0,$$
$$l_1=300,\ l_2=360.$$

Перевірка показує, що обидва значення довжини AB задачу задовольняють.

Відповідь. 300 *км* або 360 *км*.

Другий спосіб. Припустимо, що поїзд мав їхати із швидкістю v *км/год*. Тоді вся відстань від A до B дорівнює $4v$ *км*. Після зупинки йому залишилося проїхати відстань $(4v-150)$ *км* із швидкістю $(v+15)$ *км/год*. Відомо, що він витратив на це на $\frac{1}{3}$ *год* менше, ніж коли б їхав із швидкістю v *км/год*. Маємо рівняння:

$$\frac{4v-150}{v}-\frac{4v-150}{v+15}=\frac{1}{3},$$

звідки

$$v^2-165v+6750=0,$$
$$v_1=75,\quad v_2=90.$$

Отже, довжина перегону дорівнює $4v_1=300$ *км*, або $4v_2=$ $=360$ *км*.

7. Мотоцикліст проїхав відстань від пункту M до пункту N за 5 *год*. Виїхавши в зворотному напрямі, він перших 36 *км* їхав з тією самою швидкістю, а решту (більшу частину шляху) проїжджав із швидкістю, більшою від початкової на 3 *км/год*. З якою швидкістю їхав мотоцикліст з M до N, якщо на зворотний шлях він витратив на 15 *хв* менше?

Розв'язання. Припустимо, що спочатку мотоцикліст їхав із швидкістю v *км/год*. Тоді вся відстань від M до N мала $5v$ *км*. У зворотному напрямі перші 36 *км* він проїхав за $\frac{36}{v}$ *год*, а решту $(5v-36)$ *км* шляху за $\frac{5v-36}{v+3}$ *год*. На весь шлях від N до M він витратив $\frac{19}{4}$ *год*. Отже,

$$\frac{36}{v}+\frac{5v-36}{v+3}=\frac{19}{4},$$

звідки

$$v^2-57v+432=0,$$
$$v_1=9,\ v_2=48.$$

Обидва корені додатні, і якби в задачі не було сказано, що решта шляху більша, можна було б вважати, що задача має два розв'язки. Насправді $v_1 = 9$ *км/год* не відповідає умові, бо тоді б весь шлях від M до N становив $9 \cdot 5 = 45$ *км*. А в задачі сказано, що 36 *км* — менша частина шляху. Отже, весь шлях має більш як 72 *км*.

Відповідь. Мотоцикліст їхав із швидкістю 48 *км/год*.

8. Шлях між пунктами A і B складається з підйому і спуску. Велосипедист, рухаючись на спуску із швидкістю, на 6 *км/год* більшою, ніж на підйомі, проходить шлях від A до B за 2 *год* 40 *хв*, а зворотний, від B до A, на 20 *хв* швидше. Визначте швидкість велосипедиста на підйомі і спуску та довжину підйому в напрямі від A до B, якщо довжина всього шляху дорівнює 36 *км*.

Розв'язання. Якщо позначити швидкість велосипедиста на підйомі через v, а довжину підйому від A до B через x, то за умовою задачі можна скласти таку таблицю.

Рух велосипедиста		Швидкість	Час	Відстань
від A до B	підйом	v	$2\frac{2}{3}$	x
	спуск	$v+6$		$36-x$
від B до A	підйом	v	$2\frac{1}{3}$	$36-x$
	спуск	$v+6$		x

З цієї таблиці випливає така система рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x}{v} + \frac{36-x}{v+6} = 2\frac{2}{3}, \\ \frac{36-x}{v} + \frac{x}{v+6} = 2\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Виконавши відповідні спрощення, дістанемо:

$$\frac{36}{v+6} + \frac{36}{v} = 5,$$

звідки $v_1 = 12$, $v_2 = -\frac{18}{5}$. Від'ємний корінь задачу не задовольняє, тому $v = 12$ *км/год*. Підставивши це значення v в яке-небудь рівняння системи, наприклад в перше, дістанемо:

$$\frac{x}{12} + \frac{36-x}{18} = \frac{8}{3},$$

звідки $x = 24$ (*км*).

В і д п о в і д ь. Швидкість велосипедиста на підйомі 12 *км/год*, на спуску 18 *км/год*, довжина підйому від A до B 24 *км*.

Розв'яжемо цю задачу, не складаючи системи рівнянь. Міркуватимемо так.

Позначимо швидкість велосипедиста на підйомі через v, тоді його швидкість на спуску буде $(v+6)$ *км/год*. Всього від A до B і від B до A велосипедист проїхав 36 *км* на підйомі і стільки ж на спуску. Весь цей шлях він пройшов за 5 *год*. Отже,

$$\frac{36}{v}+\frac{36}{v+6}=5.$$

Додатний корінь цього рівняння $v = 12$ (*км/год*),— це швидкість велосипедиста на підйомі, його швидкість на спуску на 6 *км/год* більша, тобто 18 *км/год*.

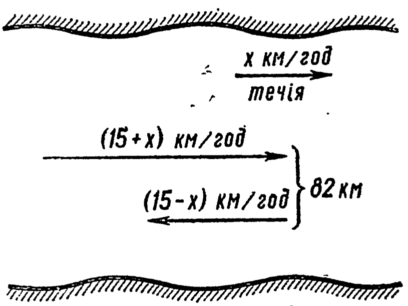
Залишається визначити довжину підйому в напрямі від A до B. Позначивши цю довжину через x, дістанемо ще одне лінійне рівняння:

$$\frac{x}{12}+\frac{36-x}{18}=2\frac{1}{3},$$

звідки $x = 24$ (*км*).

Задачі на рух тіла при наявності течії

Велику групу становлять задачі на рух тіла при наявності течії (води або вітру). Зрозуміло, перед тим як розв'язувати такі задачі, бажано з'ясувати, що будь-яке тіло наприклад, катер, рухається за течією річки із швидкістю, яка дорівнює сумі його власної швидкості та швидкості течії річки, і т. д.



Мал. 105.

1. Човен плив 4 *год* проти течії, а потім 2 *год* за течією. Всього він пройшов 82 *км*. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість човна в стоячій воді 15 *км/год*.

У IV класі зміст таких задач доцільно унаочнювати (див. мал. 105). Пізніше треба пояснити учням, що замість руху тіла «туди і назад» можна розглядати його рух в одному напрямі, тільки з різними швидкостями. Задача від цього не зміниться.

Р о з в'я з а н н я. Нехай швидкість течії річки x *км/год*, тоді швидкість човна за течією $(15+x)$ *км/год*, а проти течії $(15-x)$ *км/год*. За 4 *год* човен проплив проти течії $(15-x)\cdot 4$ *км*, а за 2 *год* — $(15+x)\cdot 2$ *км* за течією. Відомо, що всього він проплив 82 *км*. Отже,

$$(15-x)\cdot 4+(15+x)\cdot 2=82.$$

Розв'язавши рівняння, дістанемо: $x = 4$.

Перевірка. $15+4=19$ (*км/год*), $19 \cdot 2 = 38$ (*км*), $15-4= = 11$ (*км/год*), $11 \cdot 4 = 44$ (*км*), $38+44=82$ (*км*).

Відповідь. Швидкість течії річки 4 *км/год*.

2. Швидкість катера в стоячій воді відноситься до швидкості течії річки, як 25 : 2. За течією річки катер рухався 7 *год* 40 *хв*. Скільки часу потрібно йому, щоб повернутися назад?

Розв'язання. Нехай швидкість катера в стоячій воді $25v$, тоді швидкість течії $2v$. Отже, за течією катер рухався із швидкістю $27v$, а проти течії — із швидкістю $23v$ (все в кілометрах за годину). Припустимо, що катер повернувся назад за x *год*. Тоді

$$7\frac{2}{3} \cdot 27v = 23v \cdot x,$$

звідки $x = \frac{23 \cdot 27}{3 \cdot 23}$, $x = 9$ (*год*).

Можна розв'язати задачу, враховуючи, що тривалість руху катера на тій самій відстані обернено пропорційна до його швидкості:

$$7\frac{2}{3} : x = 23v : 27v.$$

3. Турист на байдарці розвиває в стоячій воді швидкість 6,5 *км/год*. Одного разу він вирішив проплавти річкою від пункту C до пункту D і повернутися назад за певний час. Не врахувавши швидкості течії, яка дорівнювала 1,5 *км/год*, він витратив на весь маршрут на 27 *хв* більше, ніж передбачав. Чому дорівнює відстань від C до D?

Розв'язання.

Перший спосіб. Припустимо, що шукана відстань від C до D становить a *км*.

Отже, турист мав намір подолати $2a$ *км* за $\frac{2a}{6,5}$ *год*, хоч насправді він зробив це за $\frac{2a}{6,5} + \frac{9}{20}$ *год*.

За течією він плив із швидкістю 8 *км/год*, а проти течії — із швидкістю 5 *км/год*, тобто усього плив $\left(\frac{a}{8} + \frac{a}{5}\right)$ *год*. Отже, маємо таке рівняння:

$$\frac{2a}{6,5} + \frac{9}{20} = \frac{a}{8} + \frac{a}{5}.$$

Розв'язавши його, дістанемо $a = 26$ (*км*).

Другий спосіб. Якби відстань CD дорівнювала 1 *км*, то турист витратив би часу на $\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6,5}\right)$ *год*, або $\frac{27}{26}$ *хв* більше, ніж передбачав. Насправді він витратив більше на 27 *хв*, тобто у 26 раз більше, ніж $\frac{27}{26}$ *хв*, тому й відстань CD у 26 раз більша, ніж 1 *км*, тобто становить 26 *км*.

Наведеним вище способом, так званим способом подібності, раніше користувалися досить часто. Тепер на уроках його можна не розглядати, але в позаурочний час бажано ознайомити з ним учнів.

4. Моторний човен пройшов 28 *км* за течією річки і 25 *км* проти течії, витративши на весь шлях стільки часу, скільки йому треба було б на проходження 54 *км* у стоячій воді. Знайдіть швидкість моторного човна в стоячій воді, якщо відомо, що швидкість течії 2 *км/год*.

Ця задача розв'язується багатьма способами. Наведемо найпростіший з них.

Розв'язання.

Складемо таку таблицю:

Рух човна	Швидкість	Час	Відстань
в стоячій воді	v	t_1+t_2	54
за течією	$v+2$	t_1	28
проти течії	$v-2$	t_2	25

З умови задачі випливає рівняння

$$\frac{28}{v+2}+\frac{25}{v-2}=\frac{54}{v},$$

$$v^2+6v-216=0,$$

корені якого $v_1=12$, $v_2=-18$. (Від'ємний корінь задачі не задовольняє).

Відповідь. $v=12$ *км/год*.

5. Пароплав проплив 100 *км* за течією річки і 64 *км* проти течії за 9 *год*. Іншим разом, рухаючись з тією самою швидкістю, за той самий час він проплив 80 *км* за течією і 80 *км* проти течії. Визначте швидкість пароплава в стоячій воді і швидкість течії річки.

Розв'язання. Позначимо швидкість пароплава в стоячій воді через x, а швидкість течії через y. Складемо таблицю.

Етапи	Напрям руху	Відстань (*км*)	Швидкість (*км/год*)	Час (*год*)	Витрачено часу (всього *год*)
Перший	за течією	100	$x+y$	$\frac{100}{x+y}$	9
	проти течії	64	$x-y$	$\frac{64}{x-y}$	
Другий	за течією	80	$x+y$	$\frac{80}{x+y}$	9
	проти течії	80	$x-y$	$\frac{80}{x-y}$	

Маємо систему

$$\begin{cases} \frac{100}{x+y} + \frac{64}{x-y} = 9, \\ \frac{80}{x+y} + \frac{80}{x-y} = 9, \end{cases}$$

звідки $x = 18$, $y = 2$.

Відповідь. Швидкість пароплава в стоячій воді 18 *км/год*; швидкість течії річки 2 *км/год*.

Розглянемо арифметичний спосіб розв'язування цієї задачі. Іншим разом пароплав за той самий час проплив за течією на 20 *км* менше, проти течії — на 16 *км* більше. Отже, за той самий час він пропливав 20 *км* за течією і 16 *км* проти течії. Тому за той самий час він пропливав 100 *км* за течією і 80 *км* проти течії, тобто 144 *км* проти течії він пропливав за 9 *год*. Виходить, проти течії він плив із швидкістю 16 *км/год*. 180 *км* за течією він пропливав також за 9 *год*. Отже, за течією він плив із швидкістю 20 *км/год*.

Тепер можна знайти швидкість пароплава в стоячій воді:

$$(20 + 16) : 2 = 18 \quad (\text{км/год}),$$

а швидкість течії річки

$$(20 - 16) : 2 = 2 \ (\text{км/год}).$$

Таке розв'язування важке для учнів. Його слід розглянути на заняттях математичного гуртка.

Розглянемо ще одну не зовсім визначену задачу.

6. Пароплав за 4 *год* пройшов 24 *км* в одному напрямі і 20 *км* у протилежному. Визначте швидкість течії річки, якщо власна швидкість пароплава 12 *км/год*.

Р о з в'я з а н н я. Позначимо швидкість течії річки через x (в *км/год*). Припустимо, що спочатку пароплав ішов за течією, дістанемо рівняння:

$$\frac{24}{12+x}+\frac{20}{12-x}=4.$$

Воно має два корені: 4 і —3.

Стверджувати, що задача має один розв'язок, можна тільки тоді, коли б напевне було відомо, що пароплав спочатку йшов за течією. Якщо спочатку він ішов проти течії, треба скласти інше рівняння:

$$\frac{24}{12-x}+\frac{20}{12+x}=4,$$

яке має корені $x_1=-4$ і $x_2=3$.

В і д п о в і д ь. Швидкість течії річки 4 *км/год*, якщо спочатку пароплав ішов за течією, або 3 *км/год*, якщо спочатку пароплав ішов проти течії.

Розв'язуючи цю задачу, можна й не розглядати двох різних випадків і не складати двох рівнянь, а вважати швидкість течії додатною, якщо її напрям збігається з напрямом руху пароплава, і від'ємною, якщо ці напрями протилежні. Тоді додатний корінь рівняння $\frac{24}{12+x}+\frac{20}{12-x}=4$, відповідає тому випадку, коли пароплав спочатку йшов за течією річки. Якщо спочатку він ішов проти течії, то швидкість течії дорівнювала 3 *км/год*.

Задачі на рух двох тіл у протилежних напрямах

Задачі на рух тіл бувають досить різноманітні. Іноді в них напрям руху тіл не відіграє істотної ролі. Наведемо приклад.

1. Швидкість одного літака на 100 *км/год* більша від швидкості другого. Перший літак пролітає 980 *км* на 0,4 *год* довше, ніж другий пролітає 600 *км*. Визначте швидкість обох літаків.

Р о з в'я з а н н я.

Нехай швидкість першого літака x *км/год*.

Тоді швидкість другого літака $(x-100)$ *км/год*.

Перший пролітає 980 *км* за $\frac{980}{x}$ *год*.

Другий — 600 *км* за $\frac{600}{x-100}$ *год*.

Маємо рівняння:

$$\frac{980}{x}-\frac{600}{x-100}=0{,}4.$$

Розв'язавши його, дістанемо $x=700$ і $x=350$.

В і д п о в і д ь. Задача має два розв'язки: 1) швидкість першого літака 700 *км/год*, а другого 600 *км/год*; 2) швидкість першого літака 350 *км/год*, а другого 250 *км/год*.

Далі розглядатимемо тільки такі задачі на рух двох тіл, в яких напрям руху відіграє істотну роль. Почнемо із задач про тіла, які рухаються в протилежних напрямах. У методичній літературі їх часто не зовсім вдало називають задачами «на зустрічний рух». Справді, зустрічний рух означає зближення рухомих тіл з часом, а рух в протилежних напрямах і їх віддалення. У школі найчастіше розглядають задачі на рух тіл, які зближаються, зустрічаються.

Перед розв'язуванням задач цього типу бажано нагадати учням такі відомості про рухомі тіла.

1. Якщо тіла одночасно почали рухатися назустріч одне одному, то до моменту зустрічі вони перебували в русі однаковий час.

2. Сума відстаней, пройдених обома тілами до зустрічі, дорівнює загальній відстані між пунктами, з яких вийшли ці тіла.

3. За одиницю часу тіла зближаються на відстань, що чисельно дорівнює сумі їх швидкостей.

Щоб раціоналізувати розв'язання багатьох задач, бажано ввести поняття «швидкість зближення».

Швидкість зближення двох тіл, які рухаються назустріч одне одному, дорівнює сумі їх швидкостей. Якщо тіла до зустрічі йшли однаковий час, то швидкість їх зближення визначають, поділивши всю пройдену ними відстань на час.

2. З двох сіл назустріч один одному вийшли два пішоходи і зустрілися через 4 *год*. Відстань між селами 36 *км*. Швидкість одного пішохода 4 *км/год*. Яка швидкість другого пішохода?

Арифметично ця задача розв'язується на три або на дві (введенням поняття швидкості зближення) дії.

1) Чому дорівнює швидкість зближення пішоходів?

$$36 : 4 = 9 \ (\textit{км/год}).$$

2) З якою швидкістю ішов другий пішохід?

$$9 - 4 = 5 \ (\textit{км/год}).$$

Можна скористатися поняттям «швидкість зближення» і під час розв'язування цієї задачі за допомогою рівняння.

Нехай шукана швидкість другого пішохода x *км/год*. Тоді за годину пішоходи зближаються на $(x + 4)$ *км*. Отже, $(x + 4) \times 4 = 36$, звідки $x = 5$ (*км/год*).

Можливе й таке міркування.

Припустимо, що перший пішохід ішов з швидкістю x *км/год*. За 4 *год* він пройшов $4x$ *км*. Маємо рівняння: $4x + 16 = 36$ і т. д.

Отже, вводячи поняття швидкості зближення, ми значно спрощуємо розв'язування задач.

Розглянемо тепер задачі на рух двох тіл, що віддаляються одне від одного.

3. З однієї станції вийшов поїзд з швидкістю 48 *км/год*. Через 2 *год* з тієї самої станції в протилежному напрямі вийшов другий поїзд. Через 3 *год* після його виходу відстань між поїздами стала 402 *км*. Знайдіть швидкість другого поїзда.

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Перший поїзд був у дорозі $2 + 3 = 5$ (*год*). За цей час він пройшов $48 \cdot 5$ (*км*). Нехай швидкість другого поїзда x (*км/год*). За 3 *год* він пройшов $3x$ *км*. Відомо, що поїзди віддалилися один від одного на 402 *км*. Отже,

$$3x + 48 \cdot 5 = 402,$$

звідки $x = 54$ (*км/год*).

Д р у г и й с п о с і б. Припустимо, що швидкість другого поїзда x (*км/год*). Щогодини поїзди віддалялися один від одного на $(x + 48)$ *км*, а за 3 *год* вони віддалилися на $3 \cdot (x + 48)$ *км*. Крім того, перший поїзд за 2 *год* проїхав 96 *км*. Отже,

$$3 \cdot (x + 48) + 96 = 402,$$

звідки $x = 54$ (*км/год*).

Більшість задач на рух аналогічна до задач на роботу.

4. З двох станцій одночасно виходять назустріч один одному два поїзди: перший поїзд може пройти відстань між станціями за 5 *год*, а другий — за 7 *год*. Через скільки годин після виходу поїзди зустрінуться?

Ця задача аналогічна до такої.

5. Одна бригада може виконати деяку роботу за 5 *год*, а друга — за 7 *год*. За скільки годин можуть виконати цю роботу обидві бригади, працюючи разом?

З а д а ч а н а р у х

За годину перший поїзд пройде $\frac{1}{5}$, а другий $\frac{1}{7}$ частину відстані між станціями, отже, за цей час вони зблизяться на $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{12}{35}$ цієї відстані, а зустрінуться через $\frac{35}{12}$ *год*, або 2 *год* 55 *хв*.

З а д а ч а н а р о б о т у

За годину перша бригада виконає $\frac{1}{5}$, а друга $\frac{1}{7}$ частину роботи. Працюючи разом, вони за годину виконають $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{12}{35}$ частину роботи, а всю роботу — за $\frac{35}{12}$ *год*, або за 2 *год* 55 *хв*.

Кожна з цих задач розв'язується й графічно. На мал. 106 подано графіки руху першого і другого поїздів, яким відповідають рівняння

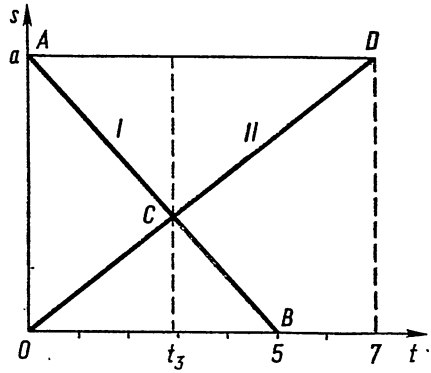
$$s = \frac{a}{7}t \text{ і } s = -\frac{a}{5}t + a,$$

де $-a$ — відстань між станціями. Прирівнявши праві частини цих рівностей, дістанемо:

$$\frac{a}{7}t = -\frac{a}{5}t + a,$$

$t = \frac{35}{12}$ — час, протягом якого поїзди їхали до зустрічі.

Можна не записувати рівняння графіків, а врахувати, що трикутники OCB і ACD подібні. Тоді $t : (7 - t) = 5 : 7$, звідки $t = \frac{35}{12}$ (*год*).



Мал. 106.

Користуючись аналогічним малюнком, розв'яжемо і сформульовану вище задачу на роботу.

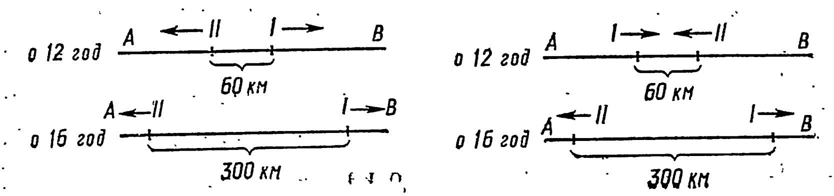
Кожна з цих задач розв'язується також за формулою (див. стор. 189).

$$z = \frac{ab}{a+b}$$

Справді, якщо $a = 5$ *год*, $b = 7$ *год*, то $z = \frac{35}{12}$ *год* $= 2$ *год* 55 *хв*.

6. З двох станцій одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі. О 12 *год* відстань між ними становила 60 *км*, а о 16 *год* — 300 *км*. О котрій годині зустрілися автомобілі?

Це задача невизначена. Зустріч могла відбутися до і після 12 *год* (мал. 107). Щоб повністю розв'язати задачу треба розглянути обидва випадки.



Мал. 107.

Розв'язання. Припустимо спочатку, що зустріч відбулася до 12 *год*. Через x *год* після цього автомобілі були один від одного на відстані 60 *км*, а ще через 4 *год* — 300 *км*. Отже, за 4 *год* вони віддалились на 240 *км*, а за годину — на 60 *км*. Їх зустріч відбулася об 11 *год*.

Розглянемо другий випадок. Нехай зустріч відбулася після 12 *год*. Тоді за x *год* до зустрічі автомобілі були на відстані 60 *км*. Протягом 4 *год* вони проїхали $300 + 60$ (*км*). Отже, за годину автомобілі зближалися (роз'їжджалися) на $360 : 4 = 90$ (*км*). 60 *км* вони проїхали за $\frac{60}{90} = \frac{2}{3}$ *год*. Отже, в цьому випадку зустріч відбулася о $12\frac{2}{3}$ *год*.

Такі задачі краще розв'язувати арифметично.

7. З пункту A до пункту B, відстань між якими 80 *км*, одночасно назустріч один одному виїжджають два велосипедисти. Після зустрічі один прибуває в B через 1 *год* 20 *хв*, а другий в A через 3 *год*. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.

Запишемо задачу за допомогою таблиці:

Рух велосипедистів		Швидкість	Час	Відстань
Перший	до зустрічі	x	t	a
	після зустрічі	x	$1\frac{1}{3}$	$80-a$
Другий	до зустрічі	y	t	$80-a$
	після зустрічі	y	3	a

Проаналізувавши цю таблицю, неважко знайти кілька способів розв'язування задачі.

Перший спосіб. Нехай швидкості велосипедистів були x *км/год* і y *км/год*. Тоді перший після зустрічі проїхав $\frac{4}{3}x$ *км*, а другий $3y$ *км*. Маємо рівняння:

$$\frac{4}{3}x + 3y = 80.$$

До зустрічі перший проїхав $3y$ *км*, а другий $\frac{4}{3}x$ *км*. Перший на це витратив $\frac{3y}{x}$ *год*, а другий $\frac{4x}{3y}$ *год*. Маємо ще одне рівняння:

$$\frac{3y}{x} = \frac{4x}{3y},$$

звідки, враховуючи, що x і y — додатні числа, $3y = 2x$.

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x + 3y = 80 \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$$

дістанемо $x = 24$ (*км/год*), $y = 16$ (*км/год*).

Другий спосіб. Перший велосипедист, маючи швидкість x *км/год*, проїхав до зустрічі a *км* і витратив на це $\frac{a}{x}$ *год*. Другий за той самий час проїхав до зустрічі $(80 - a)$ *км* — його швидкість $\frac{(80-a)x}{a}$ *км/год*. За 3 *год* після зустрічі він проїхав a *км*. Маємо рівняння:

$$3 \cdot \frac{(80-a)x}{a} = a, \text{ або } 3x(80-a) = a^2.$$

Перший з швидкістю x *км/год* подолав відстань $(80 - a)$ *км* за $\frac{4}{3}$ *год*, отже,

$$\frac{4}{3}x = 80 - a.$$

Розв'язавши систему двох рівнянь

$$\begin{cases} 3x(80-a) = a^2, \\ \frac{4}{3}x = 80 - a, \end{cases}$$

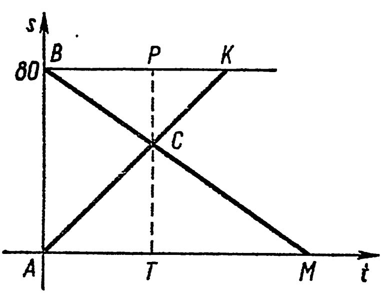
дістанемо $x = 24$ (*км/год*), $a = 48$ (*км*).

Швидкість другого велосипедиста:

$$\frac{(80-a)x}{a} = \frac{80-48}{48} \cdot 24 = 16 \text{ (км/год)}.$$

Третій спосіб. Припустимо, що перший велосипедист, маючи швидкість x *км/год*, до зустрічі був у дорозі t *год*. Отже, за цей час він проїхав tx *км*, а другий $(80 - tx)$ *км*. Очевидно, швидкість другого $\frac{80 - tx}{t}$ *км/год*. Після зустрічі перший проїхав $\frac{4}{3}x$ *км*, а другий $\frac{3}{t}(80 - tx)$ *км*, тому

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x = 80 - tx, \\ \frac{3}{t}(80 - tx) = tx, \end{cases}$$



Мал. 108.

звідки $t = 2$ (*год*), $x = 24$ (*км/год*). Тоді $\frac{1}{t}(80 - tx) = 16$ (*км/год*).

Відповідь. 24 *км/год* і 16 *км/год*.

Побудувавши графіки руху обох велосипедистів (мал. 108), розв'яжемо задачу, виходячи з геометричних міркувань. $\triangle BPC \sim \triangle MTC$. Тому $t : \frac{4}{3} = 3 : t$, звідки $t = 2$ (*год*). Отже, перший велосипедист проїхав весь шлях за $3\frac{1}{3}$ *год*, а другий — за 5 *год*.

Швидкість першого $80 : \frac{10}{3} = 24$ (*км/год*), а другого $80 : 5 = 16$ (*км/год*).

Вище ми розглядали окремо задачі на рух одного тіла при наявності течії і на рух двох тіл в різних напрямах. Але часто доводиться розв'язувати задачі, в яких ці дві умови накладаються.

8. Два однакових човни, власна швидкість яких 12,5 *км/год*, рухаються по річці назустріч один одному. Через скільки годин вони зустрінуться, якщо відстань між ними 80 *км*, а швидкість течії 2,5 *км/год*?

Розв'язуючи цю задачу, учні IV класу звичайно міркують так.

1) Чому дорівнює швидкість човна за течією?

$$12{,}5 + 2{,}5 = 15 \text{ (км/год)}.$$

2) Чому дорівнює швидкість човна проти течії?

$$12{,}5 - 2{,}5 = 10 \text{ (км/год)}.$$

3) На скільки кілометрів човни зближаються за годину?

$$15 + 10 = 25 \text{ (км)}.$$

4) Через скільки годин човни зустрінуться?

$$80 : 25 = 3{,}2 \text{ (год)}.$$

Таке розв'язання не можна вважати найраціональнішим. Краще, щоб учні зміркували, що швидкість зближення човнів не залежить від швидкості течії (один доданок збільшується, а другий зменшується на те саме число). При кожному значенні a буде $12{,}5 + a + 12{,}5 - a = 12{,}5 + 12{,}5$.

Навіть у IV класі бажано цю задачу розв'язати ще й так.

1) На скільки *км* зближалися човни за годину?

$$12{,}5 + 12{,}5 = 25 \text{ (км)}.$$

2) Через скільки годин човни зустрінуться?

$$80 : 25 = 3{,}2 \text{ (год)}.$$

9. Від причалу N вниз за течією річки відійшов пліт. Через 3 *год* від пристані B, віддаленої від N на 60 *км*, проти течії відійшов теплохід, який прибув до N через годину після зустрічі з плотом. Визначте швидкість течії річки, якщо відомо, що швидкість теплохода в стоячій воді 24 *км/год*.

Розв'язання.

Перший спосіб. Нехай швидкість течії річки x *км/год*, тоді швидкість теплохода проти течії $(24 - x)$ *км/год*. Після зустрічі він пройшов таку саму відстань, яку пліт пройшов до зустрічі: $(24 - x)$ *км*. До зустрічі з плотом теплохід пройшов $(60 - 24 +$

$+x)$ *км*, або $(36+x)$ *км*. Пліт ішов до зустрічі $\frac{24-x}{x}$ *год*, а теплохід $\frac{36+x}{24-x}$ *год*, — на 3 *год* менше, ніж пліт. Отже,

$$\frac{24-x}{x}-\frac{36+x}{24-x}=3,$$

або

$$x^2-52x+192=0.$$

Корені цього рівняння: $x=4$ і $x=48$. Другий корінь задачу не задовольняє: якби швидкість течії річки була більшою від швидкості теплохода в стоячій воді, то теплохід не прибув би в N.

Відповідь. Швидкість течії 4 *км/год*.

Другий спосіб. Якщо швидкість течії x *км/год*, то за 3 *год* пліт проплив $3x$ *км*. У той момент, коли теплохід відходив від пристані B, відстань між ним і плотом була $(60-3x)$ *км*. Відносно плоту теплохід плив із швидкістю 24 *км/год* і зустрів пліт через $\frac{60-3x}{24}$ *год*. Усю відстань від B до N (60 *км*) теплохід пройшов з швидкістю $(24-x)$ *км/год* за $\left(\frac{60-3x}{24}+1\right)$ *год*. Маємо рівняння:

$$(24-x)\left(\frac{20-x}{8}+1\right)=60,$$

або

$$x^2-52x+192=0.$$

Третій спосіб. Припустимо, як і раніше, що швидкість течії дорівнює x *км/год*, але введемо ще один параметр. Нехай до зустрічі з теплоходом пліт був у русі t *год*. Тоді він проплив xt *км*, а теплохід $(60-xt)$ *км*. Швидкість теплохода проти течії $(24-x)$ *км/год*. Отже, до зустрічі він плив $\frac{60-xt}{24-x}$ *год*, а після зустрічі $\frac{xt}{24-x}$ *год*.

Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} t-\dfrac{60-xt}{24-x}=3, \\ \dfrac{xt}{24-x}=1. \end{cases}$$

Якщо виключити з цієї системи параметр t, дістанемо квадратне рівняння

$$x^2-52x+192=0.$$

Задачі на рух двох тіл в одному напрямі

Перед розв'язуванням таких задач бажано звернути увагу учнів на такі моменти:

1. Якщо два тіла одночасно вийшли з різних пунктів і одне наздоганяє друге, то з часом відстань між ними (до зустрічі) зменшується, а після зустрічі — збільшується.

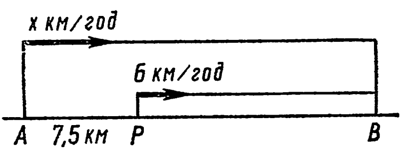
2. Якщо два тіла вийшли з різних пунктів і, рухаючись в одному напрямі, через деякий час зустрілися, то різниця відстаней пройдених тілами до зустрічі, дорівнює відстані між пунктами, з яких вийшли тіла.

3. Якщо з того самого пункту спочатку виходить одне тіло, а пізніше друге, то до зустрічі обидва тіла пройдуть ту саму відстань.

4. Швидкість зближення двох тіл, які рухаються в одному напрямі, дорівнює різниці їх швидкостей.

Найпростіші з таких задач розв'язуються в IV класі.

1. З двох пунктів, відстань між якими 7,5 *км*, одночасно в одному напрямі вийшов пішохід із швидкістю 6 *км/год* і виїхав автобус. Визначте швидкість автобуса, якщо він наздогнав пішохода через 15 *хв*.



Мал. 109.

Умову задачі ілюструє малюнок 109.

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. 15 *хв* = 0,25 *год*.

1) Скільки кілометрів пройшов пішохід за 15 *хв*?

$$6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5 \ (км).$$

2) Скільки кілометрів проїхав автобус за 15 *хв*?

$$1{,}5 + 7{,}5 = 9 \ (км).$$

3) З якою швидкістю їхав автобус?

$$9 : 0{,}25 = 36 \ (км/год).$$

Д р у г и й с п о с і б. Оскільки за 15 *хв* (0,25 *год*) автобус і пішохід зблизились на 7,5 *км*, то швидкість їх зближення

$$7{,}5 : 0{,}25 = 30 \ (км/год).$$

Швидкість руху пішохода 6 *км/год*, тому швидкість автобуса

$$30 + 6 = 36 \ (км/год).$$

Т р е т і й с п о с і б. Нехай швидкість автобуса x *км/год*. Тоді швидкість зближення автобуса і пішохода $(x - 6)$ *км/год*. Маємо рівняння

$$(x - 6) \cdot 0{,}25 = 7{,}5,$$

звідки $x = 36$.

В і д п о в і д ь. Швидкість автобуса 36 *км/год*.

2. Із станції M до станції N вийшов електропоїзд з швидкістю 60 *км/год*, а через 10 *хв* слідом за ним з M вийшов другий електропоїзд, який проходить за годину 85 *км*. На якій відстані від станції N другий електропоїзд наздожене першого, якщо довжина перегону $|MN| = 40$ *км*?

Р о з в' я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. 10 *хв* $= \frac{1}{6}$ *год*. За цей час перший електропоїзд пройшов $60 \cdot \frac{1}{6} = 10$ (*км*). Швидкість зближення електропоїздів 25 *км/год*. Тому електропоїзди зустрінуться через $\frac{10}{25}$ *год*, тобто через $\frac{2}{5}$ *год*. За цей час другий електропоїзд пройде $85 \cdot \frac{2}{5} = 34$ (*км*).

В і д п о в і д ь. Другий електропоїзд наздожене першого електропоїзда на відстані 6 *км* від станції N.

Д р у г и й с п о с і б. Припустимо, що зустріч поїздів відбудеться на відстані x *км* від M. Цю відстань перший електропоїзд пройде за $\frac{x}{60}$ *год*, а другий електропоїзд за $\frac{x}{85}$ *год*. Оскільки другий електропоїзд виїхав з M на $\frac{1}{6}$ *год* пізніше, то

$$\frac{x}{60} - \frac{x}{85} = \frac{1}{6},$$

звідки $x = 34$ (*км*). Від станції N пункт зустрічі віддалений на 6 *км*.

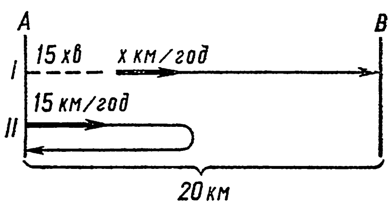
Можна було б відразу взяти за невідоме відстань від місця зустрічі до N. Тоді мали б рівняння

$$\frac{40 - z}{60} - \frac{40 - z}{85} = \frac{1}{6},$$

корінь якого $z = 6$ (*км*) і є розв'язком задачі.

Розглянемо задачі, в яких йдеться про два тіла, що спочатку рухаються в одному напрямі, а потім одне з них змінює напрям руху на протилежний.

3. З пункту A в пункт B, відстань між якими 20 *км*, виїхав велосипедист, а через 15 *хв* слідом за ним виїхав другий велосипедист з швидкістю 15 *км/год*. Наздогнавши першого, другий велосипедист повернув назад і прибув в A за 45 *хв* до прибуття першого в B. Визначте швидкість першого велосипедиста.



Мал. 110.

Задачу можна ілюструвати таким малюнком (мал. 110).

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Припустимо, що швидкість першого велосипедиста x *км/год*. Тоді 20 *км* він проїхав за $\frac{20}{x}$ *год*. Другий був у дорозі на годину менше: $\left(\frac{20}{x} - 1\right)$ *год*. Отже, до зустрічі він проїхав $\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot 15\cdot\frac{1}{2}$ *км*. Перший цю відстань подолав за $\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{15}{2}:x$ *год*, а другий — за $\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{15}{2}:15$ *год*. Відомо, що другий виїхав на $\frac{1}{4}$ *год* пізніше від першого. Отже,

$$\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{15}{2x}-\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

звідки

$$x^2-70x+600=0,$$
$$x_1=10,\ x_2=60.$$

Обидва корені додатні, але задачу задовольняє тільки перший, бо швидкість першого велосипедиста x має бути меншою від 15 *км/год*.

Відповідь. Перший велосипедист їхав з швидкістю 10 *км/год*.

Можна розв'язати задачу, записавши її умову за допомогою таблиці.

Рух велосипедистів за весь час.

Велосипедисти	Швидкість	Час	Відстань
перший	x	$\frac{20}{x}$	20
другий	15	$\frac{20}{x}-1$	$\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot 15$

Рух велосипедистів до зустрічі.

Велосипедисти	Швидкість	Час	Відстань
перший	x	на $\frac{1}{4}$ більше	$\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{15}{2}$
другий	15	$\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{2}$	$\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{15}{2}$

Як бачимо, час руху першого велосипедиста можна визначити двома способами: 1) поділити пройдений ним шлях на швидкість і 2) збільшити на $\frac{1}{4}$ час руху другого велосипедиста. Дістанемо рівняння:

$$\left(\frac{20}{x}-1\right)\frac{15}{2x}=\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

звідки

$$x^2 - 70x + 600 = 0.$$

Корені цього рівняння $x_1 = 10$ і $x_2 = 60$.

Замість другої таблиці, яка характеризує рух велосипедистів до зустрічі, можна дати таблицю, що характеризує рух велосипедистів після зустрічі.

Велосипедисти	Швидкість	Час	Відстань
перший	x	на $\frac{3}{4}$ більше	$20-\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{15}{2}$
другий	15	$\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{2}$	$\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{15}{2}$

З цієї таблиці дістанемо рівняння

$$\left(20-\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{15}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\left(\frac{20}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$$

рівносильне $x^2 - 70x + 600 = 0$.

Позначивши весь час руху першого велосипедиста через t, дістанемо такі таблиці:

Велосипедисти	Швидкість	Час	Відстань
перший	$\frac{20}{t}$	t	20
другий	15	$t-1$	$15(t-1)$

Велосипедисти	Швидкість	Час	Відстань
перший	$\frac{20}{t}$	на $\frac{1}{4}$ більше	$\frac{15}{2}(t-1)$
другий	15	$\frac{1}{2}(t-1)$	$\frac{15}{2}(t-1)$

Визначивши двома способами значення часу в другій таблиці, дістанемо рівняння:

$$\frac{t}{20}\cdot\frac{15}{2}(t-1)=\frac{1}{2}(t-1)+\frac{1}{4}.$$

Його корені: $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{3}$.

Задачу задовольняє тільки перший корінь.

Отже, перший велосипедист їхав 2 *год*. За цей час він проїхав 20 *км*. Отже, його швидкість 10 *км/год*.

Розв'яжемо задачу за допомогою системи рівнянь. Нехай швидкість першого велосипедиста v *км/год*, а відстань, яку він проїхав до зустрічі з другим, a *км*. Маємо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{v} - \dfrac{a}{15} = \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{20 - a}{v} - \dfrac{a}{15} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

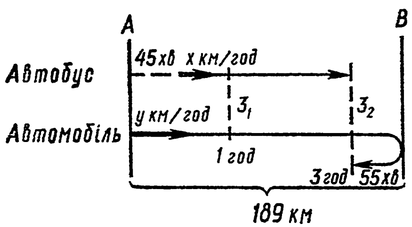
Розв'язавши її, дістанемо $v = 10$ *км/год*.

Можна ввести і більше змінних. Наприклад, позначивши швидкість першого велосипедиста через v, час, протягом якого він проїхав відстань AC до зустрічі, через t, а відстань AC через x, дістанемо систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} vt = x, \\ 15\left(t - \dfrac{1}{4}\right) = x, \\ \dfrac{20 - x}{v} - \dfrac{x}{15} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

звідки $v = 10$ *км/год*.

4. З міста A в місто B, розташоване від A на відстані 189 *км*, вийшов автобус, а через 45 *хв* у тому самому напрямі виїхав автомобіль, який через годину наздогнав автобус. Після прибуття в B і 35-хвилинної стоянки автомобіль вирушив назад в A і зустрівся з автобусом через 2 *год* 55 *хв* після першої зустрічі. Визначте швидкість автобуса і автомобіля (мал. 111).



Мал. 111.

Найпростіше розв'язати цю задачу за допомогою рівнянь з двома змінними.

Р о з в'я з а н н я. Нехай швидкість автобуса x *км/год*, а автомобіля y *км/год*. До першої зустрічі автомобіль пройшов y *км*, а автобус $1\frac{45}{60}x$ *км*. Отже,

$$1\frac{45}{60}x = y,$$

або

$$7x - 4y = 0.$$

Після цього автобус до другої зустрічі з автомобілем був у дорозі 2 *год* 55 *хв* і пройшов за цей час $2\frac{11}{12}x$ *км*. Автомобіль їхав на 35 *хв* менше, тобто $2\frac{1}{3}$ *год*, і пройшов за цей час $2\frac{1}{3}y$ *км*. Сума відстаней, які пройшли автобус і автомобіль від першої до другої зустрічі, становить $2(189-y)$ *км*. Отже, маємо ще одне рівняння: $2\frac{11}{12}x+2\frac{1}{3}y=2(189-y)$, або

$$35x+52y=4536.$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases}7x-4y=0,\\35x+52y=4536,\end{cases}$$

дістанемо: $x=36$ (*км/год*), $y=63$ (*км/год*).

Задачі на рух трьох тіл

Задачі на рух трьох тіл важчі, ніж задачі попередніх типів. У VII класі досить розв'язати дві-три таких задачі.

1. З пункту A одночасно в одному напрямі виїхали два велосипедисти: перший з швидкістю 18 *км/год*, другий 24 *км/год*. Через годину слідом за ними виїхав автомобіль, який наздогнав першого велосипедиста, а через 10 *хв* і другого. Визначте швидкість автомобіля.

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Припустимо, що швидкість автомобіля v *км/год* і що до зустрічі з першим велосипедистом він був у дорозі t *год*. За цей час автомобіль проїхав vt *км*, а перший велосипедист $18t$ *км*. За умовою

$$vt-18t=18.$$

До зустрічі з другим велосипедистом автомобіль був у дорозі $\left(t+\frac{1}{6}\right)$ *год* і за цей час проїхав $v\left(t+\frac{1}{6}\right)$ *км*, а другий велосипедист $24\left(t+\frac{1}{6}\right)$ *км* (на 24 *км* менше, ніж автомобіль). Маємо ще одне рівняння:

$$v\left(t+\frac{1}{6}\right)-24\left(t+\frac{1}{6}\right)=24.$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}vt-18t=18,\\v\left(t+\frac{1}{6}\right)-24\left(t+\frac{1}{6}\right)=24.\end{cases}$$

Визначивши з першого рівняння значення t через v і підставивши його в друге, дістанемо рівняння

$$(v-24)\left(\frac{18}{v-18}+\frac{1}{6}\right)=24,$$

яке має два корені: $v_1 = 6$, $v_2 = 72$. Менший корінь задачу не задовольняє, бо швидкість автомобіля більша від швидкості кожного велосипедиста. Залишається $v = 72$ *км/год.*

Перевірка. Якщо автомобіль їхав з швидкістю 72 *км/год*, а перший велосипедист з швидкістю 18 *км/год*, то швидкість їх зближення (до зустрічі) дорівнює 54 *км/год.* Зустріч відбулася через $\frac{1}{3}$ *год* $\left(18 : 54 = \frac{1}{3}\right)$ після виходу автомобіля. Швидкість зближення автомобіля і другого велосипедиста 48 *км/год* $(72 - 24 = 48)$. Їх зустріч відбулася через $\frac{1}{2}$ *год* $\left(24 : 48 = \frac{1}{2}\right)$ після виходу автомобіля; $\frac{1}{2}$ *год* $-$ $\frac{1}{3}$ *год* $=$ $\frac{1}{6}$ *год* $= 10$ *хв.* Все відповідає змісту задачі.

Відповідь. Швидкість автомобіля 72 *км/год.*

Другий спосіб. Нехай до зустрічі з першим велосипедистом автомобіль проїхав a *км*. Він пройшов цю відстань за $\frac{a}{v}$ *год*, а перший велосипедист — за $\frac{a}{18}$ *год.* За умовою

$$\frac{a}{18} - \frac{a}{v} = 1.$$

Якщо відстань, яку проїхав автомобіль до зустрічі з другим велосипедистом, дорівнює b *км*, то, міркуючи аналогічно, дістанемо ще одне рівняння:

$$\frac{b}{24} - \frac{b}{v} = 1.$$

З цих двох рівнянь визначаємо $a = \frac{18v}{v - 18}$, $b = \frac{24v}{v - 24}$.

У задачі сказано, що автомобіль наздогнав другого велосипедиста через $\frac{1}{6}$ *год* після першого. Отже, відстань між пунктами, в яких автомобіль наздоганяв велосипедистів, дорівнює $\frac{v}{6}$ *км*. Маємо рівняння:

$$\frac{24v}{v - 24} - \frac{18v}{v - 18} = \frac{v}{6},$$

корені якого $v_1 = 0$, $v_2 = 6$, $v_3 = 72$. Задачу задовольняє тільки третій корінь.

Третій спосіб. Позначимо швидкість автомобіля (в *км/год*) через v. Тоді швидкість зближення автомобіля з першим велосипедистом дорівнює $(v - 18)$ *км/год*, а з другим $(v - 24)$ *км/год.* Першого велосипедиста автомобіль наздогнав через $\frac{18}{v - 18}$ *год*, а другого — через $\frac{24}{v - 24}$ *год* після свого виїзду. За умовою

$$\frac{24}{v - 24} - \frac{18}{v - 18} = \frac{1}{6}.$$

Це рівняння має корені: $v_1 = 6$, $v_2 = 72$. Виконавши дослідження (як у першому способі), переконаємося, що швидкість автомобіля 72 *км/год.*

Четвертий спосіб. Нехай до зустрічі з першим велосипедистом автомобіль був у дорозі t *год.* За цей час велосипедист проїхав $18t$ *км*, а автомобіль $(18 + 18t)$ *км.* Отже, швидкість автомобіля була $\frac{18 + 18t}{t}$ *км/год.* До зустрічі з другим велосипедистом він був у дорозі $t + \frac{1}{6}$ *год.* За цей час велосипедист подолав $\left(t + \frac{1}{6}\right) \times$ $\times\, 24$ *км*, а автомобіль $\left(24 + 24\left(t + \frac{1}{6}\right)\right)$ *км.* Отже, автомобіль їхав із швидкістю $\frac{24 + 24\left(t + \frac{1}{6}\right)}{t + \frac{1}{6}}$.

Маємо рівняння:

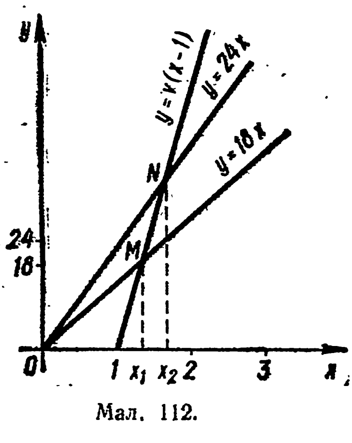
$$\frac{18 + 18t}{t} = \frac{24 + 24\left(t + \frac{1}{6}\right)}{t + \frac{1}{6}},$$

звідки $6t^2 + 7t - 3 = 0$. Додатний корінь цього рівняння $t = \frac{1}{3}$. Отже, швидкість автомобіля

$$v = \frac{18 + 18t}{t}\bigg|_{t=\frac{1}{3}} = 18 \cdot 4 =$$
$$= 72 \ (км/год).$$

Задача розв'язується й багатьма іншими способами. Розглянемо ще графічний спосіб.

П'ятий спосіб. Побудуємо в прямокутній системі координат графіки руху велосипедистів і автомобіля. v (*км/год*) — швидкість автомобіля (мал. 112). Щоб визначити v, спочатку знайдемо абсциси x_1 і x_2 точок M і N.



Мал. 112.

$$\begin{cases} y = 18x_1, \\ y = v(x_1 - 1), \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь маємо: $x_1 = \frac{v}{v - 18}$.

З другої системи

$$\begin{cases} y = 24x_2, \\ y = v(x_2 - 1) \end{cases}$$

визначаємо $x_2 = \frac{v}{v - 24}$.

За умовою

$$\frac{v}{v-24}-\frac{v}{v-18}=\frac{1}{6},$$

звідки $v_1=6$, $v_2=72$ і т. д.

2. З пунктів A і B одночасно в одному напрямі виїжджають два велосипедисти: перший з A з швидкістю 20 *км/год*, другий з B з швидкістю 16 *км/год*. Через 45 *хв* з пункту A в тому самому напрямі виїжджає мотоцикліст, який наздоганяє спочатку одного велосипедиста, а через 15 *хв* — другого. Визначте швидкість мотоцикліста, коли відомо, що відстань AB дорівнює 12 *км*.

Ця задача не повністю визначена, бо в ній сказано, що мотоцикліст спочатку наздожене одного (якого саме?), а потім другого. Щоб повністю розв'язати задачу, треба розглянути два випадки: 1) спочатку мотоцикліст наздогнав першого велосипедиста, а потім другого. 2) спочатку мотоцикліст наздогнав другого велосипедиста, а потім першого.

Р о з в'я з а н н я. Припустимо, що мотоцикліст, їдучи з швидкістю v *км/год* наздогнав спочатку першого велосипедиста, а потім другого.

За 45 *хв* перший велосипедист проїхав 15 *км*, а другий 12 *км*. Швидкість зближення мотоцикліста з першим велосипедистом $(v-20)$ *км/год*, а з другим $(v-16)$ *км/год*. Першого велосипедиста мотоцикліст наздогнав через $\frac{15}{v-20}$ *год* після свого виїзду, а другого — через $\frac{12+12}{v-16}$ *год*. За умовою

$$\frac{24}{v-16}-\frac{15}{v-20}=\frac{1}{4}.$$

Це рівняння має два корені: $v_1=32$, $v_2=40$.

Перевіримо, чи задовольняють вони задачу. Якщо швидкість мотоцикліста 32 *км/год*, то першого велосипедиста він наздожене через $\frac{24}{32-16}$ *год*, а другого — через $\frac{15}{32-20}$ *год*:

$$\frac{24}{16}-\frac{15}{12}=\frac{3}{2}-\frac{5}{4}=\frac{1}{4}.$$

Якщо швидкість мотоцикліста 40 *км/год*, то першого велосипедиста він наздожене через $\frac{24}{40-16}$ *год*, а другого — через $\frac{15}{40-20}$ *год*:

$$\frac{24}{24}-\frac{15}{20}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

Обидва значення $v_1=32$ і $v_2=40$ задовольняють задачу.

Тепер припустимо, що мотоцикліст спочатку наздогнав другого велосипедиста, а потім першого. Тоді, міркуючи, як і в першому випадку, визначимо, що другого він наздогнав через $\frac{12+12}{v-16}$ *год*, а першого — через $\frac{15}{v-20}$ *год*. Маємо рівняння

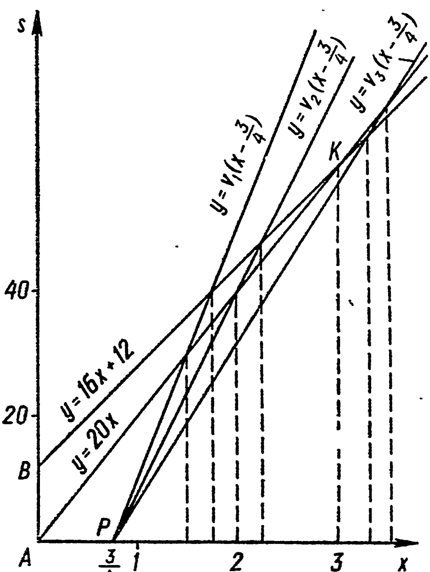
$$\frac{15}{v-20}-\frac{24}{v-16}=\frac{1}{4},$$

рівносильне $v^2=640$. Його додатний корінь $v\approx 25{,}3$.

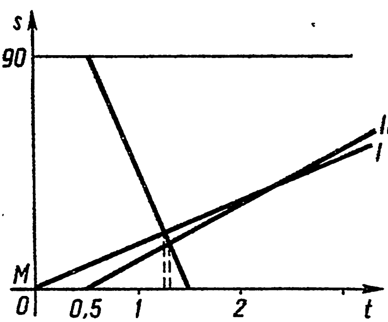
Перевірка показує, що і це значення швидкості мотоцикліста задовольняє задачу.

Відповідь. Швидкість мотоцикліста 32 *км/год*, або 40 *км/год*, або (наближено) 25,3 *км/год*.

Щоб краще зрозуміти, чому саме задача має три розв'язки, бажано зобразити описану в ній ситуацію графічно (мал. 113). Рух першого і другого велосипедистів характеризують прямі AK і BK. З точки P можна провести три різні прямі (з кутовими коефіцієнтами v_1, v_2, v_3), кожна з яких перетинає прямі AK і BK в двох точках, різниця абсцис яких дорівнює $\frac{1}{4}$ *год*. Значення v_1, v_2, v_3 — три можливі швидкості мотоцикліста.



Мал. 113.



Мал. 114.

3. З пункту M в пункт N, відстань між якими 90 *км*, виїхав велосипедист з швидкістю 12 *км/год*. Через півгодини з M в N виїхав другий велосипедист, швидкість якого 15 *км/год*. Мотоцикліст, виїхавши з N в той час, коли другий велосипедист виїхав з M, зустрів одного з них, а через 2 *хв* — і другого. Визначте швидкість мотоцикліста.

Ця задача відрізняється від попередньої насамперед тим, що в ній мотоцикліст рухався назустріч велосипедистам. Тому швидкість зближення мотоцикліста і велосипедиста дорівнює не різниці, а сумі їх швидкостей.

Графічно задачу можна зобразити малюнком 114. Цей малюнок відповідає тому випадку, коли мотоцикліст зустрів спочатку першого велосипедиста, а потім другого. Проте, могло трапитися, що мотоцикліст зустрів спочатку другого велосипедиста, а потім першого. Отже, ця задача також невизначена. Щоб розв'язати її повністю, треба розглянути два випадки.

Розв'язання. Нехай швидкість мотоцикліста v *км/год*. Тоді швидкість зближення його з першим велосипедистом дорівнює $(v + 12)$ *км/год*, а з другим $(v + 15)$ *км/год*.

Припустимо, що мотоцикліст спочатку зустрів першого велосипедиста. До початку руху мотоцикліста перший велосипедист уже був у дорозі півгодини, отже, проїхав 6 *км*. Тому мотоцикліст, вирушаючи, перебував від першого велосипедиста на відстані 84 *км*; до зустрічі з ним він був у дорозі $\frac{84}{v+12}$ *год*, до зустрічі з другим велосипедистом $\frac{90}{v+15}$ *год*. Між цими двома зустрічами пройшло 2 *хв*, тобто $\frac{1}{30}$ *год*. Отже,

$$\frac{90}{v+15} - \frac{84}{v+12} = \frac{1}{30},$$

звідки $v_1 = 93$, $v_2 = 60$.

Тепер припустимо, що мотоцикліст зустрів спочатку другого велосипедиста, а потім першого. Тоді

$$\frac{84}{v+12} - \frac{90}{v+15} = \frac{1}{30}.$$

Додатний корінь цього рівняння $v_3 \approx 22{,}7$.

Перевірка показує, що всі три значення задовольняють задачу.

Інші задачі на рух

Вище йшлося про задачі на рівномірний прямолінійний рух тіл. Однак у шкільних підручниках є й такі задачі, в яких розглядається рух по якійсь ламаній, по сторонах кута, по колу тощо.

Розв'язуючи такі задачі, часто доводиться враховувати форми траєкторій, тому ці задачі мають багато спільного з геометричними.

1. Точка рухається по сторонах рівностороннього трикутника ABC, переміщуючись від A до B із швидкістю 4 *м/сек*, від B до C — 3 *м/сек*, від C до A з швидкістю 6 *м/сек*, і витрачає на весь шлях 36 *сек*. Яка довжина сторони трикутника?

Розв'язання. Припустимо, що довжина сторони трикутника x *м*. Тоді точка сторони AB, BC і CA пройде відповідно за $\frac{x}{4}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{6}$ *сек*.

Маємо рівняння:

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 36,$$

звідки $x = 48$ (*м*).

2. З порту одночасно вийшли два пароплави: один на північ, а другий на схід. Через 2 *год* відстань між ними становила 60 *км*. Визначте швидкість кожного пароплава, знаючи, що швидкість одного з них на 6 *км/год* більша від швидкості другого.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай швидкість одного пароплава v *км/год*, тоді швидкість другого $(v + 6)$ *км/год*. За 2 *год* перший пройшов $2v$ *км*, а другий $2(v + 6)$ *км*. Скориставшись теоремою Піфагора (мал. 115), знайдемо відстань між ними через 2 *год* після виходу з порту: $\sqrt{4v^2 + 4(v + 6)^2}$. За умовою ця відстань 60 *км*. Отже,

$$\sqrt{4v^2 + 4(v + 6)^2} = 60,$$

звідки

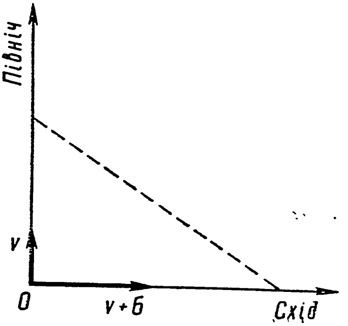
$$v^2 + (v + 6)^2 = 900,$$

або

$$v^2 + 6v - 432 = 0.$$

Корені рівняння: $v_1 = 18$, $v_2 = -24$. Задачу задовольняє додатний корінь.

В і д п о в і д ь. Швидкість одного з пароплавів 18 *км/год*, другого 24 *км/год*.



Мал. 115.

3. Двома взаємно перпендикулярними дорогами в напрямі до перехрестя рухаються велосипедист і мотоцикліст. У деякий момент часу велосипедист перебував на відстані 8 *км* від перехрестя, а мотоцикліст на відстані 15 *км*. Через скільки хвилин після цього відстань між ними дорівнюватиме 5 *км*, якщо швидкість велосипедиста $\frac{1}{3}$ *км/хв*, а мотоцикліста 1 *км/хв*?

Р о з в ' я з а н н я. Позначимо шуканий час (у *хв*) через t. За t *хв* велосипедист проїде $\frac{1}{3}t$ *км*, а мотоцикліст t *км* і вони перебуватимуть від перехрестя відповідно на відстанях $\left|8 - \frac{t}{3}\right|$ і $|15 - t|$ *км*. За теоремою Піфагора знайдемо квадрат відстані між ними. Його значення за умовою задачі дорівнює 25. Отже,

$$\left(8 - \frac{t}{3}\right)^2 + (15 - t)^2 = 25,$$

звідки $t_1 = 12$, $t_2 = 19{,}8$.

П е р е в і р к а. Через 12 *хв* велосипедист був від перехрестя на відстані 4 *км*, а мотоцикліст 3 *км*. Відстань між ними становила $\sqrt{16 + 9} = 5$ (*км*).

Через 19,8 *хв* велосипедист був від перехрестя на відстані 1,4 *км*, а мотоцикліст 4,8 *км*. Відстань між ними становила $\sqrt{1,4^2 + 4,8^2} = 5$ (*км*).

Як бачимо, обидва корені задовольняють задачу.

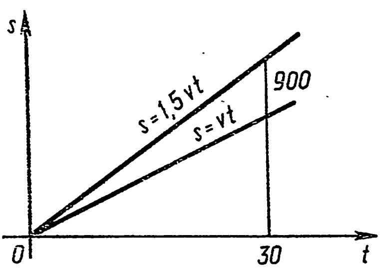
Відповідь. 12 *хв* і 19,8 *хв*.

4. По колу, довжина якого 900 *м*, рухаються два тіла в одному напрямі. Через кожні 30 *хв* вони зустрічаються. Визначте швидкість кожного тіла, якщо швидкість першого в 1,5 раза більша, від швидкості другого.

Розв'язання. Оскільки тіла зустрічаються через кожні 30 *хв*, то це означає, що за 30 *хв* перше тіло проходить на 900 *м* більше, ніж друге. Якщо швидкість другого тіла v *км/хв*, то швидкість першого 1,5 v *км/хв*. Отже,

$$30(1,5\,v - v) = 900,$$

звідки $v = 60$. Тоді $1,5\,v = 90$.



Мал. 116.

Відповідь. Швидкість першого тіла 90 *м/хв*, а другого 60 *м/хв*. Зрозуміло, що, розв'язуючи цю задачу, бажано накреслити траєкторію руху тіл — коло. Однак нічого не зміниться, якщо замість кола уявимо еліпс, овал або яку-небудь іншу замкнену лінію. Можна навіть повністю абстрагуватися від форми шляху, а уявити, що обидва тіла рухаються по прямій одне за одним. Якщо вони почнуть одночасно рухатися з того самого місця, то через 30 *хв* перше випередить друге на 900 *м*. Отже, графічно можна ілюструвати задачу в прямокутній системі координат (мал. 116). Як видно з малюнка,

$$30 \cdot 1,5\,v - 30\,v = 900,$$

звідки $v = 60$ (*м/хв*), $1,5\,v = 90$ (*м/хв*).

5. По круговій доріжці завдовжки 2 *км* рухаються в одному напрямі два ковзанярі, які сходяться через кожні 20 *хв*. Визначте швидкість кожного ковзаняра, якщо перший з них пробігає коло на 1 *хв* швидше від другого.

Розв'язання.

Перший спосіб. Припустимо, що швидкість першого ковзаняра x *км/хв*. Тоді він пробіжить усе коло за $\frac{2}{x}$ *хв*, а другий — за $\left(\frac{2}{x} + 1\right)$ *хв*. Виходить, швидкість другого ковзаняра $2 : \left(\frac{2}{x} + 1\right)$ *км/хв*. За 20 *хв* перший пробіжить $20x$ *км*, а другий $40 : \left(\frac{2}{x} + 1\right)$ *км*.

За умовою

$$20x - \frac{40x}{x+2} = 2.$$

Корені цього рівняння: $x = 0{,}5$ і $x = -0{,}4$. Задачу задовольняє додатний корінь. Отже, перший ковзаняр рухався з швидкістю 0,5 *км/хв*, другий — із швидкістю $2:\left(\frac{2}{0{,}5}+1\right) = 0{,}4$ (*км/хв*).

Відповідь. 0,5 *км/хв* і 0,4 *км/хв* (або 30 *км/год* і 24 *км/год*).

Другий спосіб. Нехай швидкість першого і другого ковзанярів дорівнюють відповідно x *км/год* і y *км/год*. Перший з них пробігає все коло за $\frac{2}{x}$ *год*, а другий — за $\frac{2}{y}$ *год*. За умовою

$$\frac{2}{y} - \frac{2}{x} = \frac{1}{60},$$

або

$$120(x - y) = xy.$$

Крім того, відомо, що за $\frac{1}{3}$ *год* перший ковзаняр проїжджає $\frac{x}{3}$ *км*, а другий $\frac{y}{3}$ *км*. Маємо ще одне рівняння:

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 2,$$

або

$$x - y = 6.$$

Система рівнянь

$$\begin{cases} 120(x - y) = xy, \\ x - y = 6 \end{cases}$$

має два розв'язки: $x_1 = 30$, $y_1 = 24$ і $x_2 = -24$, $y_2 = -30$. Задачу задовольняє додатний розв'язок системи.

Відповідь. 30 *км/год*, 24 *км/год*.

Третій спосіб. Припустимо, що перший ковзаняр пробігає круг за t *хв*, тоді другий — за $(t+1)$ *хв*. Отже, швидкість першого $\frac{2}{t}$ *км/хв*, а другого $\frac{2}{t+1}$ *км/хв*. За 20 *хв* перший пробіжить відстань $\frac{40}{t}$ *км*, а другий $\frac{40}{t+1}$ *км*. Через кожних 20 *хв* ковзанярі сходяться, тобто перший за 20 *хв* пробігає на 2 *км* більше від другого. Маємо рівняння

$$\frac{40}{t} - \frac{40}{t+1} = 2,$$

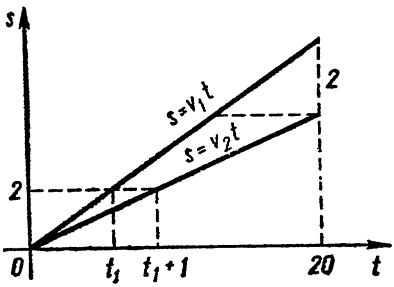
корені якого $t_1 = 4$, $t_2 = -5$. Від'ємний корінь задачу не задовольняє. Отже, перший ковзаняр пробігає 2 *км* за 4 *хв*, а другий — за 5 *хв*. Тому швидкість першого 0,5 *км/хв*, а другого 0,4 *км/хв*.

Можна розв'язати задачу і графічно. Описана в задачі ситуація рівносильна такій, коли обидва ковзанярі йдуть по прямій один за одним. Якщо вони одночасно почнуть рухатися з того самого місця, то через 20 *хв* перший випередить другого на 2 *км*. Отже, дану задачу можна ілюструвати графіками в прямокутній системі координат (мал. 117).

Розглядаючи ці графіки, помічаємо, що

$$20v_1 - 20v_2 = 2,$$
$$t_1v_1 = 2,$$
$$(t_1 + 1)\,v_2 = 2.$$

Виключивши з двох останніх рівнянь t_1, дістанемо систему двох рівнянь з двома змінними:



Мал. 117.

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = 0{,}1, \\ \left(\frac{2}{v_1} + 1\right) v_2 = 2. \end{cases}$$

Ця система має два розв'язки: 1) $v_1 = 0{,}5$; $v_2 = 0{,}4$; 2) $v_1 = -0{,}4$, $v_2 = -0{,}5$. Задачу задовольняє перший розв'язок.

Відповідь. $v_1 = 0{,}5$ *км/хв*, $v_2 = 0{,}4$ *км/хв*.

4. Задачі геометричного змісту

Як уже зазначалось, багато задач геометричного змісту можна віднести до задач з однойменними величинами або до задач з трьома величинами. Розглянемо, наприклад, такі задачі.

1. Один із суміжних кутів на 50° більший від другого. Скільки градусів має кожен з цих кутів?
2. Дано призму, об'єм якої 150 $см^3$. Якщо її висоту зменшити на 2 *см*, а площу основи збільшити на 2 $см^2$, то її об'єм збільшиться на 6 $см^3$. Визначте висоту даної призми.

У першій задачі дано і треба визначити значення кутів. Це задача з однойменними величинами (на визначення двох чисел за їх сумою і різницею).

У другій задачі йдеться про величини трьох найменувань: довжини, площі і об'єми. Вона подібна до задачі на роботу, розглянутої на стор. 181. Їй відповідає така сама стрічкова діаграма (див. мал. 95); і за допомогою таблиці її можна зобразити аналогічно.

Призми	Висота (в *см*)	Площа основи (в $см^2$)	Об'єм (в $см^3$)
дана			150
зменшена	на 2 менше	на 2 більше	156

Отже, обидві задачі можна віднести до задач уже розглянутих видів. Проте є серед задач геометричного змісту багато таких, які не можна віднести до жодного з цих видів.

3. Якщо довжину прямокутника збільшити на 2 *дм*, а ширину зменшити на 5 *дм*, то дістанемо квадрат, площа якого буде менша від площі даного прямокутника на 50 $дм^2$. Визначте площу квадрата [18, 187].

Р о з в'я з а н н я. Нехай сторона утвореного квадрата дорівнює x *дм*. Тоді сторони даного прямокутника дорівнюють $(x - 2)$ і $(x + 5)$ *дм*. Тому площа прямокутника $(x - 2) \cdot (x + 5)$ $дм^2$, а площа квадрата x^2 $дм^2$. Отже,

$$(x - 2) \cdot (x + 5) - x^2 = 50,$$

звідки $x = 20$ (*дм*). Тому площа утвореного квадрата 400 $дм^2$.

Задачу можна розв'язати, ввівши дві змінні. Якщо довжина і ширина даного прямокутника відповідно дорівнюють x *дм* і y *дм*, то маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2 = y - 5, \\ xy - (x + 2)(y - 5) = 50, \end{cases}$$

яка має такий розв'язок: $x = 18$, $y = 25$. Тепер можна зробити висновок, що сторона утвореного квадрата дорівнює 20 *дм*, а його площа 400 $дм^2$.

Учні частіше розв'язують цю задачу другим способом (можливо, тому, що в задачі спочатку йдеться про прямокутник), проте перший спосіб раціональніший.

Чи належить розглядувана задача до якого-небудь з попередніх видів? Ні, бо в ній йдеться про величини двох найменувань: довжини і площі.

П р и м і т к а. Оскільки довжину прямокутника прийнято виражати більшим числом, ніж ширину, то краще було б в умові задачі слова «довжина» і «ширина» поміняти місцями.

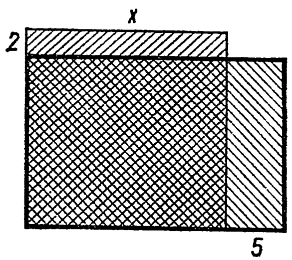
Розв'язання цієї задачі бажано ілюструвати малюнком. Проте краще, коли учні привчаються цей малюнок «тримати в голові». Їм зрозуміліший малюнок, на якому подано прямокутник і квадрат окремо. Втім у VI класі можна давати і такий малюнок, на якому ці фігури мають непорожній переріз (мал. 118).

4. На ділянці, що має форму прямокутника, один з вимірів якого на 17 *м* більший від другого, зробили прямокутний газон, відстань якого від огорожі скрізь дорівнює 7 *м*. Знайти площу ділянки, коли відомо, що вона більша від площі газону на 1414 $м^2$.

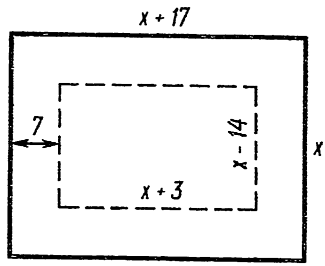
У цій задачі потрібні значення довжин можна знайти усно і позначити їх на малюнку (мал. 119), відразу записавши рівняння:

$$x(x + 17) - (x - 14)(x + 3) = 1414.$$

Розв'язавши рівняння ($x = 49$), знаходимо шукану площу прямокутника: $49 \cdot (49 + 17) = 3234$ ($м^2$).



Мал. 118.



Мал. 119.

5. Два прямокутники мають периметри по 122 *см*. Основа першого прямокутника більша від основи другого на 5 *см*, а площа другого прямокутника на 120 $см^2$ більша від площі першого. Знайдіть площу кожного прямокутника.

Задачу зручно подати у вигляді таблиці:

Прямокутник	Основа	Висота	Периметр	Площа
перший			122	
другий	на 5 менше		122	на 120 більше

Якщо позначити основу і висоту першого прямокутника через a і b, то основа і висота другого дорівнюватимуть відповідно $a - 5$ і $b + 5$ (в *см*). Дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} a + b = 61, \\ (a - 5)(b + 5) - ab = 120. \end{cases}$$

Ця система має один розв'язок: $a = 45$ (*см*) і $b = 16$ (*см*). Отже, площа першого прямокутника $a \cdot b = 45 \cdot 16 = 720$ ($см^2$), а другого $720 + 120 = 840$ ($см^2$).

6. Периметр прямокутника 30 *дм*. Якщо довжину прямокутника зменшити на 3 *дм*, а ширину збільшити на 5 *дм*, то площа прямокутника зменшиться на 8 $дм^2$. Знайдіть площу початкового прямокутника.

Р о з в'я з а н н я. Нехай довжина початкового прямокутника дорівнює a *дм*, а ширина b *дм*. Тоді його периметр $(2a + 2b)$ *дм*. Маємо одне рівняння:

$$2a + 2b = 30,$$

або

$$a + b = 15.$$

Площа початкового прямокутника ab $дм^2$. Якщо його довжину зменшити на 3 *дм*, а ширину збільшити на 5 *дм*, дістанемо новий прямокутник, площа якого $(a - 3)(b + 5)$ $дм^2$. За умовою

$$ab - (a - 3)\ (b + 5) = 8.$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} a + b = 15, \\ ab - (a - 3)(b + 5) = 8, \end{cases}$$

дістанемо: $a = 6{,}5$ (*дм*), $b = 8{,}5$ (*дм*). Площа початкового прямокутника $ab = 31{,}25$ ($дм^2$).

У цій задачі [18, 188] також бажано поміняти місцями слова «довжину» і «ширину».

7. Довжини сторін (у сантиметрах) рівнобедреного трикутника — цілі числа. Його периметр дорівнює 12 *см*. Знайдіть сторони цього трикутника.

Ця задача значно відрізняється від попередніх, оскільки вона приводить до невизначеного рівняння. Позначивши довжину бічної сторони і довжину основи даного рівнобедреного трикутника відповідно через x і y, дістанемо рівняння:

$$2x + y = 12.$$

У множині дійсних чисел це рівняння має безліч розв'язків, але нам треба знайти тільки натуральні значення x і y, до того ж такі, що задовольняють умову $2x > y$ (сума двох сторін трикутника більша від третьої). Щоб зменшити кількість випробувань, бажано звернути увагу на те, що рівняння $2x - y = 12$ може задовольняти тільки парне значення y. Отже, досить випробувати два значення y. Якщо $y = 2$, то $x = 5$; якщо $y = 4$, то $x = 4$.

В і д п о в і д ь. Задача має два розв'язки 5 *см*, 5 *см*, 2 *см* і 4 *см*, 4 *см*, 4 *см*.

8. З прямокутного листа жерсті розміром 30 *см* $\times$ 48 *см* роблять відкриту коробку. Для цього при вершинах прямокутника вирізають квадрати, а ту частину, яка залишилась, згинають

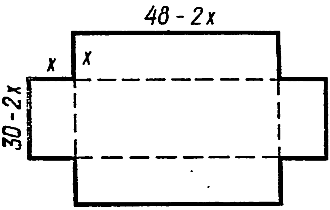
(мал. 120). Визначте, яку довжину повинна мати сторона вирізаного квадрата, щоб площа основи коробки дорівнювала її бічній поверхні.

Р о з в'я з а н н я. Нехай шукана довжина сторони квадрата x *см*. Тоді площа основи коробки $(48 - 2x)(30 - 2x)$ $см^2$, а її бічна поверхня $2x(48 - 2x) + 2x(30 - 2x)$ $см^2$.
Маємо рівняння:

$$(48 - 2x)(30 - 2x) = 2x(48 - 2x) + 2x(30 - 2x),$$

або

$$x^2 - 26x + 120 = 0,$$



Мал. 120.

корені якого $x_1 = 6, x_2 = 20$. Задачу задовольняє тільки перший корінь.

В і д п о в і д ь. Довжина вирізаного квадрата 6 *см*.

Можна рівняння скласти і так. Якщо уявити, що всі бічні грані коробки накладені на її основу, то площа чотирьох квадратів має дорівнювати непокритій частині основи, тобто $4x^2 = (48 - 4x)(30 - 4x)$, звідки випливає квадратне рівняння: $x^2 - 26x + 120 = 0$.

9. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша від одного катета на 2 *см*, а від другого — на 9 *см*. Знайдіть сторони цього трикутника.

Р о з в'я з а н н я. Позначимо довжину гіпотенузи через x (*см*). Тоді довжина одного катета дорівнює $(x - 2)$ *см*, а другого $(x - 9)$ *см*.

За теоремою Піфагора маємо:

$$(x - 2)^2 + (x - 9)^2 = x^2.$$

Розв'яжемо це рівняння. Воно має два корені: $x_1 = 17$ і $x_2 = 5$. Другий корінь задачу не задовольняє, бо при $x = 5$ довжина меншого катета $x - 9$ була б від'ємна (—4). Перший корінь задачу задовольняє. Справді, якщо $x = 17$, то $x - 2 = 15$, $x - 9 = 8$, а трикутник із сторонами 17, 15 і 8 існує. До того ж він прямокутний, бо $17^2 = 15^2 + 8^2$.

В і д п о в і д ь. Сторони трикутника 17 *см*, 15 *см* і 8 *см*.

10. Сума катетів прямокутного трикутника дорівнює 79 *см*. Якщо один з катетів збільшити на 23 *см*, а другий зменшити на 11 *см*, то утвориться прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнюватиме гіпотенузі даного. Знайти катети трикутника і визначити, як зміниться площа трикутника при вказаній зміні довжин катетів.

Р о з в'я з а н н я.

П е р ш и й с п о с і б. Припустимо, що один катет даного трикутника дорівнює x *см*, тоді другий $(79 - x)$ *см*.

Якщо перший катет збільшити на 23 *см*, а другий зменшити на 11 *см*, то вони відповідно дорівнюватимуть $(x + 23)$ *см* і $(68 - x)$ *см*, а квадрат гіпотенузи утвореного трикутника становитиме $((x + 23)^2 + (68 - x)^2)$ *см*. За умовою

$$(x + 23)^2 + (68 - x)^2 = x^2 + (79 - x^2),$$

звідки $x = 16$ *см*. Довжина другого катета даного трикутника $79 - 16 = 63$ (*см*). Площа його дорівнює $0,5 \cdot 16 \cdot 63$ *см*^{2}, або 504 *см*^{2}. Площа утвореного трикутника $0,5 \cdot (16 + 23)(63 - 11)$ *см*^{2}, або 1014 *см*^{2}. Отже, площа утвореного трикутника більша від площі даного на 510 *см*^{2}.

Розв'яжемо задачу за допомогою системи двох рівнянь з двома змінними. Позначивши катети даного трикутника через x і y (*см*), матимемо таку систему:

$$\begin{cases} x + y = 79, \\ (x + 23)^2 + (y - 11)^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Ця система має один розв'язок: $x = 16$, $y = 63$.

11. Якщо один з катетів прямокутного трикутника збільшити на 1 *см*, а другий зменшити на 5 *см* або перший катет зменшити на 1 *см*, а другий збільшити на 3 *см*, то кожного разу утвориться прямокутний трикутник, який матиме таку саму гіпотенузу, що і початковий. Знайдіть катети і площу початкового трикутника.

Р о з в'я з а н н я. В задачі йдеться про три прямокутних трикутники. Назвемо їх початковим, другим і третім. Розв'язання оформимо у вигляді таблиці.

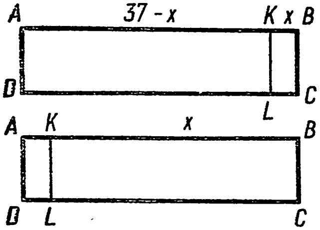
Трикутники	Катет	Катет	Квадрат гіпотенузи
початковий	x	y	x^2+y^2
другий	$x+1$	$y-5$	$(x+1)^2+(y-5)^2$
третій	$x-1$	$y+3$	$(x-1)^2+(y+3)^2$

Користуючись цією таблицею, можна скласти систему рівнянь:

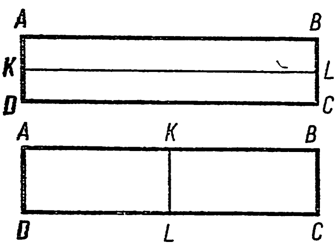
$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = x^2 + y^2, \\ (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2, \end{cases}$$

яка має розв'язок: $x = 32$, $y = 9$. Площа початкового трикутника дорівнює $0,5 \cdot 32 \cdot 9 = 144$ ($см^2$).

12. Довжини сторін прямокутника 37 *м* і 6 *м*. Пряма, паралельна одній із сторін прямокутника, ділить його на два подібних але не конгруентних прямокутники. Знайдіть площу кожної частини.



Мал. 121.

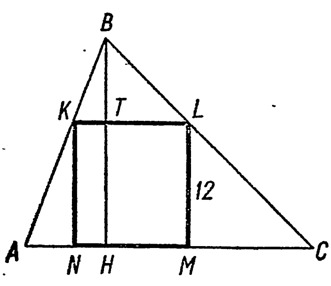


Мал. 122.

Розв'язання. Нехай в прямокутнику $ABCD$ $|AB| = |DC| = 37$ *м* і $|AD| = |BC| = 6$ *м* (мал. 121). Припустимо, що пряма KL, паралельна стороні AD, ділить даний прямокутник на два подібних прямокутники $AKLD$ і $BCLK$. Тоді $|BC| : |CL| = |AK| : |KL|$. Позначимо $|KB| = x$ *м*, тоді $|AK| = (37 - x)$ (*м*). Отже, $6 : x = (37 - x) : 6$, звідки $x_1 = 36$, $x_2 = 1$.

Обидва значення x задовольняють задачу і дають однаковий результат: пряма KL ділить даний прямокутник на два прямокутники, сторони яких пропорційні числам 1 і 6, а площі дорівнюють 6 $м^2$ і 216 $м^2$.

Якби в задачі не було сказано «але не конгруентних», то таку відповідь треба було б вважати неповною. Адже дві конгруентні фігури також вважаються подібними. А кожен відрізок, який сполучає середини протилежних сторін прямокутника, ділить його на два конгруентних прямокутники (мал. 122).



Мал. 123.

13. У трикутник, основа якого на 7 *дм* більша від його висоти, вписано квадрат так, що дві його вершини містяться на бічних сторонах трикутника, а дві інші — на його основі. Знайдіть площу трикутника, якщо сторона вписаного квадрата дорівнює 12 *дм*.

Розв'язання.

- Перший спосіб. Нехай трикутник ABC і вписаний в нього квадрат $KLMN$ (мал. 123) відповідають умові задачі і основа $|AC| = x$ *дм*. Тоді $|BH| = (x - 7)$ *дм*.

З подібності трикутників KBL і ABC маємо: $|BT| : |KL| = |BH| : |AC|$,

або

$$\frac{x - 19}{12} = \frac{x - 7}{x}.$$

Розв'язавши це рівняння, дістанемо: $x_1 = 6$ і $x_2 = 28$.

Перший корінь задачу не задовольняє, бо довжина основи трикутника не може бути меншою від сторони вписаного квадрата. Другий корінь задачу задовольняє (перевірте!).

Якщо основа трикутника 28 *дм*, то його висота 21 *дм*, а площа $S = 0{,}5 \cdot 21 \cdot 28 = 294$ (*дм*^{2}).

Другий спосіб. Позначимо висоту трикутника через x. Тоді основа його $(x + 7)$ *дм*. Маємо: пл. ABC = пл. KBL + + пл. $AKLC$,
або

$$0{,}5 \cdot x(x + 7) = 0{,}5\ (x - 12) \cdot 12 + 0{,}5\ (x + 19) \cdot 12,$$

звідки $x_1 = 21$, $x_2 = 4$. Значення x_2 задачі не задовольняє, залишається $x = 21$. Площа трикутника $S = 0{,}5 \cdot 21 \cdot 28 = 294$ (*дм*^{2}).

Чи однозначно визначається трикутник умовою задачі? Ні, задачу задовольняє кожний трикутник, в якого довжина основи 28 *см*, висота 21 *см* і жодний кут при основі не тупий. Але задачу не можна вважати невизначеною, бо кожен з цих трикутників має ту саму площу 294 *дм*^{2}.

ЛІТЕРАТУРА

1. Барыбин К. С. Методика преподавания алгебры. М., «Просвещение», 1965.
2. Барсуков О. М. Алгебра. К., «Радянська школа», 1970.
3. Барсуков О. М. Рівняння першого степеня. К., «Радянська школа», 1954.
4. Бевз Г. П., Методика викладання математики. Загальні питання. К., «Радянська школа», 1968.
5. Бевз Г. П. Методика викладання алгебри. К., «Радянська школа», 1971.
6. Богданов И. М., Петраков И. С. Сборник задач по алгебре. М., «Просвещение», 1971.
7. Віленкін Н. Я., Нєшков К. І. та ін. Математика. 4 клас. За редакцією О. І. Маркушевича. К., «Радянська школа», 1973.
8. Віленкін Н. Я., Нєшков К. І. та ін. Математика 5 клас. За редакцією О. І. Маркушевича., К., «Радянська школа», 1973.
9. Депман И. Я. Рассказы о решении задач, Л., «Детская литература», 1964.
10. Завало С. Т. Рівняння і нерівності. К., «Радянська школа», 1973.
11. Ирошников Н. П., Пышкало А. М. Самостоятельные работы в курсе алгебры VII класса. М., «Просвещение», 1969.
12. Колесник Б. М. Алгебраїчні задачі на дослідження. К., «Радянська школа», 1971.
13. Кочетков Є. С., Кочеткова К. С. Алгебра і елементарні функції. Ч. І. К., «Радянська школа», 1972.
14. Кочетков Є. С., Кочеткова К. С. Алгебра і елементарні функції. Ч. ІІ., К., «Радянська школа», 1972.
15. Кудрявцев С. В. Дидактические материалы по алгебре для VII класса. М., «Просвещение», 1973.
16. Ларічев П. О. Збірник задач з алгебри. Ч. І. К., «Радянська школа», 1967.
17. Ларічев П. О. Збірник задач з алгебри. Ч. ІІ. К., «Радянська школа», 1967.
18. Макаричев Ю. М. та ін. Алгебра. Навчальний посібник для 6 класу середньої школи. За редакцією О. І. Маркушевича. К., «Радянська школа», 1973.
19. Макаричев Ю. М. та ін. Алгебра. Навчальний посібник для 7 класу середньої школи. За редакцією О. І. Маркушевича. К., «Радянська школа», 1973.
20. Макаричев Ю. М. та ін. Навчальний посібник для 8 класу середньої школи. За редакцією О. І. Маркушевича. К., «Радянська школа», 1973.
21. Макаричев Ю. Н. и др. Алгебра в VI классе. В помощь учителю. Под редакцией А. И. Маркушевича. М., «Просвещение», 1973.
22. Макаричев Ю. Н. и др. Алгебра в VII классе. В помощь учителю. Под редакцией А. И. Маркушевича. М., «Просвещение», 1973.
23. Макаричев Ю. Н. и др. Алгебра в VIII классе. В помощь учителю. Под редакцией Маркушевича. М., «Просвещение», 1973.

24. Макаричев Ю. Н. Система изучения элементарных функций в старших классах средней школы. М., «Просвещение», 1964.
25. Муравин К. С., Крейдлин Е. Г. Сборник задач по алгебре. М., «Просвещение», 1968.
26. Орехов Ф. А. Решение задач методом составления уравнений. М., «Просвещение», 1971.
27. Пойа Д. Как решать задачу. М., «Учпедгиз», 1961.
28. Пойа Д. Математическое открытие. М., «Наука», 1970.
29. Репьев В. В. Методика преподавания алгебры в восьмилетней школе. М., «Просвещение», 1967.
30. Столяр А. А. Педагогика математики. Минск, «Вышэйшая школа», 1969.
31. Стратілатов П. В. Розв'язування задач у курсі арифметики. К., «Радянська школа», 1965.
32. Танатар И. Я. Геометрические преобразования графиков функций. М., «Учпедгиз», 1960.
33. Туманов С. И. Элементарная алгебра. М., «Просвещение», 1970.
34. Шкарин А. Б. и др. Алгебраические задачи в технике. М., «Учпедгиз», 1962.
35. Эрдниев П. М. Методика упражнений по математике. М., «Просвещение», 1970.

ЗМІСТ

Григорий Петрович Бевз

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В 6—8 КЛАССАХ

(на украинском языке)

Издательство «Радянська школа» Государственного комитета Совета Министров Украинской ССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

Редактор *О. П. Бондаренко*
Літредактор *Г. В. Саноцька*
Художній редактор *В. М. Струтинський*
Обкладинка художника *М. Я. Брязкуна*
Технічний редактор *Н. М. Горбунова*
Коректори *Л. С. Бобир, Л. С. Ткаченко.*

Здано до набору 7/X 1974 р.
Підписано до друку 6/III 1975 р.
Формат 60×90 1/16
Папір друк № 3.
Умовн. арк. 15.
Обл.-видавн. арк. 14,16.
Тираж 80000.
БФ 10044.

Видавництво «Радянська школа» Державного комітету Ради Міністрів Української РСР у справах видавництв, поліграфії і книжкової торгівлі, Київ, вул Юрія Коцюбинського, 5.
Видавн. № 23778.
Ціна 51 коп.
Зам № 4-437

Книжкова фабрика ім. М. В. Фрунзе Республіканського виробничого об'єднання «Поліграфкнига» Держкомвидаву УРСР, Харків, Донець-Захаржевська, 6/8.

51коп.

Радянська школа