Ол. АСТРЯБ

ГЕОМЕТРІЯ

ДЛЯ ТРУДШКІЛ

Державний Науково-Методологічний Комітет Наркомосвіти УСРР по секції соціяльного виховання ухвалив до вжитку як підручник в установах Соцвиху

ДЕРЖАВНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ
1927

Держтрест „Київ-Друк“,
4-а друк., вул. Воровськ., 42
Зам. № 3361—30000 прим.
Укрліт № 1162 (2777).

ПЕРЕДМОВА.

В цей підручник „Геометрія в трудшколі“ я, порівнюючи з старою своєю „Геометрією на дослідах“, вніс такі корінні зміни.

Я, складаючи цей підручник, дбав по змозі про те, щоб як обсяг математичного матеріялу, так і самий розподіл його по групах сполучити з вимогами останніх програм Держ. Наук. Методкому.

В звязку з цим я в значній мірі скоротив об'єм „формального“ математичного матеріялу.

Систему „дослідів“ над суто-геометричним матеріялом я значно скоротив, замінив їх використовуванням спостережень учнями певного явища в житті, а тому першим стимулом для досліджування математичного матеріялу я намагався зробити не дослід суто геометричного, книжного характеру, а задачу з життя або з техніки.

До кожного розділу додано досить багато задач (головну частину їх взято із мого „Задачника до початкової геометрії“. Решту задач я взяв у инших авторів).

Задачі я підбирав трьох типів:

а) Задачі лабораторно-дослідчого характеру, що їх можна використовувати для комплексу.

б) Задачі дослідчого характеру, але з суто-математичним матеріялом.

в) Задачі-вправи для засвоєння математичної техніки, бо викидати такого типу задачі із шкільної практики, на мою думку, недоцільно.

Вважаю за потрібне висловити щиру подяку З. Я. Яновській, що провадила авторську коректуру цієї книги.

Ол. Астряб.

ЧАСТИНА ПЕРША.

Розділ 1.

ГЕОМЕТРИЧНЕ ТІЛО ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ.

1. Об'єм та поверхня тіла. Лінія. Точка.

§ 1. Геометричне тіло. Коли ви були на заводі, ви там бачили ріжноманітні машини. Кожна машина, кожна частина її має свою власну форму (рис. 1).

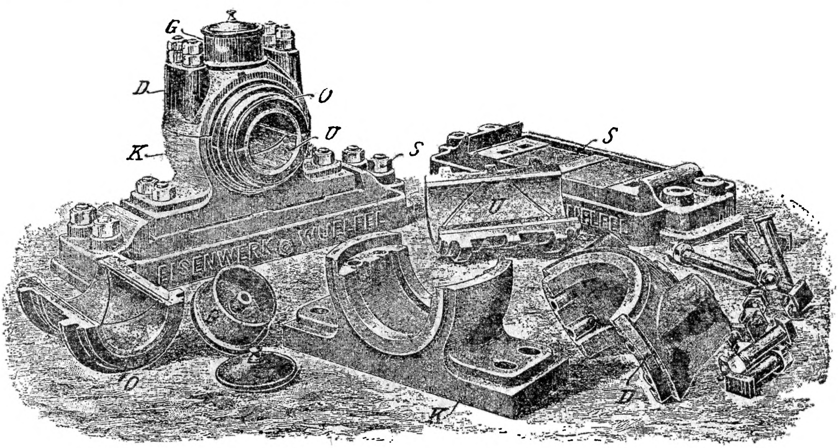


Рис. 1. Знайдіть знайомі вам геометричні форми в цій машині.

Усі речі, що навколо нас, будемо звати *тілами*.

Коли ви не цікавитесь тим матеріялом, з якого зроблено тіло, а досліджуєте тільки форму того простору, що обмежує ці тіла, тоді ви вивчаєте тіла *геометричні*, а не фізичні.

§ 2. Об'єм тіла. В один сарай можна покласти багато сіна, в другий сарай вміститься сіна значно менше. Кожен сарай займає ріжну частину простору, яку називають **об'ємом** тіла. Покажіть рукою об'єм відра, об'єм скриньки.

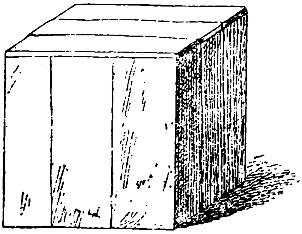


Рис. 2. Ця скринька має форму куба.

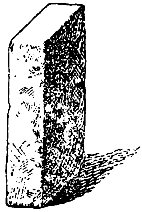


Рис. 3. Цеглина має форму прямокутної призми.

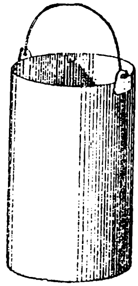


Рис 4. Відро має форму циліндра.

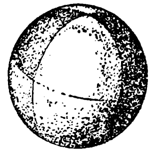


Рис. 5. Опука має форму кулі.

§ 3. Поверхня тіла. Площина. Порівняйте форму поліна (рис. 6) з формою цієї скриньки (рис. 7). Зверніть увагу на стінки, що обмежують ці тіла від зовнішнього простору.

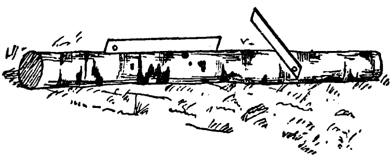


Рис 6. Це поліно з боків обмежене кривою поверхнею.

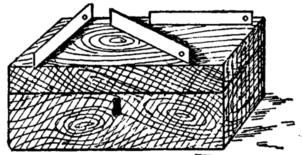
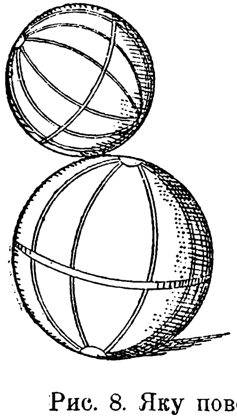


Рис. 7. Ця скринька з усіх боків обмежена плоскими стінками.

Те, що обмежує тіла від зовнішнього простору, будемо звати **поверхнею** тіла.

Досліджуючи форму скриньки, ви побачите, що вся поверхня її складається з декількох стінок. Дослідімо уважніше кожну з цих стінок. Кладіть на поверхню стінки в **найрізноманітніших напрямках** просту лінію (край лінійки, то-що) так, щоб дві які-небудь точки простої лежали на поверхні стінки.



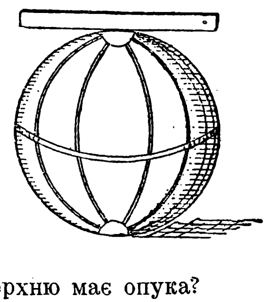


Рис. 8. Яку поверхню має опука?

Виявиться, що всі проміжні точки простої лежатимуть на нашій поверхні.

Таку поверхню звемо плоскою поверхнею або *площиною*.

Таку плоску поверхню має дзеркало, вода в ставку (підчас тихої погоди), то-що.

Розгляньте тепер поверхню відра (рис. 4). Досліджуючи її, ви побачите, що з боків відро обмежене *кривою* поверхнею, а знизу—плоскою. Покажіть їх.

§ 4. Лінія, як границя поверхні. Спробуйте уважніше дослідити форму окремої стінки вашої скриньки. Зверніть для цього увагу на границі, що обмежують зо всіх боків цю площину. Обведіть її пальцем. Ці границі складаються з ліній, що їх звуть *простими лініями* (рис. 9).

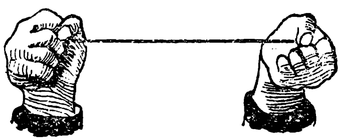


Рис. 9. Проста лінія.

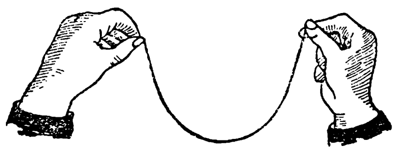


Рис. 10. Крива лінія.

Обведіть тепер пальцем лінію, що служить границею поверхні відра. Це буде *лінія крива* (рис. 10).

Отже *лінію можна розглядати, як границю поверхні*.

Лінії бувають прості й криві. Знайдіть у класі декілька простих і кривих ліній.

§ 5. Точка. Покажіть на скриньці яку-небудь лінію. Простежте, де закінчується ця лінія. Кінцем лінії буде *точка*.

Покажіть у класі декілька точок.

Нарисуйте декілька точок.

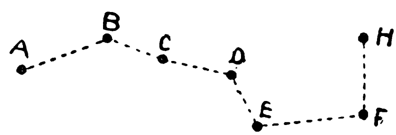


Рис. 11. Сузір'я „Віз".

Для того, щоб відрізняти точку одну від одної, треба кожній точці дати свою назву. Назвою кожної точки звичайно є одна з літер французького або латинського альфабету (рис. 11).

ВПРАВИ.

1. Розгляньте уважно форму вашого будинку. Яку форму має він без даху? Яку форму має окремо дах? Знайдіть на будинкові такі частини його, що зо всіх боків обмежені площинами. А чи немає на будинкові таких тіл, що зо всіх боків обмежені кривою поверхнею?
2. Порівняйте форму вашого будинку з хатою.

3. Дослідіть форму тих речей, куди збирають селяни свої продукти в-осени. Дослідіть форму: сарая, клуні, засіка, льоху, скрині, відра, то-що.

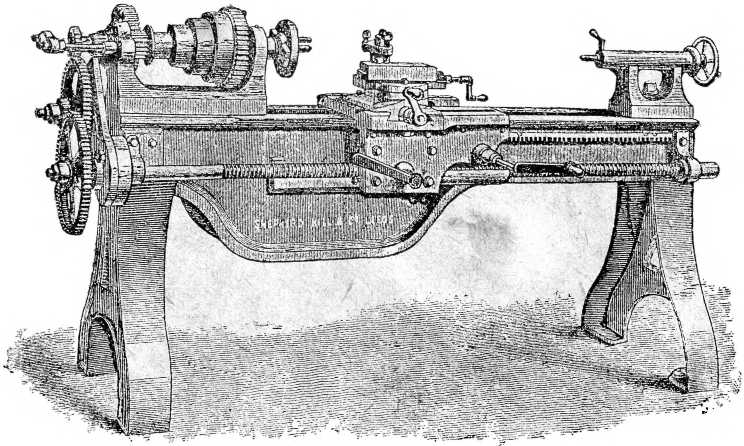


Рис. 12.

4. Знайдіть на цьому токарному варстаті частини, які мають форму знайомих вам геометричних тіл (рис. 12).

5. Коли підчас екскурсії будете на заводі, то зверніть увагу на ті форми, які мають різні машини цього заводу. Знайдіть між ними такі, що обмежені зо всіх боків площинами; знайдіть такі, які обмежені тільки кривою поверхнею. А чи не пощастить вам знайти там таке тіло, що обмежене й кривою й плоскою поверхнею?

6. Коли ви підете до вітряка, то придивіться уважно до тих головних частин його, що перетворюють рух крил вітряка на рух жорен.

Яку геометричну форму мають ці окремі частини млина (рис. 13)?

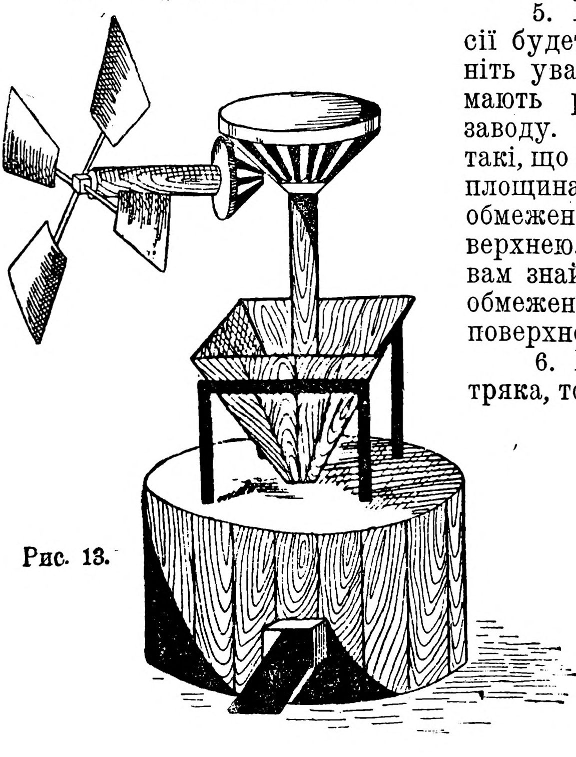


Рис. 13.

7. Коли будете оглядати на заводі паровий двигун, то зверніть увагу на механізм, що перетворює прямолінійний рух толочія парового цилiндра на круговий рух валу (рис. 14). Яку лінію описує точка *C* підчас руху толочія? А яку лінію рисує точка *B*? Простежте, яку поверхню рисує лінія *OB*. А яке тіло рисує поверхня толочія?

8. Знайдіть на паровому

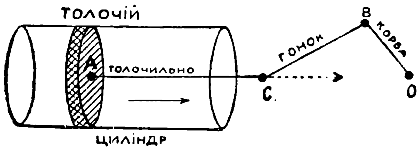


Рис. 14.

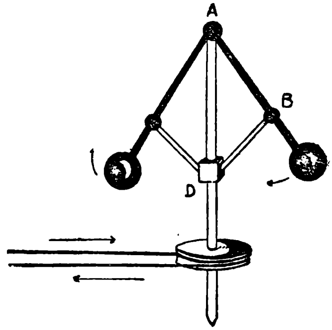


Рис. 15. Регулятор.

двигуні механізм, що регулює рівномірність руху. Цей механізм звуть регулятором (рис. 15). Простежте підчас руху, яку лінію рисує точка *B* та точка *C* регулятора. А яку поверхню рисує лінія *AC*? А лінія *DB*?

9. Виріжте з картону прямокутник. Один бік його проткніть дротиком, як показано це на рисункові 16. Швидко обертайте цей прямокутник навкруги дротика.

Яке тіло втворює при цьому обертанні ваш прямокутник?

Яку поверхню утворює при цьому обертанні проста *CD*?

Що описує проста *DA*?

Що описує точка *D*? точка *C*?

10. Виріжте з картону коло. Проткніть його дротиком по діяметру, як це показано на рисункові 17 (дротик повинен увіходити в коло щільно). Швидко обертайте коло навкруги дротика, пильнуючи, щоб дротик не хитався

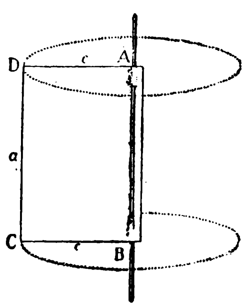


Рис. 16.

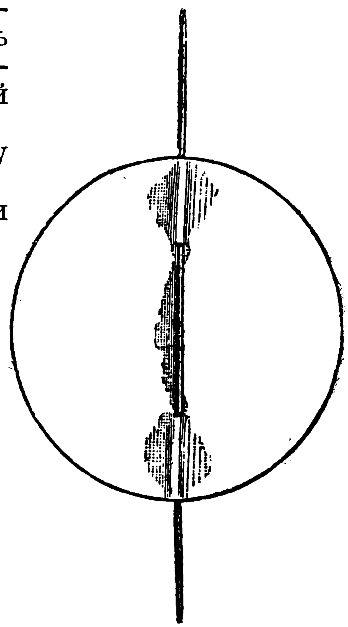


Рис. 17.

Яке тіло утворює при цьому обертанні ваше коло?

А яку поверхню описує обвід кола?

Розділ 2.

ПРОСТА ЛІНІЯ.

2. Як нарисувати просту лінію.

§ 6. Коли вам потрібно дослідити форму тієї або иншої ділянки землі (рис. 18), то ви повинні перш за все звернути увагу на ті лінії, що обмежують цю ділянку. Найчастіше поле обмежують зо всіх боків прості лінії. Дослідімо уважніше властивості цих простих ліній.

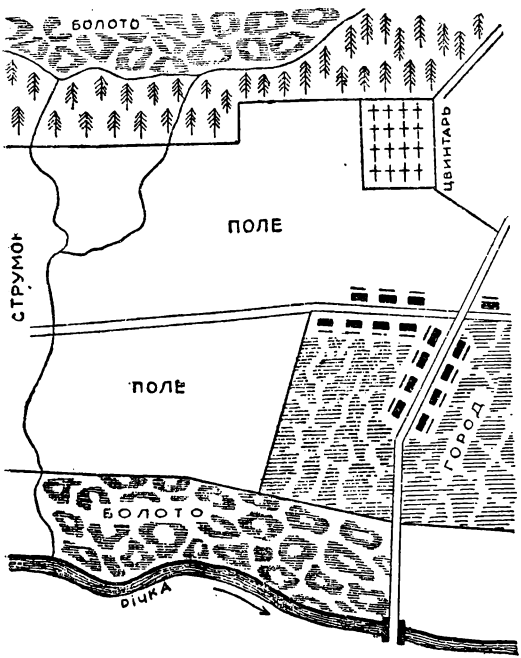


Рис. 18.

§ 7. Проста лінія та її відтинок. Нарисуйте на дошці за допомогою лінійки яку-небудь просту лінію. Подовжте її в обидва боки, наскільки дозволяє вам дошка. Чи всю просту нарисували ви? Звичайно, ні. Коли-б дошка була більша, то й просту можна було-б подовжити.

Отже, кожну просту лінію можна подовжувати без кінця в обидва боки.

Кожна проста лінія — безкрая.

Але часто цікавить нас не вся проста лінія, а тільки частина її. Частину простої звуть відтинком простої.

Двом точкам, що при кінцях відтинка, дають які-небудь назви,—наприклад, точка *В* й точка *А*, а сам відтинок читається тоді так: *ВА* або *АВ* (рис. 19).

§ 8. Як перевірити лінійку, якою рисуємо прості лінії.

Дослід 1. Нарисуйте дві які-небудь точки (рис. 19). Спробуйте через ці дві точки провести декілька простих ліній.

Вам не вдасться це зробити, бо всі ваші прості лінії будуть зливатися одна з одною.

Між двома точками можна провести тільки одну просту лінію.

Дослід 2. Ця властивість простої лінії допоможе вам „перевірити“ вашу лінійку, цеб-то довідатися, чи буде простою лінією той руб цієї лінійки, яким ви рисуєте лінії.

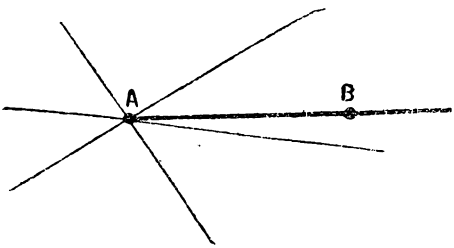


Рис. 19.

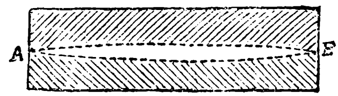


Рис 20.

Нарисуйте на папері дві точки і, приклавши до них руба лінійки, нарисуйте лінію, що проходить через обидві ваші точки (рис. 20). Після того поверніть лінійку так, щоб правий кінець її зробився лівим, і, прикладаючи її тим самим рубом до тих самих точок, знов нарисуйте лінію. Коли обидві нарисовані лінії цілком зіллються одна з одною, то ваша лінійка— „правильна“, цеб-то її руб є проста лінія. На якій властивості простої така перевірка лінійки ґрунтується?

Рис. 21.

§ 9. Як нарисувати на папері відтинок простої, завдожки рівний даному відтинкові.

Дослід 1. Візьміть досить довгу смужку з паперу, прикладіть її до нашого відтинка *AB* й позначіть на смужці кінці його (рис. 21).

Нарисувавши в себе у зшиткові яку-небудь просту довільної довжини й приклавши до неї паперову смужку, ви легко відкладете там, де схочете, даний відтинок *AB*.

Дослід 2. Коли ви маєте розвязати цю задачу як-найточніше, то візьміть циркуль з обома гострими кінцями (рис. 22).

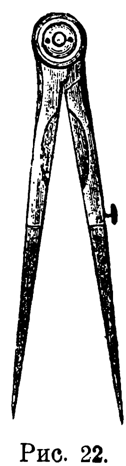


Рис. 22.

Розсуньте ніжки в циркуля так, щоб гострячки ніжок устромлено було в кінці даного відтинка *A* та *B*. Не міняючи віддалення між ніжками в циркуля, перенесіть його й поставте гострячки на ту необмежену (завдовжки) просту, що на ній хочете відкласти відтинок *AB*.

§ 10. Як позначити просту лінію на землі. На землі прості лінії позначається за допомогою тичок (рис. 23).

Нехай, наприклад, треба провести просту від точки *A* до точки *B*. Встроміть при цих точках по тичці. Самі станьте при одній з цих точок (наприклад, при *A*) лицем до точки *B*, а одного з товаришів попрохайте ставити решту тичок поміж *A*

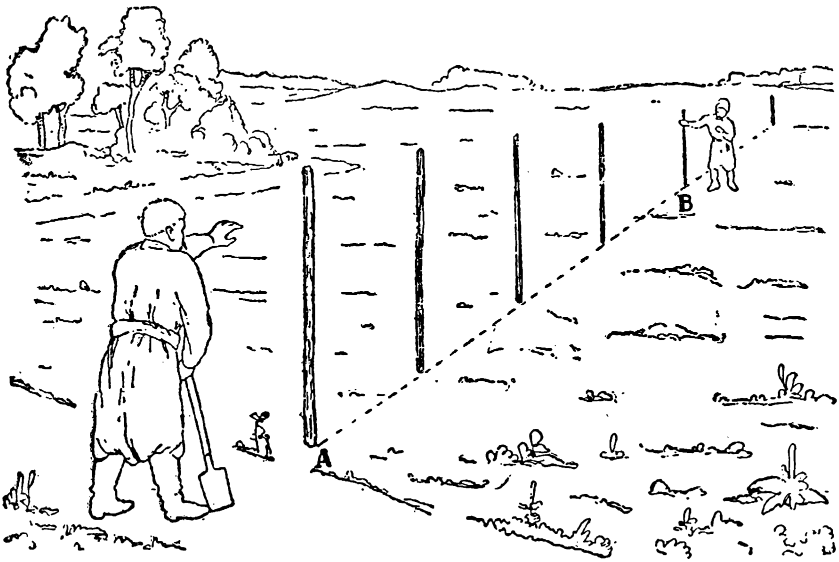


Рис. 23. Як позначають на землі прості лінії.

та *B* так, щоб коли ви будете дивитися через тичку *A* на крайню тичку *B*, то щоб усі проміжні тички закривали одна одну.

Обміркуйте тепер сами, як за допомогою тичок позначити на землі продовження простої *AB*.

3. Додавання та віднімання простих ліній.

§ 11. Як додати відтинки простих.

Задача. Теслярові потрібно зробити ось таку рамку:

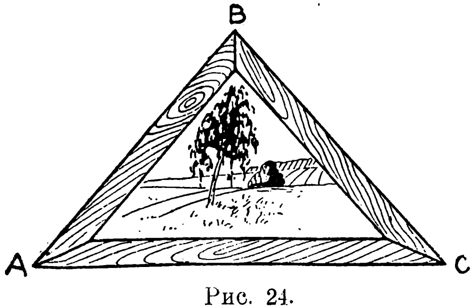


Рис. 24.

Як теслярові довідатися про те, скільки всього багету треба витратити на цю рамку?

Пояснення 1. Тесляр може на довгій багетовій рейці, з якої бажає він зробити рамку, відкласти спочатку смужку паперу, що завдовжки дорівнює бокові AB (рис. 25). Потім до неї прикласти другу смужку, що дорівнює бокові BC, й нарешті дотулити смужку, що дорівнює третьому бокові CD (рис. 25).

Рис. 25.

Тоді тесляр одержить разом відтинок LM, що завдовжки дорівнює суми всіх трьох боків нашої рамки.

Цю дію додавання можна записати так:

$$AB + BC + CD = LM$$

Пояснення 2. Коли хочете зробити додавання відтинків простих ліній точніше, то перенесіть ці відтинки не за допомогою паперових смужок, а зробіть це користуючись циркулем. Обміркуйте сами, як це найкраще зробити.

§ 12. Віднімання двох відтинків.

Задача. Теслярові треба довідатися, на скільки планка AB довша за планку CD (рис. 26).

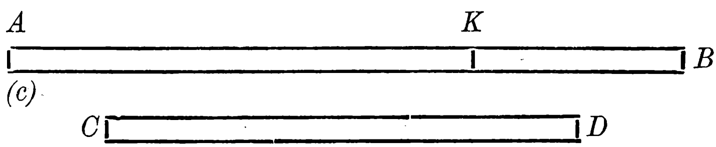


Рис. 26.

Допоможіть йому зробити це.

Пояснення. Покладіть смужку CD на AB так, щоб вони одним кінцем (A та C) злилися. Тоді відтинок KB й покаже вам, на скільки AB більше за CD.

Цю дію віднімання можна записати в такий спосіб:

$$AB - CD = KB$$

А як використувати для цієї дії циркуль?

4 Як виміряти просту лінію.

§ 13. Коли тесля в попередній задачі (стор. 12) обмірковував, який завдовжки багет треба йому взяти для рамки, він додавав безпосередньо один до одного кожен бік рамки. Але цю задачу в житті часто розвязують у такий значно простіший спосіб. Кожен бік рамки *вимірюють* якою-небудь однаковою мірою, а потім додають один до одного не самі боки, а *числа*, що одержуються після вимірювання боків. Число, що одержиться після додавання, й покаже теслярові, яку завдовжки планку треба взяти йому для рамки.

Повчімось і ми вимірювати прості лінії.

§ 14. Одиниця довжини.

Міряючи довжину простої лінії, користаються з відтинка певної довжини. Такий відтинок простої звуть *одиницею*, або *мірою довжини*.

Наріжте з соломи (або з дроту) декілька кусочків таких, щоб завдовжки рівні вони були ось якому відтинкові простої (рис. 27). Кожна з таких соломинок вподовж рівна буде одному сантиметрові. Кожну таку соломинку коротше зватимемо *сантиметр*.

Рис. 27. Сантиметр.

Рис. 28 Три сантиметри.

Нарисуйте в себе у зшиткові один сантиметр.

§ 15. Метрична система мір.

За стародавніх часів за одиницю довжини вважали довжину якої-небудь частини людського тіла. Наприклад, єгиптяни міряли просту лінію „ліктем“ (віддалення від ліктя до кінця пальців), „долонею“ (найширша частина її), довжиною ступні, „четвертю“, „кроками“, то-що. Через те, що ці частини тіла не у всіх людей завдовжки однакові, згодом кожна держава встановила свою систему мір. Зразки цих мір звуть *еталонами*.

Тепер уживається метричної системи мір. За основу її береться відтинок простої, рівний (приблизно) $\frac{1}{40.000.000}$ частині меридіяна, що проходить через місто Париж. Відтинок цей зветься *метром*. *Метр рівний є (приблизно) 1,4 аршина*, цеб-то він майже в півтора рази довший за аршин; точніше в метрі $1^1/_2$ аршини без $1^1/_2$ вершків.

Нарисуйте на дошці відтинок один метр завдовжки, а під ним відтинок 1 арш. завдовжки.

Щоб міряти дуже довгі прості лінії, заведено такі міри: кожні 10 метрів названо *декаметром* (по-грецькому *дека*—десять). Відміряйте на подвір'ї віддалення, рівне декаметрові. Кожні 10 декаметрів, цеб-то 100 метрів, звуть *гектометром* (*гекто*—по-грецькому—сто), і, нарешті, довжину 10 гектометрів, цеб-то 1000 метрів, назвали кілометром (кіло—по-грецькому—тисяча). Кілометр небагато коротший за верству.

Щоб міряти прості, коротші від метра, вживається таких одиниць. Кожну десяту частину метра звуть дециметром (деци—по французькому — десята). Десяту частину дециметра, цеб-то соту частину метра, звуть сантиметром (санти — по-французькому сота). Нарешті, десяту частину сантиметра, цеб-то тисячну частку метра, звуть мілі-метром (мілі—по-французькому—тисячна). Таким чином, матимем ось-яку таблицю всіх метричних одиниць:

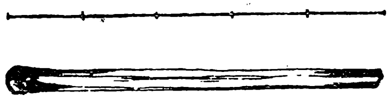


Рис 29. Сірник має довжину 5 сантиметрів.

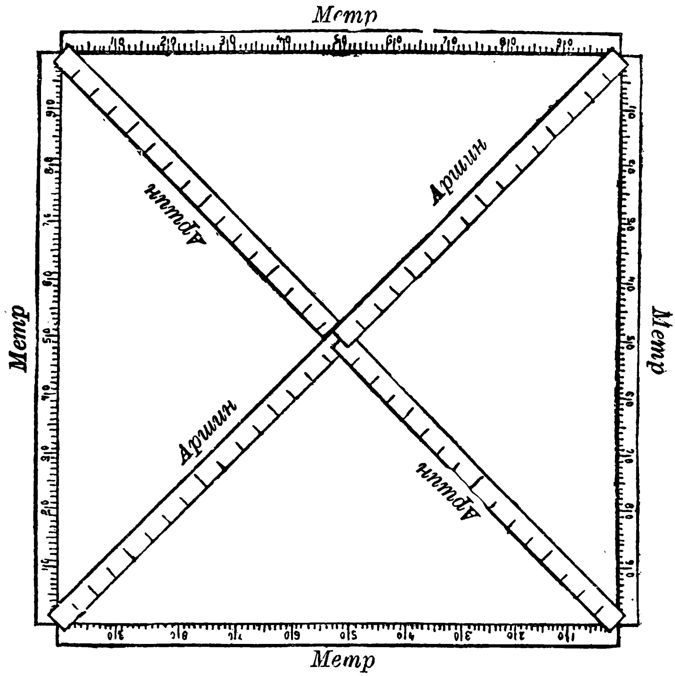


Рис. 30.

Таблиця метричних мір довжини.

Кілометр має	1000 метрів.
Гектометр „	100 метрів.
Декаметр „	10 метрів.
Метр приблизно	1,4 арш.
Дециметр становить	1/10 метра.
Сантиметр „	1/100 метра.
Міліметр „ . . .	1/1000 метра.

З цих мір найчастіше вживається кілометра, метра, сантиметра та міліметра.

Щоб ясніше уявляти собі звязок цих метричних одиниць з старими російськими одиницями, треба пам'ятати, що кілометр трохи менший за верству (0,9 верстви), метр у півтора (приблизно) рази більший за аршин (1,4 аршина), кожні 2 метри трохи менші за сажень, кожні $2^1/_2$ сантиметри, або 25 міліметрів, дають дюйм (довжина звичайного сірника = 5 сантиметрів). Слово „кілометр" у дальшому курсі будемо писати скорочено так: „км", сантиметр—„см", міліметр—„мм".

§ 16. Як міряти просту лінію на папері.

Зробіть вузеньку смужку з картону. На одному боці її відкладіть сантиметри. На кінці кожного сантиметра позначіть цифрами, скільки відкладено сантиметрів, як зроблено це на рис. 31.

Рис. 31. Вимірна лінійка.

Довжину якого-небудь відтинка простої AB (рис. 32) міряють так:

Приставимо до цього відтинка вимірну лінійку так, щоб початок поділок на лінійці („нулева" поділка її) припав на один кінець простої (на нашому рисункові—кінець A).

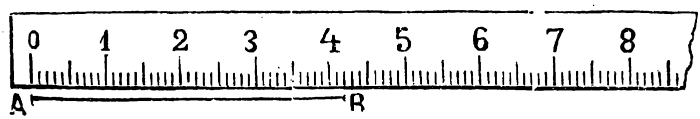


Рис. 32.

Треба ще тільки зазначити рисками на нашому відтинкові частини, рівні одному сантиметрові, та полічити їхнє число. (Скільки на нашому відтинкові відклалося сантиметрів?).

На тій частині простої, що залишилася й що менша від одного сантиметра, відкладімо міліметри. Їх відкладеться в нас 2. Отже, довжина простої $AB = 4$ сантиметри й 2 міліметри.

§ 17. Як міряють просту лінію на землі. Нехай вам треба поміряти віддалення від ґанку до воріт. Поставте сторч дві тички: одну біля ґанку, а другу біля воріт, а потім позначіть усю просту, що її міряєте, проміжними тичками так, як показано в § 10. Так позначену просту зміряйте рулеткою, на якій позначено метри й сантиметри.

Замість рулетки можна взяти довгий мотуз. На цьому мотузові в кінці кожного метра прив'яжіть невеличкі бляшки з цифрою, що означає, скільки саме метрів закінчується біля цієї бляшки. Кожен метр можна ще поділити на десять дециметрів.

§ 17а. Чи можемо ми без жодної помилки виміряти просту лінію.


Рис. 33. Рулетка.

Задача 1. Ви, укладаючи вдовж кімнати вимірний мотуз, поділений на метри та дециметри, довідалися, що на цій довжині укладається 8 метрів 5 дециметрів, та ще залишається остача менша за один дециметр. На цю остачу можна було-б укладати дрібнішу одиницю: сантиметр, то-що. Але в цьому немає практичної потреби, а тому ми, не звертаючи уваги на цю остачу,

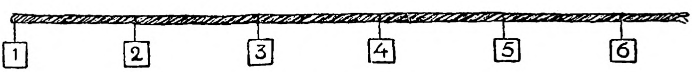


Рис. 34.

що менша за 1 дециметр, можемо сказати, що коли виміряти довжину кімнати з т о ч н і с т ю д о 1 д е ц и м е т р а, то вона буде дорівнювати 8 м 5 дм. Зрозуміти це треба так: „Ми, вимірюючи довжину кімнати, зробили помилку меншу за 1 дециметр“.

Задача 2. Виміряйте довжину цього олівця з точністю до 1-го [redacted]. сантиметра

Прикладаючи до нього вимірну лінійку, що поділена на сантиметри, ми побачимо, що наш олівець завдовжки трохи більший за 8 см і трохи менший ніж 9 см, а тому ми можемо сказати, що наближена довжина олівця буде або 8 см, або 9 см. В обох випадках ми помилилися менш ніж на 1 см.

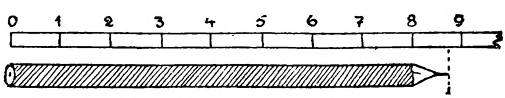


Рис. 34а.

Коли ми будемо вважати за довжину олівця 8 см, то ми беремо тоді наближене значіння довжини „з н е д о с т а ч е ю“. А коли візьмемо за довжину 9 см, тоді ми знайдемо цю довжину „з п е р е в и ш к о ю“.

Подивіться уважно на рисунок 34а та скажіть, яке значіння в цьому випадкові нам корисніше взяти для довжини олівця: з недостачею, чи з перевишкою? Чому?

ВПРАВИ.

1. Коли будете на селі, то спробуйте нарисувати форму тієї ділянки, що ви її будете досліджувати. Якими лініями обмежена ця ділянка?

Знайдіть між ними прості, ламані та криві лінії. Як знайти суму всіх боків (периметр) цієї ділянки?

2. Нарисуйте фігуру вашої садиби. З яких боків вона обмежена кривими, а з яких простими лініями?

Обчисліть, який завдовжки паркан треба зробити, щоб огородити зо всіх боків вашу садибу.

3. Станьте з яким-небудь учнем коло двох телеграфних стовпів, що стоять на кінцях якої-небудь вулиці. Скажіть, чи всі проміжні стовпи теж на одній простій? Як про це довідатися?

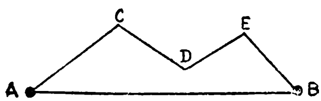


Рис. 35.

4. Зміряйте на око віддалення від воріт до вашого будинку.

5. Скажіть „на око", яка завширшки ваша вулиця. Перевірте відповідь, безпосередньо змірявши ширину вулиці рулеткою або вимірним мотузом.

6. Змірявши грубину цеглини й полічивши кількість рядів її, вирахуйте висоту вашого будинку.

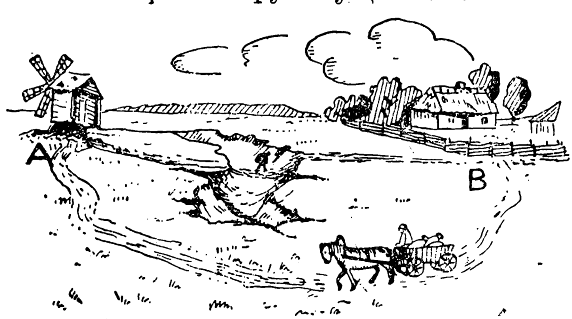


Рис. 36. Найкоротше віддалення між двома точками A та B є проста лінія.

7. Зміряйте найкоротше віддалення між точками A та B. „Випряміть" ламану $ACDEB$ та покажіть, на скільки проста AB коротша за цю ламану лінію (рис. 35).

8. Чому, коли дорога йде кривою лінією, роблять стежку „навпростець", по простій лінії (рис. 36)?

9. Якою одиницею довжини зручніше міряти: віддалення від Києва до Харкова, грубину зшитка, віддалення від землі до сонця, ширину вулиці, грубину волосу, висоту рослини, довжину пальця, грубину дошки?

10. Спробуйте нарисувати „від руки" сантиметр, міліметр, метр. Перевірте довжину їх лінійкою.

11. Зміряйте довжину вашого кроку і полічіть, скільки кроків робите ви, коли йдете з дому до школи. Довідай-

теся, скільки метрів від вашого будинку до школи. А скільки це буде сажнів?

12. Метр це майже 1,4 аршина. Вирахуйте, яку частину верстви становить кілометр.

13. Зробіть мотузок завдовжки декаметр (десять метрів) і довідайтеся, у скільки разів приблизно декаметр більший за сажень.

14. Тичками зазначіть на подвір'ї просту лінію завдовжки гектометр (сто метрів) і зміряйте її сажнями.

15. Назвіть у вашому місті або в селі два таких будинки, щоб віддалення між ними було приблизно один кілометр.

16. Скільки мусите ви зробити кроків, щоб пройти один кілометр?

17. Зміряйте лінійкою ширину й довжину вашого стола.

18. Скажіть „на око", скільки метрів має довжина вашої кімнати, і перевірте відповідь безпосереднім мірянням.

19. Зміряйте довжину рядка в цій книжці.

20. Зміряйте висоту літери в цій книжці.

21. Нарисуйте довільний відтинок простої лінії і скажіть „на око", який він завдовжки. Перевірте відповідь безпосереднім мірянням.

22. Нарисуйте „на око" відтинок простої лінії завдовжки 3 см; 5 см; 9 см; 40 мм; 65 мм.

23. За допомогою лінійки нарисуйте просту лінію завдовжки 2 см; 6 см; 12 см.

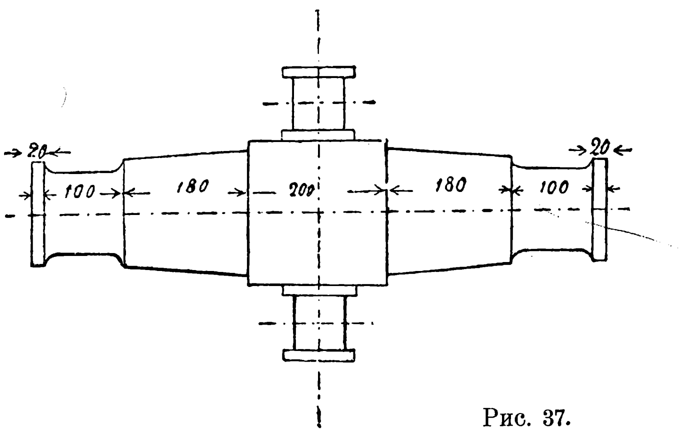


Рис. 37.

24. За допомогою лінійки нарисуйте такі відтинки: 6 см і 2 мм; 3 см і 7 мм; 3 см і 5 мм; 8 см і 3 мм; 4 см і 1 мм; 9 см і 9 мм.

25. Нарисуйте прості лінії завдовжки 29 мм; 36 мм; 81 мм; 17 мм і поділіть кожну з них на см та мм.

26. На рис. 37 показано довжину кожної частини машини на сантиметри. Яка завдовжки ціла машина?

27. Знайдіть „на око“ довжину кожного з цих відтинків. Перевірте відповідь безпосереднім мірянням (рис. 38).

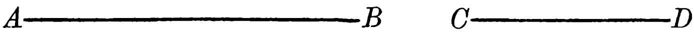


Рис. 38.

28. На рис. 39 помилково забули зазначити довжину найгрубшої частини головного валу. Проте, чи не можна довідатися, який буде завдовжки цей вал?

29. Висота стіни $AB = 4$ метри (рис. 40). Від підлоги до вікна $AC = 90$ см, а від стелі до вікна $BD = 160$ см. Яке заввишки буде вікно?

30. $BC = 3^1/_2$ метри (рис. 40). $BD = 2$ метри. $AD = 2^1/_2$ метри. Знайдіть віддалення від підлоги до вікна (цеб-то AC).

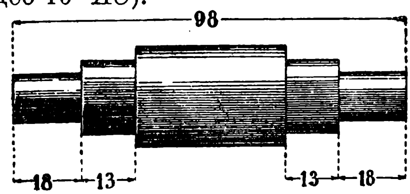


Рис. 39.

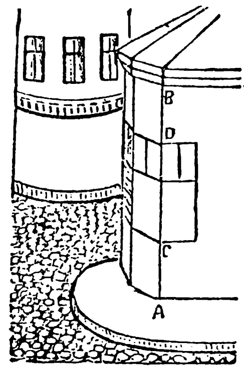


Рис. 40

31. До відтинка AB додайте відтинок CD (рис. 38).

32. Скажіть спочатку „на око“, а потім безпосереднім мірянням знайдіть довжину такої лінії (рис. 41).

33. Від AB відніміть CD (рис. 38).

Рис. 41.

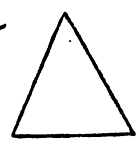


Рис. 42.

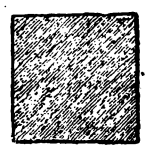


Рис. 43.

34. Яка з цих простих найдовша? А яка найкоротша? А на скільки? Перевірте це безпосереднім мірянням (рис. 38).

35. Нарисуйте таку просту лінію, щоб вона рівна була сумі [1]) боків такого трикутника (рис. 42).

36. Нарисуйте суму [1]) боків такого квадрата (рис. 43).

[1]) Суму всіх боків фігури звуть її периметром.

37. Маємо три такі відтинки (рис. 44).

Рис. 44.

Нарисуйте відтинок:

$a + b + c =$ $\qquad$ $a - b - c =$

$a - b + c =$ $\qquad$ $a + b - c =$

38. Нарисуйте (рис. 44):

$2a + b =$ $\qquad$ $b + 3c =$ $\qquad$ $2b - a =$

$2a - 3c =$ $\qquad$ $2b + 2c =$ $\qquad$ $3a - 2c =$

39. Зробіть такі дії з відтинками a, b, c й порівняйте між собою наслідки цих дій:

$a - (b + c) =$ $\qquad$ $a - b - c =$

$a - (b - c) =$ $\qquad$ $a - b + c =$

Розділ 3.

К У Т.

5. Кут та його рисування.

§ 18. Кут, його боки та вершина. Фігура тієї або иншої ділянки, садиби, то-що залежить не тільки від довжини ліній, що обме-

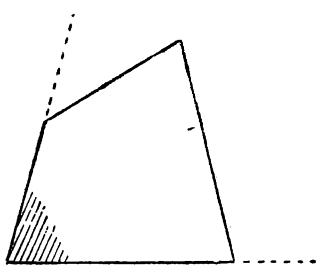


Рис. 45.

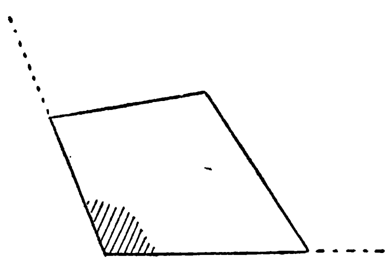


Рис. 46.

Рис. 45. 46. Ці дві ділянки мають різний вигляд тільки через те, що межі їх перетинаються під різними кутами.

жують її зо всіх боків: на неї впливає ще й н а п р я м о к, в якому перетинаються кожні дві сусідні межі її.

Дві прості лінії перетинаючись утворюють таку фігуру (рис. 47).

Цю фігуру звуть **кутом**. Покажіть на рис. 47 обидва боки. Прочитайте їх (бік AO; бік BO). Покажіть ту точку, де перетинаються боки. Цю точку (O) звуть **вершиною** кута. Самий кут читають і записують так: $\angle AOB$ або $\angle BOA$ (назву вершини треба писати посередині). Значок $\angle$ заміняє слово „кут“.

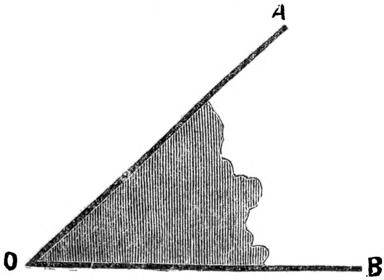


Рис. 47.

§ 19. Як порівняти між собою два кути. В нашому місті головну вулицю перетинають бічні вулиці так, що утворюють з нею ось які кути (рис. 48):

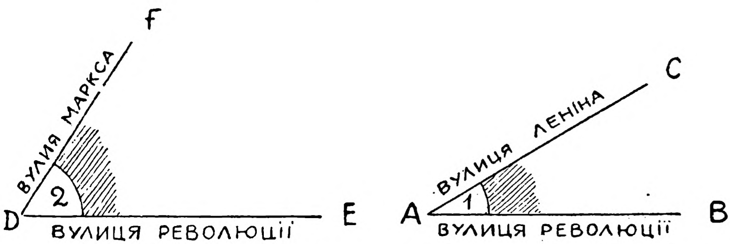


Рис. 48.

Порівняємо між собою ці кути.

Візьміть дві дерев'яні або з картону лінійки (а ще краще дві дротини) й на одному кінці сколіть їх шпилькою так, щоб лінійки ці могли повертатись, як ніжки в циркуля.

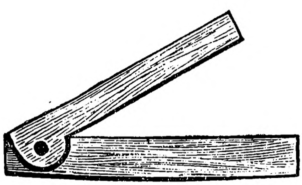


Рис. 49.

Таке приладдя вживають теслярі. Його звуть **малкою** (рис. 49).

За допомогою цієї малки накладіть перший кут на другий так, щоб вершини їхні та яка-небудь пара боків припали одне на одного (збіглися) та щоб самі кути лягли-б один на одного.

Якщо й друга пара боків у наших кутах припаде одна на одну так, як це сталося на рисункові 50, то такі два кути вважається за рівні.

Якщо-ж другий бік кута 2 не припаде на відповідний бік кута 1 (не збіжиться), а піде так, як пішов він на рис. 51, то тоді кут 2 вважається за менший від кута 1.

Пам'ятайте тільки, що довжина боків на великість кута не впливає (чи будуть наші вулиці довші чи коротші,

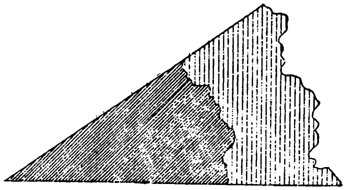


Рис. 50.

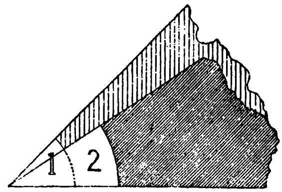


Рис. 51.

від цього кут між ними не змінюється; він буде змінятися тільки тоді, коли змінюється напрямок вулиць).

§ 20. Як додати два кути. За допомогою малки нарисуйте спочатку кут, рівний одному з наших кутів, наприклад, кут 1. Потім за допомогою тієї самої малки до цього кута прикладіть кут 2 так, щоб ці кути припали вершиною та боком один до одного так, як зазначено на рисункові 52.

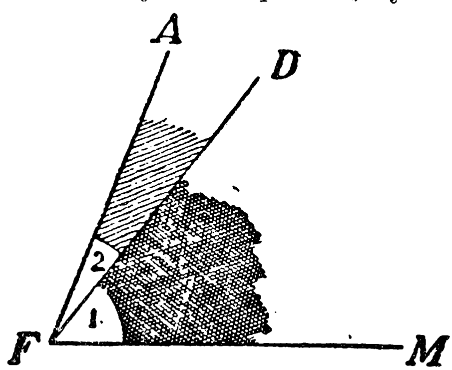


Рис. 52.

Матимемо один великий кут: $\angle AFM$ (рис. 52). Кут цей звуть сумою наших кутів. Записати дію додавання можна так:

$$\angle AFM = \angle DFM + \angle AFD.$$

6. Кути гострі, тупі та прямі.

§ 21. Суміжні кути. Від нашої головної вулиці відходять бічні вулиці в такому напрямкові (рис. 53 та рис. 54):

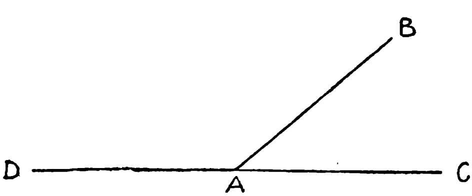


Рис. 53.

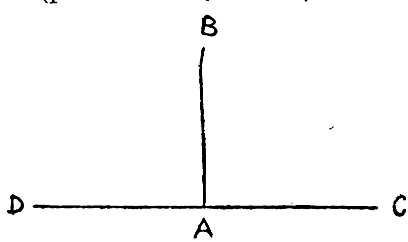


Рис. 54.

Кожна ця бічна вулиця (AB) утворює з головною вулицею (DC) два кути.

Легко помітити, що два кути, які утворилися, мають один спільний бік (який?), два инші боки (*AD* й *AC*) утворюють одну просту *DC*. Два такі кути звуть суміжними кутами.

§ 22. Прямий кут та перпендикуляр. На рис. 54 бічна вулиця утворює з головною вулицею два сумежні кути, що один

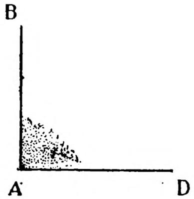


Рис. 55.
Прямий кут.

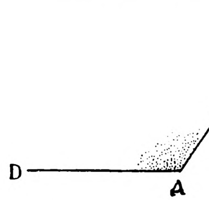


Рис. 56.
Тупий кут.

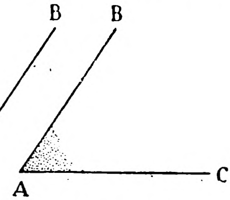


Рис. 57.
Гострий кут.

одному рівні. (Як перевірити це?). Кожен з двох рівних сумежних кутів звуть прямим кутом (подивіться на рис. 55).

А про вулицю *AB*, що утворила прямий кут з *AD*, кажуть, що вона перпендикулярна до *AD*.

§ 23. Тупий та гострий кут. На рис. 53 бічна вулиця *AD* утворила не однакові кути: праворуч утворився кут ($\angle BAC$) менший від прямого.

Кут, менший від прямого, звуть гострим кутом (подивіться на рис. 57).

Ліворуч утворився кут $\angle BAD$ — більший від прямого. Кут, більший від прямого, звуть тупим кутом (подивіться на рис. 56).

7. Прямий кут і перпендикуляр.

§ 24. Як рисувати прямі кути на папері. Щоб рисувати прямі кути на папері, можна вживати таке приладдя. Візьміть аркуш паперу довільної форми. Зігніть його вдвоє по простій лінії, а потім складіть його вчетверо. Ви й одержите з паперу прямий кут (рис. 58), яким дуже зручно рисувати прямі кути.

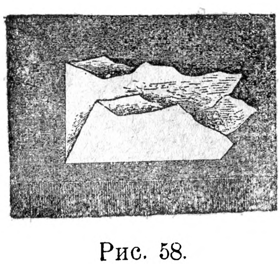


Рис. 58.

Щоб рисувати прямі кути, вживається ще приладдя, що зветься косинцем (рис. 59). Де в нього прямий кут? Де вершина та боки цього кута?

Розвяжіть за допомогою косинця, або паперового прямого кута такі задачі:

Задача 1. Нарисуйте просту AB й позначіть на ній яку-небудь точку C. Проведіть через точку C просту так, щоб вона з першою простою AB становила прямий кут, себ-то щоб ця проста була перпендикуляром до AB в точці C. Скільки таких „перпендикулярів“ удасться вам нарисувати?

Задача 2. Нарисуйте просту AB й поза нею точку C. Треба через точку C провести просту так, щоб з AB утворювала вона прямий кут (рис. 59).

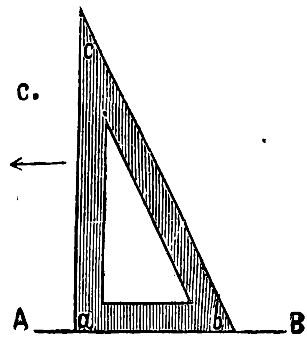


Рис. 59.

Инакше кажучи, треба з точки C спустити на просту AB перпендикуляр.

Пояснення. Для цього треба косинець прикласти так, щоб його бік ab ліг на нашу просту AB (рис. 59). Далі треба косинець посовувати до точки C так, щоб його бік ab увесь час сунувся по AB доти, доки другий бік прямого кута ac зустріне точку C (рис. 59).

Скільки таких перпендикулярів удасться вам спустити з точки C на просту AB?

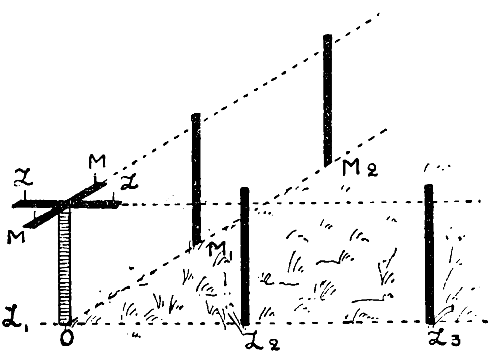


Рис. 60.

§ 25. Як будувати на землі прямі кути. Щоб збудувати прямий кут на землі, вживають екера. На подвір'ї позначіть тичками яку-небудь просту лінію. На рисункові 60 цю просту позначено L_1L_2. Далі на цій простій позначіть яку-небудь точку, наприклад, точку O. Треба за допомогою екера провести через цю точку O просту, що утворює прямий кут з першою простою.

Поставте екер при кілку O так, щоб палка екера була строго вертикальна (сторчова) (це треба перевірити прямовисом) та щоб два гострячки екера (наприклад, LL) стали в напрямкові першої простої L_1L_2.

Дивіться тепер вподовж гостряків MM, а ваш товариш нехай ставить ряд тичок M_1M_2 так, щоб вони були продовженням простої MM.

Покажіть той прямий кут, що утворився.

8. Як міряти кути.

§ 26. Прямий кут, як одиниця міряння кутів. Щоб точніше порівнювати кути, треба навчитися міряти їх. А для цього треба перш за все прийняти який-небудь кут за одиницю міряння й порівнювати з ним розмір усіх инших кутів. З таким кутом, що скрізь має однаковий розмір, ми тільки-що познайомилися: це—прямий кут.

Проте, прямий кут, яко одиниця міряння, має одну незручність; він занадто великий: всі гострі кути—менші від прямого, а тому їх доведеться означати дробовими частками прямого кута, а це буде дуже незручно в різних обчисленнях.

От через що ще за давніх часів беруть за одиницю міряння кута не цілий прямий кут, а тільки певну частину його.

Розгляньмо-ж ті засоби, якими можна поділити прямий кут на певну кількість рівних частин.

§ 27. Коло та його дуга. Радіус. Діяметр. Нарисуйте циркулем коло. Де його центр? Де радіус? Проведіть діяметр цього кола. На скільки рівних частин поділив він коло? Спробуйте поділити коло двома діяметрами на 4 рівні частини. Який кут утворили ці діяметри? Дугу (AB), що лежить між боками прямого кута, поділіть „на око“ на дві рівні частини. Точку поділу сполучіть радіусом з центром. На скільки рівних частин поділили ви тоді прямий кут? (Покажіть на рис. 61 кут, що становить $1/2$ прямого кута). Спробуйте поділити дугу AB „на око“ на 6 рівних частин. Сполучіть точки поділу з центром. На скільки рівних частин поділили ви тоді ваш прямий кут? (Покажіть на рис. 61 кут, що становить $1/6$ частину прямого кута).

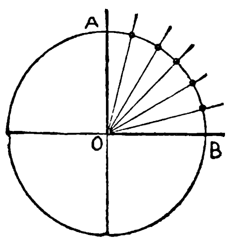


Рис. 61.

Але ділити дугу „на око“ не зручно. Краще використовувати для цього приладдя, що зветься **транспортиром** (рис. 62).

§ 28. Кутовий градус. Нарисуйте прямий кут (рис. 63). Накладіть на цей кут ($\angle MOL$) транспортир так, як зазначено на рисункові 63. Тоді між боками прямого кута ляже дуга транспортира, що поділена на 90 рівних частин.

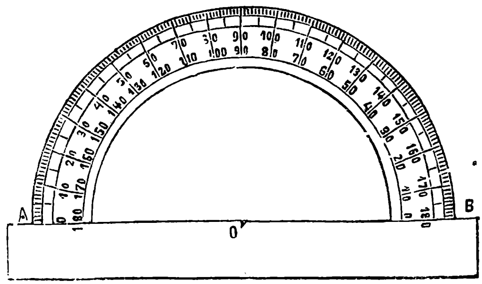


Рис. 62.

Сполучіть променями ці точки поділу транспортира (вони зазначені на транспортирові рисками з відповідною цифрою) з вершиною прямого кута.

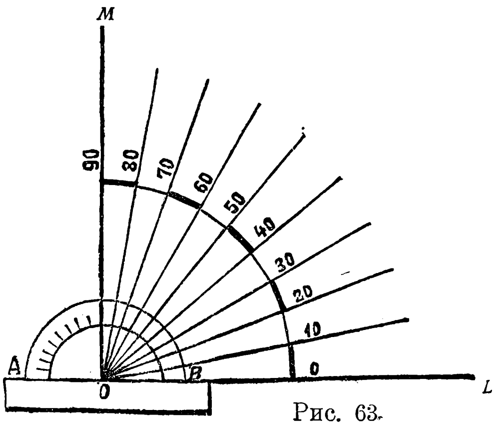


Рис. 63.

Тоді ви й поділите ваш прямий кут на 90 рівних кутів.

Кожен маленький кут, що становить 90-ту частину прямого, будемо звати кутовим градусом (рис. 64).

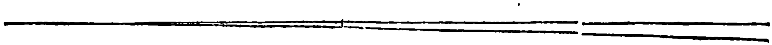


Рис. 64. Тут нарисовано один кутовий градус.

Ним ми й будемо далі міряти всі кути [1]).

---

[1]) Щоб міряти кути, менші за один градус, поділяють кутовий градус на 60 рівних частин і кожен такий кут називають кутовою минутою; нарешті, кутову минуту поділяють ще на 60 нових кутиків і кожен з них називають кутовою секундою.

Слово „градус“, щоб коротше було, заміняють таким значком ^{0}, слово „минута“—такою рискою$'$, а слово „секунда“—двома рисками$''$; тому „$25^0 15' 40''$“ треба читачи так: „двацять п'ять градусів, п'ятнацять минут і сорок секунд“.

§ 29. Як міряти кут транспортиром.

Задача. Теслярові треба склеїти дві планки в такий спосіб (рис. 65). Під яким кутом мусять перетинатися ці планки?

Пояснення. Наложіть транспортир на кут LMN так, щоб центр транспортира (точка O) припав якраз на вершину кута M. Повертайте потім транспортир навколо вершини M доти, доки проста OB припаде на бік MN. Залишається тепер полічити на дузі транспортира те число кутових градусів, що з них складається наш кут. Наприклад, кут LMN матиме 35 градусів. Замість слова „градус“ пишуть такий значок ^{0}. Тому можемо написати так:

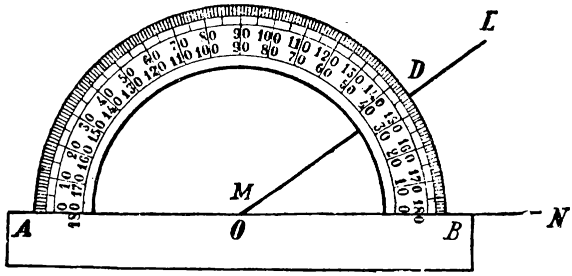


Рис. 65.

$$\angle LMN = 35^0.$$

§ 30. Як міряти кут на землі.

Задача. Дві межі перетинаються під таким кутом (рис. 67). Як виміряти, скільки градусів вміщає цей кут?

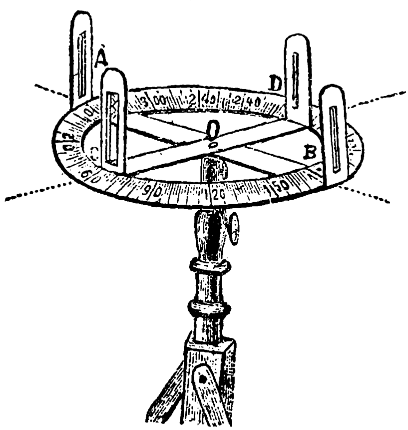


Рис. 66. Астролябія.

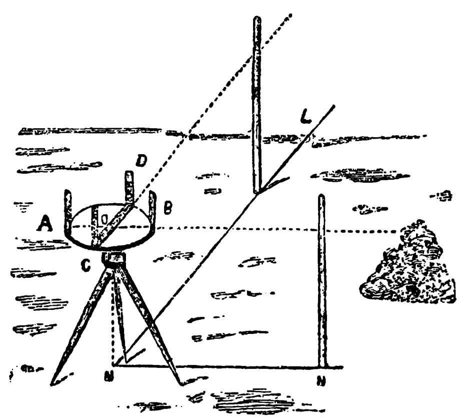


Рис. 67. Міряння кутів астролябією.

Пояснення. Кути на землі міряють астролябією (рис. 66).

Поставте астролябію на вершині кута M (досягти цього допоможе простовис). Коло астролябії треба поставити поземно, так, щоб непорушну лінійку AB направлено було по одному з боків MN того кута, що ви міряєте.

Потім другу рухому лінійку CD треба поставити в напрямкові другого боку ML нашого кута.

Тепер залишається зміряти кут BOD позначеними на колі поділками.

9. Властивість сумежних кутів.

§ 31. Скільки прямих кутів можна одержати з двох сумежних кутів. Нарисуйте на папері два сумежні кути (рис. 68).

З двох сумежних кутів стає два прямі кути.

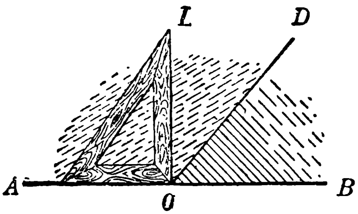


Рис. 68

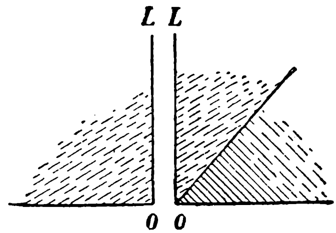


Рис. 69.

Від тупого кута за допомогою косинця відріжте один прямий кут (рис. 68 покаже вам, як це треба зробити), а ту частину тупого кута, що залишилася, додайте до другого сумежного кута (рис. 69).

За допомогою косинця дізнайтеся, який буде цей новий кут. Скільки прямих кутів маєте ви з двох сумежних кутів?

Вислід. Отже, з двох сумежних кутів, що нарисували ви й ваші товариші, вам удалося здобути два прямі кути.

Тому що два прямі кути мають 180° (через що?), цю властивість сумежних кутів можна записати так:

$$\angle BOD + \angle AOD = 180^0.$$

10. Вершкові кути.

§ 32. Які кути звемо вершковими. Зверніть увагу на кути, що їх утворюють ножиці. (На рис. 71 ці кути зазначено № 1 та № 2).

Нарисувати ці кути можна в такий спосіб:

Нарисуйте який-небудь кут, наприклад, BAC (рис. 71). Подовжте обидва боки його так, щоб подовження цих боків утворило новий кут.

Отже, боки в другого кута ($\angle EAD$) — це подовжені боки першого кута ($\angle BAC$). Такі два кути звуть кутами **вершковими** (рис. 71).

§ 33. Властивість вершкових кутів.

Дослід. Придивіться уважно до вершкових кутів, що їх утворюють на рис. 70 ножиці. Чи не однакові ці кути? Перевірте це транспортиром. Як буде мінятися кут $\angle DAE$ (рис. 71), коли ви почнете „закривати" ножиці? А як в той час буде мінятися вершковий до нього кут $\angle CAB$? А чи будуть у цьому новому положенні ці вершкові кути дорівнювати один одному?

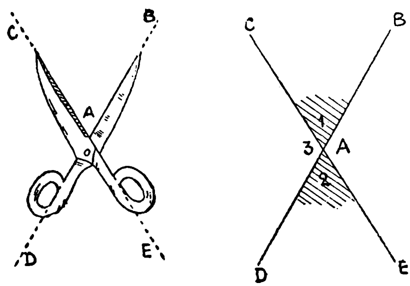


Рис. 70 та рис. 71. Вершкові кути.

Доведення. Пересвідчимося тепер, що не тільки ті кути, що ви нарисували, але що й геть усі вершкові кути мають цю властивість. Нарисуйте які хочете два вершкові кути і, щоб зручніше було, позначіть їх числами. Будемо порівнювати кожен з них з сусіднім кутом $\angle 3$ (рис. 71). Кут $\angle 1$ з кутом $\angle 3$ — це пара сумежних кутів (через що?). Отже разом матимуть вони 180^0. Тому, щоб дізнатися, скільки у вершковому куті $\angle 1$ буде градусів, треба від 180^0 відняти число градусів, що є в куті $\angle 3$. Наслідок наших обчислень запишемо так:

$$\angle 1 = 180^0 - \angle 3.$$

Вершковий кут $\angle 2$ разом з тим самим кутом $\angle 3$ має також 180^0. (Через що?).

Отже

$$\angle 2 = 180^0 - \angle 3.$$

Порівняйте ті вирази, що маємо для $\angle 1$ й $\angle 2$. Бачимо, що кути ці рівні.

Отже, **всі вершкові кути один одному рівні.**

ВПРАВИ.

1. На рис. 72 дається схема руху парового двигуна. Простежте на цій схемі, як перетворюється простолінійний рух толочія N на обертання валу B.

Яку лінію рисує „цапфа“ *C*? Простежте за кутами $\angle ACB$, $\angle CBA$ та $\angle CAB$. Як зміняються вони, поки толочій зробить свій повний „хід“?

2. Довідайтеся спочатку „на око“, скільки градусів має той кут, що його утворюють дві перехресні вулиці, а потім відповідь перевірте, вимірявши цей кут.

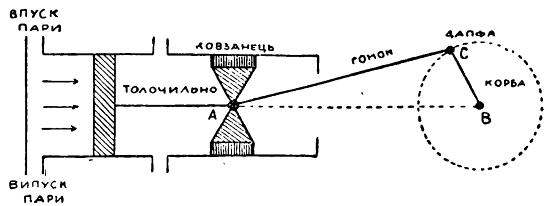


Рис. 72.

3. Придивіться уважно до цього малюнка й скажіть, як можна відбити на полі прямий кут без екера.

Спробуйте й ви це зробити.

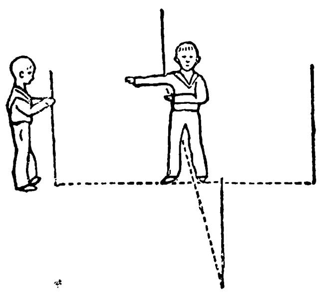


Рис. 73.

4. Приладнайте в середині екера компас. Поставте екер серед двору й за допомогою компаса проведіть од екера прості лінії на південь, північ, схід та захід. Під яким кутом ці лінії перетинаються?

Назвіть декілька великих міст, що лежать у цих напрямках. Знайдіть ці міста на мапі.

5. В центрі кола астролябії приладнайте компас так, щоб стрілка його мала такий напрямок, як нерухома лінійка *AB* (рис. 66). Тичками проміряйте такі напрямки: північ; південь; схід; захід; південний схід; північний захід; північний схід; південний захід.

6. За допомогою е к е р а та вимірного ланцюга довідайтеся, на якому віддаленні стоїть колодязь у вашій садибі від усіх її меж? А від вулиці?

7. Чи можна цей кут (рис. 74) назвати так: $\angle BAC$?

8. Нарисуйте декілька таких літер, щоб у них усі лінії сходилися (перетиналися) під гострим, тупим та прямим кутом.

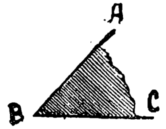


Рис. 74.

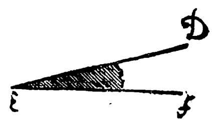


Рис. 75.

9. Два шляхи, перетинаючись, ідуть—один на південний захід, а другий на південний схід. Під яким кутом перетинаються вони? Нарисуйте цей кут.

10. У якого з цих кутів (рис. 74, 75) боки довші? А який з цих кутів більший?

11. З точки K до простої LM проведіть перпендикуляр (рис. 76).

12. Скажіть „на око“, на якому віддалені від простої CD (рис. 77) лежить точка O. Відповідь перевірте, вимірявши довжину перпендикуляра від точки O до простої CD.

Рис. 76.

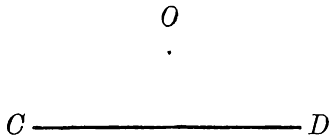


Рис. 77.

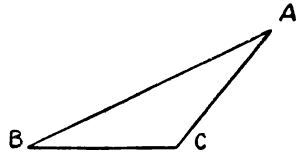


Рис. 78.

13. Із точки A (рис. 78) спустіть перпендикуляр на просту BC.

14. Маємо трикутник LMN. З його вершин L, M, N проведіть перпендикуляри на протилежні боки. У скількох точках ці перпендикуляри перетнуться?

15. Який з цих кутів найбільший (рис. 79)?

16. Скільки градусів має кут між стрілками годинника о 3 год.; о 10 год. 30 хв.; о 3 г. 25 хв.?

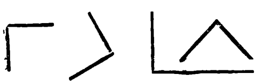


Рис. 79.

17. Нарисуйте циферблат годинника так, щоб стрілки його показували пів на п'яту, десять хвилин на сьому годину. Який кут утворюють стрілки?

18. Колесо у возі має 14 спиць. Який кут утворюють дві сусідні спиці цього колеса?

19. Кут 105^0 буде гострий чи тупий? а кут 92^0?

20. За допомогою транспортира нарисуйте кути: 105^0; 15^0; 75^0; 64^0; 170^0; 135^0; 25^0.

21. Нарисуйте просту AB й на ній точку C. Біля точки C на простій AB нарисуйте кут 127^0; 27^0; 154^0; 54^0.

22. Нарисуйте „на око“ кути 30^0; 45^0; 90^0; 135^0. Перевірте мірянням!

23. Нарисуйте за допомогою транспортира такі кути, щоб вони рівні були таким кутам (рис. 80).

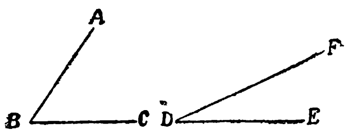


Рис. 80.

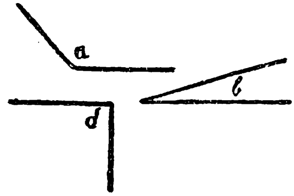


Рис. 81.

24. Скажіть „на око“, скільки градусів має кожен з цих кутів, і перевірте відповідь мірянням (рис. 81).

25. Нарисуйте по одному кутові, ви й ваш сусіда. Порівняйте ці кути один з одним за допомогою малки.

26. За допомогою малки додайте один до одного два такі кути $\angle ABC + \angle FDE$ (рис. 80).

27. За допомогою малки знайдіть різницю цих кутів:

$$\angle ABC - \angle FDE \text{ (рис. 80).}$$

28. Знайдіть такий кут (рис. 81) $(\angle a + \angle b) - (\angle a - \angle b)$.

29. За допомогою транспортира нарисуйте такий кут (рис. 81):

$$\angle a - 2\angle b$$

30. За допомогою транспортира нарисуйте такий кут (рис. 81):

$$\frac{1}{2}\angle d + b$$

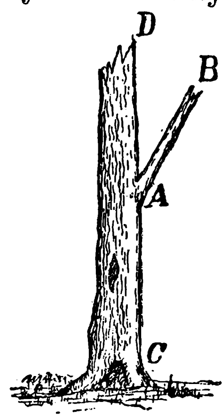


Рис. 82.

31. Чи можна утворити суміжні кути з таких кутів: 1) 110^0 і 70^0; 2) 95^0 і 75^0; 3) 98^0 і 82^0; 4) 90^0 і 85^0?

32. Нарисуйте два кути, суміжні до кута $\angle b$ (рис. 81).

33. Один суміжний кут має 35^0; 48^0; 125^0; 75^0; 172^0; 24^0. Скільки градусів має другий суміжний кут?

34. Гілка *АВ* утворює із стовбуром два кути, з них один утроє більший ніж другий. Скільки градусів має кожен цей кут (рис. 82)?

35. Нарисуйте два рівні суміжні кути.

36. Нарисуйте два суміжні кути так, щоб один з них був удвоє більший ніж другий.

37. Нарисуйте два суміжні кути так, щоб один був більший за другого на 90^0; на 48^0; на 35^0.

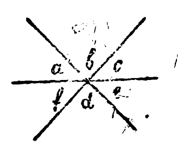


Рис. 83.

38. За допомогою транспортира знайдіть суму кутів, що лежать по один бік від простої лінії.

39. Навколо однієї точки нарисуйте декілька кутів. Скільки прямих кутів можна утворити з усіх цих кутів?

40. Нарисуйте кут, щоб він із кутом *ABC* були вершкові (рис. 80).

41. На рис. 83 $\angle b = 80^0$, $\angle e = 36^0$. Обчисліть решту кутів!

42. На рисун. 83 $\angle d = 90^0$, $\angle c = \frac{1}{2}\angle b$. Обчисліть, скільки градусів має решта кутів.

43. На рисункові 83 $\angle a = \angle c$; $\angle b = 86^0$. Знайдіть решту кутів!

Розділ 4.

ТРИКУТНИК.

11. Типи трикутників.

§ 34. Трикутник, його боки, кути та вершини. Коли будується дах (рис. 84), то на поперечний трям ставлять дві крокви так, щоб утворилася така фігура (рис. 85).

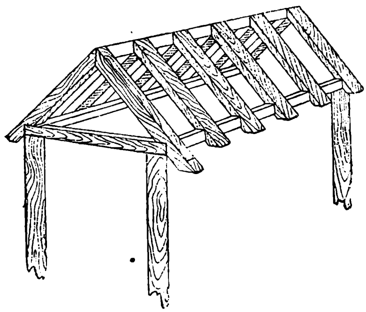


Рис. 84. Двосхилий дах

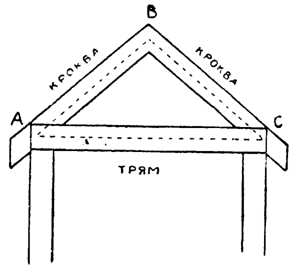


Рис. 85.

Нарисуйте трьома простими лініями цю фігуру. Одержите такий трикутник (рис. 86). Покажіть його вершини, боки та кути.

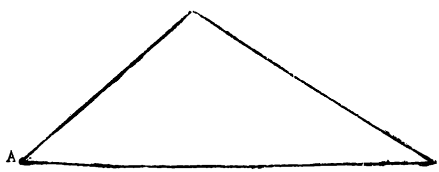


Рис. 86

Трикутник *ABC* (рис. 86) записується так: △ *ABC*.

Боки його: прості *AB*, *BC* та *AC*.

Його вершини—*A*, *B* та *C*.

Кути його: ∠ *BAC*, ∠ *ABC*, ∠ *ACB*.

§ 35. Різного вигляду трикутники. Спробуйте збудувати різного типу дахи. Наріжте з паперу вузенькі смужки[1]). По-

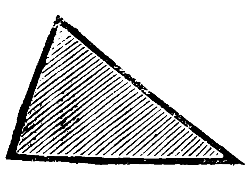


Рис. 87. Різнобічний трикутник.

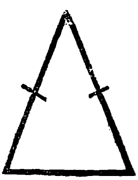


Рис. 88. Рівнораменний трикутник.

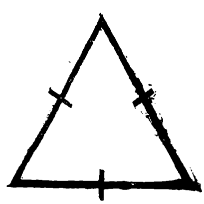


Рис. 89. Рівнобічний трикутник.

[1]) Замість смужок з паперу можна взяти тоненькі дерев'яні палички або соломинки.

чніть зліплювати з цих смужок різної форми дахи. При цьому можуть утворитися трикутники такого вигляду:

1. *Рівнобічний трикутник.* Коли в трикутникові всі три боки один одному рівні, то такий трикутник звуть *рівнобічним* (рис. 89).

2. *Рівнораменний трикутник.* Складіть трикутник, щоб у ньому рівні були тільки два боки (рис. 88).

Такий трикутник звуть *рівнораменним.* За основу його вважають нерівний бік, а два рівні боки звуть *раменами.*

3. *Різнобічний трикутник.* Складіть такий трикутник, щоб він мав три нерівні боки. Його звуть *різнобічним* (рис. 87).

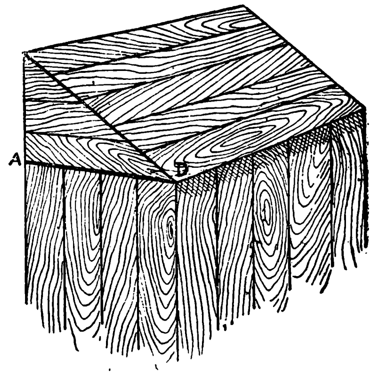


Рис. 90. Односхилий дах.

4. *Прямокутний трикутник.* Складіть трикутник з прямим кутом. Його звуть *прямокутним* (рис. 90, 91, 93). Покажіть у ньому бік, що лежить проти прямого кута. Бік цей звуть *гіпотенузою* (протилежником).

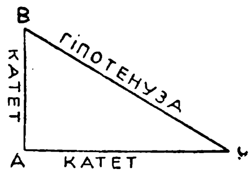


Рис. 91. Прямокутний трикутник.

Решта боків, що складають прямий кут (покажіть їх), звуть *катетами.*

5. *Тупокутний трикутник.* Коли в трикутникові є тупий кут, то такий трикутник звуть *тупокутним* (рис. 94).

6. *Гострокутний трикутник.* Складіть такий трикутник, щоб у ньому всі кути були гострі. Його звуть *гострокутним* (рис. 92

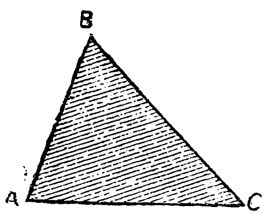


Рис. 92. Гострокутний трикутник.

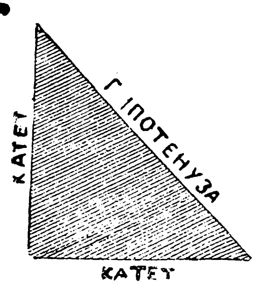


Рис 93. Прямокутний трикутник.

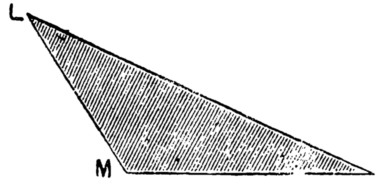


Рис 94. Тупокутний трикутник.

§ 36. Властивість боків трикутника. Коли ви з паперових смужок складали різноманітні трикутники, то, певне, помітили, що не завжди це вам удавалося.

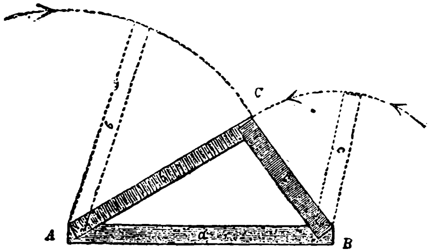


Рис. 95. У трикутника один бік повинен бути менший від суми двох инших боків.

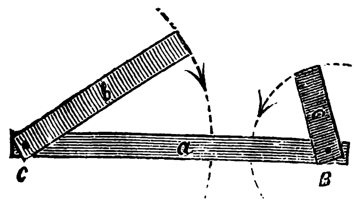


Рис. 96.

Ви могли скласти трикутника тільки тоді, коли одна смужка була коротша за суму инших двох [$a < (b + c)$] (рис. 95 та рис. 96).

Отже у всіх трикутників **один бік повинен бути менший від суми инших двох боків.**

12. Симетрія та рівнораменний трикутник.

§ 37. Симетричні фігури. Виріжте з паперу такого метелика (рис. 97). Спробуйте зігнути його навколо простої LM. Чи припадуть тоді одна до одної обидві частини цього метелика?

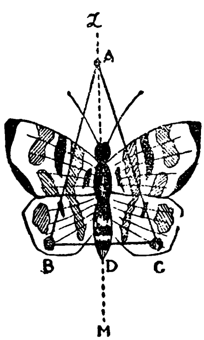


Рис 97. Симетрична фігура.

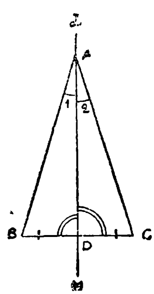


Рис. 98.

Таку фігуру, що обидві половинки її підчас обертання навколо якої-небудь простої лінії можуть припасти всіма своїми частинами, звуть **симетричною фігурою**, а ту просту (LM), що навколо неї ми обертали нашого метелика, звуть **віссю симетрії**.

§ 38. Симетрія рівнораменного трикутника. Розгляньмо детальніше симетрію нашого метелика.

Знайти на нашому метеликові дві симетричні точки можна таким способом. Нарисуйте просту BC перпендикулярно до оси LM (рис. 98) й візьміть на цій простій дві точки B та C на однаковому віддаленні від оси симетрії ($DB = DC$). Ви й одержите дві точки B та C, симетричні одна до одної. (Як переконатися в цьому?).

Візьміть на осі LM довільну точку A й сполучіть її з нашими симетричними точками B й C. Тоді ви одержите дві прості (AB та AC).

Дослідіть, чи будуть ці дві прості симетричні одна до одної. (Щоб переконатися в цьому, дослідіть, де можна, кінці цих простих, коли ви будете обертати вашого метелика навколо оси симетрії LM).

Коли ви точку A сполучили з симетричними точками B та C, то якого типу ви одержали трикутник? Чи буде цей рівнораменний трикутник ($\triangle ABC$) симетричний? Де його вісь симетрії?

§ 39. Бісектриса, медіяна й висота в рівнораменного трикутника. Нарисуйте який-небудь різнобічний трикутник. Зміряйте транспортиром один з його кутів і поділіть його навпіл.

Просту, що ділить кут навпіл, звемо бісектрисою цього кута (AD_1, рис. 99).

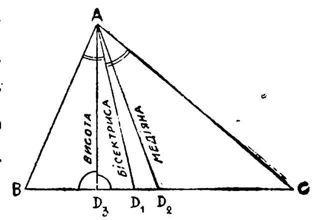


Рис. 99.

Поділіть один з боків трикутника навпіл і середину цього боку з протилежною вершиною з'єднайте простою лінією. Просту цю звемо медіяною (AD_2, рис. 99).

З якої-небудь вершини трикутника спустіть перпендикуляр на протилежний бік його. Цей перпендикуляр звемо висотою трикутника (AD_3, рис. 99).

В різнобічному трикутникові всі ці лінії йдуть кожна своїм окремим напрямком (дивись рис. 99).

Розгляньмо тепер напрямок цих ліній у рівнораменному трикутникові. Коли ви обертали в попередньому досліді (стор. 36) рівнораменний трикутник навколо оси симетрії LM, то бачили, що,

по-перше, ця вісь AD буде бісектрисою кута при вершині (бо $\angle 1 = \angle 2$);

по-друге, ця вісь AD буде медіяною основи BC, бо вона поділила основу CB навпіл ($BD = DC$);

по-третє, ця вісь AD буде висотою, бо AD йде перпендикулярно до BC, а тому в рівнораменному трикутникові бісектриса кута при вершині одночасно є й медіяною, й висотою його.

§ 40. Властивість кутів у рівнораменного трикутника. Доведіть, що в рівнораменному трикутникові кути при основі рівні. (Використайте для цього симетричність рівнораменного трикутника, § 38).

13. Ознаки рівности (пристайности) трикутників.

§ 41. Рівність фігур. Коли вдається накласти одну на одну дві фігури так, щоб вони припали всіма своїми точками, то такі фігури вважається за рівні (пристайні).

Але щоб пересвідчитися в тому, що дві які-небудь фігури (наприклад, два трикутники) рівні, немає потреби неодмінно знати, що всі боки та всі кути їхні відповідно рівні, досить пересвідчитися тільки в тому, що рівні є тільки деякі з цих елементів.

Розгляньмо декілька таких ознак, що на підставі їх можна говорити про рівність трикутників.

§ 42. Перша ознака рівности трикутників.

Задача. Як виміряти віддалення від точки A до точки B, коли між ними лежить або стоїть перепона (наприклад, яке-небудь озеро або будинок, рис. 100)?

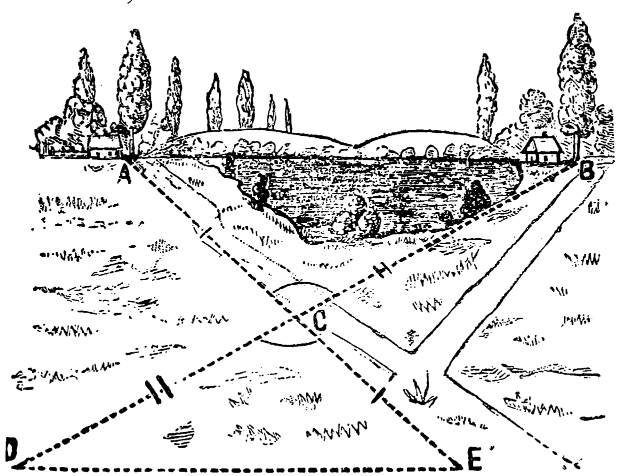


Рис. 100. Як виміряти віддалення між двома точками, коли між ними лежить перепона.

Виберіть таку точку C, щоб можна було виміряти віддалення її від точок A й B. Потім, подовживши прості AC та BC, на продовженні їх відкладіть відтинки CE та CD, відповідно рівні простим AC та BC, і простою лінією з'єднайте кінці відкладених відрізків (точки D та E). Матимете тоді два трикутники: $\triangle DCE = \triangle ACB$.

Коли вдасться довести, що ці трикутники рівні, тоді в рівних трикутниках повинні бути рівні всі відповідні боки; отже міряння простої AB можна буде замінити мірянням приступної нам лінії DE.

Дослід. Нарисуйте в себе в зшиткові який-небудь трикутник, наприклад, $\triangle CED$ (рис. 101).

Зміряйте в цьому трикутникові один із кутів, наприклад, $\angle E$, та два боки EC і DE, що його утворюють.

Візьміть потім аркуш паперу й нарисуйте на ньому кут *B* (рис. 102), рівний кутові *E*. Боки в цього кута (*AB* й *BC*) зробіть рівні з боками в кута *E*. З'єднайте кінці цих боків (точки *A* й *C*) простою лінією. Матимете новий трикутник (△ *ABC*). Виріжте його й, наклавши на початковий △ *EDF*, дізнайтеся, чи рівні ці трикутники.

Доведення. Накладаючи △ *ABC* на △ *DEC*, можна кут *B* завжди накласти на кут *E* (бо згідно з умовою ∠ *B* = ∠ *E*), а тому боки *BC* та *BA* повинні піти в напрямкові боків *EC* та *ED*. Кінець *A* повинен лягти в точці *D*, а кінець *C*—у точці *C* (бо *DE* = *AB* й *CE* = *CB*).

Треба ще дослідити, як повинен лягти бік *CA*. Точка *A* припала до точки *D*, а точка *C* лягла на точку *C*, отже, вся

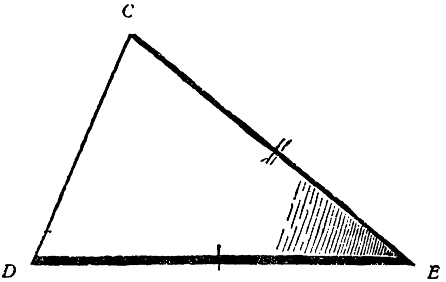


Рис. 101.

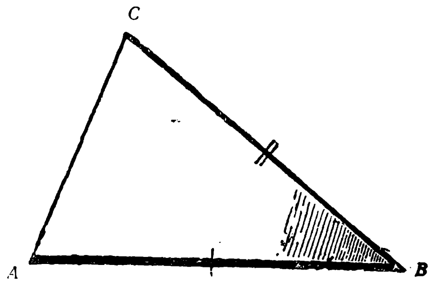


Рис. 102.

проста *CA* мусить злитися з простою *DC* (між двома точками можна нарисувати тільки одну просту).

Отже,

[redacted] Коли два боки й кут між ними одного трикутника відповідно рівні двом бокам та кутові між ними другого трикутника, то два такі трикутники один одному рівні.

§ 43. Друга ознака рівности трикутників.

Задача. Як виміряти віддалення між двома точками *A* та *B*, коли до точки *B* не можна підійти (рис. 103).

Перш за все треба вибрати таку точку *C*, щоб із неї видно було точку *B* та щоб можна було виміряти просту *AC* й кут *A*. Подовжте боки *AC* та *BC* й на подовженні *AC* відкладіть частину *CD*, рівну *AC*; при кінці *D* за допомогою астролябії збудуйте кут, рівний кутові *A*; матимете трикутник *CDE*. Порівняймо його з трикутником *ABC*.

Коли вдасться довести, що ці трикутники один одному рівні, тоді замість AB можна виміряти DE.

Як-же довести, що трикутник ABC та збудований трикутник CDE однакові?

Рис. 103. Як виміряти віддалення між двома точками, коли до однієї з них не можна підійти.

Дослід. Нарисуйте який-небудь трикутник, напр., $\triangle ABC$ (рис. 104). Зміряйте один з його боків (наприклад, AC) й два кути, прилеглі до нього ($\angle A$ й $\angle C$).

Потім нарисуйте просту DE (рис. 105), рівну бокові AC,

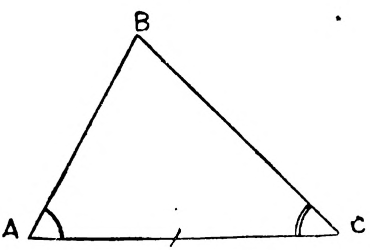


Рис. 104.

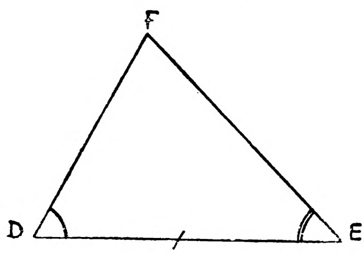


Рис. 105.

і за допомогою транспортира при кінцях цієї простої збудуйте два кути: $\angle D$, рівний кутові A, й $\angle E$, рівний кутові C. Подовживши боки цих кутів доти, доки перетнуться вони в точці F, матимете новий трикутник DEF.

Вирізавши трикутник DEF і наклавши його на перший трикутник ABC, порівняйте їх один з одним.

Доведення. Накладаймо перш за все бік DE на AC. Боки ці кінцями своїми припадуть (бо $DE = AC$), бік EF повинен піти по бокові CB ($\angle E = \angle C$), а бік DF завжди піде в напрямкові AB ($\angle D = \angle A$).

Треба ще дослідити, де ляже точка F. Ця точка F є точка перетину простих DF та EF. Ці прості, коли накласти їх, підуть по простих AB та BC, що перетинаються в точці B; отже, й ті прості, що їх ми накладаємо, перетнуться в тій самій точці B, инакше кажучи, вершина F зіллється з вершиною B. Таким чином $\triangle DEF$ припаде до $\triangle ACB$ всіма своїми частинами, а тому

[redacted] Коли один бік та два прилеглі до нього кути в одного трикутника відповідно рівні бокові та двом прилеглим до нього кутам у другого трикутника, то такі трикутники рівні.

§ 44. Третя ознака рівности трикутників. Техники часто рисують трикутник, що дорівнює даному трикутникові, вимірявши тільки його боки. Навчімось і ми це робити.

Задача. Нарисуйте трикутник, що дорівнює даному трикутникові ABC, вимірявши тільки боки цього останнього.

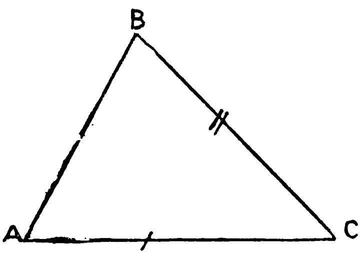


Рис. 106.

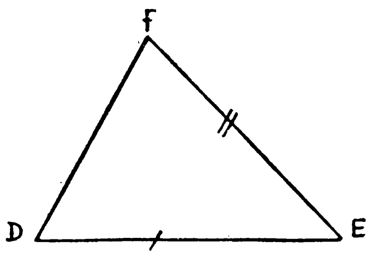


Рис. 107.

Дослід. Маємо трикутник ABC (рис. 106). Щоб нарисувати другий рівний йому трикутник, спочатку відкладіть відтинок DF, що дорівнює бокові AB. Потім, прийнявши обидва кінці цього відтинка D та F за центри, нарисуйте два кола: одно радіусом, що дорівнює бокові BC, а друге—бокові AC (рис. 107). Нехай ці кола будуть перетинатися в точці E. Сполучивши її з D та F, ви й дістанете новий трикутник (DFE) з боками, що відповідно рівні бокам першого трикутника. Щоб дізнатися про це, виріжте цей трикутник DFE та накладіть його на трикутник ABC.

Доведення. Попередній дослід наводить нас на думку, що всі трикутники, в яких відповідні три боки один одному рівні, також будуть рівні один одному.

Але пересвідчитися в цьому, накладаючи ці трикутники один на одного, не можна, бо про кути наших трикутників ми не знаємо нічого, тому й не можемо бути певні, що боки ті підуть у тому самому напрямкові.

Отже, спосіб накладання не привів нас до мети. Спробуймо довести рівність наших трикутників иншим способом.

Перевернімо трикутника ABC й прикладімо його до трикутника DFE так, щоб їхні боки DE та AC збіглися (рис. 108).

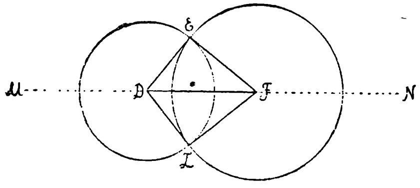


Рис. 108.

Тоді кінець боку DL (точка L) ляже на лівий обвід кола, а кінець боку FL (точка L) ляже на правий обвід кола (бо $DL = DE$, а $FL = FE$), цеб-то вершина L мусить лягти в точку перетину обох обводів кол.

Щоб переконатися, що $\triangle\ DLF$ рівний трикутникові DEF, обернемо $\triangle\ DLF$ навколо оси DF.

Тоді обидва нижні півкола мусять зіллятися з відповідними верхніми півколами.

Точка L лежить одночасно на обох колах, а тому вона мусить зіллятися з точкою перетину наших верхніх півкол, цеб-то з точкою E.

А тому $\triangle\ DLF$ зіллється з $\triangle\ DEF$, цеб-то вони будуть рівні, а це й треба було довести.

14. Як рисувати за допомогою циркуля та лінійки.

§ 45. Коли рисують рисунок якої-небудь машини, що її треба збудувати, то всі частини цього рисунка (його лінії, кути, то-що) треба рисувати як-найточніше, бо яка-небудь невеличка помилка в рисункові може зовсім зіпсувати всю машину.

До цього часу ми рисували лінії, кути й трикутники за допомогою лінійки, косинця та транспортира. Але ні косинець, ані тим більше транспортир—не можуть дати надто точного рисунка. Коли треба зробити як-найточніший рисунок, то тоді вживають лінійки й циркуля.

Навчімось і ми рисувати за допомогою циркуля та лінійки.

§ 46. Як поділити просту навпіл.

Задача 1. Поділити даний відтинок простої навпіл.

Будування. Поставте гострячок циркуля в точку *A* (рис. 109) і радіусом, більшим за половину відтинка *AB*, опишіть навколо точки *A*, яко навколо центру, обвід кола. Тим самим радіусом опишіть другий обвід кола, прийнявши за центр його точку *B* За допомогою лінійки з'єднайте дві точки перетину наших обводів кола (*C* й *D*).

Доведення. Коли на відтинкові *AB*, яко на основі, збудувати два рівнораменні трикутники й з'єднати їхні вершини (*C* й *D*) простою лінією, то ця проста буде віссю симетрії й поділить відтинок наш *AB* навпіл (§ 38).

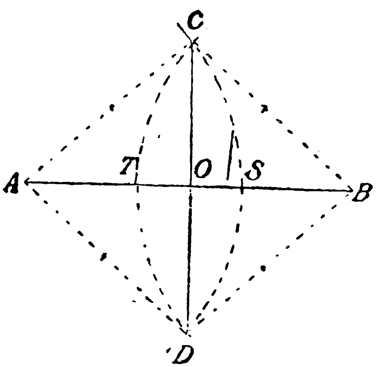


Рис. 109.

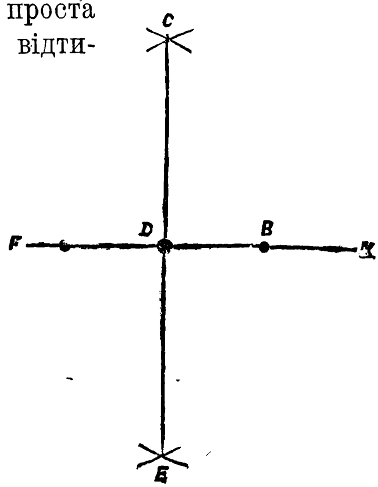


Рис. 110.

§ 47. Як будувати перпендикуляри.

Задача 2. Провести перпендикуляр до даного відтинка простої *AB* через його середину.

Будування. Зробіть таке саме будування, як і в задачі 1. Доведіть, що нарисована проста *CD* (рис. 109) це й є шуканий перпендикуляр (§ 39).

Задача 3. Нарисувати до даної простої *FK* перпендикуляр так, щоб він проходив через точку *D*, взяту на цій простій.

Будування. Поставте гострячок циркуля в точці *D* (рис. 110) і другою ніжкою циркуля на даній простій зробіть дві помітки

A й *B*. Тоді точка *D* буде серединою відтинка *AB*. Повторивши будування з попередньої задачі, ви знайдете просту *CE*, що буде перпендикулярна до *FK* й проходитиме через точку *D*.

Задача 4. Нарисувати просту, що буде перпендикулярна до даної простої і проходитиме через точку, взяту поза даною простою.

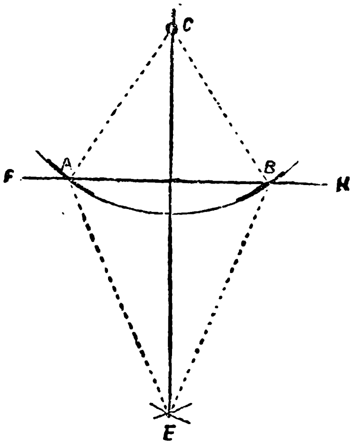


Рис. 111.

Перш за все збудуйте (рис. 111) такий рівнораменний трикутник *CAB*, щоб вершина його була в точці *C*, а основа лежала на даній простій *FK*. Коли трикутник цей буде збудовано, треба збудувати другий рівнораменний трикутник *AEB* з тією самою основою *AB*. З'єднавши вершини *C* та *E* в цих трикутників, ми й матимемо шуканий перпендикуляр.

§ 48. Як будувати кути.

Задача 5. Збудувати кут, рівний даному кутові (рис. 112).

Будування. Поставивши гострячок циркуля у вершину кута *C* (рис. 112), другою ніжкою його зробіть на обох боках його помітки *S* й *N*. Тим самим радіусом опишіть обвід кола

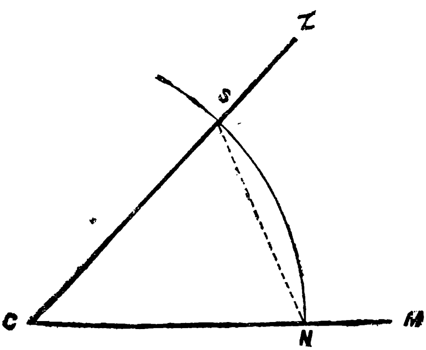


Рис. 112.

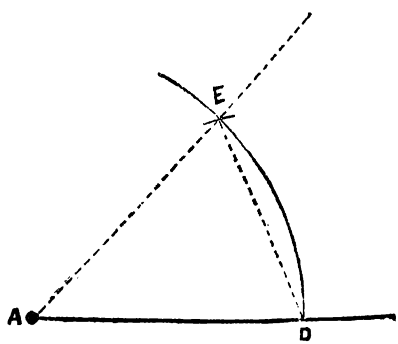


Рис. 113.

навколо точки *A* (рис. 113). Цей обвід кола перетне нашу просту *AD* у точці *D*, що відповідає точці *N*. Щоб знайти третю вершину шуканого трикутника, треба розсунути ніжки циркуля на віддалення *SN* і, поставивши ніжку з гострячком у точку *D*, другою ніжкою зробити помітку *E*.

З'єднавши точку E з A простою лінією, ми й матимемо $\angle EAD$, рівний $\angle ZCM$, бо $\triangle ASN = \triangle AED$. (Чому?).

Задача 6. Поділити даний кут C навпіл.

Користуючись із вказівок, що їх дано було в задачі **4**, та з рисунка 112, ви легко зробите сами потрібне збудування.

ВПРАВИ.

1. Міст треба будувати так, щоб усі кути його не змінялися, цеб-то щоб не змінявся нахил усіх його боків одного що-до одного. Про таку фігуру, що не зміняє своєї форми, кажуть, що вона цупка.

Візьміть чотири смужки завдовжки неоднакові і з'єднайте кінці їхні шпильками так, щоб утворився чотирикутник. Спробуйте міняти форму чотирикутника, міняючи нахил одного боку до другого (рис. 114). Скільки таких чотирикутників можна утворити? А тепер зробіть такий самий дослід з трьома смужками. Чи пощастить вам змінити нахил одного боку до другого в трикутника? Чому? Чи буде чотирикутник цупким? А трикутник?

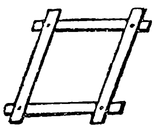


Рис. 114.

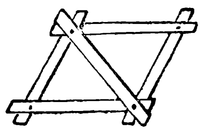


Рис. 115.

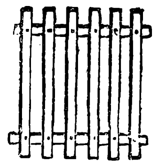


Рис. 116.

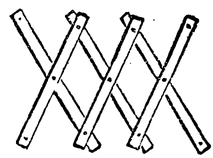


Рис. 117.

2. Які з цих фігур цупкі, а які ні (рис. 114—117)?

Де треба приладнати лиштву в нецупких фігурах, щоб зробити їх цупкими?

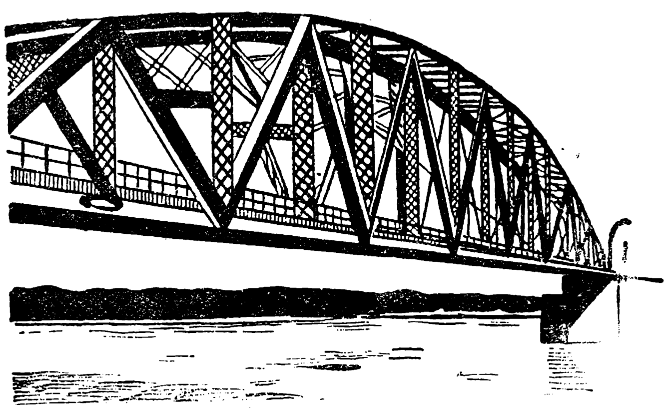


Рис. 118.

3. Розгляньте уважно ферму якого-небудь великого моста. Яким способом роблять її цупкою (рис. 118)?

4. Розгляньте спосіб, як збудовано цю ферму (рис. 119).

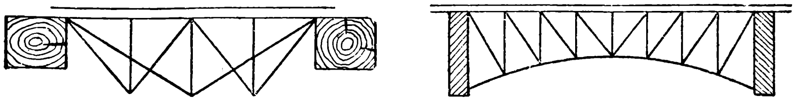


Рис. 119.

Знайдіть на цій фермі трикутники рівнораменні, рівнобічні, прямокутні, гострокутні (рис. 119 та рис. 120).

5. Між двома деревами лежить купа каміння, що не дозволяє зміряти віддалення між цими деревами. Як зміряти його, будуючи рівні трикутники?

6. Щоб збудувати міст від одного берега до другого, мусимо зміряти віддалення між ними. Як це зробити, використовуючи ознаки рівности трикутників?

7. Як зміряти ширину млина *AB* (рис. 121)?

8. У єгиптян, щоб рисувати фігури на землі, були окремі фахівці, що їх звали „гарпедонапти“ (цеб-то ті, що напинають шворку). Гарпедонапти, щоб шворкою виміряти перпендикуляр, використовували властивість рівнораменного трикутника. Ось декілька способів, як вони зазначали перпендикуляри на землі.

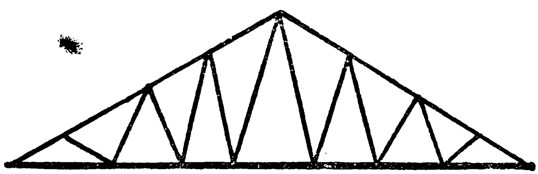


Рис. 120.

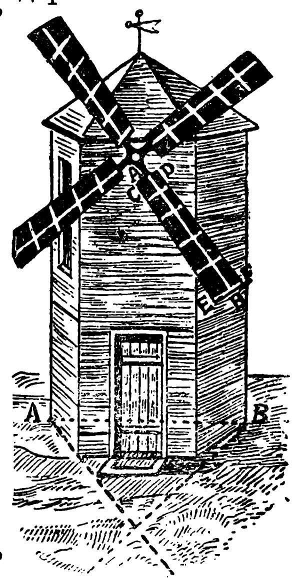


Рис. 121.

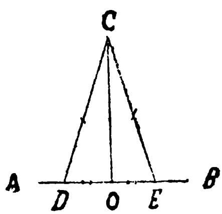


Рис. 122.

Перша задача. З точки C на просту AB треба спустити перпендикуляр (рис. 122). Гарпедонапти напинали вимірну шворку DCE так, щоб CD рівне було CE. Поділивши шворкою відтинок DE на дві рівні частині, з'єднували точку O з C.

9. *Друга задача.* З точки O до простої AB треба поставити перпендикуляр (рис. 122). Гарпедонапти, одклавши від точки O два рівні відтинки OD і OE, напинали шворку DCE так, щоб CD рівне було CE. З'єднавши C з O, вони мали потрібний перпендикуляр.

На яких властивостях рівнораменного трикутника ці способи ґрунтуються?

10. Чи можна утворити трикутник з таких відтинків:

12 см; 5 см; 4 см.
10 см; 3 см; 8 см.

11. У прямокутному трикутникові який бік найбільший? Перевірте!

12. Спробуйте нарисувати „від руки“ висоту в гострокутному, тупокутному та прямокутному трикутникові.

13. Нарисуйте в будь-якому трикутникові три висоти. Чи будуть вони перетинатися в одній точці? А медіяни? А бісектриси?

14. Під'йомний кран (звід) має форму такого трикутника (рис. 123, 124).

На якому віддаленні від основи висить блок *A* цього зводу? Де висота трикутника?

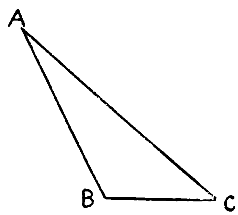


Рис. 123.

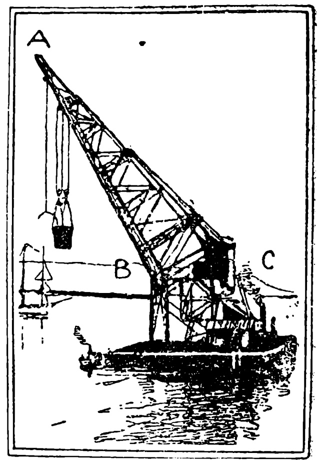


Рис. 124.

15. Я покажу вам нарисований на картоні трикутник. Нарисуйте в себе у зшитках трикутник, рівний моєму трикутникові.

Якими способами можна це зробити?

16. Нарисуйте такий рівнобічний трикутник, щоб у нього периметр був рівний такій простій лінії

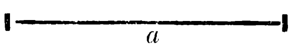


Рис. 125.

17. Периметр рівнораменного трикутника = 15 см. Бік вдвічі більший за основу. Нарисуйте цей трикутник

18. У рівнораменного трикутника кут при вершині дорівнює кутові $\angle b$ (рис. 126), а висота = простій *a* (рис. 125). Нарисуйте цей трикутник.

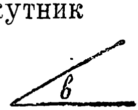


Рис. 126.

19. Сума катета й гіпотенузи рівна простій *AB* (рис. 127), а гіпотенуза на 18 мм довша від цього катета. Нарисуйте трикутник.

Рис. 127.

20. Нарисуйте прямокутний трикутник, що в нього гіпотенуза $= a$ (рис. 128), а катет $= b$ (рис. 129).

Рис. 128.

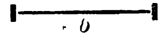


Рис. 129.

21. Означмо число сантиметрів, що їх вміщують боки трикутника, літерами *a*, *b*, *c*. Знайдіть властивість трикутників, у яких периметри:

$$3a;\ a + b + c;\ 2a + b$$

Рис. 130.

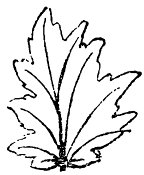


Рис. 131.

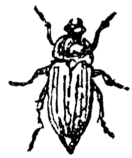


Рис. 132.

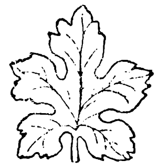


Рис. 133.

Які з цих фігур симетричні? Де їх вісь симетрії?

22. Робити плями чорнилом не годиться. Але иноді „кляпси“ зможуть дати вам дуже гарні малюнки. Візьміть аркуш білого паперу. На одній його половині зробіть чорнилом велику кляпсу. Швидко зігніть цей аркуш навпіл. Тепер розгорніть його. Гляньте, який химерний малюнок вийшов. А чи не буде ця фігура симетрична?

23. Які з друкованих літер симетричні? Де їх ось симетрії? А чи немає таких літер, у яких є декілька осей симетрії?

24. Знайдіть на рисункові точку, симетричну до точки *A*. Нарисуйте просту, симетричну до *AB* (вісь симетрії *LM*) (рис. 134).

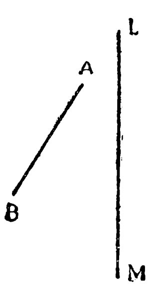


Рис. 134.

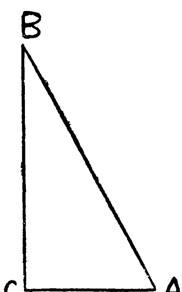


Рис. 135.

25. Доповніть цього трикутника до симетрії що-до *CB*; *CA*; *BA* (рисунок 135).

26. Чи буде віссю симетрії діягоналя прямокутника?

Знайдіть у прямокутникові вісь симетрії.

27. Двоє сіл *A* та *B* лежать на ріжному відданні від річки (рис. 136). Знайдіть (рисуванням), де збудувати на річці водяного млина, щоб він був на однаковому віддаленні від обох сіл.

28. *A*—цукроварня (рис. 137). *BC*—залізниця. Нарисуйте найкоротший шлях від цукроварні до залізниці.

29. Знайдіть на шляху *AB* таку точку, що була-б на однаковому віддаленні від *CD* й *EF* (рис. 138.) (Зауваження: пригадайте властивість бісектриси).

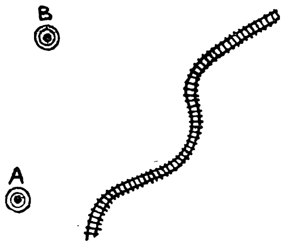


Рис. 136.

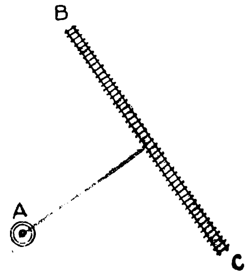


Рис 137.

30. На кожному вершку тополів *A* та *B* сидить ґава. Де на землі треба покласти грудку сиру, щоб ці ґави одночасно вхопили його (припускаючи, що вони будуть летіти простою лінією з однаковою швидкістю) (рис. 139)?

31. На рис. 140 маємо геометричні форми декількох частин машин, а

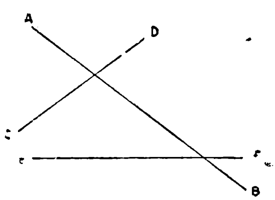


Рис. 138.

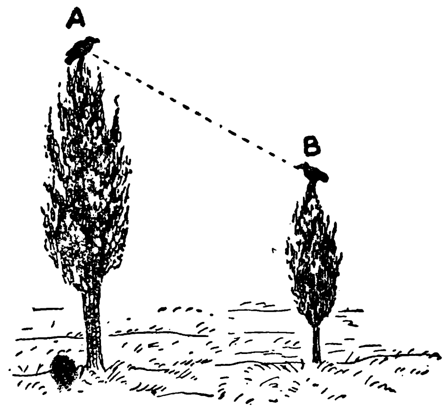


Рис. 139.

саме: мутри, прогонича, переріз пили. Спробуйте нарисувати їх копію в себе в зшитках, користуючись циркулем та лінійкою.

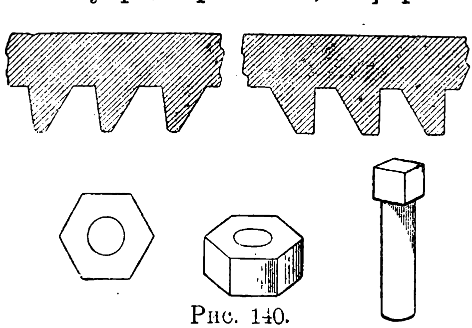


Рис. 140.

32. Візьміть невеличкий план якоїнебудь садиби й спробуйте нарисувати копію його, користуючись спочатку транспортиром, косинцем та лінійкою, а потім тільки циркулем та лінійкою.

Розділ 5.

РІВНОБІЖНІ ПРОСТІ.

15. Рівнобіжні прості та їх симетрія.

§ 49. Що таке рівнобіжні прості. Щоб рисувати рівнобіжні прості, столяр користується рейсмасом (рис. 141). Слюсар для цього-ж вживає „чертилку“ (рис. 143). Техник використовує рейсшину (рис. 142). Спро-

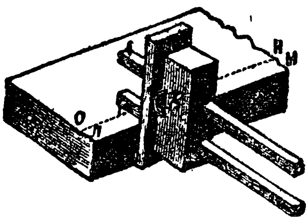


Рис. 141. Рейсмас.

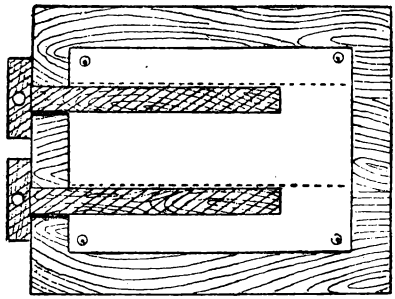


Рис. 142. Рейсшина.

буємо на досліді з'ясувати основи, що на них ґрунтуються всі ці прилади.

Дослід. Маємо на якійсь площині просту лінію *LM* (рис. 144). Візьміть на ній дві точки *A* та *B*. Через ці дві точки нарисуйте косинцем перпендикуляри *(AC* та *BD)* до першої простої *LM*.

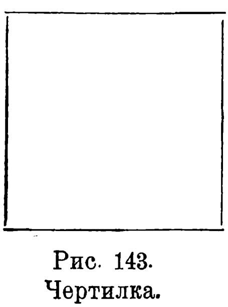


Рис. 143.
Чертилка.

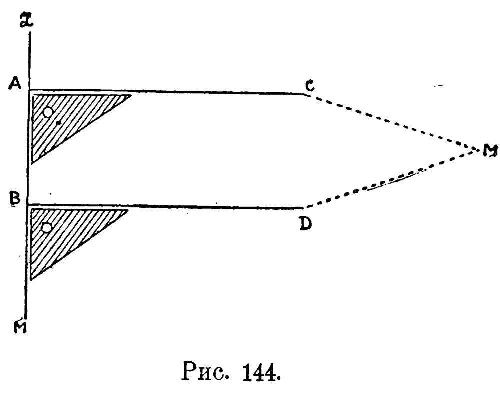


Рис. 144.

Дослідіть, чи зустрінуться кінці цих простих *(C* й *D)*. Може вони зустрінуться, коли їх продовжимо.

Доведення. Якби перпендикуляри *AC* та *BD* перетялися в якій-небудь точці *M* (рис. 144), то через цю точку проходили-б дві прості *MA* та *MB*, перпендикулярні до тієї самої простої AB, а це неможливо. Отже, два перпендикуляри, проведені до тієї самої простої, лежать в одній площині (покажіть її) і один з одним ніколи не зустрінуться.

Коли дві прості лежать в одній площині й коли вони, хоч би як ми їх продовжували, ніколи одна з одною не перетнуться, то такі прості звуть *рівнобіжними* (або *паралельними*).

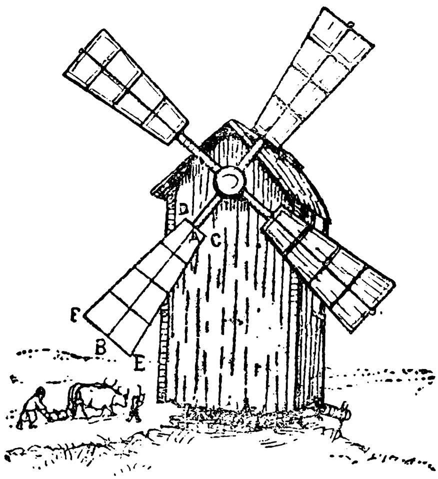


Рис. 145.

А тому ці перпендикуляри, що ми їх нарисували в попередньому досліді, є рівнобіжні прості.

На основі цього досліду збудовано ті прилади, що ними рисують рівнобіжні лінії столяр, слюсар, техник, то-що.

§ 50. Центральна симетрія. Простежте уважно за рухом крил у цього млина (рис. 145). Підчас обертання крил навколо точки O ці крила через кожну чверть обороту (на 90°) будуть всіма своїми частинами зливатись з попереднім положенням. Про фігуру, що має таку властивість, кажуть, що така фігура *центрально-симетрична*. А точку обертання O звуть *центром* симетрії.

§ 51. Центральна симетрія рівнобіжних простих.

Дослід. Нарисуйте в зшиткові дві рівнобіжні прості. Перетніть їх січною (рис. 146). Дослідіть, чи не будуть ці рівнобіжні центрально-симетричні. Накладіть на ваші рівнобіжні прості аркуш прозорого паперу й скопіюйте на нього ваші рівнобіжні й січну. Закріпіть папір шпилькою в середині січної (в точці O) й почніть обертати нарисовану фігуру (ту, що на прозорому папері) навколо точки O.

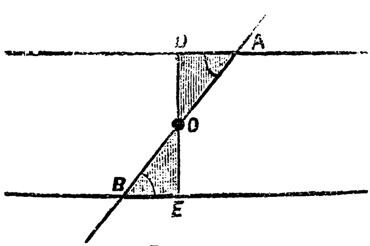


Рис. 146.

Чи не вдасться вам, обертаючи ваші рівнобіжні лінії, щоб вони зіллялися? На скільки градусів треба для цього обернути нашу фігуру?

Висновок. Повернувши ваші рівнобіжні лінії навколо точки O на $1/2$ повного повороту (на 180°), ви побачите, що вони зіллються одна з одною, цеб-то будуть центрально-симетричні.

Доведення. Доведемо, що симетричними будуть не тільки ті рівнобіжні, що ви їх нарисували, а й усі рівнобіжні без винятку.

Поділіть частину січної AB (рис. 146) в точці O навпіл і через цю точку проведіть просту DE, перпендикулярну до рівнобіжних простих.

Тоді утвориться два прямокутні трикутники; в них рівні будуть гіпотенузи й кути, що лежать при точці O. (Через що?).

Коли ми повернемо наші рівнобіжні на півоборота, то ці трикутники повинні зіллятись один з одним всіма своїми частинами. (Доведіть, чому це так?). А коли так, то й наші рівнобіжні мусять теж зіллятись, цеб-то наша фігура буде симетрична.

16. Кути, що їх утворюють дві рівнобіжні та січна.

§ 52. Які групи кутів утворюють дві рівнобіжні та січна. Нарисуйте дві рівнобіжні прості й перетніть їх третьою про-

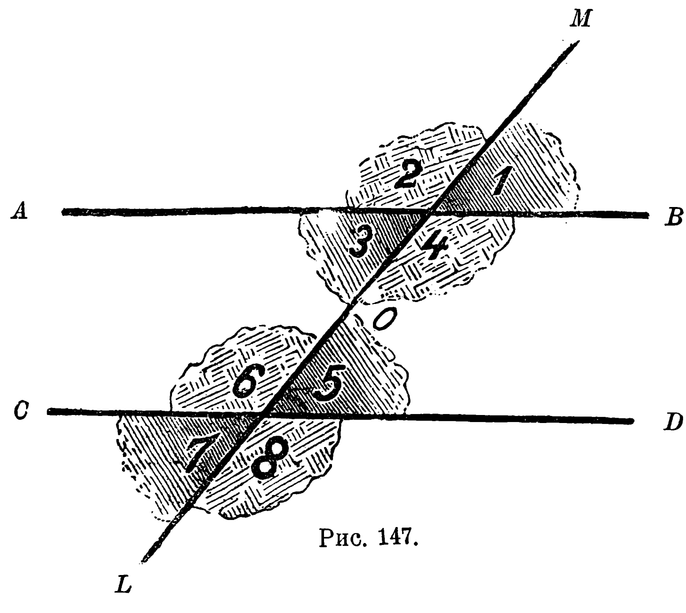


Рис. 147.

стою (рис. 147). Скільки всього кутів ви маєте? Позначте їх цифрами. Усі ці 8 кутів можна розбити на дві групи. Чотири з них ($\angle$ 1, $\angle$ 2, $\angle$ 3 та $\angle$ 4) лежать при одній точці перетину, а в другу групу входять кути, що утворилися при другій точці перетину ($\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$ та $\angle 8$).

Використавши теорему про вершкові та суміжні кути, ви легко дослідите властивості всіх кутів з тієї самої групи. Зробіть це.

Треба ще дослідити кути з різних груп. Для цього будемо складати з них різноманітні пари, при чому в кожну пару братимемо один кут з першої групи, а другий з другої.

§ 53. Внутрішні перехресні кути. Зверніть увагу на кути 3 та 5 (рис. 147). Ці два кути лежать у середині рівнобіжних простих і „навхрест“ що-до січної; тому їх і звуть *внутрішніми перехресними кутами*.

Знайдіть на рисункові 147 ще одну пару внутрішніх кутів, що лежать навхрест.

Коли ми обертали наші рівнобіжні навколо центра симетрії (§[illegible]), то кут 3 зіллявся з кутом 5, а 4 з 6, а тому:

Внутрішні перехресні кути поміж рівнобіжними простими один одному рівні.

§ 54. Внутрішні однобічні кути. З тих кутів, що поміж рівнобіжних простих, можна ще скласти такі пари: $\angle 3$ та $\angle 6$, $\angle 4$ та $\angle 5$. Кожна пара лежить по один бік січної. Тому їх і звуть *внутрішніми однобічними кутами*.

Зміряймо їх

$$\begin{array}{r} \angle 6 = 150^\circ \\ \angle 3 = \ \ 30^\circ \\ \hline \angle 6 + \angle 3 = 180^\circ \end{array}$$

Сума цих кутів $= 180^\circ$. Отже, можна сподіватися, що сума внутрішніх однобічних кутів завжди буде рівна двом прямим кутам.

Доведення. Кути $\angle 6$ та $\angle 5$ — кути суміжні, тому завжди

$$\angle 6 + \angle 5 = 180^\circ$$

У цій рівності $\angle 5$ можна закреслити й замість нього написати рівний йому $\angle 3$. (Через що?).

Матимемо тоді

$$\angle 6 + \angle 3 = 180^\circ,$$

а це й треба було довести.

Доведіть, що й друга пара внутрішніх однобічних кутів ($\angle 4$ та $\angle 5$) дають в сумі 180°.

Висновок. Сума двох внутрішніх однобічних кутів рівна 180°.

§ 55. Відповідні кути. Візьміть який-небудь кут із першої групи, наприклад ∠ 1. Пошукаймо відповідного йому кута в другій групі.

∠ 1 лежить над рівнобіжною простою і праворуч від січної (рис. 147).

У другій групі над рівнобіжною простою другою та праворуч від січної лежить ∠ 5. Отже, ∠ 1 і ∠ 5 будуть кутами відповідними.

Дослід. Виріжте з паперу кут, рівний кутові 1. Посувайте цей кут донизу так, щоб один бік його сунувся по січній. Тоді ∠ 1 та ∠ 5 припадуть один до одного. Отже, вони будуть один одному рівні.

Доведення. ∠ 1 = ∠ 3 (див. § 33).

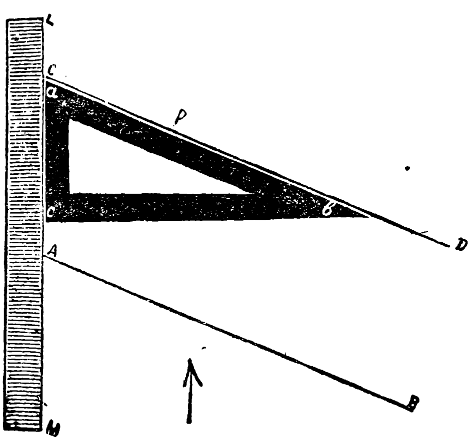
У цій рівності кут 3 можна замінити рівним йому кутом 5. (Через що?). Матимемо:

$$\angle 1 = \angle 5.$$

А це й треба було довести.

17. Як будувати рівнобіжні прості.

§ 56. Як будувати рівнобіжні прості за допомогою лінійки та косинця. Дано просту *AB* (рис. 148) й точку *P* поза нею. Треба через точку *P* провести просту, рівнобіжну до *AB*.



Будування. Прикладіть до *AB* косинець так (рис. 148), щоб один з його боків (наприклад, гіпотенуза *ab*) зіллявся з даною простою *AB*, а до другого боку косинця (до катета *ac*) приставте лінійку. Посувайте вздовж неї косинець доти, доки гіпотенуза його *ab* торкнеться точки *P*.

Доведіть, що збудована цим способом проста, яка проходить через точку *P*, рівнобіжна буде до *AB*. Використайте властивість відповідних кутів.

§ 57. Як збудувати просту, рівнобіжну до даної, за допомогою лінійки та циркуля.

Задача. Дано просту *AB* й точку *P* поза нею. Збудуйте просту, щоб вона була рівнобіжна до *AB* і проходила через точку *P* (рис. 149).

Дослідження. Проведімо з точки *P* (рис. 149) довільну січну *PM.* Ми мусимо при даній точці *P* нарисувати такий внутрішній кут, щоб лежав він навхрест і рівний був кутові *AMP* (§ 53).

Будування. З точки *M,* яко з центру, опишіть за допомогою циркуля дугу *PC,* що проходить через дану точку *P*

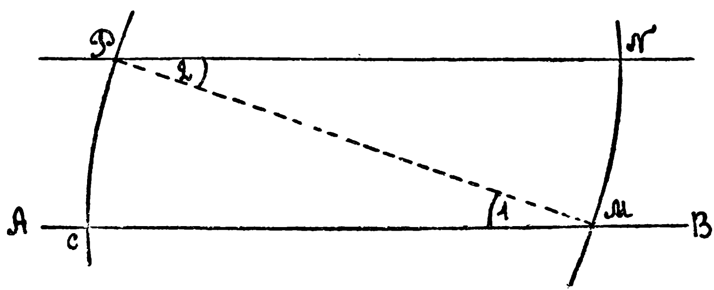


Рис. 149.

(рис. 149). Тим самим радіусом *MP* опишіть дугу *NM,* взявши за центр точку *P.* Змірявши циркулем віддалення *PC,* відкладіть його вздовж по дузі *MN.* З'єднавши знайдену точку *N* з точкою *P,* ви й матимете просту *PN,* рівнобіжну до *AB.*

Доведіть, що збудована таким способом проста *PN* мусить бути рівнобіжна до *AB.*

§ 58. Скільки простих, що проходять через одну точку рівнобіжно до однієї простої, можна нарисувати? Коли ви в двох попередніх задачах (§§ 56, 57) рисували рівнобіжну лінію, то в обох випадках нарисували тільки одну просту, що проходить через точку *P* рівнобіжно до *AB.* Провести ще якусь другу просту, рівнобіжну до однієї простої *AB,* через ту саму точку *P* вам не вдасться. Отже:

Висновок. Через одну точку до однієї простої можна нарисувати тільки одну рівнобіжну просту.

Аксіома й теорема.

§ 59. Аксіома. Щоб знайти властивості простих ліній, ми зверталися до двох способів.

Иноді ми помічали якусь таку властивість лінії, що нам здавалася цілком очевидною. Тоді ми відразу бачили її правдивість у всіх випадках, хоча в дійсності розглядали ми тільки один або декілька прикладів. Наочну таку властивість звемо **аксіомою**. Наприклад, такою аксіомою буде в нас попередня властивість рівнобіжної (§ 58).

Пригадайте ще декілька аксіом з попереднього курсу.

§ 60. Теорема. Згадайте тепер, як дізналися ми, що внутрішні перехресні кути при рівнобіжних простих рівні один одному. Ми не обмежилися тільки на тому, що дослідом пересвідчилися в рівності цих кутів, вимірявши їх транспортиром, а, спираючись на прийняті на віру аксіоми та на вивчені перед тим властивості ліній, кутів та трикутників, **ми довели**, що рівні не тільки ті перехресні кути, які ми дослідили, але й геть усі перехресні кути, коли їх утворюють рівнобіжні прості.

Властивість, що її доводимо міркуваннями, які ґрунтуються на аксіомах та на раніш доведених властивостях, звемо **теоремою**.

§ 61. *Задача.* **Як, користуючись рівнобіжними лініями, поділити відтинок простої AB на довільне число рівних частин.**

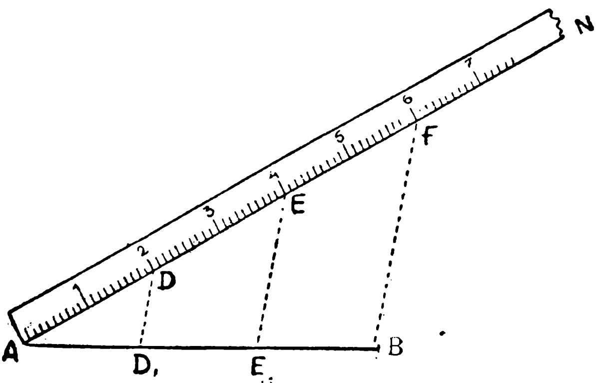


Рис 150.

Дослід. Поділіть, наприклад, відтинок AB (рис. 151) на три рівні частини. Через кінець відтинка проведіть під довільним кутом просту AN і відкладіть на ній, починаючи від кінця A, довільно довгі, але однакові три відтинки $AD = DE = EF$. (Для цього можна використати звичайну вимірну лінійку, або циркуль, рис. 150). З'єднайте кінець F з кінцем B й через точки D й E проведіть ряд простих, рів-

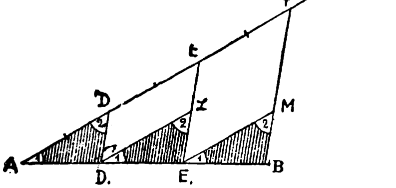


Рис. 151.

нобіжних з BF. Ряд цей і поділить нашу просту AB на три рівні частини.

Доведення. Спробуйте здобути ряд трикутників, щоб у склад їх увіходили відтинки AD_1, D_1E_1 та E_1B, що їх треба порівняти. Для цього з точок D_1 та E_1 проведемо прості D_1L та E_1M, рівнобіжно до AN. Тоді дістанемо такі трикутники: $\triangle ADD_1$, $\triangle D_1LE_1$, $\triangle E_1MB$. В них є по одному бокові рівному, а саме:

$$AD = D_1L = E_1M \text{ (Чому?)}$$

Кути, що їх позначено № 1, один одному рівні; крім того рівні будуть один одному і кути № 2 (Чому?)

Отже $\triangle ADD_1 = \triangle D_1LE_1 = \triangle E_1MB$.

А тому $AD_1 = D_1E_1 = E_1B$,

цеб-то дійсно відтинок AB поділено на три рівні одна одній частини.

Висновок. **Коли на одному боці (AN) кута відкласти рівні частини й через точки поділу провести рівнобіжні прості, то й другий бік (AB) кута поділиться на однакові (завдовжки) відтинки.**

18. Сума кутів трикутника.

§ 62. Властивість трьох кутів трикутника.

Дослід. Виріжте з паперу трикутник ABC (рис. 152). (Назви вершин напишіть усередині кожного кута).

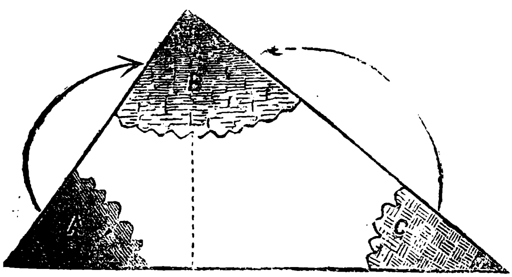


Рис. 152.

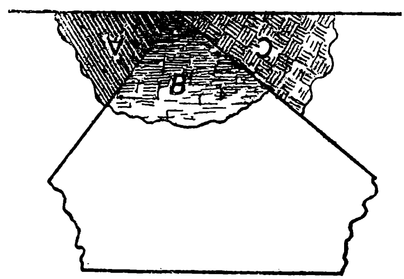


Рис. 153.

Відріжте від нього всі три кути й складіть з них прямі кути, подібно до того, як ви робили це з сумежними кутами. Скільки прямих кутів утворили ви з трьох кутів трикутника?

Вислід з досліду. З трьох кутів трикутника вам удасться скласти два прямі кути (рис. 153).

Доведення. Доведімо, що цю властивість мусять мати всі трикутники.

Нарисуйте який-небудь трикутник, наприклад, $\triangle ABC$ (рис. 154). Щоб скласти всі його кути, досить через вершину одного з них ($\angle C$) провести просту DE, рівнобіжну до протилежного боку AB. При точці C під простою DE утворилося три кути. Середній з них ($\angle 2$) увіходить у склад кутів нашого трикутника. Лівий бічний кут $\angle$ III — рівний кутові A, бо це є два внутрішні перехресні кути, утворені рівнобіжними DE та AB й січною AC. З тієї самої причини правий бічний кут $\angle$ I — рівний буде кутові B. (Якими рівнобіжними та якою січною утворено ці два кути?). Отже, три кути в нашого трикутника можна замінити трьома кутами при точці C, що лежать по один бік від простої, а сума цих кутів завжди рівна буде 180°.

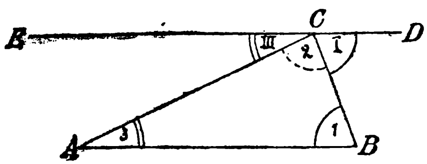


Рис. 154.

Висновок. Сума внутрішніх кутів у трикутника рівна 180° (цеб-то складається з двох прямих кутів).

ВПРАВИ.

1. Дах, залежно від того матеріялу, з якого його зроблено, мусить мати такий нахил до горизонтальної лінії:

Коли він із бляхи . . . . 30°
Коли він із черепиці . . . . 40°
Коли він солом'яний . . . . . . 60°

Який кут утворюють крокви двосхилого даху, коли його зроблено з бляхи, черепиці або соломи?

2. Нахил у сходах вважається за крутий, коли вони утворюють з горизонтальною лінією кут, більший від 35°, середній, коли цей кут має 30°, і спадистий, коли кут менший від 25°.

Вирахуйте, чи досить спадисті будуть сходи, коли висота однакова з основою.

3. Щоб виміряти кут нахилу гори ($\angle KAB$ на рис. 155), беруть транспортир CDE і в центрі його D прив'язують прямовис DM. Потім беруть дві однакові завдовжки віхи (тички) LK і DA і встромлюють їх одну на верховині гори K, а другу при підгір'ї A. На кінці тички D треба приладнати наш висотомір. Тепер повертайте транспортир так, щоб, коли дивитися вздовж простої DE, видно було точку L. Зміряйте кут $\angle CDA$. Пересвідчіться, що цей кут $\angle CDA$ рівний є нашому кутові $\angle KAB$!

4. Землеміри иноді рисують рівнобіжні лінії таким способом. Нехай нам треба провести з точки C просту лінію рівнобіжно до AB (рис. 156). Вони рисують довільну просту CE, що в точці E перетинає нашу лінію AB, міряють $\angle CEA$ і при точці C рисують кут ECD, рівний кутові CEA. Проста CD й буде рівнобіжна з AB. Через

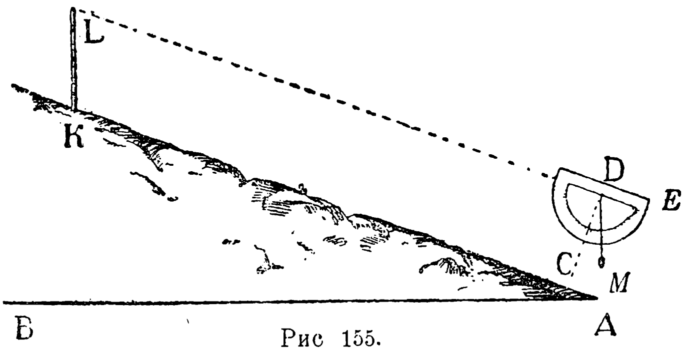


Рис 155.

що? Нарисуйте цим способом рівнобіжну лінію. Перевірку землеміри роблять так. Впевнюються, що кут D рівний кутові K. Чи немає в цьому способі помилки? Через що?

5. Щоб нарисувати циркулем перпендикуляр при кінці простої AB (рис. 157),

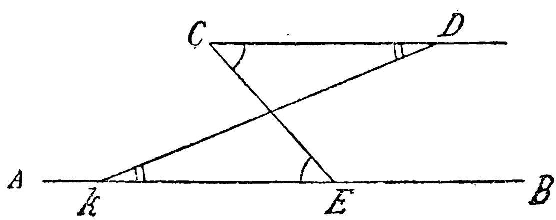


Рис. 156.

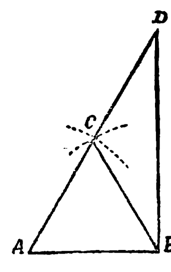


Рис. 157.

не продовжуючи її, роблять так. Розсунувши ніжки циркуля на віддалення AB, рисують цим радіусом двоє кол (вважаючи за центри точки A й B). З'єднавши перетин цих кол з кінцями простої AB (цеб-то точку C), утворюють рівнобічний трикутник ABC. Потім продовжують бік AC і одкладають на ньому відтинок CD, рівний CB. Проста лінія DB й буде потрібний нам перпендикуляр. Розгляньте уважно рисунок 157. Чи так воно?

6. За старих часів багато вчених дуже цікавилися такою—наче-б-то надто вже легкою задачею: „Як за допомогою циркуля та лінійки поділити довільний кут на три рівні частини?“ (Задачу цю звуть: **т р и с е к ц і я к у т а**). За наших часів уже відомо, що **д о в і л ь н о г о** кута поді-

лити на три рівні частини за допомогою одного тільки циркуля та лінійки не можна.

Але прямий кут поділити на три рівні частини можна таким способом. Нарисуйте на його боці AB рівнобічний трикутник ALB (рис. 158). На другому боці AC нарисуйте також рівнобічний трикутник ACM. Прості лінії AL та AM поділять $\angle CAB$ на три рівні частини. Доведіть це!

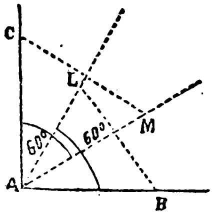


Рис. 158.

7. На рис. 159 $\angle m = 113^0$. Обчисліть решту кутів.

8. На рис 159 $\angle a$ втричі менший за кут c. Знайдіть $\angle n$.

9. На рис. 159 $\angle n$ на 80^0 менший ніж $\angle b$. Обчисліть кути: $\angle d$, $\angle c$, $\angle a$.

10. Маємо гострий кут ($\angle LAM$) і точку B (рис. 160). Через точку B проведіть дві прості лінії рівнобіжно до боків кута LAM так, щоб утворився кут такого самого типу (цеб-то гострий). Порівняйте ці два кути один з одним.

11. В попередній задачі змініть рівнобіжні лінії на перпендикулярні до боків кута LAM. Порівняйте той, що утворився, кут з кутом MAL.

12. Маємо трикутник ABC, у якого $\angle C = 73^0$, $\angle B = 67^0$. Знайдіть $\angle A$.

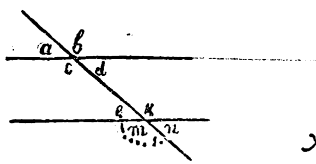


Рис. 159.

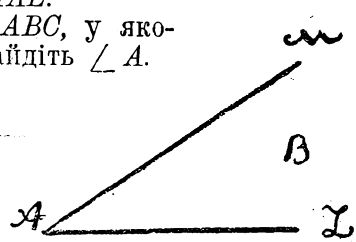


Рис. 160.

13. Два кути трикутника відповідно рівні кутам $\angle a$ й $\angle b$ (рис. 161). Нарисуйте третій кут цього трикутника.

14. Кут при вершині рівнораменного трикутника дорівнює кутові a (рис. 161). Нарисуйте кут, що лежить при основі, а потім спробуйте нарисувати самий трикутник. Чи пощастить це вам? Чому?

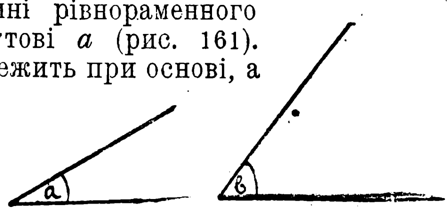


Рис. 161.

15. У рівнораменного трикутника кут при вершині 40^0; 65^0; 150^0; 92^0. Обчисліть, скільки градусів має кожен із решти кутів.

16. Скільки градусів має кожен кут рівнобічного трикутника?

17. Чи може бути в трикутника більше як один прямий або тупий кут? Чому?

18. Нарисуйте кут, рівний сумі обох гострих кутів будь-якого прямокутного трикутника.

19. Один із кутів у прямокутного трикутника рівний

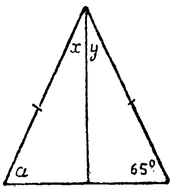


Рис. 162.

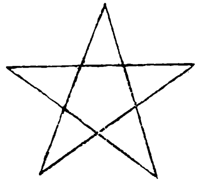


Рис 163.

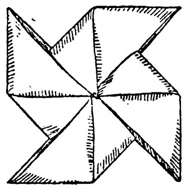


Рис. 164.

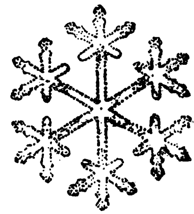


Рис. 165.

кутові *b* (рис. 161). Нарисуйте окремо решту кутів цього трикутника.

20. Обчисліть кути *a*, *x*, *y* на цьому трикутникові (рис. 162).

21. Довідайтеся, чи не буде цей млиночок (рис. 164) центрально-симетричною фігурою? А ця сніжинка (рис. 165)? А зірка (рис. 163)?

Розділ 6.

ПРЯМОКУТНИКИ, КВАДРАТ.

19. Як нарисувати прямокутник.

§ 63. Перший спосіб, як рисувати прямокутника. І на заводі, і на полі, і в себе в кімнаті ви напевне часто зустрічалися з такою фігурою (рис. 166).

Нарисувати її можна так. Спочатку нарисуйте просту *AD* (рис. 167). З обох кінців її (*A* та *D*) нарисуйте по перпендикуляру (*AB* та *DC*). З кінця одного з цих перпендикулярів *C* нарисуйте просту *CB*, пер-

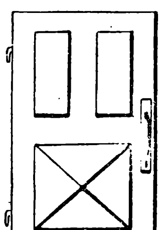


Рис. 166.
Ці двері мають форму прямокутника.

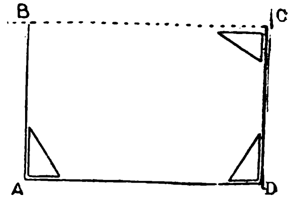


Рис. 167.
Прямокутник.

пендикулярну до CD. Тоді ви й дістанете фігуру $ABCD$, у якої всі чотири кути прямі[1]). Цю фігуру звуть прямокутник.

§ 64. Другий спосіб, як рисувати прямокутника. У прямокутника кожна пара протилежних боків рівнобіжна. (Боки AB та CD рівнобіжні, як два перпендикуляри до простої AD, § 49. Боки CB та AD—перпендикулярні до CD, а тому теж рівнобіжні). На підставі цього можна нарисувати прямокутника так. Спочатку нарисуйте прямий кут (наприклад, $\angle BAD$), а потім з обох кінців його (B та D) нарисуйте прості, рівнобіжні до боків цього прямого кута. Ви й дістанете прямокутника (рис. 168).

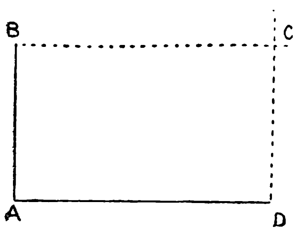


Рис. 168.

20. Діягоналі та боки прямокутника.

§ 65. Діягоналя прямокутника. Трикутник являє собою цупку фігуру (стор. 45, вправа 1); дослідімо, чи не буде цупкий і прямокутник. Чотири рейки звязано кінцями так, що утворилася така рамка для повітряного змія (рис. 169). Коли ви спробуєте змінити форму цього змія, то побачите, що він дуже легко перетворюється на фігуру з косими кутами, цеб-то прямокутник не являє собою „цупкої системи“.

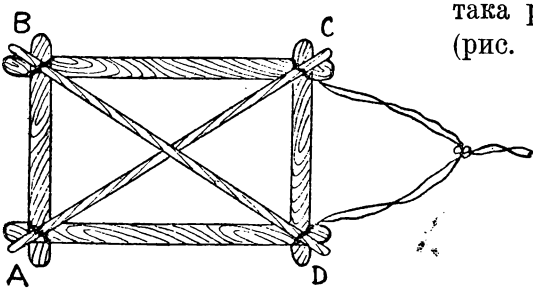


Рис. 169. Змій.

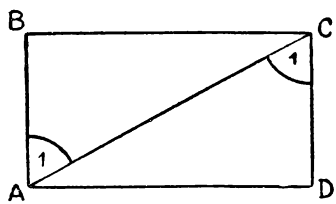


Рис. 170.

Щоб зробити цю раму цупкою, злучімо рейкою AC протилежні вершини нашого прямокутника (рис. 170). Коли спробуємо тепер змінити форму прямокутника, то цього нам зробити вже не вдасться, бо нова рейка AC утворила з прямокут-

[1]) $\angle B + \angle A = 2d$ (як внутрішні однобічні); $\angle A = d$, а тому й кут $B = d$.

ника два трикутники, що й зробило цього прямокутника цупким. Таку просту *AC*, що злучає дві протилежні вершини прямокутника, звуть його д і я г о н а л е ю.

§ 66. Центр симетрії прямокутника.

Дослід. Обертаючи вашого прямокутника навколо діягоналі, ви переконаєтесь, що ця діягоналя віссю симетрії не буде.

Подивімось тепер, чи не вдасться нам знайти на цій діягоналі ц е н т р симетрії. Розріжте прямокутник уздовж діягоналі на два трикутники й один з цих трикутників *ABC* (рис. 171) повертайте навколо точки *O*, що поділяє нашу діягоналю навпіл. Чи вдасться вам, коли ви будете обертати трикутник *ABC* навколо точки *O*, щоб він зіллявся з трикутником *ACD*?

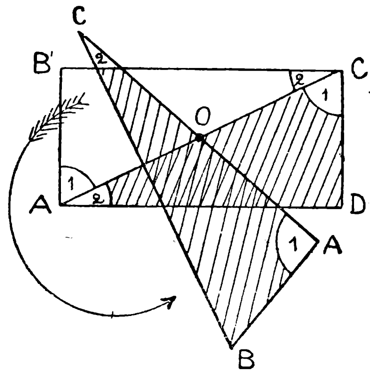


Рис. 171.

Висновок. Коли ви будете обертати △ *ACB* навколо точки *O*, вам вдасться зілляти цей трикутник з трикутником *ACD*, а тому с е р е д и н а (*O*) д і я г о н а л і п р я м о к у т н и к а є ц е н т р й о г о с и м е т р і ї.

Доведення. △ *ACB* підчас обертання його навколо точки *O* повинен зіллятися з △ *ACD* через те, що в них бік *AC*— спільний; а кожна пара прилеглих до цього боку кутів складається з рівних кутів (як унутрішніх перехресних).

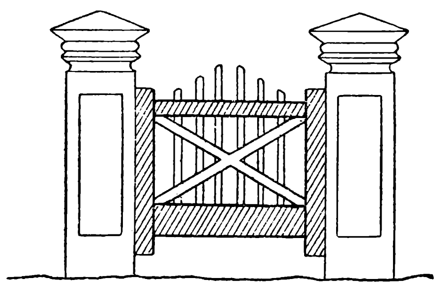


Рис. 172.

§ 67. Властивість протилежних боків прямокутника. Виявилося, що △ *ABC* = △ *ACD*. А тому рівні й відповідні боки, а саме *AB* = *CD* й *BC* = *AD*, себ-то: у п р я м о к у т н и к а п р о т и л е ж н і б о к и р і в н і.

§ 68. Властивість діягоналів прямокутника. Коли хотять ворота зробити міцнішими, то їх скріплюють навхрест не однією діягоналею, а двома (рис. 172). Розгляньмо, які для цього треба взяти планки: однакові завдовжки, чи ні.

Нарисуйте який-небудь прямокутник. Наприклад, $ABCD$ (рис. 173). Порівняйте одну з одною його діягоналі AC й BD. У цих трикутників проста AD буде спільним боком. Бік

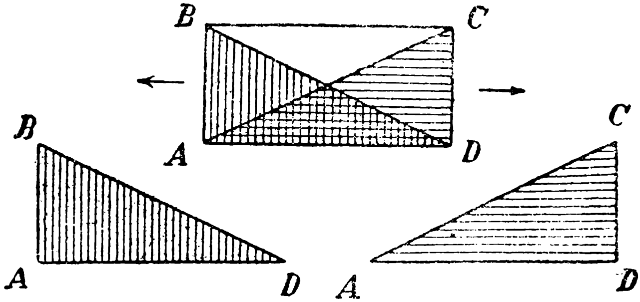


Рис. 173.

$AB = CD$ (через що?) й $\angle BAD = \angle ADC$ (чому?). Отже, ці прямокутні трикутники будуть рівні. А коли так, то $AC = BD$.

Висновок. У прямокутника діягоналі одна одній рівні.

§ 69. Сусідні боки прямокутника. Висота й основа. Покажіть два сусідні боки прямокутника. Один з них звуть довжиною прямокутника, другий—шириною його. (Звичайно за ширину вважають бік коротший).

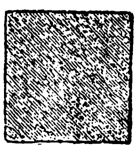


Рис. 174.
Квадрат.

Часто один із боків прямокутника звуть основою його, а сусідній з ним бік—висотою.

§ 70. Як із прямокутника зробити квадрата. Нарисуйте прямокутник з рівними боками (рис. 174). Як зветься такий прямокутник? Яку властивість мають кути та боки квадрата?

21. Як виміряти площу прямокутника.

§ 71. Вам бажано довідатися, яку площу має приміщення, що в ньому живуть робітники, чи досить його освітлено, то-що.

Щоб про все це довідатися, треба вміти виміряти площу прямокутника, бо найчастіше підлога, стіни, вікна мають прямокутну форму.

Пригадаймо, як вимірюють площу прямокутника.

§ 72. Якою мірою вимірюють площу. Нарисуйте в зшитках такий квадрат, щоб бік у нього дорівнював лінійному сантиметрові. Як зветься такий квадрат? Пригадайте декілька речей, що їх площу можна виміряти квадратовими сантиметрами (рис. 175). Чи зручно вимірювати площу підлоги квадратовими сантиметрами? Чому незручно? Нарисуйте на дошці квадратовий метр.

Площу квадрата, що бік у нього дорівнює якій-небудь лінійній одиниці, будемо звати квадратовою одиницею.

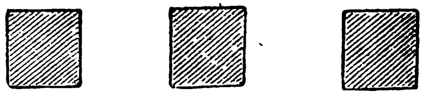


Рис. 175
Квадратові сантиметри.

§ 73. **Як виміряти площу прямокутника.** Щоб виміряти площу підлоги, треба довідатися, скільки квадратових одиниць (квадратових метрів, то-що) має ця площа. Але укладати безпосередньо квадратові одиниці на підлогу незручно.

Пригадаймо, як можна про це довідатися, не укладаючи безпосередньо квадратові одиниці на нашу площину, а виміряючи (лінійними одиницями) тільки боки нашого прямокутника.

Задача 1. Зміряймо площу прямокутника (рис. 176). Висота його 4 сантиметри. Відкладімо на обох висотах лінійні сантиметри й відповідні точки поділів з'єднаймо простими лініями (рис. 176).

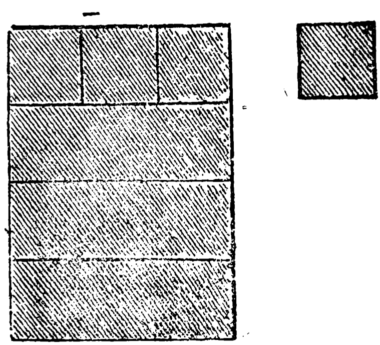


Рис. 176.

Розрізавши прямокутник уздовж по цих лініях, матимемо 4 смужки, кожну завширшки 1 сантиметр.

Тепер розріжмо кожну з цих смужок на квадратові сантиметри. Почнемо з першої. Довжина цієї смужки 3 сантиметри. Відкладімо вздовж по цій смужці 3 сантиметри і відповідні точки поділів з'єднаймо простими лініями. Розрізавши смужку по цих лініях, матимемо 3 квадратові сантиметри (рис. 176).

Полічімо тепер, скільки квадратових сантиметрів матимемо ми з усього нашого прямокутника. З однієї смужки ми мали 3 квадратових сантиметри, а смужок таких у нас було 4, отже, з усього прямокутника ми матимемо

3 кв. см $\times$ 4 = 12 квадратових сантиметрів.

А тому, щоб міряти площі прямокутника, матимемо таке правило:

Для того, щоб дізнатися, скільки квадратових одиниць має в собі площа прямокутника, треба зміряти тими самими лінійними одиницями (наприклад, сантиметрами) основу й висоту його й здобуті числа перемножити. Добуток покаже, скільки відповідних квадратових одиниць (квадратових сантиметрів) має площа прямокутника.

Таке правило вивели ми для того випадку, коли основу й висоту прямокутника можна виміряти цілими числами. Подивімось тепер, чи можна використати це правило тоді, коли боки в прямокутника зазначається дробовими числами.

Задача 2. Яку частину квадратового сантиметра становить площа прямокутника, в якого основа $^1/_5$ сантиметра, а висота $^1/_3$ сантиметра?

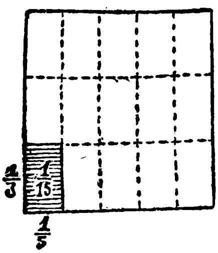


Рис. 177.

Спочатку нарисуйте квадратовий сантиметр[1]) (рис. 177).

Поділивши основу його на 5 рівних частин, а висоту на 3 рівні частини, виділіть з цього квадрата прямокутник з боками $^1/_5$ см й $^1/_3$ см. Тепер увесь квадрат поділіть на такі прямокутники й полічіть їх.

Виявиться, що ваш квадратовий сантиметр має в собі $3 \times 5 = 15$ таких прямокутників; отже площа одного з цих прямокутників дорівнює $^1/_{15}$ частці квадратового сантиметра.

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

Задача 3. Виміряйте площу прямокутника, що в нього основа дорівнює $1^1/_3$ сантиметрові, а висота—$2^1/_4$ сантиметри.

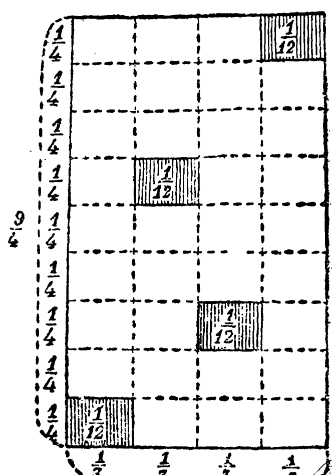


Рис. 178.

Нарисуйте такий прямокутник (рис. 178). На основі його відкладіть треті частки сантиметра ($1^1/_3 = {^4/_3}$), а на висоті — четверті його частки ($2^1/_4 = {^9/_4}$). Через позначені точки проведіть ряд простих ліній, що розіб'ють прямокутник на маленькі прямокутники з площею $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ квадратового сантиметра.

Уся площа прямокутника матиме $4 \times 9 = 36$ таких прямокутників, і в ній буде $\frac{36}{12}$ кв. см.

$$1^1/_3 \times 2^1/_4 = \frac{36}{12} = 3.$$

1) На рис. 177 розмір кв. см значно збільшений.

Правило. Отже, й для того випадку, коли боки в прямокутникові зазначається числами дробовими, залишається справедливим доведене раніш правило, як виміряти площу прямокутника, а саме: щоб дізнатися, скільки квадратових одиниць має в собі площа прямокутника, досить виміряти відповідними лінійними одиницями його основу та висоту й здобуті після міряння числа перемножити. Добуток покаже, скільки квадратових одиниць (або часток їхніх) має в собі площа прямокутника.

Звичайно правило це коротше висловлюють так:

Площа прямокутника рівна основі, помноженій на висоту.

(В чому неточність цього формулювання?).

§ 74. Формула для виміряння площі прямокутника. Означмо літерою a число, що показує, скільки лінійних одиниць має основа прямокутника, літерою h означмо число таких самих лінійних одиниць, що має в собі висота прямокутника (рис. 179), а число відповідних квадратових одиниць, що їх має площа, означмо літерою S. Поміж цими числами повинна бути така залежність:

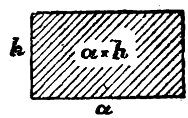


Рис. 179.

$$S = a \times h \quad . \;.\; . \;(1).$$

Приклад. Коли прямокутна підлога кімнати має завдовжки $9^1/_3$ метра, завширшки—$7^1/_2$ метра [$a = 9^1/_3$ (м), $h = 7^1/_2$ (м)], тоді площа її має $S =$ $= 9^1/_3 \times 7^1/_2 = \frac{28}{3} \times \frac{15}{2} = 70$ кв. м

22. Як виміряти площу квадрата.

§ 75. Як виміряти площу квадрата. Квадрат—це прямокутник з рівними боками.

Отже, щоб дізнатися, скільки квадратових одиниць (квадратових сантиметрів або-що) має в собі площа, можна розрізати наш квадрат на квадратові одиниці тим самим способом, як робили ми це в прямокутникові.

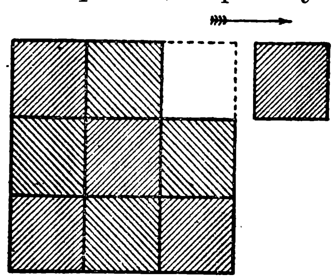


Рис. 180.

Розріжте, наприклад, цим способом на квадратові сантиметри квадрат, в якого бік має 3 сантиметри (рис. 180). Через те, що й основа, і висота цього квадрата теж має по 3 сантиметри, площа його складатиметься з $3 \times 3 = 9$ квадратових сантиметрів. (Скажіть сами, через що).

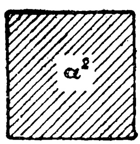
Отже, щоб дізнатися, скільки квадратових одиниць (наприклад, квадратових сантиметрів) має в собі площа квадрата, треба виміряти відповідною лінійною одиницею будь-який його бік і здобуте число помножити саме на себе. Знайдене число покаже, скільки квадратових одиниць має площа цього квадрата.

§ 76. Правило. Щоб виміряти площу квадрата, вивели ми таке правило: для того, щоб дізнатися, скільки квадратових одиниць має в собі площа квадрата, треба виміряти відповідними лінійними одиницями один з його боків. Здобуте після міряння число повторити множником двічі. Добуток покаже число квадратових одиниць, що їх має площа квадрата.

Правило це коротше висловлюють так:

Площа квадрата рівна бокові його, помноженому на самого себе.

§ 77. Формула. Коли означимо літерою a число лінійних одиниць, що має в собі бік квадрата (рис. 181) (при чому літера ця може означати й ціле, й дробове число), а літерою S число, що показує, скільки відповідних квадратових одиниць має в собі площа квадрата, то

a 

a

Рис. 181.

$$S = a \times a$$

або $S = a^2$.

Останню формулу можна прочитати так: площа квадрата рівна квадратові боку його.

Приклад. Обчислімо площу квадрата, в якого бік $2^1/_2$ сантиметри.

$$a = 2^1/_2;\ a^2 = 2^1/_2 \times 2^1/_2 = 6^1/_4.$$

Отже:

$$S = a^2 = 6^1/_4 \text{ (кв. см).}$$

§ 78. Квадратові метричні міри. У метричній системі мір за основу квадратових мір покладено квадратовий метр—це квадрат, у якого всі боки рівні одному метрові. Нарисуйте на підлозі або на подвір'ї такий квадрат.

Слід пам'ятати, що один квадратовий метр $= 2$ квадр. арш. (приблизно).

Перевірте це, прийнявши, що 1 метр $= 1{,}41$ арш.

Таблиця квадратових метричних одиниць.

Квадратовий кілометр має 1000×1000 кв. метрів.
Квадратовий гектометр (гектар) має 100×100 кв. метрів.
Квадратовий декаметр (ар) має 10×10 кв. метрів.
Квадратовий дециметр $= \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ частині кв. метра.
Квадратовий сантиметр $= \frac{1}{100} \times \frac{1}{100}$ частині кв. метра.
Квадратовий міліметр $= \frac{1}{1000} \times \frac{1}{1000}$ частині кв. метра.

Найчастіше вживані квадратові метричні міри.

З усіх квадратових одиниць найчастіше вживається:

1) Квадратового міліметра.

2) Квадратового сантиметра, що рівний є площі нігтя (приблизно).

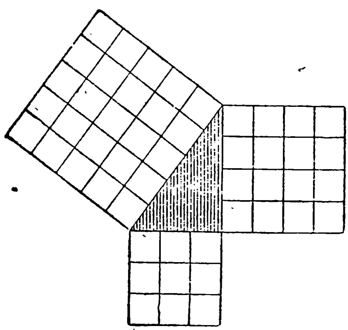


Рис. 182. $3^2+4^2=5^2$.

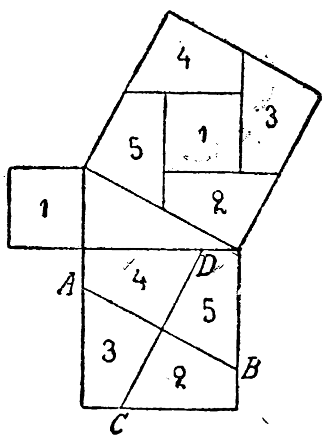


Рис. 183.

3) Квадратового метра, що мало не вдвоє більший за квадратовий аршин.

4) Квадратового гектометра (гектара), що грає ролю нашої десятини (він становить 0,9 частини її).

5) Квадратового кілометра, що рівний є 0,9 квадр. верстви.

§ 79. Пітагорова теорема.

Дослід 1. Нарисуйте який-небудь прямокутний трикутник (рис. 182). На його катетах та гіпотенузі збудуйте по квадрату. Виміряйте площі всіх трьох квадратів. Порівняйте їх між собою.

Дослід 2. Нарисуйте квадрати на двох боках прямокутного трикутника. Квадрат більшого катета поділіть на чотири частини таким способом, як показано це на рисункові 183. З чотирьох цих частин і з квадрата другого катета складіть квадрат гіпотенузи.

Висновок. Порівнюючи площі цих квадратів, ви побачите, що площа квадрата, збудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ двох квадратів, збудованих на катетах.

ВПРАВИ.

1. Виміряйте площу підлоги вашої квартири та обчисліть, скільки квадратових метрів припадає на кожну людину, що живе в цій квартирі.

Довідайтеся, яку житлову площу вважають за нормальну. Чи відповідає цій нормі площа вашої квартири?

2. Кімнату вважають за досить ясну, коли площа вікон має не менш як $^1/_{10}$ частину площі підлоги. Для шкільної кімнати площа вікон повинна бути не менша як $^1/_5$ частина площі підлоги. Виміряйте площу вікон та підлогу у ваших шкільних кімнатах і довідайтеся, чи досить буде в них світла.

3. Порівняйте площу стін у вашої груби з площею підлоги.

4. Зробіть усі потрібні обміри й обчисліть, скільки сувоїв шпалерів треба купити, щоб можна було обклеїти стіни у вашій кімнаті (звичайно сувій шпалерів буває 30 см завширшки та 6 метрів завдовжки).

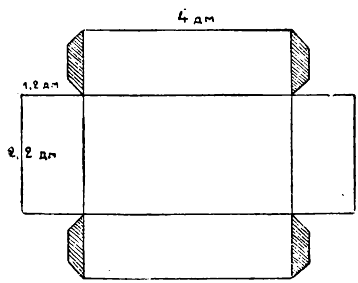


Рис. 184.

5. Зробіть потрібні обміри і потім обчисліть, скільки коштуватиме повний ремонт вашої кімнати (покрасити підлогу, побілити стіни та стелю, покрасити вікна й двері). Про потрібні для підрахунку ціни запитайте у своїх знайомих.

6. Обслідуйте житлову площу в квартирі якого-небудь ремісника. Чи відповідає вона нормі?

7. Обслідуйте освітлення в приміщенні ремісника.

8. Палітурникові треба розрізати картон, що в нього довжина й ширина відповідно рівні 72 см та 48 см, на прямокутні смуги, щоб у них основа була 8 см, а висота 12 см. Зробіть такий рисунок, щоб з нього ми довідалися, як палітурникові найкраще розрізувати цей картон, і скільки всіх смужок він матиме.

9. Бляхар, щоб зробити скриньку, вирізав таку розгортку її (рис. 184). Скільки бляхи витратив він на цю викройку?

10. Обчисліть площу прямокутника, в якого:
основа має . . . 3 см, 5 см, $8^1/_2$ см, 8 см, 4,5 см,
а висота має . . 4 см, 2 см, 6 см, $3^1/_4$ см, 3,6 см.

11. Обчисліть площу прямокутника, в якого:
ширина має . . . 15 мм, 17 мм, 2 см 4 мм, 8,4 см,
довжина має . . . 40 мм, 4 см, 1 см 5 мм, 0,5 см.

12. Вирахуйте площу квадрата, коли бік його має 6 см; 12 мм; 3 см 2 мм.

13. Дротину 6 см завдовжки треба зігнути в квадрат. Який завдовжки буде бік цього квадрата? А площа його?

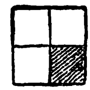


Рис. 185.

14. Чому дорівнює периметр одного квадратового сантиметра?

15. Нарисуйте квадрат з боком $^1/_2$ см. Чому буде рівна площа його?

Пересвідчіться в цьому за допомогою рисунка 185.

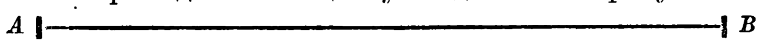


Рис. 186.

16. Основа прямокутника втричі довша ніж його висота. Сума основи та висоти рівна лінії *AB* (рис. 186). Нарисуйте цей прямокутник та обчисліть його площу.

17. Нарисуйте прямокутник, у якого спідня основа— 5,3 см, а діягоналя—8 см 3 мм. Обчисліть його площу.

18. З чотирьох фігур (рис. 187) складіть один квадрат. Обчисліть його периметр та площу.

19. Для шкільного будинку дано місце, що має форму квадрата з боком 73 м. Обчисліть, яку площу має це місце.

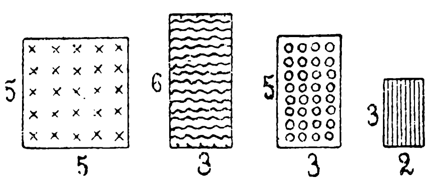


Рис. 187.

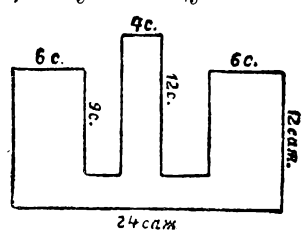


Рис. 188.

20. Будинок має таку форму (рис. 188). Числа на рисункові означають, скільки сажнів має довжина кожної стіни будинку, при чому обидва виступи в будинка мають квадратову форму. Знайдіть площу основи цього будинку.

21. Площа одного квадратового ґрунту має 81 кв. м, а другого 49 кв. м. На скільки периметр першого більший за периметр другого ґрунту?

22. Подвір'я має площу 180 кв. м. Довжина його 36 м. Яка його ширина?

23. Дерев'яні ворота, що мають форму прямокутника з боками 1,5 й 2 метри, треба скріпити по діягоналі поперечкою. Яку завдовжки треба зробити цю поперечку?

24. Треба покрити бляхою дах прямокутного хліва (рис. 90). Скільки аркушів бляхи треба купити? Розміри: даху 24 × 6 м, аркуша заліза $1^1/_2 \times {}^1/_2$ метра. На загинання [1]) витрачено 9 аркушів.

25. Кожен бік двосхилого даху має форму прямокутника 10 м × 6 м (рис. 84). Дах цей треба покрити черепицею. Кожна черепиця криє прямокутник 15 см × 6 см. Скільки черепиці потрібно на цей дах?

26. У стіні 40 дм × 40 дм [2]) зроблено квадратове вікно 23 дм × 23 дм. Обчисліть площу решти стіни.

27. Лист скла має розмір 78 см × 66 см. Чи можна вирізати з нього чотири скла такого розміру: 40 см × 30 см; 35 см × 30 см; 40 см × 36 см; 34 см × 26 см? Покажіть рисунком, як це зробити.

28. З квадратового метра скла вирізали 6 квадратових шибок з боком 20 см. Скільки ще скла залишилося?

29. Підлога в кухні має завширшки 10 метрів, а завдовжки 15 метрів. Її треба вимостити кахлями квадратової форми, з боком 50 см. Скільки кахлів треба купити для цієї підлоги?

30. Треба помостити дошками прямокутну підлогу в кімнаті, завдовжки 19 м, а завширшки 6 м. Дошки 8 м завдовжки, а завширшки $^1/_2$ м. Скільки треба купити дощок, і як треба їх класти?

31. Підлогу, що має розміри 6 м × 9 м, треба вислати дошками 3 м × 2,5 дм. Скільки треба купити на цю підлогу дощок та гвіздків, коли на кожен квадрат. метр іде 8 гвіздків?

32. На стелі, що має форму прямокутника, треба приладнати лямпу так, щоб вона була на однаковому віддаленні від усіх кутів стелі. Як знайти точку, щоб гачок убити?

33. Щоб облямувати квадратову скатертину, пішло 12 метрів мережки. Яка площа цієї скатертини?

34. Скільки треба купити мережки, щоб облямувати скатертину 6 м завдовжки? Площа її—24 кв. метри.

35. Треба коло будинку зробити дерев'яний тротуар (пішоход), щоб він був $1^1/_2$ м завширшки та 6 м завдовжки. Скільки треба на це купити 9-метрових дощок, по $^3/_4$ метра завширшки?

36. Якиё завдовжки треба зробити тин, щоб обгородити ним з усіх боків квадратове поле, в якого площа 900 кв. м?

37. Яке поле потребує коротшого тину: прямокутне 320 метрів × 20 метрів, чи квадратове, в якого площа однакова з площею прямокутного поля?

---

[1]) З'єднання двох листів заліза.

[2]) Цеб-то довжина = 40 дм, ширина = 40 дм.

38. Щоб обгородити прямокутний сад 40 м завширшки, поставили 182 м тину. На хвіртку залишили 2 м. Скільки гектарів має площа цього садка?

39. Одне і друге поле обгородили тином однакової довжини. Перше поле має форму прямокутника з боками 180 м і 140 м. Друге поле—квадратове. Чи однакову площу мають те й друге поле? Обчисліть ці площі.

40. Площа саду = 1600 кв. м; по периметру саду йде стежка. Решта саду має форму квадрата з боком = 38 м. Знайдіть площу стежки й ширину її.

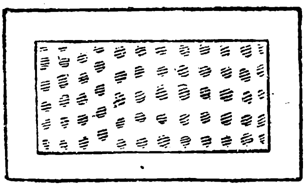


Рис. 189.

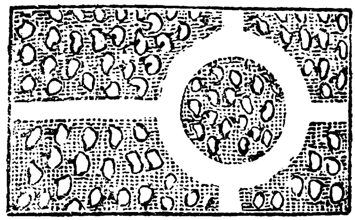


Рис. 190.

41. Вздовж горожі навколо прямокутника-саду, що має 180 метрів довжини та 74 метри ширини, йде стежка завширшки 2 метри (рис. 189). Решту засаджено деревами: на кожні 10 кв. м по одному дереву. Скільки дерев посаджено?

42. Поле має форму прямокутника, в якого ширина = 24 м, а довжина = 50 м. На ньому мають посадити сад. Під стежки залишено 30 кв. м (рис. 190). Скільки треба купити дерев для цього саду, коли на кожних двох квадратових метрах мають посадити по 1 деревині?

43. Десятина землі має 2400 кв. саж. Взагалі десятині надають форми прямокутника, в якого ширина буває 20 саж., 30 саж. або 40 саж. Довжину такої прямокутної десятини звуть **г о н а м и**. Вирахуйте, які завдовжки будуть гони.

44. Улиця Воровського (головна вулиця в Київі) має приблизно 5 десятин. Завширшки вона 30 сажнів. Яка завдовжки ця вулиця?

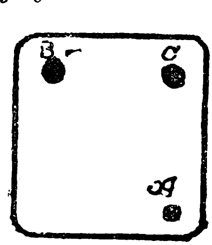


Рис. 191.

45. За „квадратуру“ розуміють перетворення даної фігури на квадрат, у якого площа однакова з площею нашої фігури. Знайдіть „квадратуру“ такого прямокутника: 9 метрів$\times$4 метри (цеб-то нарисуйте такий квадрат, щоб його площа була така, як і в нашого прямокутника).

46. В пиріг, що має бік 6 см, покладено 3 горіхи (*A*, *B* та *C*). Треба розділити цей пиріг між трьома хлопчиками так, щоб кожен дістав по однаковому куску пирога й по одному горішку (рис. 191).

47. В математиці „софізмами“ звуть такі задачі, де ми, затіняючи яку-небудь хибу, „доводимо правдивість“ якого-небудь в дійсності неправдивого факту. Ось один з таких софізмів.

Я вас зараз переконаю в тому, що 64 кв. см = 65 кв. см! На рис. 192 ми маємо квадрат з боком 8 см. Коли розрізати його по точкованих лініях на чотири частини *A*, *B*, *C* й *D*, то можна з них скласти прямокутник (рис. 193) з боками 13 см і 5 см. Отже квадрат, що має 64 кв. см, перетворили ми на прямокутник, що має 13 × 5 = 65 кв. см. Звідци бачимо, що 64 кв. см = 65 кв. см.

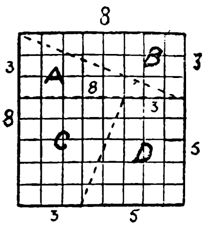


Рис. 192.

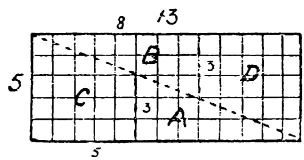


Рис. 193.

Проробіть все це сами (клітки треба робити надто великі!) і знайдіть помилку в цьому софізмі.

48. Перевірити, чи правильно рисує прямі кути ваш косинець, можна так. Нарисуйте косинцем прямий кут *BAC* (рис. 194). Відкладіть від точки *A* на одному катеті 3 см, на другому 4 см. Коли віддалення між цими точками *B* та *C* буде 5 см, то прямий кут—правильний. На підставі якої властивости можна робити таку перевірку косинця?

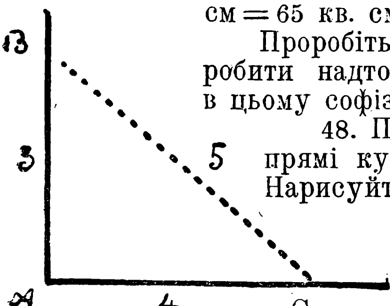


Рис. 194.

Розділ 7.

РІВНОБІЖНИК, ТРИКУТНИК, ТРАПЕЗ, РОМБ.

§ 80. Ділянки землі часто мають вигляд не прямокутника, а складнішої фігури (рис. 195).

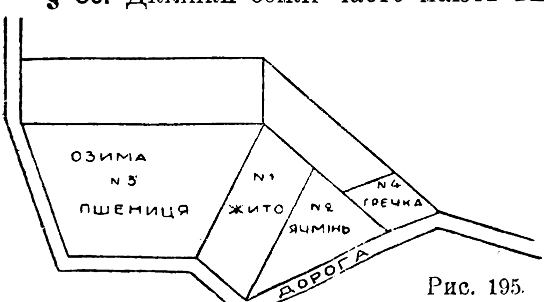


Рис. 195.

Повчімося виміряти площі таких складних фігур.

Спочатку розгляньмо фігуру ділянки № 1, що її засіяно житом.

23. Рівнобіжник.

§ 81. Що таке рівнобіжник. Прямокутник, як це ми бачили раніш, не являє собою цупкої системи (стор. 45, вправа 1). Досліdімо, на яку фігуру перетворюється він підчас цієї „деформації".

Скріпіть чотири планки „на суставах" так, щоб утворився прямокутник. Почніть „деформувати" його (рис. 196). Підчас цього руху протилежні боки будуть залишатися рівнобіжними, утворюючи таку фігуру (рис. 196, 197).

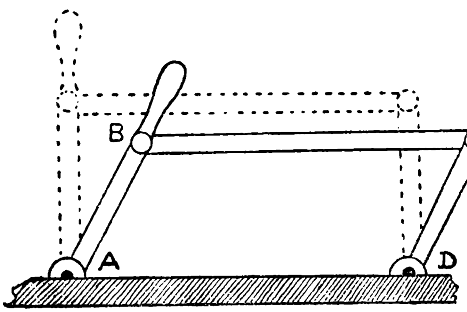


Рис. 196.

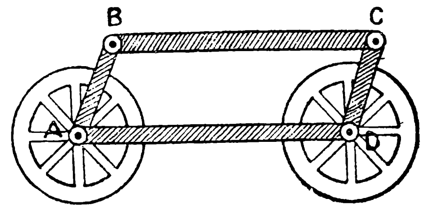


Рис. 197.

Прут, що передає рух колесам паротяга, залишається завжди горизонтальним через те, що „куліса" *ABCD* підчас руху утворює рівнобіжника.

Такий чотирикутник, в якого обидві пари протилежних боків рівнобіжні, будемо звати р і в н о б і ж н и к о м.

§ 82. Властивість боків рівнобіжника. В попередніх дослідах (§ 81) прут *BC* тільки тоді буде рухатись рівнобіжно, коли протилежні рейки завдовжки будуть однакові. Доведімо це. Сполучіть діягоналею (*BD*) дві протилежні вершини рівнобіжника (рис. 198). Ви одержите два трикутники (рис. 199), у яких

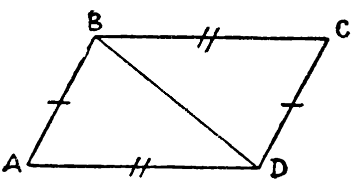


Рис. 198.

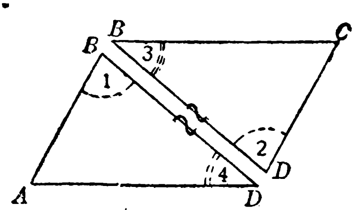


Рис. 199.

один бік (діягоналя *BD*) буде спільним, а два прилеглі до цього боку кути відповідно рівні, а саме:

$$\angle 1 = \angle 2 \qquad \angle 3 = \angle 4$$

(як унутрішні перехресні).

А тому $\triangle ABD = \triangle BDC$.

А коли так, то $AB = DC$; $BC = AD$. (Чому?)

Висновок. У всякого рівнобіжника протилежні боки повинні бути один одному рівні.

§ 83. Центр симетрії рівнобіжника.

Дослід 1. Підчас „деформації" прямокутника всі його боки не зміняли свого розміру. Дослідіть, чи не будуть зміняти свого розміру й діягоналі.

З'єднайте в вашій рухомій моделі рівнобіжника (§ 81) протилежні вершини по діягоналях резиновою ниткою. Ви помітите[1]), що підчас деформації рівнобіжника одна його діягоналя ввесь час буде збільшуватися, а друга рівночасно зменшується, себ-то в рівнобіжника діягонолі не рівні одна одній.

Дослід 2. Зверніть тепер увагу на ту точку, в якій діягоналі рівнобіжника перетинаються. Дослідіть, чи не буде ця точка *O* (рис. 200) центром симетрії нашого рівнобіжника. Виріжте з прозорого паперу такий самий рівнобіжник. Накладіть його на рівнобіжник *ABCD* (рис. 200) й прикріпіть його шпилькою в точці *O*. Спробуйте, обертаючи ваш „прозорий" рівнобіжник навколо цієї точки *O*, накласти ці рівнобіжники так, щоб $\triangle ABO$ („прозорого" рівнобіжника) злився з $\triangle DCO$ (основного рівнобіжника[2]).

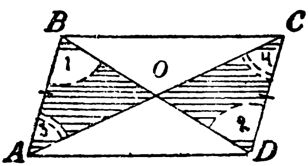


Рис. 200.

Виявиться, що коли повернете прозорий рівнобіжник на півобороту (на 180°), то ці трикутники один з одним зіллються[2]). А коли так, то зіллються один з одним і наші рівнобіжники, цеб-то: точка перетину діягоналів рівнобіжника буде його центром симетрії.

Висновок. Діягоналі рівнобіжника ділять одна одну на рівні частини. Таку саму властивість мають і діягоналі прямокутника. (Чому?).

§ 84. Як виміряти площу рівнобіжника. Ділянка № 1, засіяна житом (рис. 195), являє собою такий рівнобіжник (рис. 201).

Щоб виміряти площу цієї ділянки, подбаємо про те, щоб замінити цього рівнобіжника прямокутником, який мав-би таку

---

[1]) Щоб легше було стежити, як міняється довжина діягоналів, перев'яжіть резинки в кількох місцях кольоровою ниткою.

[2]) $\triangle ABO = \triangle CDO$, бо в них $AB = CD$ (чому?), $\angle 1 = \angle 2$ (чому?), $\angle 3 = \angle 4$ (чому?).

саму площу. (Фігури, що мають однакові площі, будемо звати **р і в н о в е л и к и м и** (рівними).

Дослід. Більший бік рівнобіжника будемо вважати за **о с н о в у** (бік AD або BC). Спустіть з верхньої основи на спідню перпендикуляр LM. Будемо звати його **в и с о т о ю** рівнобіжника. Розрізавши рівнобіжника вздовж висоти на два куски,

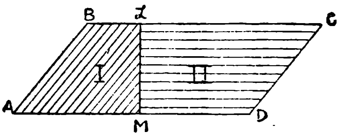


Рис. 201.

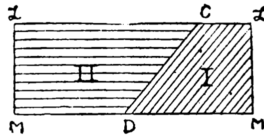


Рис. 202.

поміняйте ці куски місцями та прикладіть їх один до одного так, щоб рівнобіжник перетворився на прямокутника (рис. 202). Вимірявши площу цього прямокутника, ви й довідаєтеся про величину площі рівнобіжника.

Доведення. Справді, $\angle D + \angle A$ в сумі дають 180° (§ 54), а тому, коли ви прикладете їх один до одного так, щоб CD зійшлося з AB,—вони перетворяться на суміжні кути. Отже, MD й DM_1 мають утворити одну спільну просту MM_1 (рис. 202). За основу цього прямокутника можна вважати бік MM_1, а за висоту LM (рис. 202).

$$\text{Площа прямокутника} = MM_1 \times LM.$$

Таку саму площу має й наш рівнобіжник. Що-до основ цих фігур, то вони однакові; $MM_1 = AD$ (Чому?). Однакові й висоти. А тому

$$\text{П л о щ а р і в н о б і ж н и к а} = AD \times LM, \text{ цеб-то}$$

Висновок. **П л о щ а р і в н о б і ж н и к а р і в н а д о б у т к о в і з й о г о о с н о в и н а в и с о т у.**

§ 85. Формула.

Коли основа рівнобіжника має a см,
Коли висота його „ h см,
То площа рівнобіжника „ ah кв. см.

$$S = ah.$$

Приклад. Виміряймо площу якого-небудь рівнобіжника. За допомогою косинця проведімо висоту й виміряймо її. Нехай вона буде 2 см й 4 мм; це можна записати так: 2,4 см. Нехай основа буде 5 см.

Отже:

число $a = 2{,}4$ см, число $S = a \times h = 2{,}4 \times 5$;
число $h = 5$ см, або $S = 12$ кв. см.

Цеб-то, площа рівнобіжника має 12 кв см.

24. Трикутник.

§ 86. Як виміряти площу трикутника. Часто зустрічається потреба виміряти на полі площу клина, що має форму трикутника, наприклад, ділянка № 2, засіяна ячменем (рис. 195). Повчімося робити це.

Дослід. Нехай, наприклад, треба виміряти площу такого трикутника (рис. 203). Спустіть з якої-небудь вершини (A) цього трикутника на протилежний бік його (BC) перпендикуляр (AD).

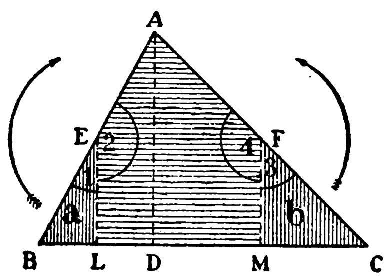


Рис. 203.

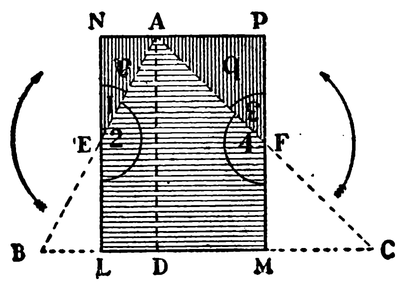


Рис. 204.

Перпендикуляр цей звуть в и с о т о ю трикутника. Бік (BC), що на нього спущено перпендикуляр, звуть о с н о в о ю трикутника.

Спробуйте, спустивши з середини двох боків (точок E та F) на основу BC перпендикуляри (EL та FM), перетворити трикутник наш на рівновеликий (рівний) йому прямокутник. (Рисунки 203, 204 допоможуть вам це зробити).

Вимірявши площу цього прямокутника, ви одночасно обчислите й площу трикутника.

Дослід. З середини двох боків (E та F) спустіть на третій бік (BC) перпендикуляри (EL та FM). Відріжте ті два трикутнички (a та b), що утворилися з боків, і прикладіть їх до основного трикутника так, щоб він перетворився на прямокутника. Вимірявши площу цього прямокутника, ви одночасно з цим обчислите й площу нашого трикутника.

Доведення. Розгляньмо уважніше цього прямокутника. Коли ви відріжете маленький трикутник a (рис. 203, 204) й повернете його навколо точки E, то бік BE зіллється з боком EA. (Чому?). Проста EN та EL утворять одну просту лінію NL (кути $\angle 1$ та $\angle 2$ мусять бути суміжні. Чому?). Те саме буде й з трикутником b. Таким чином ви матимете прямокутник, у якого висота (AD) буде така, як і в попереднього трикутника. Що-до основи BC нашого трикутника, то з неї ми утворили дві основи прямокутника LM та NP, а тому основа нашого прямокутника (LM) рівна буде $\frac{1}{2}$ основи трикутника. Отже,

Щоб обчислити площу трикутника, досить половину основи його помножити на висоту.

Площа $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \,.\, AD.$

Формула.

Коли основа трикутника має a см,
Коли висота його має h см,
То площа трикутника має $\frac{1}{2} a.h$ кв. см.

$$S = \frac{1}{2} \,.\, a.h \text{ (рис. 205).}$$

§ 87. Як рисувати висоту трикутника. Коли ви обчисляєте площу трикутника, то треба звертати особливу увагу на те, який напрямок матиме ваша висота.

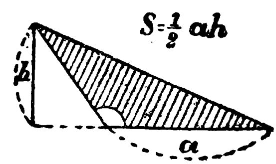


Рис. 205.

Повчіться рисувати висоти в різноманітних трикутниках.

Коли ви за основу берете бік (BC) тупого кута, то висота (AD) піде поза трикутником (див. рис. 207).

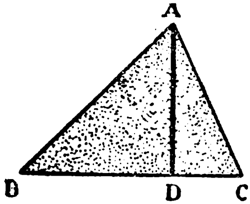


Рис. 206.

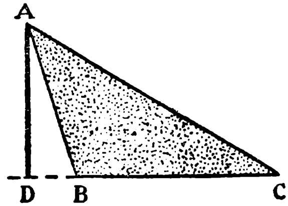


Рис. 207.

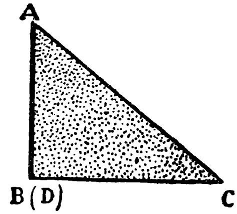


Рис. 208.

Коли ви за основу берете бік (BC) прямого кута (рис. 208), то висота піде вздовж другого катета (AB).

25. Трапез.

§ 88. Основа, висота та середня лінія трапеза. Ділянка № 3 (рис. 195), що її засіяно пшеницею, являє собою таку фігуру (рис. 209).

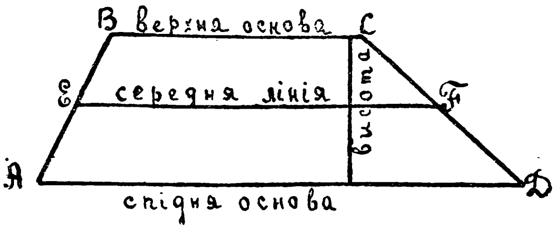


Рис. 209.

Цю фігуру звуть трапезом.

Покажіть пару рівнобіжних боків її.

Ці боки звуть основами трапеза.

Покажіть спідню основу його. Проведіть перпендикуляр з якої-небудь точки верхньої основи на спідню.

Перпендикуляр цей звуть висотою трапеза.

Поділіть один з боків трапеза навпіл і через цю точку поділу E проведіть просту EF, рівнобіжну до основи. Цю просту лінію звуть середньою лінією трапеза.

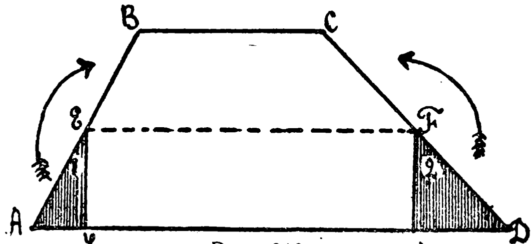


Рис. 210.

§ 89. Перший спосіб вимірювання площі трапеза.

Дослід. Спробуйте перетворити трапез на рівновеликий прямокутник, що його основа дорівнює середній лінії трапеза (EF), а висота дорівнює висоті трапеза. Перетворення це треба зробити на зразок того, як це зробили ви з трикутником (§ 86). Рисунки 210, 211 допоможуть вам це зробити.

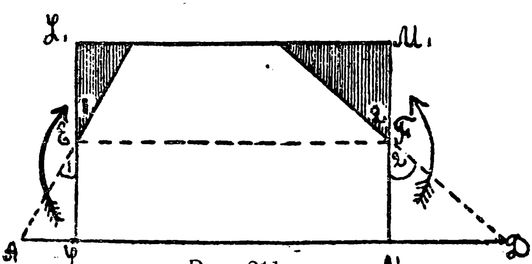


Рис. 211.

Висновок. Площа трапеза рівна добуткові з середньої його лінії на висоту.

§ 90. Властивість середньої лінії трапеза. Обчисляти площу трапеза, вимірюючи середню лінію його, не завжди зручно.

(Чому?). Обміркуємо, чи не можна міряння середньої лінії трапеза замінити вимірюванням його основ.

Дослід. Розріжте трапез вздовж середньої лінії EF (рис. 212) і, обернувши верхню частину трапеза навколо точки E, притуліть її так, щоб бік EB злився з боком EA. (Чи зіллються ці боки? Чому?). У вас повинна утворитися така фігура (рис. 213). Що являє собою вона?

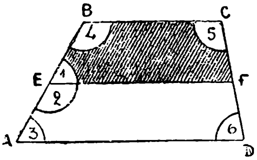


Рис. 212.

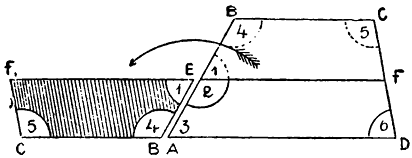


Рис. 213.

Доведення. Доведіть, що ця фігура являє собою рівнобіжника. Для цього вам потрібно обміркувати:

1) Чому BC_1 та AD повинні утворити одну просту лінію? (Зверніть увагу на суму кутів: $\angle 3 + \angle 4$).

2) Чому лінії EF_1 та EF утворюють одну просту лінію FF_1? $\angle 1 + \angle 2 = ?$).

3) Чому лінія F_1C_1 рівнобіжна до FD? ($\angle 5 + \angle 6 = ?$).

4) Коли вам удасться довести, що фігура FF_1C_1D є рівнобіжник, тоді подвійна середня лінія FF_1 буде дорівнювати сумі обох основ C_1D. (Чому?). Цеб-то

Висновок. Середня лінія трапеза дорівнює $1/2$ сумі обох його основ.

Приклад. У трапеза, що на рис. 195, спідня основа $= 3{,}8$ см, верхня основа $= 1{,}6$ см, а тому середня лінія $= 1/2\ (1{,}6 + 3{,}8) = 2{,}7$ см.

§ 91. Другий спосіб вимірювання площі трапеза. Замінивши в першій формулі середню лінію на півсуму основ, дістанемо таке правило для вимірювання площі трапеза:

Висновок. Площа трапеза дорівнює півсумі його основ, помноженій на висоту.

Це правило треба розуміти так:

Щоб виміряти площу трапеза, треба перш за все зміряти верхню й спідню його основи. Здобуті від міряння числа додати одно до одного. Далі, суму помножити на число, що показує міру висоти, і добуток поділити на два. Вислід покаже, скільки відповідних квадратових одиниць має площа трапеза.

§ 92. Формула.

Коли верхня основа має a см,
„ спідня основа „ b см,
„ висота „ h см,
тоді площа трапеза S матиме
$^1/_2\ (a + b)\ h$ кв. см.

$$S = \frac{1}{2}(a + b)h.$$

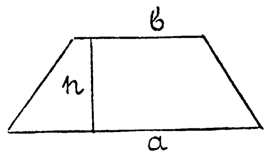


Рис. 214.

Приклад. Виміряймо площу трапеза на рис. 214.

В неї верхня основа $b = 24$ мм
спідня основа $a = 42$ „
висота $h = 15$ „
площа $S = {}^1/_2\ (42 + 24).\ 15 = 495$ кв. мм.

Отже, площа цього трапеза матиме 495 кв. мм

26. Ромб.

§ 93. Перший спосіб вимірювання площі ромба. Ділянка № 4 (рис. 195) являє собою рівнобіжник, у якого всі бокі однакові. Такий рівнобіжник звуть ромбом (рис. 215). Площу ромба можна виміряти, розглядаючи його як рівнобіжник. Тоді площа ромба дорівнює його основі, помноженій на висоту.

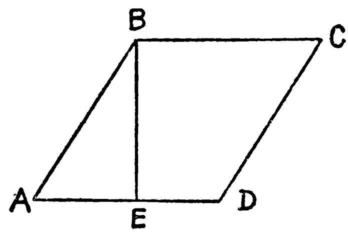


Рис. 215.

§ 94. Вісь симетрії ромба.

Дослід. Розгляньмо діягоналі ромба. (У рівнобіжника діягоналі не були його віссю симетрії, § 37).

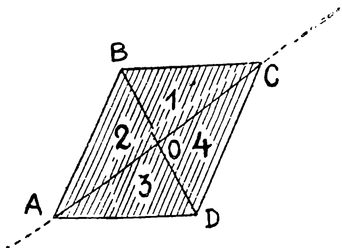


Рис. 216.

Що-до діягоналів ромба, то коли ви будете обертати ромба навколо діягоналі AC (рис. 216), то $\triangle\ ABC$ зілляться з $\triangle\ ACD$ (у них усі відповідні боки однакові).

Дослідіть другу діягоналю BD, чи не буде й вона мати таку саму властивість.

Висновок 1. Ромб являє собою фігуру, симетричну що-до кожної своєї діягоналі.

Висновок 2. На підставі попереднього дослідження доведить, що: діягоналі ромба перетинаються під прямим кутом.

(Діягоналі розрізують ромб на 4 однакові трикутники, а тому всі 4 кути біля точки *O* однакові, цеб-то вони прямі).

§ 95. Другий спосіб вимірювання площі ромба. Розріжте ромба на два трикутники: $\triangle ABC$ та $\triangle ADC$. Прийнявши за основу цих трикутників діягоналю *AC*, знайдіть правило, як обчисляти площу ромба, вимірюючи тільки дві його діягоналі.

Висновок. Площа ромба дорівнює половині добутку з його діягоналів.

ВПРАВИ.

1. Зміряйте та обчисліть площу шматка землі на якому-небудь плані, розбивши його на трикутники.

2. Виміряйте, яку площу має садиба фабрики, що ви її оглянули.

3. Виміряйте житлову площу тих квартир, що в них живуть робітники на цій фабриці. Яка житлова площа припадає на одного робітника?

4. Обчисліть за планом ту площу, що займає її ваша школа та її садиба.

5*). Треба збудувати повітку: на пару волів, 2 корови, 5 овець та 3 свиней. Нарисуйте проєкт такої повітки: її форму та розміри. Для кожної корови потрібно 3,4 м $\times$ 1,2 м, для вола 3,8 м $\times$ 1,4 м, для вівці 0,6 кв. м, для свині 1,6 кв. м. Крім того 4 м $\times$ 5 м треба залишити вільними від худоби.

6. Нарисуйте рівнобіжник, коли відомі два боки його та кут, що утворюють ці боки (рис. 217).

7. Нарисуйте рівнобіжник, в якого один кут 45°, а два боки, що утворюють цей кут, 3,2 см та 6 см. Виміряйте площу цього рівнобіжника.

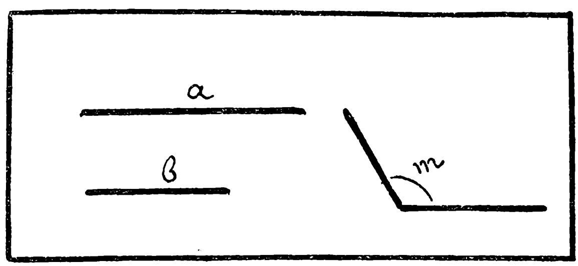


Рис. 217.

8. На дошці нарисовано було рівнобіжника. Підчас перерви частину його стерли, а залишилося тільки два боки *AB* та *AC* (рис. 218). Відновіть стертий рівнобіжник та нарисуйте його діягоналю *AD*.

---

*) Задачі, помічені зірочками, взято з підручника: „Проф. Кравчук і Білик. Математика для сільсько-господарських профшкіл“, ДВУ, 1925 р., стор. 152.

9. Від рівнобіжника залишився один його бік AB (рис. 218) та діягоналя AC. Чи не вдасться вам відновити ввесь рівнобіжник та знайти другий бік його?

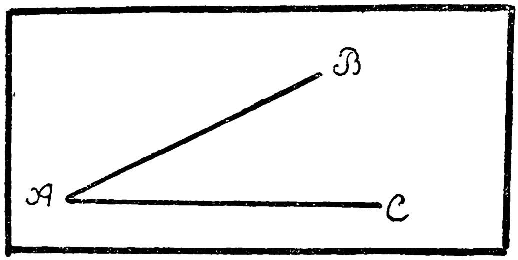


Рис. 218.

10. Подвір'я має форму рівнобіжника; довший бік у нього 160 метрів, а висота, спущена на цей бік, 8 метрів. Яку площу має це подвір'я?

11. Периметр рівнобіжника 36 см. Бік 6 см. Висота— 4 см. Знайдіть його площу.

12. Периметр рівнобіжника — 42 см. Основа втричі довша за бік. Висота—6 см. Обчисліть площу цього рівнобіжника.

13. Скажіть „на око“, у якого з цих рівнобіжників (рис. 219) найбільша площа? Чому?

14. Землемір провів на землі просту лінію, що йде на південь, 300 метрів завдовжки. Від північного та південного кінців її він провів дві рівнобіжні прості на захід-південь, кожну 100 метрів завдовжки, і, нарешті, дві крайні точки останніх ліній з'єднав ще однією простою лінією. Нарисуйте план цієї фігури, зменшивши розмір кожного боку в 1000 разів. Обчисліть площу утвореної на землі фігури.

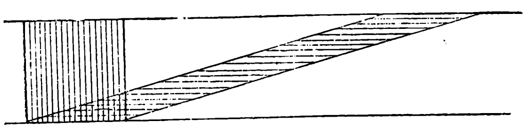


Рис. 219.

15. Площа ділянки, що має форму рівнобіжника, дорівнює 1200 кв. м. Завдовжки вона 60 м. Треба від цієї ділянки відрізати під городи 480 кв. метрів межею, рівнобіжною до одного з боків. Як це зробити?

16. Нарисуйте ромб з периметром = 20 см, щоб менша діягоналя = 6 см. Виміряйте площу його.

17. Площа ромба = 60 кв. см. Бік = 10 см. На якому віддаленні один від одного лежать протилежні боки ромба?

18. Площа ромба 144 кв. см. Одна діягоналя його 16 см. Обчисліть другу діягоналю й нарисуйте ромб.

19. Нарисуйте такий прямокутник, щоб у нього площа рівна була площі такого ромба (рис. 220).

20. Індуси й араби инколи давали пояснення про ту або иншу властивість геометричних фігур рисунками й під ними підписували одне тільки слово „д и в и с ь!“

Погляньте й ви уважно на рис. 221 і за допомогою його знайдіть правило, як виміряти площу трикутника.

21. Щоб міцніше скріпити крокви, на половині їх прибито поперечину LM (рис. 222). Яку завдовжки

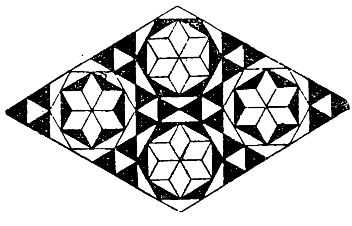


Рис. 220.

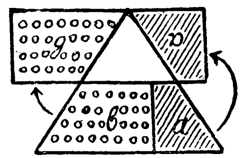


Рис. 221.

треба взяти цю поперечину, коли хата має завширшки 5 метрів?

22. Обчисліть площу кожного з цих трикутників (рис. 223).

23. Фронтон будинку має форму трикутника. Основа його 26 м, висота 5 м. Яку площу має цей фронтон?

24. Нарисуйте рівнобічний трикутник з периметром 13,2 см. Обчисліть його площу.

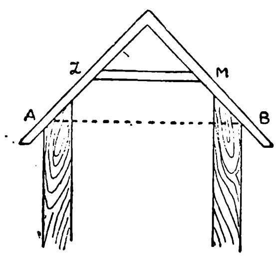


Рис. 222.

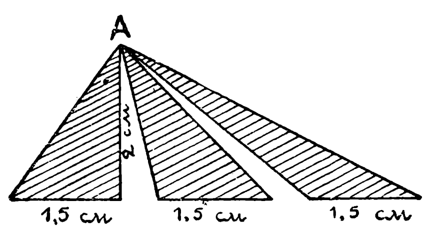


Рис. 223.

25. Периметр рівнораменного трикутника — 16 см. Основа—6 см. Обчисліть його площу.

Зауваження. Щоб знайти висоту, використайте Пітагорову теорему.

26. Клин на полі має форму прямокутного трикутника. Найдовший бік його—100 м. Найкоротший—60 м. Скільком арам дорівнює площа цього клина?

27. Поле має форму трикутного клина з боками 680 м, 720 м та 800 м. Нарисуйте цей трикутник у зменшеному вигляді й обчисліть площу його на гектари та десятини.

28. В кутку кімнати стоїть трикутний стіл (косинчик). Бік його AB завдовжки 150 см. Віддалення вершини C до цього боку $AB = 90$ см. Яка буде площа скатертини,

що покриває його, коли скатертина звисає наперед ще на 15 см (рис. 224)?

29. Скільки потрібно аркушів заліза на дах для цієї

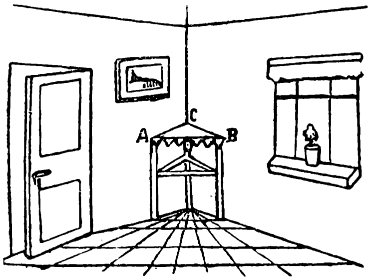


Рис. 224.

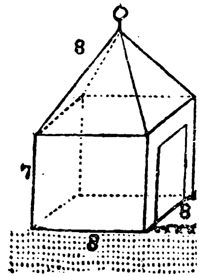


Рис. 225.

будки, що складається з чотирьох однакових рівнораменних трикутників. Розміри даху зазначені на рис. 225. На кожен кв. метр треба витратити 1,2 аркуша заліза.

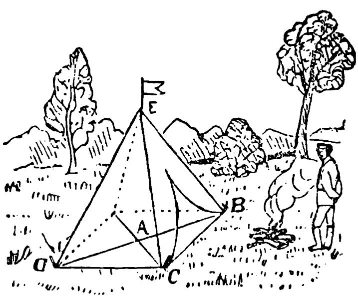


Рис. 226.

30. Намет піонерського загону має таку форму (рис. 226). $CB = 6$ м, $BE = 5$ м. Скільки метрів полотна піде на цей намет?

31. Трикутний клин землі, що має завдовжки 125 метрів, а площу 75 арів, треба замінити на прямокутну ділянку, таку-ж саму завширшки. Яку завдовжки ділянку треба для цього взяти?

32. Квадратове поле з боком 90 м треба замінити на трикутний клин з основою 240 м. Яка буде висота в цього трикутника?

33. Трикутну ділянку землі ABC (рис. 227) треба поділити на два однакові городи, щоб був вихід до річки. Як це зробити?

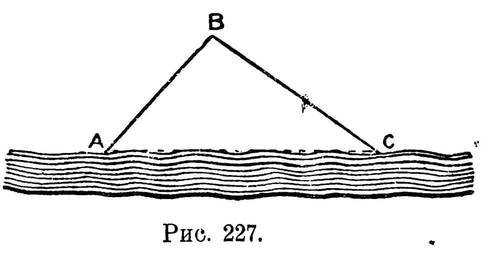


Рис. 227.

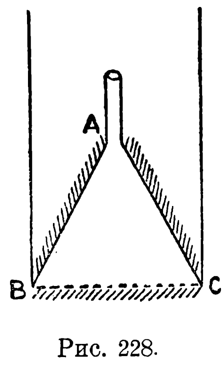


Рис. 228.

34. Щоб провітрювати повітря, на заводі збудовано було дві вентиляційні труби, що в перерізі мають вигляд трикутника (рис. 228). У першої труби основа та висота

цього трикутника дорівнювала 3 дм. У другого вентилятора основа—4 дм й висота—3 дм.

На заводі вирішено замінити ці дві труби на одну, завширшки 5 дм. Який заввишки треба зробити для цієї труби трикутник?

35. Два боки трикутного поля дорівнюють 60,2 м й 80,6 м, а кут, що вони утворюють, має 85°. Нарисуйте це поле в зменшеному розмірі й обчисліть, скільки сіна дасть воно, рахуючи, що з одного гектара можна зібрати $1^1/_2$ тони зеленого сіна й що після висихання сіно втрачає 30% своєї ваги.

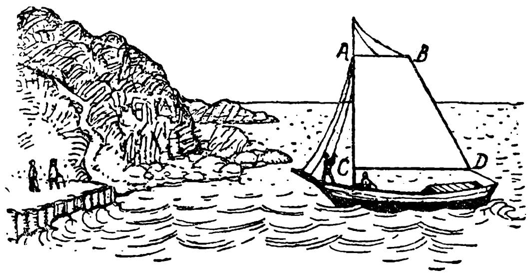


Рис. 229.

36. Обчисліть площу садочка, що має форму рівнобічного трапеза. Одна основа його—21 м, друга—9 м, бік—10 м.

37. Бік BD паруса $ABCD$ (рис. 229) завдовжки 5 метрів. Довжина реї $AB = 1$ м, $CD = 4$ м. Яка висока на цім човні щогла, і з якою силою дме вітер на цей парус, коли тиснення вітру на кожен квадратовий метр = 32 кг?

38. З якою силою дме вітер на крила в цього вітряка (рис. 121), коли $AB = 6$ м, $CD = 1^1/_2$ м і $EF = 2^1/_2$ м? Тиснення вітру на кожен кв. метр = 50 кг.

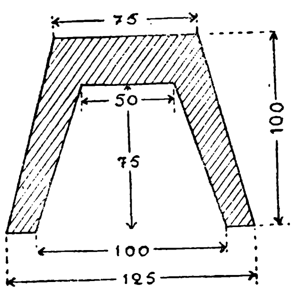


Рис 230.

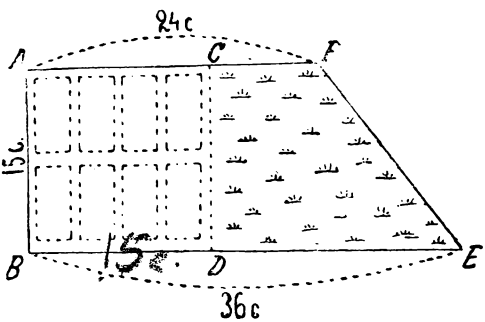


Рис. 231.

39. Обчисліть площу поперечного перерізу цієї рейки (рис. 230). Числа зазначені на міліметри.

40. Ґрунт (рис. 231) мають поділити на дві рівновеликі (з однаковою площею) частини: одну ($CFED$)—під город, а другу ($ACDB$)—під садок. На якому віддаленні від межі AB треба поставити тин CD?

41. Як поділити на 3 рівновеликі ділянки поле, що має форму рівнобіжника, двома межами, перпендикулярними до основи?

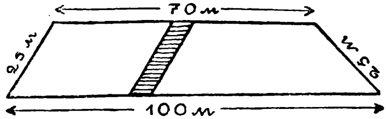


Рис. 232.

42. Поле (рис. 232) перерізує шлях, завширшки 3,2 м. Обчисліть на гектари та десятини площу цього поля (без дороги). Який $^0/_0$ усього поля піде на цей шлях?

43. Дах будинку має таку форму (рис. 233). Довжину яких ліній треба зміряти, щоб виміряти поверхню цього даху?

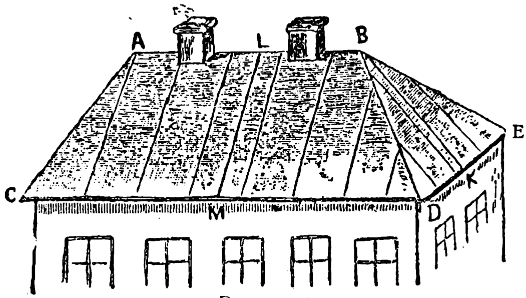


Рис. 233.

44. Скільки кілограмів бляхи треба купити, щоб покрити цей дах (рисун. 233)? $AB = 14$ м, $CD = 26$ м, $LM = 8$ м, $DE = 12$ м, $BK = 8$ м. Аркуш бляхи, завдовжки 2 м і завширшки 1 м, важить 8 кг.

45. По скільки пудів кожного зерна треба посіяти на це

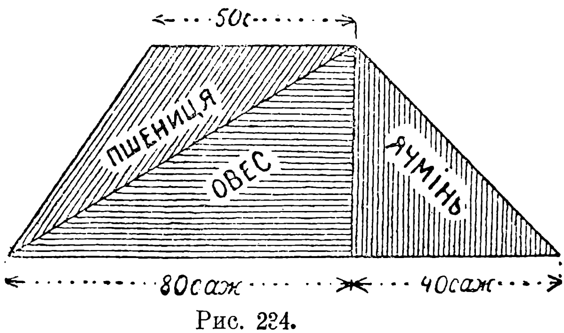


Рис. 224.

поле (рис. 234)? Про те, скільки якого зерна висівають на десятині, довідайтеся самі.

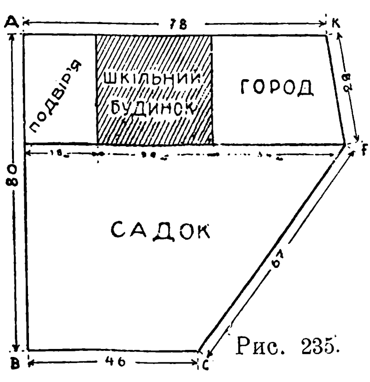


Рис. 235.

46. Яку площу в цій садибі займає шкільний будинок? Скільки гектарів займає подвір'я? А садок? (рис. 235). (На малюнкові 235 показано відповідне число метрів).

47. Яку площу в цій садибі (рис. 235) займає город? Обчисліть на гектари площу всієї садиби.

Розділ 8.

ПРЯМОКУТНА ПРИЗМА ТА КУБ.

§ 96. *Завдання.* Обслідуйте санітарний стан приміщення, що в ньому живуть робітники.

Щоб розвязати це завдання, вам треба буде обслідувати та обчислити, яку площу займає це приміщення, скільки в ньому свіжого повітря, та чи вистачає його на кожного робітника, то-що. А для цього перш за все треба уважно обслідувати ту геометричну форму, яку має це приміщення. З цього її почнемо.

27. Що таке прямокутна призма та куб.

§ 97. Що таке прямокутна призма. Приміщення, що в ньому живуть робітники, найчастіше має таку геометричну форму (рис. 236). Тіло з такою формою звуть прямокутною призмою (рис. 237).

Назвіть кілька речей, що мають форму прямокутної призми.

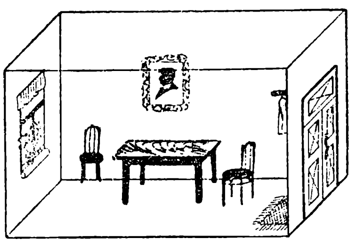


Рис. 236. Кімната має форму прямокутної призми.

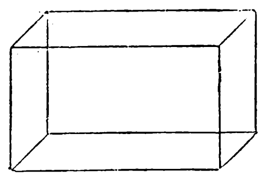


Рис. 237. Прямокутна призма.

§ 98. Грані призми. Кімнату обмежують всього шість площин: чотири стінки, підлога та стеля. Ці площини звуть гранями (стінками) призми. Призма має чотири бічні грані (в кімнаті—її стінки) та дві основи (стеля та підлога).

Зверніть увагу на фігуру кожної грани.

Як звуть цю фігуру?

Отже, всі грані в нашої призми—прямокутники.

От через що цю призму звуть прямокутною [1]).

[1]) Цю призму звуть ще прямокутним паралелепіпедом.

Тепер порівняйте одну з одною великість (розмір) усіх гранів призми.

Пересвідчіться, що у прямокутної призми дві протилежні грані одна одній рівні.

§ 99. Руби та вершини прямокутної призми. Покажіть ті лінії, що по них перетинаються дві сумежні грані кімнати (стіни, стеля, підлога). У призми ці прості лінії звуть її рубами. Скільки їх?

Порівнюючи довжину всіх рубів, ви пересвідчитеся, що прямокутна призма має по 4 руби, завдовжки однакові.

Ті точки, в яких зустрічаються руби призми, звуть вершинами призми. Скільки всіх вершин у призми?

Від кожної вершини йдуть 3 руби. Два з них лежать на основі призми. Один з них звуть довжиною призми, а другий—шириною її. Третій руб звуть висотою призми. Покажіть усі ці руби в кімнаті.

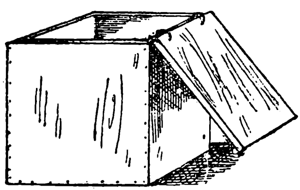


Рис. 238. Ця коробка має форму куба.

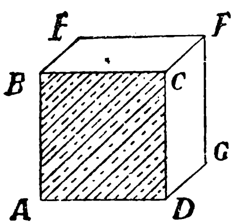


Рис. 239. Куб.

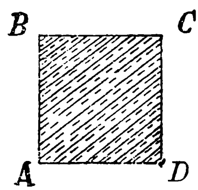


Рис. 240. Грань куба—квадрат.

§ 100. Що таке куб. Чи не доводилося вам бачити кімнату, що має завдовжки, завширшки та заввишки однаковий розмір? Таку прямокутну призму, що в неї всі руби однакові, звуть кубом. Назвіть декілька речей, що мають форму куба (рис. 238, 239).

Яку тоді фігуру має кожна грань куба (рис. 240)? Чи не будуть вони всі однакові? Чому?

28. Поверхня прямокутної призми та куба.

§ 101. Як виміряти поверхню прямокутної призми.

Задача. В приміщенні треба зробити ремонт: побілити стіни й стелю та покрасити підлогу. Як обчислити, скільки коштуватиме цей ремонт?

Щоб скласти кошторис на цей ремонт, треба перш за все виміряти, скільки квадратових метрів має поверхня стін, підлоги та стелі. Тоді, довідавшися, скільки беруть муляри за білування або крашення кожного квадратового метра, легко обчислити й вартість усього ремонту.

Повчімося й ми виміряти, скільки квадратових одиниць має поверхня прямокутної призми (бо кімната найчастіше має таку форму).

Щоб обчислити поверхню призми, досить виміряти площу всіх її гранів.

Розгортка. Щоб зручніше робити це вимірювання, розгорніть поверхню призми (рис. 241) в одну площину. У вас утвориться

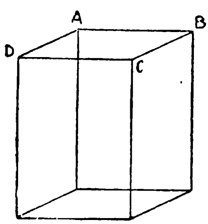


Рис. 241

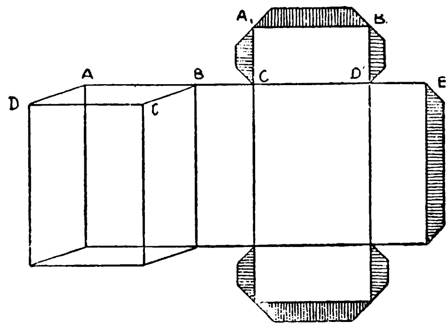


Рис. 242. Розгортка прямокутної призми.

тоді така розгортка прямокутної призми (рис. 242). Знайдіть на цій розгортці бічні грані призми. А де її основи?

Бічна поверхня. Щоб виміряти бічну поверхню прямокутної призми, треба виміряти площу всіх чотирьох бічних її гранів. Знайдіть на розгортці ці бічні грані. Які фігури утворюють вони разом? Обміркуйте сами, як найшвидше можна виміряти разом площі всіх чотирьох гранів, що утворюють бічну поверхню нашої призми.

Повна поверхня. Коли вам треба знати всю поверхню призми, то досить до бічної поверхні додати площу обох її основ. (Чи треба для цього вимірювати окремо площу кожної основи? Чи не можна обмежитися на безпосередньому вимірюванні площі тільки однієї основи? Чому?).

§ 102. Як виміряти поверхню куба. Коли кімната має форму куба, то вимірювання її поверхні набагато спрощується. Поверхня куба складається з шости однакових гранів, а тому, вимірявши площу будь-якої грани куба, ми легко обчислимо й усю його поверхню.

Формула. Коли руб куба має a см,

тоді площа однієї грани має a^2 кв. см, а вся поверхня куба має $6a^2$ кв. см.

$$S = 6a^2$$

29. Як виміряти об'єм прямокутної призми [redacted]

§ 103. *Задача.* Довідайтеся, чи досить повітря в тому приміщенні, де працюють робітники.

Щоб розвязати це завдання, треба навчитися виміряти, скільки повітря вміщає кімната, цеб-то треба навчитися виміряти об'єм її.

§ 104. Якою мірою виміряємо об'єм. Наготовте 12 лозинок по одному лінійному метру завдовжки й звяжіть кінці їх так, щоб утворився куб з рубом один метр. Такий куб будемо звати *кубічним метром*. Коли вам удасться дізнатися, скільки таких кубічних метрів заповнять усю вашу кімнату, то ви тоді й знайдете об'єм цієї кімнати.

Коли вам треба виміряти об'єм якої-небудь невеличкої коробки, то користуватися кубічним метром незручно. (Чому?). Тоді можна наготовити кубічні одиниці меншого розміру. Можна зробити куб, у якого кожен руб має один сантиметр. Такий куб звуть *кубічним сантиметром* (рис. 243).

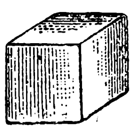


Рис. 243. Кубічний сантиметр.

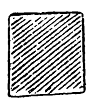


Рис. 244. Квадратов. сантим.

Рис. 245. Лінійний сантим.

Щоб дізнатися, скільком кубічним сантиметрам рівний буде об'єм коробки, можна виготовити кубічні сантиметри й виповнити ними увесь її об'єм. Полічивши число вкладених кубічних сантиметрів, ви й знатимете, скільком кубічним сантиметрам дорівнюватиме об'єм коробки. Але такий спосіб міряти об'єм дуже незручний. (Через що?). Спробуймо знайти загальне правило, щоб на підставі його легко можна було виміряти об'єм усякої прямокутної призми.

§ 105. Перший спосіб, щоб виміряти об'єм прямокутної призми.

Дослід. Виріжте з мила прямокутну призму заввишки 4 сантиметри, завдовжки 3 сантиметри й завширшки 2 сантиметри.

Розріжте цю призму на такі плитки, щоб основа в них була рівна основі призми, а висота—одному сантиметрові. Тому що висота нашої призми дорівнює 4 сантиметрам, матимемо ми 4 такі плитки (рис. 246).

Візьміть тепер одну з цих плиток. Відкладіть уздовж по довжині її лінійні сантиметри й розріжте плитки на такі стовпчики, щоб основа їхня рівна була одному квадратовому сантиметрові, а їхня довжина—ширині плитки.

Тому що довжина призми має 3 сантиметри, з кожної плитки буде в нас 3 такі стовпчики.

Тепер треба ще один з цих стовпчиків розрізати на кубічні сантиметри (рис. 246). Відкладімо вподовж стовпчика лінійні сантиметри. Тому що ширина призми 2 сантиметри, з кожного стовпчика ми матимемо 2 кубічні сантиметри (рис. 247).

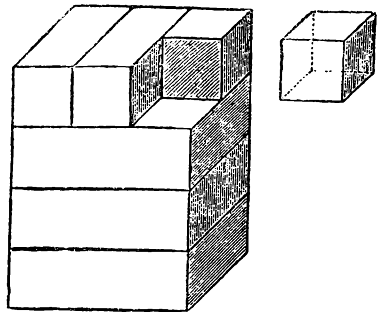


Рис. 246. Як розрізати призму на кубічні сантиметри.

Обчислімо тепер, скільки-б кубічних сантиметрів мали ми, коли-б усю призму розрізали на кубічні сантиметри.

З одного стовпчика маємо 2 кубічні сантиметри. Кожна плитка складалася з 3 стовпчиків, отже з однієї плитки ми здобули 2 куб. см $\times 3 = 6$ куб. см.

Але в призмі всіх плиток було 4, тому з усієї призми матимемо 2 куб. см $\times 3 \times 4 = 24$ кубічні сантиметри.

Ми здобули число кубічних сантиметрів, що в об'ємі призми (24), перемноживши числа, що означають висоту (4), довжину (3) й ширину (2), зміряні тою самою одиницею (лінійним сантиметром). Отже, щоб виміряти об'єм призми, маємо таке правило:

Щоб виміряти об'єм призми, треба зміряти висоту, довжину й ширину її лінійними одиницями (наприклад, лінійними сантиметрами), і здобуті числа перемножити. Добуток покаже, скільком кубічним одиницям дорівнюватиме об'єм цієї призми.

Формула перша.

коли довжина призми має a лін. см,
коли ширина призми має b лін. см,
коли висота призми має c лін. см,
тоді об'єм призми має $a.b.c$ куб. см,

$$V = a.\ b.\ c.$$

§ 106. Другий спосіб, щоб виміряти об'єм прямокутної призми. Розгляньмо ще один спосіб, що за допомогою його часто виміряють об'єм прямокутної призми.

Нехай нам треба виміряти об'єм кімнати, що має форму прямокутної призми. Почнімо заповняти її кубічними метрами. Для цього поділімо крейдою основу (підлогу) на квадратові метри. Коли площа підлоги складається з 60 квадратових метрів, то ми й поділимо підлогу на 60 кв. метрів.

Тепер складімо з наших кубічних метрів вертикальні колони по 4 метри заввишки (бо висота кімнати дорівнює 4 метрам). Кожна така колона складатиметься з 4 кубічних сантиметрів (рис. 247). Поставивши на кожен квадратовий метр основи по такій колоні, ми й заповнимо ввесь об'єм нашої призми (кімнати) кубічними метрами.

Рис. 247.

Залишається тепер тільки підрахувати, скільки таких кубічних метрів має в собі об'єм цієї призми.

Кожна колона складається з 4 кубічних метрів. Через те, що основа призми має 60 квадратових метрів, на цій основі ми поставили 60 колон, цеб-то 4 куб. см $\times$ 60. Отже, об'єм призми буде $4 \times 60 = 240$ кубічних метрів.

Висновок. Щоб виміряти об'єм прямокутної призми на кубічні одиниці, треба зміряти висоту лінійними одиницями й площу основи відповідними квадратовими одиницями. Перемноживши ці числа, ми знатимемо, скільки кубічних одиниць буде в об'ємі нашої призми.

Формула друга.

коли площа основи призми має B кв. см,
коли висота призми має . . . . . h см,
тоді об'єм призми має . . . . . . $B.h$ куб. см.

$$V = B.\ h.$$

30. Як виміряти об'єм куба.

§ 107. Як виміряти об'єм куба. Згідно з першим правилом (§ 105), щоб виміряти об'єм прямокутної призми, досить перемножити числа, що ми дістаємо, вимірявши висоту, довжину та ширину її.

У куба всі ці руби завдовжки однакові (§ 100), а тому:

Висновок. Щоб виміряти об'єм куба, досить виміряти лінійними одиницями один з його рубів і здобуте число взяти чинником тричі. Добуток і покаже, скільки кубічних одиниць вміщає об'єм цього куба.

§ 108. Формула.

Коли руб куба має a лінійних сантиметрів,
то об'єм куба має $a.a.a$ куб. сантиметрів.

$$V = a.a.a$$

$$\text{або } V = a^3$$

§ 109. Кубічні метричні міри. У метричній системі одиниць за основу покладено кубічний метр—куб, у якого всі боки рівні одному лінійному метрові. Складіть із палок такий куб.

Крім кубічного метра маємо ще такі одиниці:

Кубічний кілометр, рівний $1000 \times 1000 \times 1000$ куб. метрів.

Куб. гектометр $= 100 \times 100 \times 100$ куб. метрів.

Куб. декаметр $= 10 \times 10 \times 10$ куб. метрів.

Куб. дециметр $= \frac{1}{10.10.10}$ частині куб. метра.

Куб. сантиметр $= \frac{1}{100.100.100}$ частині куб. метра.

Куб. міліметр $= \frac{1}{1000.1000.1000}$ частині куб. метра.

З цих мір найуживаніші:

1. Кубічний сантиметр. Натуральний розмір його показано на рисункові 248.

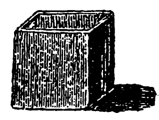


Рис. 248.

2. Кубічний міліметр. Він становить $\frac{1}{1000}$ частину кубічного сантиметра. Кубічний міліметр рівний є приблизно об'ємові шпилькової голівки.

3. Кубічний дециметр. Він має в собі 1000 кубічних сантиметрів. Його ще звуть літром.

У чайній шклянці вміщається $^1/_4$ літра (приблизно).

Таблиця відношень між старими та метричними мірами [1]).

Наближені відношення.

МЕТРИЧНІ МІРИ	СТАРІ МІРИ
Кілометр = 1000 метрів = $^{15}/_{16}$ верстви=470 сажнів. Метр = $22^1/_2$ верш. = 40 дюйм. Дециметр = 4 дюйм.	Верства = $1^1/_{15}$ кілом. = 1060 метр. Аршин=70 сантиметрів. Фут = 30 сантиметрів. Вершок = $4^1/_2$ сантиметра. Дюйм = $2^1/_2$ сантиметра.
Квадр. метр. = 2 кв. аршинам. Гектар = 10000 кв. метрів= $^{11}/_{12}$ десятини. Ар = 100 кв. метрів = 22 кв. сажням.	Квадр. арш. = $^1/_2$ кв. метра „ саж. = $4^1/_2$ кв. метра „ фут. = 9 кв.дециметр. „ верш. = 20 кв.сантим. „ дюйм. = 6 кв. сантим Десятина = $1^1/_{11}$ гектара
Куб. метр = $^1/_{10}$ частці куб. сажня = $2^3/_4$ куб. аршин. = = 35 куб. фут. Куб дециметр.=60 куб. дюйм. = = 11 куб. вер ків.	Куб. саж. = 10 куб. метр. „ фут. = 30 куб дециметр.
Кілогр.=1000 грам. = $2^1/_2$ фун. Тона = 1000 кілогр. = 60 пуд. Грам= $^1/_4$ золотника	Фунт = 400 грамам. Золотник = 4 грамам. Пуд = 16 кілограмам.
Літр = $^1/_{12}$ відра = $^1/_{25}$ четв.= = приблизно 5 шклянок.	Відро = 12 літрам. Гарнець = $3^1/_4$ літра. Четверик = 25 літрам. Четверть = 200 літрам.

Таблиця відношень між старими та метричними мірами [1]).

Точніші відношення.

МЕТРИЧНІ МІРИ	СТАРІ МІРИ
Кілометр = 0,94 верстви Метр = 0,47 сажня = 1,41 арш. Дециметр = 3,9 дюйма = 2,25 вершка.	Верства = 1,07 кілометра Аршин = 71,12 сантиметра. Фут = 30,48 сантиметра. Вершок = 4,44 сантиметра. Дюйм = 2,54 сантиметра.

[1]) Таблиці ці взяв я з вельми цікавої книжки Я. Перельмана „Нові й старі міри“.

МЕТРИЧНІ МІРИ	СТАРІ МІРИ
Квадр. метр = 0,22 кв. сажня = = 1,98 кв. аршина. Гектар = 0,91 десят. = 2197 кв. сажнів. Ар = 21,9 кв. сажня.	Кв. аршин = 0,51 кв. метра. „ сажень = 4,55 кв. метра. „ фут = 9,29 кв. дециметра. „ вершок = 19,76 кв. сантим. „ дюйм = 6,45 кв сантим. Десятина = 1,09 гектара.
Куб метр. = 0,1 куб. саж. = 2,78 куб. арш. = 35,31 куб. фута Куб. дециметр=61 куб. дюйм. = = 11,4 куб. вершка.	Кубічн. сажень = 9,71 куб. метра Кубічн. фут = 28,3 куб. дециметра
Кілограм = 2,44 фунта. Тона = 61,05 пуда.	Фунт = 409,5 грама. Золотник = 4,27 грама. Пуд = 16,38 кілограма = 0,016 тони.
Літр = 0,08 відра = 0,038 четверика.	Відро = 12,3 літра. Гарнець = 3,28 літра Четверик = 26,23 літра. Четверть = 209 літрам.
1 куб. см води важить 1 грам 1 „ дм води важить 1 кілограм	1 куб. метр води важить 1 тону 1 „ дм становить 1 літр.

ВПРАВИ.

1. Зробіть потрібні обміри і потім обчисліть, скільки коштуватиме повний ремонт вашої кімнати (покрасити підлогу, побілити стіни та стелю, покрасити вікна й двері). Про потрібні для підрахунку ціни запитайте у своїх знайомих.

2. Дослідіть, чи досить свіжого повітря в тому приміщенні, де працює ремесник. Для цього треба виміряти об'єм приміщення й, довідавшись, скільки ремесників працює в ньому, обчислити, скільки повітря припадає на кожного робітника. (За норму вважається 8 куб. метрів повітря на кожну людину).

3. Зробіть такий самий дослід у вашій кімнаті.

4. Дослідіть, скільки важить повітря у вашій кімнаті, коли відомо, що 1 літр повітря важить приблизно 1,3 грама.

Зробіть з олива кубик, що важитиме стільки само, як і повітря у вашій кімнаті (кожен куб. см олива важить 11 г).

5. Доросла людина за одну хвилину робить 18 видихів та вдихів, вбираючи 500 куб. см свіжого повітря. Зміряйте об'єм вашої кімнати і вирахуйте, на який час ви-

стачить вам цього повітря, коли свіже повітря в кімнату не буде доходити.

6. Знайдіть яку-небудь цеглину і зміряйте об'єм її. Виміряйте об'єм стін у вашій кімнаті, обчисліть, скільки треба було витратити цеглин, щоб її збудувати. (Майте на увазі, що в цей рахунок не ввійшли ще цеглини з фундаменту!).

7. Зважте залізну плитку і, вимірявши об'єм її, обчисліть, скільки грамів важить кожен куб. сантиметр заліза.

Зробіть такий самий дослід з деревом з різних порід.

8. Покажіть на кубічному сантиметрі квадратовий сантиметр і лінійний сантиметр.

9. Скриню, що має форму куба з рубом 40 см, треба обклеїти з середини папером.

Скільки метрів паперу треба купити для цього, коли папір має завдовжки 60 см?

10. Скринька має 1,3 м завдовжки, 0,6 м завширшки та 0,8 м заввишки. Скільки буде коштувати пофарбувати її, коли за кожен кв. метр треба заплатити 1,75 карб.?

11. Треба обшліфувати для фундаменту машини камінь такого розміру: 1,8 м $\times$ 1,2 м $\times$ 0,75 м (це послідовно показано його довжину, ширину та висоту). Скільки буде коштувати це шліфування, коли за те, щоб пошліфувати один кв. метр, платять 3,25 карб.?

12. Скільки аршин 8-вершкових дощок (цеб-то завширшки 8 верш.) треба купити, щоб зробити з них скриню такого розміру: 4 арш. $\times$ $^1/_2$ арш. $\times$ 1 арш.?

13. Діти хочуть обклеїти старими марками всі шість стінок сірникової коробки. Обчисліть, скільки потрібно на це марок. Розмір сірникової коробки такий: 6 см $\times$ $3^1/_2$ см $\times$ $\times$ 2 см (це показано послідовно висоту, довжину й ширину коробки). Розмір марки такий: $2^1/_2$ см $\times$ 2 см (це показано послідовно довжину й ширину марки).

14. Треба обклеїти шпалерами кімнату, що має форму куба. Висота кімнати = 4 метр. В цій кімнаті є одні двері 1,5 метра завширшки і 2 метри заввишки. Крім того, кімната має троє вікон по 75 см завширшки й по 1,5 метра заввишки. Скільки метрів шпалерів треба купити, коли ширина їх = 0,5 метра?

15. За достатнє освітлення в приміщенні вважають таке, коли площа всіх вікон становить $20^0/_0$ загальної площі підлоги. Висота лутки від підлоги повинна дорівнювати 1,2 м. Віддалення від стелі до верху вікна = 0,3 м. Які завширшки треба взяти два вікна, щоб освітлити ними кімнату такого розміру: 8 м $\times$ 6 м $\times$ 4 м (це довжина, ширина й висота її)?

16. Довжина, ширина та висота прямокутної призми дорівнюють a, b, c сантиметрам. Знайдіть алгебричний вираз, що за його допомогою можна обчислити, скільки

кубічних сантиметрів має об'єм призми, коли відомі числа *a*, *b* та *c* (рис. 249).

17. Скільки кубічних сантиметрів має в собі куб, коли руб у нього $= 10$ см?

18. Обчисліть об'єм куба, що в нього руб має 1 см 5 мм; 35 мм; 2 см 2 мм.

19. Чи однаковий буде об'єм у 4 кубічних скринь з рубом 5 см, або в 5 кубічних скринь з рубом 4 см? Перевірте відповідь, наповнюючи скрині піском або водою.

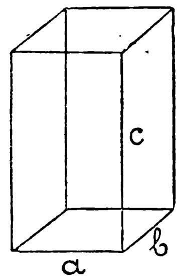


Рис. 249.

20. Льодовня має форму куба з рубом 4 метри. Скільки хур льоду треба привезти, щоб набити цю льодовню, коли на кожну хуру накладають по 2 куб. метри льоду?

21. Чи піднімете ви кубічний метр корку? (Кожен куб. см корку важить $^1/_5$ грама).

22. Нарисуйте розгортку куба, що об'єм його дорівнює одному куб. метрові.

23. Знайдіть „на око“, скільки кубічних сантиметрів матиме об'єм якої-небудь коробки. Перевірте відповідь мірянням.

24. Яку місткість (унутрішній об'єм) має товарний вагон, коли довжина його 4 м, висота—2 м, ширина—2 м (рис. 250)?

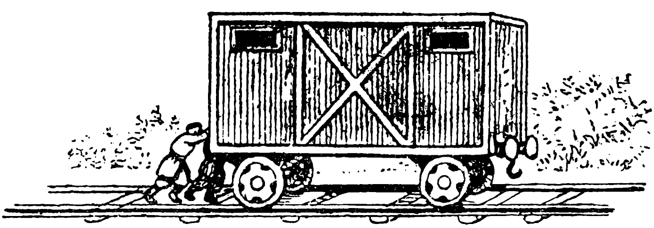


Рис. 250.

25. Скільки важить квадратовий метр мідного листа 2,5 мм завтовшки? (Куб. см міди важить 8,9 грама).

26. Шлях завширшки 1 м 60 см треба посипати на протязі 25 метрів грузом заввишки 8 см. Який буде об'єм цього грузу?

27. З прямокутного аркуша паперу 20 см $\times$ 10 см виріжте на всіх його кутках по рівному квадрату з боком 2 см кожен. З решти складіть коробку. Який об'єм матиме ця коробка? А яка буде її поверхня?

28. На кожного учня в класній кімнаті повинно припадати 10,5 куб. м повітря. Яка площа підлоги повинна бути в класі, де будуть учитись 40 учнів, коли висота класи—4,8 м?

29. Який завглибшки колодязь, коли всього землі викинуто 18 куб. м, а для зрубу покладено колоди по 1,2 м завдовжки?

30. Звичайна цеглина має форму призми такого розміру: 6 см $\times$ 14 см $\times$ 25 см. Скільки треба купити таких цеглин, щоб збудувати стіну таких розмірів: 40 м $\times$ 12 м $\times$ $\times$ 0,5 м. (Для щілин між цеглинами, що їх заповнюють вапною, треба покласти 10% всього об'єму).

31. Скирта сіна має форму прямокутної призми такого розміру: 2 м $\times$ 4 м $\times$ 6 м. Скільки пудів важить це сіно, коли один куб. метр його важить 75 кілограмів, а кожен кілограм дорівнює приблизно $2^1/_2$ фунта?

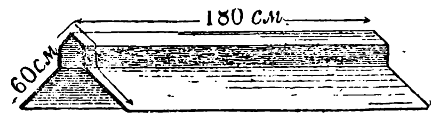


Рис 251.

32. На рис. 251 намальовано лист заліза, що ним закривають гребінь на дахові. Завтовшки він 3 мм. Скільки важить один лист цього заліза, коли 1 куб. см його важить 7,5 г?

33. Брус (рис. 252) завширшки 16 см (AB), завгрубшки 6 см (AC) та завдовжки 9 м треба замінити на брус з такою самою вагою, але з квадратовим перерізом та 6 м завдовжки (рис. 253). Який тоді треба взяти в нового бруска бік LM?

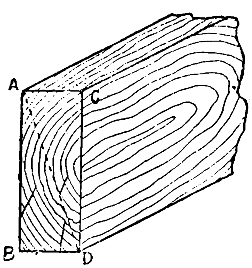


Рис. 252.

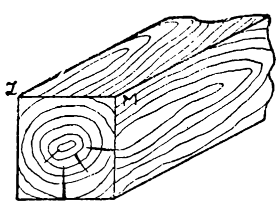


Рис 253.

34. Підвал завдовжки 14 м, завширшки 5 м залила вода. Тоді поставили смок, і він щохвилини висмоковував з підвалу по $3^1/_2$ куб. м. Так за одну годину викачали з підвалу всю воду. До якої висоти залитий був підвал?

35. Двосхилий дах має з кожного боку форму прямокутника (розмір його 24 метри $\times$ 7,5 метра) і вкритий снігом заввишки 25 см. Скільки цей сніг важить? (Кожен кубічний см снігу важить 0,9 г). Візьміть ще на увагу нахил даху, що через нього тиснення снігу на дах становить тільки $^5/_8$ всієї ваги снігу.

36. Випав такий дощ, що міг-би вкрити землю шаром заввишки 50 мм. Вирахуйте, скільки відер води дав цей дощ на кожну десятину землі (1 відро має 12 літрів, літр— 1.000 куб. см, 1 кв. сажень—45.500 кв. см).

37. Виймають землю для фундаменту такої форми

(рис. 254). Складіть таку формулу, щоб вона допомогла швидко обчислювати об'єм зрізаної землі. Нехай глибина вийми дорівнює h метрам.

38. Соснова скринька має такі розміри: 150 см $\times$ 60 см $\times$ 85 см. Товщина стінок—3 см. Скільки важить ця скринька, коли кожен куб. см соснової дошки важить $^2/_3$ г?

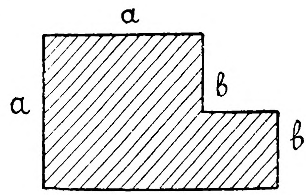


Рис. 254.

39. Складіть формули, що дають змогу обчисляти площі по-

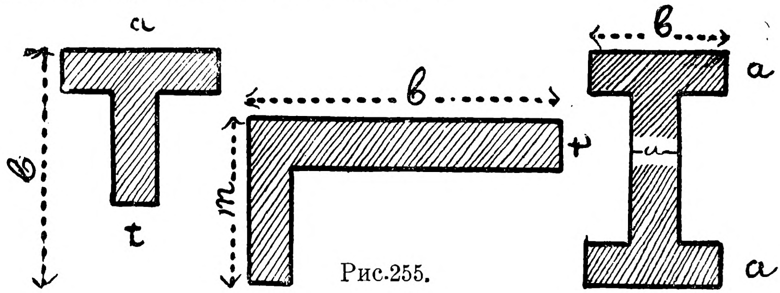


Рис.255.

перечних перерізів тетуватого, кутового та двотетуватого заліза (рис. 255).

Розділ 9.

КОЛО.

31. Коло й проста лінія.

§ 110. Коло. Його обвід. Зайдіть на фабрику підчас праці на ній. Там вам перш за все кинеться в вічі безліч шкивів та колес з накинутими на них ременями. Всі вони то з величезною швидкістю, то поволі обертаючись навколо своєї віси, рухають різні приладдя (рис. 256).

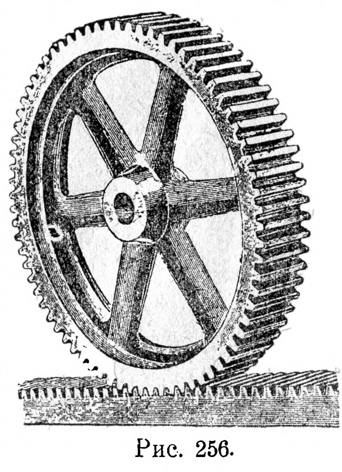


Рис. 256.

Підчас цього руху кожна точка, обертаючись навколо своєї нерухомої віси, або нерухомої точки, рисує обвід кола (рис. 257). Як ми вже знаємо, обвід кола—це така замкнена крива лінія, що всі її точки лежать на однаковому віддаленні від центра O (рис. 258).

Нарисуйте за допомогою циркуля який-небудь обвід кола. Покажіть його центр і радіус.

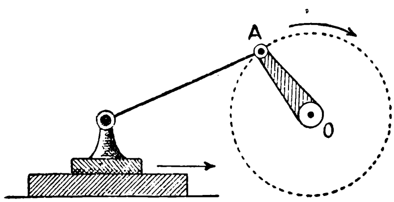


Рис. 257.

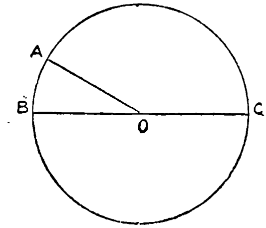


Рис. 258.

Коли наша точка *A* (рис. 258), обертаючись навколо центра *O,* не встигне зробити повний оборот, то вона нарисує не весь обвід кола, а тільки частину його. Частину (*AB*) обводу кола звуть д у г о ю.

§ 111. Хорда та діяметр. Підчас руху двигуна (рис. 259) точка *A* рисує обвід кола. Що-до гонка *AC,* то він що-разу пе-

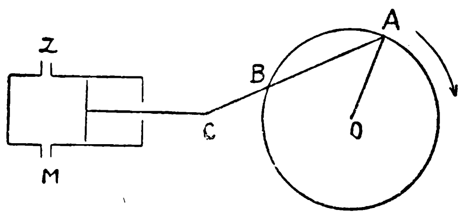


Рис. 259.

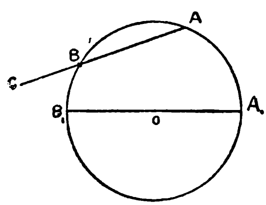


Рис. 260.

ретинає обвід кола в двох точках *A* та *B.* Просту *CA* (рис. 260), що перетинає обвід кола в двох точках, звуть с і ч н о ю, а частину її, відтинок *AB,* що сполучає дві точки, які лежать на обводі кола, звуть х о р д о ю.

В міру того, як гонок *CA* наближається до центру, ця хорда *AB* ввесь час збільшується.

Нарешті, коли гонок пройде через центр *O,* тоді хорда зробиться найбільшою.

Н а й б і л ь ш у х о р д у (A_1B_1), щ о п р о х о д и т ь ч е р е з ц е н т р к о л а, з в у т ь й о г о д і я м е т р о м (рис. 260).

§ 112. Як виміряти діяметр кола.

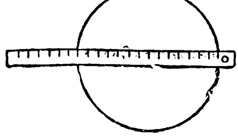


Рис. 261.

Задача 1. В и м і р я й т е д і я м е т р п'я т а к а. Щоб виміряти діяметр кола, що в ньому не зазначено його центра, досить звичайною лінійкою виміряти найбільшу хорду, що її можна нарисувати в цьому колі (рис. 261).

Задача 2. Виміряйте діяметр поперечного перерізу стовбура якого-небудь дерева. Зробіть собі таке приладдя з рухомою лінійкою NK (рис. 262). Вимірявши MN, ви одночасно з цим матимете й довжину діяметра AB (Чому?).

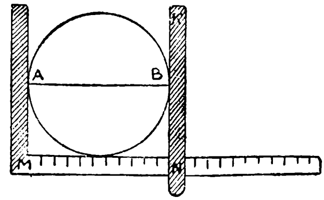


Рис 262.

§ 113. Вісь симетрії кола.

Дослід. Нарисуйте на прозорому папері обвід кола, а в ньому дві рівнобіжні хорди (рис. 263). Проведіть діяметр, перпендикулярний до цих хорд. Виріжте це коло і, згинаючи його вздовж по діяметру LM, пересвідчіться, що цей діяметр є вісь симетрії.

Доведення. Коли ви будете згинати коло по діяметрові, то відтинки обох хорд (NB й NA; PD й PC) підуть в тому самому напрямкові (при точках N та P кути прямі). Кінці хорд A й B, D й C так само зіллються (вони лежать на одному обводі кола). Повинна зіллятися, звичайно, і решта точок обводу кола (через що?). Отже:

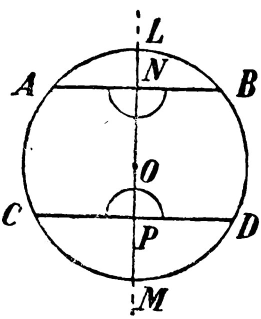


Рис. 263.

У всякому колі діяметр, перпендикулярний до хорди, є її вісь симетрії.

Висновок 1. Діяметр, перпендикулярний до хорди, поділяє цю хорду навпіл.

Висновок 2. Дуги між рівнобіжними хордами одна одній рівні (дуга AC = дузі BD).

§ 114. Як знайти центр кола.

Задача. Бондареві треба, вставляючи кругле денце в бочку, знайти центр цього кружечка. Як це йому зробити?.

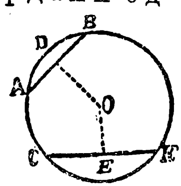


Рис. 264.

Дослід. Нарисуйте на даному обводі кола дві хорди (рис. 264) і з середини цих хорд поставте до них перпендикуляри. Точка перетину цих перпендикулярів і буде шуканий центр. Через що?

32. Дотична й січна.

§ 115. Січна й дотична. Щоб уважніше дослідити рух двигуна (рис. 259), зробіть собі з паперу таке приладдя.

Дослід. Нарисуйте обвід кола й поза ним прикріпіть один кінець паперової смужки *EC* з повздожним прорізом (рис. 265).

До цього приладу приладнайте ще такий пристрій. Виріжте з паперу смужку, рівну завдовжки радіусові (рис. 265), і один кінець її прикріпіть міцно в центрі, а в другий устроміть шпильку або кнопку так, щоб головка її лежала на обводі кола, гострячок був зверху й щоб гострячок цей міг ходити в прорізі січної *AC*[1]). Ви й матимете схему двигуна.

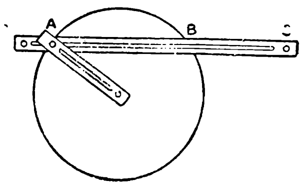


Рис. 265.

Проста *AC* (гонок) перетинає обвід кола в двох точках (*B* й *A*). Цеб-то гонок *AC* в цьому положенні буде с і ч н о ю.

Почніть обертати січну навколо точки *A* так, щоб дві точки *B* й *A*, де січна перетинає обвід кола, одна до одної наближалися. Поверніть, нарешті, січну так, щоб ці дві точки зіллялися в одну. Просту *AC* (рис. 266), що зустрічає обвід кола в одній тільки точці, звемо **д о т и ч н о ю**, а точку *A*, де дотична зустрічається з обводом кола, звемо **т о ч к о ю д о т и к у**.

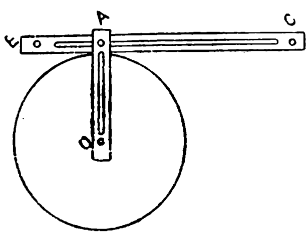


Рис. 266.

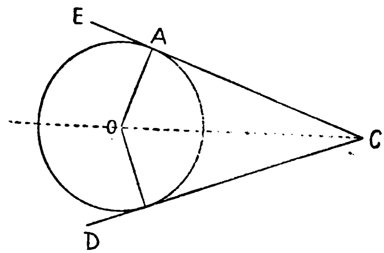


Рис. 267.

Простежте далі рух гонка. В скількох точках він знову буде перетинати обвід кола? А чи не зробиться він ще раз дотичною?

Скільки дотичних можна провести з однієї точки обводу кола (рис. 267)?

§ 116. Перша властивість дотичної.

Завдання. Дослідіть, під яким кутом дотична перетинає радіус у точці дотику.

---

[1]) Щоб не вскладняти досліду, можна при кінці *B* шпильку викинути й що-разу пересовувати кінці радіуса в цю точку рукою.

Дослід. Повторіть попередній дослід (§ 115), при чому зверніть увагу на ті кути ($\angle$ *OAC* та $\angle$ *OAE*), що їх утворює січна з радіусом, проведеним у точку перетину *A* (рис. 265). Чи будуть кути ці прямі? Пересовуйте січну так, щоб точки перетину *B* й *A* одна до одної наближалися. При тому стежте, як міняються кути при точці *A*. Нарешті поверніть січну так, щоб з неї стала дотична. Які кути матимете ви тоді при точці дотику? Чи буде тоді радіус *OA* перпендикуляром до дотичної *EC*? Перевірте це косинцем (рис. 266).

Доведення. Не трудно довести, що радіус *OA*, проведений у точку дотику *A* (рис. 267), завжди мусить бути перпендикулярний до дотичної. Справді, *OA*—це найкоротше віддалення центру *O* від дотичної *CE* (решта точок дотичної, як-от точка *E*, лежать поза обводом кола, отже, вони будуть далі від центру, ніж точка *A*), а найкоротше віддалення від точки *O* до простої *CE*—це перпендикуляр, спущений на цю просту.

Отже:

Висновок. Радіус, проведений у точку дотику, буде перпендикулярний до дотичної.

§ 117. Друга властивість дотичної.

Завдання. Порівняйте довжину тих двох дотичних, що їх можна провести до кола з однієї точки.

Дослід. Нарисуйте коло. З точки *C* проведіть до цього кола дві дотичні *CA* й *CD* (рис. 267). За довжину дотичної будемо вважати відтинок її від точки *C* до точки дотику. Щоб порівняти довжину обох дотичних, оберніть ваш малюнок навколо простої *OC*. Ви побачите, що ця *OC* буде віссю симетрії ($\triangle$ *AOC* зіллється з $\triangle$ *ODC*), а тому дотична *AC* зіллється з дотичною *CD*, цеб-то:

Висновок. Дві дотичні, проведені з однієї точки до того самого обводу кола, одна одній рівні.

33. Взаємне положення двох кол.

§ 118. Два кола, що не перетинаються.

Задача. В майстернях є один загальний головний вал, що його безпосередньо рухає двигун. Як рух цього вала передати колесам машин, що стоять далеко від нього?

Перший випадок. Колесо *AC* (рис. 268) насаджено на головний вал і разом з ним обертається. Щоб пустити в рух колесо *BD*, сполучимо його з першим колесом *AC* передатковим ременем (пасом [1]). Цей ремінь у своїй частині AB та CD (рис. 269) буде являти собою дотичні до обох кол.

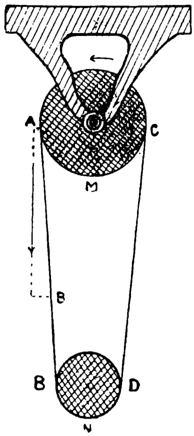


Рис. 268.

Другий випадок. В попередньому випадкові колесо BD буде обертатися в тому самому напрямкові, що й головний вал AC. Коли треба, щоб колесо BD оберталося в оберненому напрямкові, то пас натягають нав-

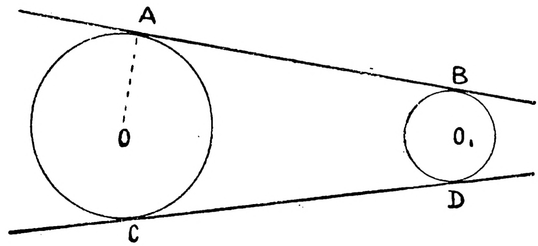


Рис. 269 Зовнішні дотичні.

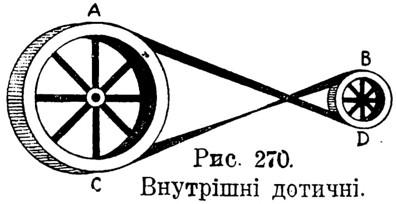


Рис. 270.
Внутрішні дотичні.

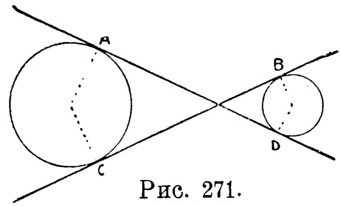


Рис. 271.

хрест (рис. 270). Тоді ми маємо діло з унутрішніми дотичними (рис. 271).

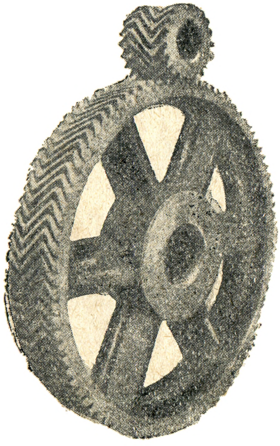


Рис. 272.

§ 119. Два кола, дотичні одне до одного.

Задача. Як передати рух від одного колеса до другого, колі ці колеса стоять близько одне біля одного? В цих випадках користуються шестернями. Коли два кола мають тільки одну спільну точку (рис. 273, 275), то про них кажуть, що вони дотичні одно до одного. Розгляньте малюнок 272 та

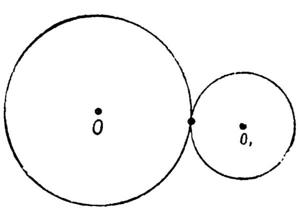


Рис. 273.

[1]) Таке сполучення звуть трансмісією, а колеса M та N, що передають рух від головного валу до фабричних варстатів, звуть шкивами (рис. 268).

малюнок 274 і скажіть, коли наші шестерні мають зовнішній дотик, а коли внутрішній.

Рис. 274.

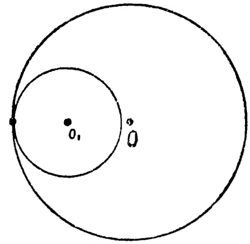


Рис. 275.
Внутрішній дотик
двох кол.

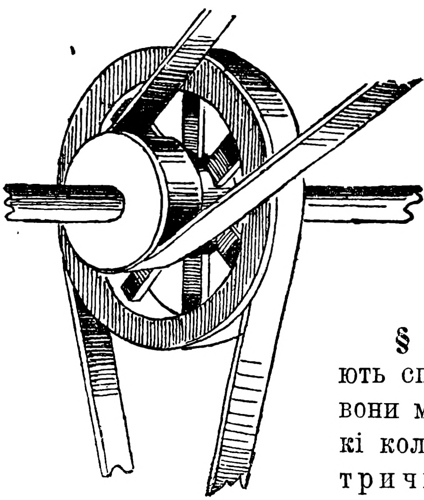


Рис. 276.

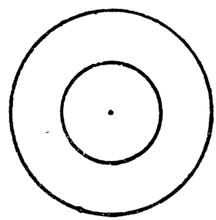


Рис. 276а.

§ 120. Коли дві шестерні мають спільний центр (рис. 276), тоді вони мають такий вигляд. Про такі кола кажуть, що вони **концентричні** (рис. 276а).

34. Коло й кут.

§ 121. Центральний кут та відповідна до нього дуга. Кути на землі можна міряти **астролябією** (рис. 277). Головна частина її—це металеве коло, що на обводі його позначено поділки, які допомагають рахувати число кутових градусів. Розгляньмо уважніше це коло (лімб) астролябії. Нарисуйте на папері окремо

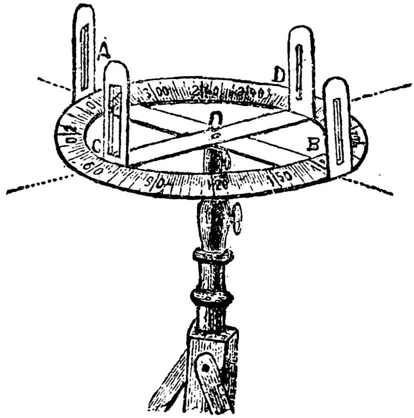


Рис. 277. Астролябія.

коло астролябії й проведіть у ньому два радіуси, що відповідають напрямкові лінійок астролябії.

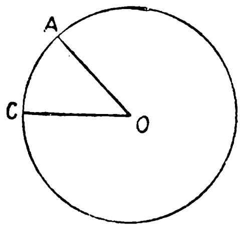


Рис. 278.

Такий кут ($\angle AOC$ на рис. 278), що за боки йому будуть радіуси, звемо центральним кутом. Вершина його лежить у центрі обводу кола. Покажіть дугу, що лежить поміж боками центрального кута. Про цю дугу будемо говорити, що вона відповідає нашому центральному кутові. На астролябії центральному кутові відповідає дуга AC.

Дослідімо, як ця дуга допомагає нам виміряти відповідний центральний кут.

§ 122. Кутовий градус і дуговий градус.

Дослід. Нарисуйте прямий центральний кут і відповідну до цього кута дугу (рис. 279).

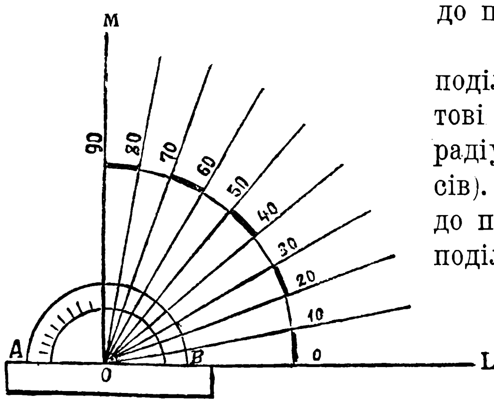


Рис 279.

За допомогою транспортира поділіть цей кут LOM на кутові градуси (досить провести радіуси через кожних 10 градусів). Дуга, що відповідна буде до прямого центрального кута, поділиться на 90 маленьких дуг, що рівні будуть одна одній. Кожну з цих маленьких дуг, відповідну до кута на один кутовий градус, звемо дуговим градусом [1]).

У нашому прямому центральному кутові буде 90 градусів, при чому відповідна до нього дуга поділиться так само на 90 градусів [1]).

---

[1]) Ми вже знаємо, що кожен кутовий градус поділяється ще на 60 рівних частин, що звемо їх кутовими минутами, а кутова минута поділяється ще на 60 рівних частин, що звемо їх кутовими секундами. Дуговий градус теж поділяється на дугові минути ($^1/_{60}$ частина дуги в один градус), а дугова минута поділяється на дугові секунди ($^1/_{60}$ частина дугової минути). Як дугові, так і кутові одиниці означається так само: ^{0}—градус, $'$—минута, $''$—секунда. Коли написано: $15^0\ 20'\ 30''$, то треба читати так: 15 градусів, 20 минут і 30 секунд.

Скільки прямих кутів опише рухомий радіус, коли він зробить повне коло? Скільки, значить, кутових градусів буде в повному колі? А скільки дугових градусів матиме той обвід кола, що його опише кінець *A* радіуса, коли він зробить повний оборот?

Вислід. Отже, кутовий градус можна утворити, поділивши коло на 360 рівних кутів; а дуговий градус матимемо, коли поділимо обвід кола на 360 рівних дуг.

§ 123. Як виміряти центральний кут.

Дослід. Дано який-небудь кут *AOB* (рис. 280). За допомогою транспортира нарисуйте навколо цього кута обвід кола так, щоб центр його зіллявся з вершиною кута *O*. Тоді з кута *AOB* зробиться центральний кут. Покажіть дугу, що відповідає цьому кутові. За допомогою транспортира дізнайтеся, з скількох градусів складається ця дуга *AB*. Відкладіть на цій дузі дугові градуси (досить відкласти дуги по 10 градусів) і точки поділу з'єднайте простими лініями з вершиною *O*. На скільки кутових градусів розіб'ється тоді $\angle$ *AOB*? Порівняйте число кутових градусів, що є в цьому центральному куті, з числом дугових градусів, що є у відповідній йому дузі. Матимете число однакове.

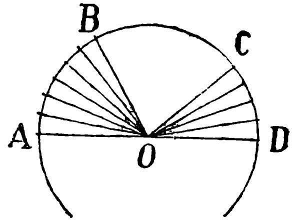


Рис. 280.

Отже, міряючи відповідну дугу на дугові градуси, можна знайти число кутових градусів, що є в центральному куті.

Вислід. Центральний кут вміщає в собі стільки кутових градусів, скільки відповідна до нього дуга вміщає дугових градусів.

Цю теорему коротше читають так: центральний кут міряють відповідною дугою.

§ 124. Як виміряти вписаний кут. На рис. 259 гонок з корбою утворюють такий кут $\angle$ *BAD* (рис. 281). Вершина цього кута *A* лежить на обводі кола, а боки його *AB* та *AD* — хорди.

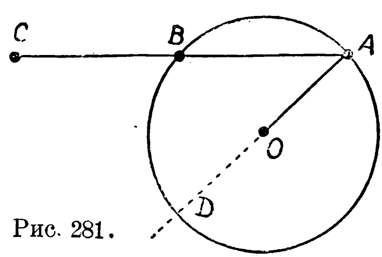


Рис. 281.

Такий кут ($\angle$ *BAD*) звемо вписаним кутом, а про дугу *BC*, що лежить поміж його боками, будемо казати, що на цю дугу спирається наш кут.

Повчімося виміряти такий кут за допомогою його дуги.

Випадок 1. Розгляньмо спочатку той випадок, коли одна з хорд, що утворює вписаний кут, є діяметр (рис. 282).

Порівняйте цей вписаний кут $\angle BAD$ з відповідним до нього центральним кутом $\angle BOD$. Для цього розріжмо наш центральний кут на два кути ($\angle 3$ та $\angle 4$) простою $OL \parallel AB$.

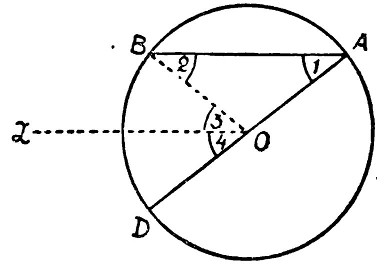


Рис. 282.

Доведіть, що ці два кути кожен окремо дорівнює нашому внутрішньому кутові $\angle 1$. (Пам'ятайте, що $\triangle AOB$ рівнораменний та що $OL \parallel AB$). А тому внутрішній кут A становить половину центрального кута $\angle BOD$. Цей центральний кут виміряють дугою BD, отже, внутрішній кут повинен вимірятись половиною дуги BD.

Випадок 2. Візьмімо тепер вписаний кут, що його утворюють хорди (рис. 283).

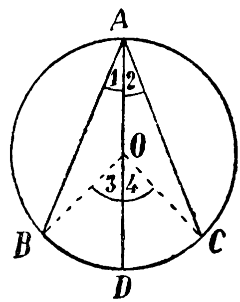


Рис. 283.

Провівши діяметр AD, ми розіб'ємо вписаний кут на два кути: $\angle 1$ та $\angle 2$. З них $\angle 1$ рівний буде половині $\angle 3$ (випадок тільки-що розглянений); через те саме $\angle 2$ рівний буде половині $\angle 4$.

Отже, увесь вписаний кут A ($\angle 1 + \angle 2$) рівний буде половині всього центрального кута, цеб-то $^1/_2$ ($\angle 3 + \angle 4$).

Висновок. В п и с а н и й к у т м і р я є т ь с я п о л о в и н о ю т і є ї д у г и, н а я к у с п и р а є т ь с я.

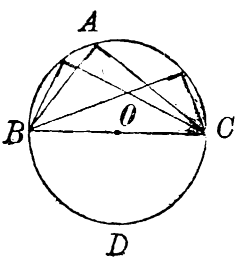


Рис. 284.

Цю теорему треба розуміти так: щоб д і з н а т и с я, с к і л ь к и к у т о в и х г р а д у с і в м а є в п и с а н и й к у т, т р е б а д у г о в и м и г р а д у с а м и з м і р я т и й о г о д у г у й з д о б у т е ч и с л о п о д і л и т и н а д в а. В и с л і д п о к а ж е, с к і л ь к и к у т о в и х г р а д у с і в м а є в п и с а н и й к у т.

§ 125. Властивість вписаного кута, що спирається на діяметр. Нарисуйте вписаний кут, що кінці його боків (точки B та C) спираються на кінці діяметра (рис. 284).

Скільки дугових градусів має дуга BDC, на яку спирається цей кут? (Чому?).

Скільки кутових градусів має вписаний кут $\angle BAC$? (Чому?)

Висновок. Всякий вписаний кут, що спирається на діяметр, мусить бути прямий.

§ 126. *Задача.* Провести дотичну з даної точки до даного обводу кола.

Взявши на увагу § 125, ми можемо, за допомогою циркуля та лінійки, провести з даної точки A до даного обводу кола дотичну лінію. З'єднайте дану точку A й центр обводу кола простою лінією OA й поділіть цю просту навпіл. З найденої точки M, яко з центру, опишіть радіусом, рівним MO (рис. 285), новий обвід кола, що перетнеться з початковим у двох точках B й C. З'єднавши простою лінією ці точки з точкою A, ви матимете дві дотичні AB й AC.

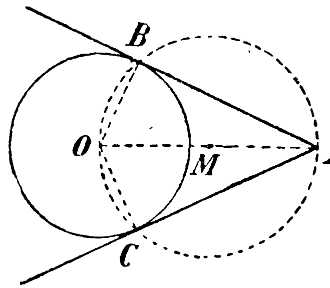


Рис. 285.

Доведіть, що збудовані в такий спосіб прості AB й AC повинні бути дотичними.

($\angle ABO$—це вписаний кут, що спирається на діяметр).

ВПРАВИ.

1. Як за допомогою такого кронциркуля зміряти діяметр монети (рис. 286)?

2. Щоб міряти діяметр дротини, вживають такого приладу (рис. 287). Що означають цифри, які стоять з боку прорізу? Зробіть собі такий прилад і зміряйте ним діяметр якої-небудь дротини.

3. Зробіть вимірну вилку, щоб нею міряти поперечники стовбурів.

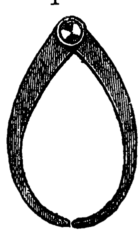


Рис. 286.

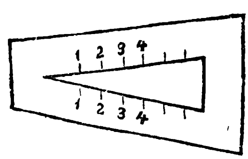


Рис. 287.

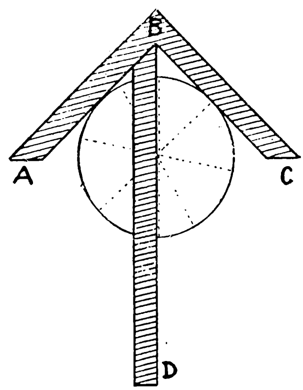


Рис. 288.

4. Зробіть собі такого центрошукача (рис. 288). Він складається з двох лінійок AB та BC, що перетинаються під прямим кутом, і третьої лінійки BD, що поділяє попередній кут навпіл. Обміркуйте, як цим приладом знаходити центр кола.

5. Перекиньте на папері (денцем угору) блюдце і обведіть олівцем його обвід. Знайдіть центр цього кола. Перевірте циркулем.

6. Маємо дугу AB (рис. 289). Як знайти її центр та радіус?

7. Знайдіть центр дуги AB і DE (рис. 290). Який радіус кривини має залізнична колія в AB і в DE?

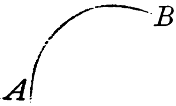


Рис. 289.

8. Чи залежить великість дугового градуса від довжини радіуса? Перевірте відповідь рисунком.

9. Скільки дугових градусів має дуга між кінцями стрілок цього годинника (рис. 291)?

А скільки кутових градусів має кут, що його утворюють стрілки?

10. Поділіть обвід кола на дві дуги так, щоб одна з них була втроє більша за другу. Скільки градусів має кожна дуга?

11. Одна дуга кола на 60° коротша від решти кола. Знайдіть цю більшу дугу.

12. Скажіть „на око“, який з цих кутів найбільший (рис. 292).

13. Чи однакові ці два кути $\angle AOB$ та $\angle ACB$ (рис. 293)?

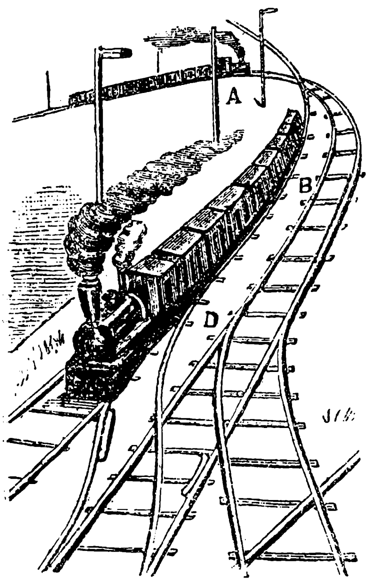


Рис 290.

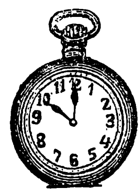


Рис. 291.

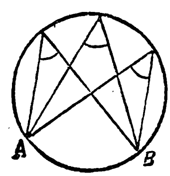


Рис. 292.

14. $\angle ACB = 37°$ (рис. 293). Скільком градусам дорівнює AOB?

15. Вписаний кут спирається на дугу, що дорівнює 125°. Який це буде кут: гострий чи тупий? Скільком градусам дорівнює він?

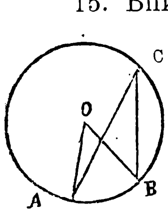


Рис. 293.

16. Вписаний кут $= 57° 40'$. Скільки градусів має дуга, що на неї спирається цей кут?

17. $\angle C$ (рис. 293) $= 49° 30'$. Скільки градусів має дуга ACB, що вміщає в собі цей кут?

18. Діяметри двох шестернів дорівнюють 12 см та 18 см. Нарисуйте взаємне положення,

що мають ці шестерні, коли їх „лінія центрів“ (віддалення між центрами) дорівнює 30 см; 3 см; 15 см; 0 см; 10 см.

19. Найбільше віддалення точки A, що лежить поза колом, від обводу кола дорівнює 8,5 см. Найближче = 35 мм. Який радіус цього кола?

20. Із однієї точки, що лежить на обводі кола, нарисовано під прямим кутом дві хорди завдовжки 2,4 см та 3,2 см. Яке їх віддалення від центру?

Розділ 10.

МНОГОКУТНИК.

35. Різні види многокутників.

§ 127. Що таке многокутник. Найчастіше садиба, поле, тощо являє собою таку фігуру (рис. 294).

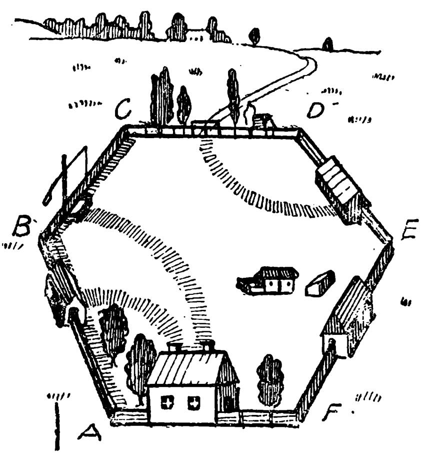


Рис. 294.

Ці фігури звуть многокутниками (рис. 295). Скільки вершин у першої фігури? Скільки в неї кутів? Прочитайте їх. Як назвати цей многокутник? Покажіть боки цього шостикутника. Прочитайте їх. Нарисуйте який-небудь восьмикутник.

§ 128. Правильний многокутник. Дослідіть уважніше фігуру садиби, що нарисована на рис. 294. Коли ви порівняєте між собою боки та кути цього многокутника, то побачите, що в цього многокутника всі боки один одному рівні та всі кути однакові. Такий многокутник звуть правильним. Нарисуйте правильний чотирикутник. Як ще инакше можна його назвати? А яку ще назву можна дати правильному трикутникові?

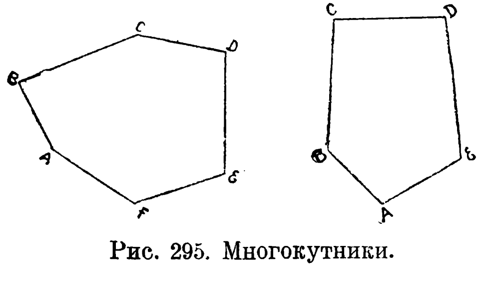


Рис. 295. Многокутники.

36. Рисування правильних многокутників.

§ 129. Як нарисувати правильний чотирикутник.

Задача. Круглу деревину треба обтесати так, щоб одержати брус з правильним чотирикутником у поперечному перерізі (рис. 296).

Як знайти розміри цього поперечного перерізу бруса?

Щоб розвязати цю задачу, треба навчитись рисувати такий квадрат, щоб у нього вершини лежали на обводі кола. Про такий квадрат кажуть, що він **вписаний у коло**.

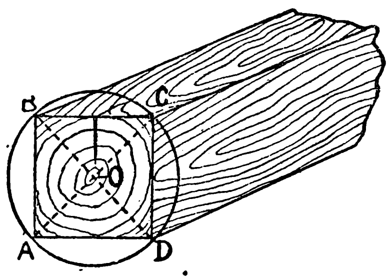


Рис. 296.

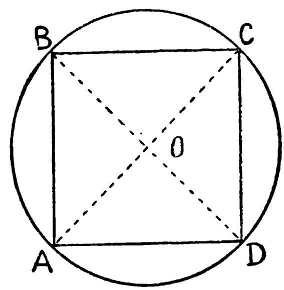


Рис. 297.

Будування. Проведіть два, один до одного перпендикулярні, діяметри AC та BD (рис. 297) і з'єднайте їхні кінці. Доведіть, що наш чотирикутник буде правильний, цеб-то що в ньому всі боки й усі кути—рівні.

Зауваження. Для цього треба довести, що

1) $\triangle OBC = \triangle OCD = \triangle AOD = \triangle AOB$ та

2) $\angle BAD = 90°$ (§ 125, вписан. кут).

§ 130. Як нарисувати правильний шостикутник.

Задача. Як нарисувати основу цієї мутри. Основа мутри (рис. 298) являє собою правильний шостикутник.

Доведення. Щоб зрозуміти, як рисувати правильний шостикутник, дослідіть уважно один із тих шости трикутників, на які можна розрізати шостикутник. Візьміть, наприклад, трикутник AOB (рис. 299). Доведіть, що в цього трикутника всі кути однакові.

Зауваження.

Скільки градусів має $\angle AOB$?

Скільки градусів припадає на решту кутів $\angle A + \angle B$?

Чи не будуть ці два кути рівні? (Доведіть, що $\triangle AOB$ рівнораменний).

Скільки градусів має окремо кут A й B?

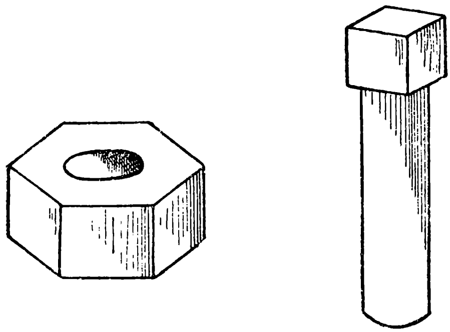


Рис. 298. Знайдіть правильні многокутники на цих мутрах.

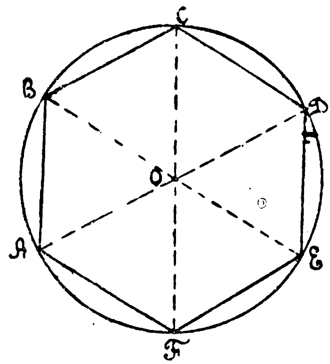


Рис. 299.

Коли вам удасться довести, що в трикутника AOB всі кути однакові, тоді ви доведете, що цей трикутник буде рівнобічний, себ-то:

Висновок. Бік AB правильного вписаного в коло шостикутника дорівнює його радіусові.

Рисування. Нарисуйте коло. Уздовж обводу цього кола відкладіть шість хорд, що рівні будуть радіусові (рис. 299). Ви й дістанете правильний вписаний у коло шостикутник.

§ 131. Як нарисувати правильний трикутник.

Коли вам треба нарисувати правильний трикутник, то нарисуйте спочатку правильний шостикутник, а потім сполучіть через одну вершини цього шостикутника. Ви й дістанете трикутника ABC (рис. 300), що має всі три боки рівні.

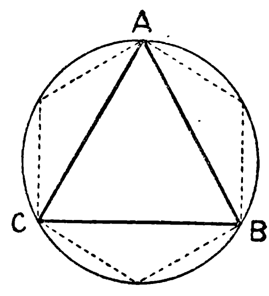


Рис. 300.

§ 132. Центр симетрії правильного многокутника.

Дослід. Виріжте з паперу правильний трикутник (рис. 300); проткнувши його в центрі шпилькою, обертайте його навколо цього центру й дослідіть, чи не зіллється трикутник із своїм початковим місцем раніш, ніж повернеться на повний оборот (на 360°).

Виявиться, що правильний трикутник, повернувшись на кожних 120° (третина повного обороту), зливатиметься з початковим своїм місцем, цеб-то, поки він зробить повний оборот, злиття це станеться тричі.

Отже, правильний трикутник є центрально-симетрична фігура.

Легко пересвідчитись, що всякий правильний многокутник є центрально-симетрична фігура.

Центром симетрії правильного многокутника буде центр *O* того кола, що за допомогою його ми рисували наш многокутник. Обміркуйте, як можна знайти цей центр у правильного многокутника (пригадайте, як знаходили ми центр у кола, § 114).

§ 133. Описаний многокутник. Круглу колону обшили з усіх боків шалівками. Тоді в поперечному перерізі утворилася така фігура (рис. 301).

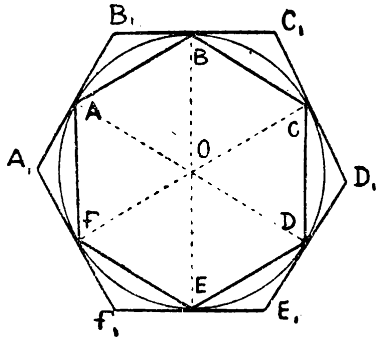


Рис. 301.

Многокутник, що в нього всі боки дотичні до кола, звуть описаним многокутником.

Правильний описаний многокутник можна нарисувати таким способом. Спочатку вписують у коло правильний многокутник, а потім через кожну вершину його рисують дотичні. Спробуйте сами нарисувати цим способом правильний описаний трикутник, чотирикутник та шостикутник.

37. Як виміряти площу многокутника.

§ 134. Як виміряти площу неправильного многокутника. Перший спосіб. Коли поле має вигляд неправильного многокутника, то його розбивають тим чи іншим способом на такі фігури, що площі їх ми вміємо вже виміряти. Найчастіше многокутник розбивають на трикутники (рис. 302).

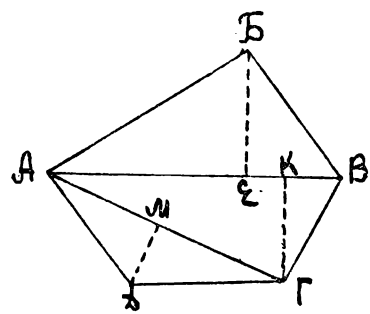


Рис. 302.

Це можна зробити, наприклад, так. Сполучіть одну з вершин (*А*) многокутника з рештою вершин простими лініями. Ці прості лінії (*АГ, АВ*) звуть діягоналями многокутника. Діягоналі розріжуть многокутника на трикутники.

Обміркуйте, як найзручніше виміряти площу кожного трикутника. Що брати за їх основу? Як тоді піде висота? А як потім підрахувати площу всього многокутника?

§ 135. Другий спосіб*). Площу цього многокутника можна ще зміряти таким способом. Нарисуймо поза многокутником (рис. 303) просту LM (базу) й спустімо з усіх вершин перпендикуляри на цю базу LM. Змірявши довжину всіх цих перпендикулярів Aa, Bb, Cc, Dd, Ee та довжину проекцій ab, be, bc, ec, cd, ми маємо змогу обчислити й площу нашого многокутника.

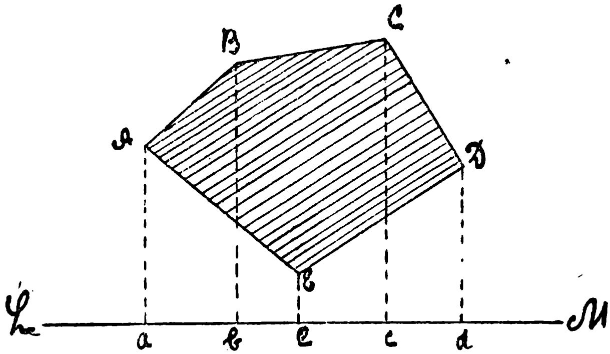


Рис. 303.

$$\text{пл. } ABCDE = \text{пл. } ABCDda - \text{пл. } AEDda$$

Що-до цих останніх, то їх легко обчислити, знайшовши поверхні всіх трапезів, що на них розрізали ці многокутники наші перпендикуляри Aa, Bb, Cc...

Примітка. Зверніть увагу на те, скільки трикутників дістали ви із п'ятикутника (рис. 302). А з шостикутника? Обміркуймо, чому це так.

Коли розрізуватимете свій многокутник на трикутники, то тільки два боки ($АД$ та $АБ$), що прилягають до вершини $А$, не дадуть окремих трикутників. Отже, трикутників повинно бути на два менше, ніж боків у многокутникові. Себ-то

Коли в многокутника боків було . . . . n

то трикутників буде . . . . $n - 2$.

§ 136. Сума кутів многокутника. Коли виміряють поле, що має вигляд многокутника, то виміряють всі його боки та всі його кути. Є дуже легкий спосіб переконатися, чи не зроблено великої помилки підчас вимірювання кутів многокутника. Справа в тому, що в кожного многокутника сума його кутів повинна дорівнювати певному числу градусів в залежності від кількости його боків.

Доведення. Нарисуйте який-небудь многокутник, число боків його означіть літерою n; діягоналями розбийте його на трикутники. Сума внутрішніх кутів у нашого многокутника рівна сумі кутів усіх цих трикутників. Сума кутів кожного

*) Метод трапезів.

трикутника має 180°, а таких трикутників матимемо $n-2$; отже, сума всіх кутів у многокутникові матиме не 180°, а число градусів у $n-2$ рази більше, цеб-то $180^\circ \times (n-2)$.

Висновок. Щоб обчислити суму всіх кутів у многокутникові, треба число боків його зменшити на два, а потім 180° помножити на здобуте число.

Формула. Коли в многокутника n боків, то сума кутів

$$N^\circ = 180^\circ\ (n-2)$$

§ 137. Як виміряти площу правильного многокутника.

Дослід. Виріжте який-небудь правильний многокутник, що має парне число боків, наприклад, правильний шостикутник (рис. 303а). Нарисуйте центр та розріжте його на шість (рис. 304) один одному рівних трикутників. Складіть з цих трикутників рівнобіжник (рис. 305).

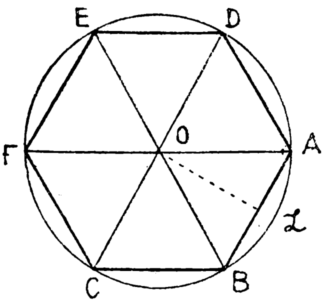


Рис. 303а

Покажіть основу й висоту в цього рівнобіжника. Чому дорівнюватиме площа його? З цього досліду виведіть правило, як виміряти площу правильних многокутників.

Основа цього рівнобіжника (*AB* на рис. 305)—це половина периметра[1]) нашого многокутника. Що-до висоти, то висотою

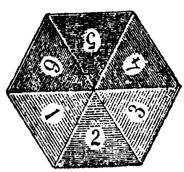


Рис 304.

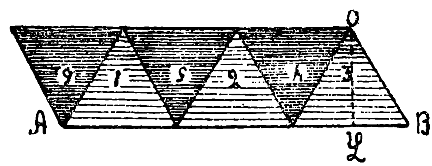


Рис. 305.

(*OL*) цього рівнобіжника буде перпендикуляр, спущений з центра многокутника на його бік (*BA*). Цей перпендикуляр звуть апотемою многокутника, отже

Висновок. Площа правильного многокутника дорівнює половині периметра його, помноженій на апотему.

---

[1]) Периметром ми назвали суму всіх боків многокутника (стор. 20).

Доведення. Припустімо, що апотема OL (рис. 303а) має l см. Тоді площа всіх трикутників, що з них складається весь многокутник, має

$$s = \frac{1}{2} AB \cdot l + \frac{1}{2} AD \cdot l + \frac{1}{2} DE \cdot l + \frac{1}{2} EF \cdot l + \frac{1}{2} FC \cdot l + \\ + \frac{1}{2} CB \cdot l.$$

Виносимо з цього многочлена за дужки спільні чинники $\frac{1}{2}$ і l

$$S = \frac{1}{2}(AB + AD + DE + EF + FC + CB)\, l$$

Висловіть словами одержане правило, маючи на увазі, що в дужках зазначено периметр многокутника.

§ 138. Формула.

Коли периметр правильного многокутника має p см,

Коли апотема його має . . . . l см,

Тоді площа його має $S = \frac{1}{2}\, pl$ кв. см.

$$S = \frac{1}{2}\, pl.$$

Приклад. Прикладемо це правило для такого шостикутника:

Бік його $= 1{,}2$ см.

Периметр $p = 1{,}2$ см $\times 6 = 7{,}2$ см.

Апотема $l = 1{,}0$ см.

А тому $S = \frac{1}{2}\ 7{,}2 \cdot 1$ кв см.

$S = 3{,}6$ кв. см.

ВПРАВИ.

1. Виміряйте площу вашої садиби, розбивши її діягоналями на трикутники.
2. Коли будете робити виміри на полі, то перевірте там правило для обчислення суми кутів многокутника (§ 136). Яким способом ви це зробите?
3. Виміряйте площу якої-небудь ділянки, розбивши її на різноманітні фігури різними способами.
4. Скільки всього діягоналів можна провести з кожної вершини восьмикутника? Скільки трикутників утворять ці діягоналі? Перевірте рисунком.
5. Знайдіть суму всіх внутрішніх кутів 5-кутника, 6-кутника, 8-кутника.
6. Скільки градусів уміщає кожен кут правильного 4-кутника, 5-кутника, 6-кутника, 12-кутника?
7. Скільки боків має многокутник, що в нього сума кутів дорівнює 720°? 1280°?
8. Скільки боків має правильний многокутник, коли кожен кут його = 135°? 150°? 120°?

9. Коли будують паркети, кам'яні підлоги, то-що, часто треба буває укладати щільно всю площу плитками, що мають форму однакових правильних многокутників. Ці многокутники можна укласти щільно тільки тоді, коли все поле біля кожної точки можна заповнити кутами, що в сумі дають 360°.

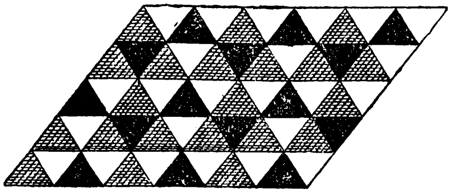


Рис. 306.

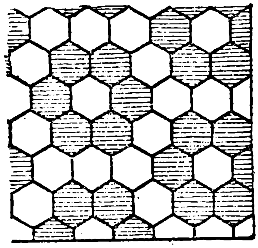


Рис. 307.

Дослідіть, якими правильними многокутниками можна укласти щільно всю підлогу (рис. 306, 307).

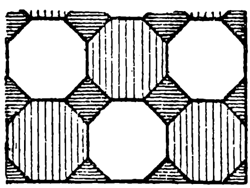


Рис 308.

10. Спробуйте дослідити, чи не можна укласти підлоги деякими неоднаковими правильними многокутниками. Якими саме? Та як (рис. 308)?

11. Обміркуйте на підставі рис. 309, як можна ще виміряти площу многокутника.

12. Через яку-небудь вершину (A) многокутника (рис. 310) нарисуйте просту LM і з усієї решти вершин проведіть перпендикуляри до цієї лінії. Зміряйте довжину всіх перпендикулярів і тих відтинків, на які вони розрізали лінію LM. Запишіть здобуті числа на відповідних відтинках.

Як обчислити площу многокутника на підставі цих вимірів?

13. Поле має форму чотирикутника $ABCD$ (рис. 311). Яка площа його, коли $AC=80$ м; $DE=64$ м; $BF=16$ м?

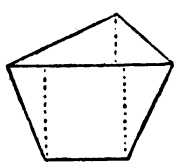


Рис. 309.

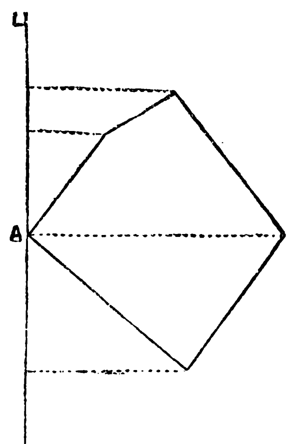


Рис. 310.

14. Скільки днів можна прогодувати 5 коней на траві, що виросла на ділянці $ABCD$ (рис. 312)? Кожен кінь з'їдає що-дня 20 кг трави, а щоб мати 300 кг трави, треба викосити площу 25 м завдовжки та 7,5 м завширшки.

Розміри ділянки: $AC = 200$ м, $BE = 60$ м, $FD = 50$ м.

15. Площа чотирикутної ділянки = 720 арів. Висоти, спущені з протилежних вершин на діягоналю, = 140 м й 160 м. Яка завдовжки ця діягональ?

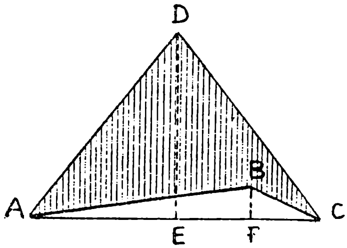


Рис. 311.

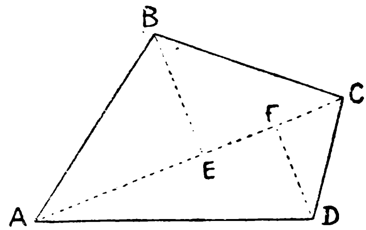


Рис. 312.

16. Фундамент млина має форму правильного шостикутника. Віддалення між двома протилежними вершинами = 12 м.

Які периметр та площа основи в цього фундамента?

Розділ 11.

ДОВЖИНА ТА ПЛОЩА КОЛА.

38. Як виміряти довжину обводу кола.

§ 139. Задача. Як знайти лінійну скорість колеса, що за одну секунду робить один повний оборот?

Уявімо собі, що на нашому колесі M намотано кодолу, що розкручується підчас руху колеса. Тоді, поки точка B (рис. 313), що лежить на обводі колеса, зробить один повний оборот, точка B, що лежить на кодолі, разом з кодолою пройде віддалення BA. Це віддалення й будемо вважати за лінійну скорість нашого колеса.

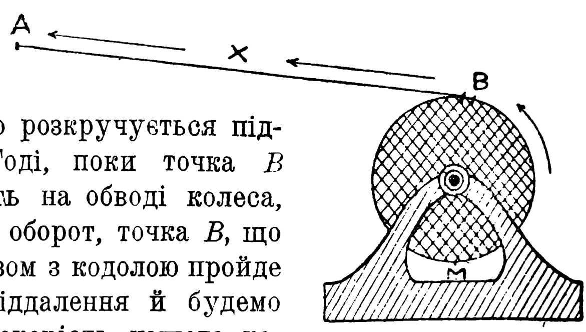


Рис. 313.

Щоб знайти цю скорість, досить виміряти довжину того обводу кола, що його рисує точка B колеса. Повчімося вимірювати цю довжину.

§ 140. Як знаходити довжину обводу кола, вимірюючи периметри многокутників. Нарисуйте обвід кола. Коли-б ви спробували зміряти довжину цього обводу кола якою-небудь прямолінійною одиницею, наприклад, лінійним сантиметром, і, кладучи його вздовж обводу кола, спробували-б дізнатися, з скількох сантиметрів складається довжина його, то зробити це вам не вдалося-б, бо проста лінія не може мати з обводом кола більш як дві спільні точки.

Отже, безпосередньо виміряти довжину обводу кола прямолінійною мірою не можна. Тому спробуймо знайти хоча тільки приблизну довжину обводу кола.

Дослід 1. Нарисуйте який-небудь обвід кола досить великого радіусу (щоб радіус був принаймні 100 міліметрів) і впишіть у нього який-небудь правильний многокутник, наприклад, правильний шостикутник (рис. 314). Зміpявши бік цього шостикутника, обчисліть його периметр. Периметр цього многокутника значно різнитиметься від обводу кола. Тепер впишіть новий правильний многокутник з подвоєним числом боків. Тоді матимете правильний вписаний 12-кутник; боки його вже досить близько прилягатимуть до обводу кола. Ще раз подвойте число боків многокутника. Матимете правильний вписаний 24-кутник; периметр його ще більше наближатиметься до обводу кола. Коли ви й далі робитимете так, то матимете що-разу нові многокутники, і периметри їхні що-разу ближче прилягатимуть до обводу кола.

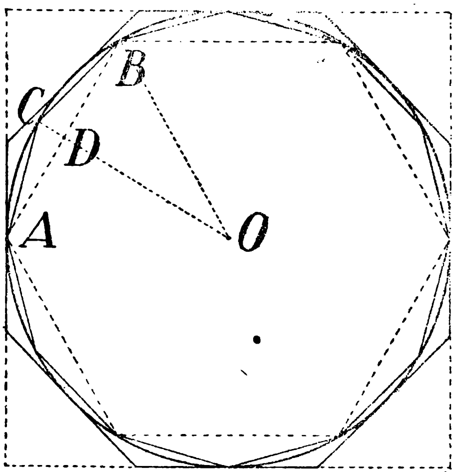


Рис. 314.

Виміряйте периметри всіх многокутників. Знаючи ці периметри, покажіть приблизно довжину того обводу кола, що ви нарисували.

Вислід. Коли ви нарисуєте обвід кола радіусом 100 міліметрів і впишете в нього правильні 6-кутники, 12-кутники, 24-кутники й т. д., то вимірюванням знайдете, що

бік 6-кутника буде . . . . 100 мм,
бік 12-кутника „ . . . . 51 мм,
бік 24-кутника „ . . . . 26 мм.

Помножаючи кожен бік на число боків, знайдете периметри цих многокутників.

Периметр 6-кутника буде . . . . . 600 мм.

Периметр 12-кутника „ . . . . . 612 мм.

Периметр 24-кутника „ . . . . . 624 мм.

Обвід нашого кола буде більший від кожного з цих периметрів. До якого периметра він буде найближчий?

Дослід 2. Нарисуйте знову той самий обвід кола того самого радіусу. Замість того, щоб вписувати в обвід кола правильні многокутники, почнемо їх описувати.

Найлегше описати навколо обводу кола правильний чотирикутник.—Опишіть його (рис. 314)!—Периметр цього чотирикутника значно різнитиметься від обводу кола. Подвоївши число боків цього чотирикутника, матимете правильний описаний 8-кутник. Периметр його вже досить прилягатиме до обводу кола.

Описуйте й далі многокутники, подвоюючи число боків. Матимете правильні описані 16-кутники, 32-кутники й т. д., при чому периметр кожного нового многокутника що-разу більше наближатиметься до довжини обводу кола.

Знайдіть периметри цих многокутників.

Вислід. Коли ви навколо обводу кола, що в нього радіус 100 мм, опишете правильні 4-кутники, 8-кутники, 16-кутники й т. д., то, вимірявши, знайдете, що

бік 4-кутника буде . . . . 200 мм,

бік 8-кутника „ . . . 83 мм,

бік 16-кутника „ . . . . 40 мм.

Отже,

периметр 4-кутника буде . . . . . 800 мм,

периметр 8-кутника „ . . . . . 664 мм,

периметр 16-кутника „ . . . . . 640 мм.

Довжина нашого обводу кола буде менша від кожного з цих периметрів.

Висновок з першого й другого дослідів.

Порівняймо тепер висліди з першого й другого дослідів. Наш обвід кола більший за периметр усякого вписаного многокутника й менший від периметра всякого описаного, тому він повинен бути між такими числами:

Многокутники вписані					Многокутники описані	
Число боків	Периметри много-кутників				Периметри много-кутників	Число боків
6	600 мм	<	Обвід кола	<	800 мм	4
12	612 мм	<		<	664 мм	8
24	624 мм	<		<	640 мм	16
48	627 мм	<		<	630 мм	32
96	628 мм	<		<	629 мм	64

Перший рядок говорить нам, що число, яке відповідає довжині обводу кола, лежить десь поміж 600 мм та 800 мм. Числа ці різняться одне від одного на 200 мм. Тому, коли ви за довжину обводу кола вважатимете яке-небудь число, що лежить поміж 600 та 800, наприклад, 605, 750, 690 й т. д., то знайдете неточну, *наближену* довжину обводу кола, що від невідомої нам справжньої довжини відрізнятиметься не більш як на 200 мм.

Другий рядок дає можливість порівняти довжину обводу кола з периметрами правильного вписаного 12-кутника (612 мм) та описаного 8-кутника (664 мм). Число, що покаже довжину обводу кола, повинно лежати поміж 612 мм та 664 мм. Різниця між цими числами 52 мм; тому, коли ви за довжину обводу кола вважатимете яке-небудь число, що лежить поміж 612 та 664 (наприклад, 620, 650 і т. д.), то довжина обводу кола, яку ви знайдете, від справжньої довжини різнитиметься не більш як на 52 мм.

Згідно з третім рядком ви для обводу кола можете взяти числа, що лежать поміж 624 мм та 640 мм (наприклад, 630 мм), при чому значіння це від справжньої довжини відрізнятиметься вже не більш як на 16 мм. Отже, *коли ви братимете многокутники з що-разу більшим числом боків і вимірюватимете їхні периметри, то матимете змогу показати наближені значіння довжини обводу кола, які що-разу менше відрізнятимуться від справжньої довжини його.*

§ 141. У скільки разів обвід кола довший за свій діяметр. Щоб виміряти довжину обводу кола попереднім способом, треба дуже багато часу. Спробуймо знайти таке правило, щоб легко й швидко обчисляти довжину будь-якого обводу кола.

Задача. Як впливає на лінійну скорість шкива довжина його діяметра.

Ви, звичайно, й сами помітили, що, коли міняються радіуси, то міняється й довжина обводу кола: чим довший буде радіус, тим довший буде обвід кола. Отже між обводом кола та його радіусом є певна залежність. Спробуймо знайти її. Тільки замість радіуса візьмімо діяметр (зміряти його легше). Спробуймо дізнатись, у скільки разів обвід кола довший буде від свого діяметру.

Дослід. Візьміть різні круглі речі: денце від круглих коробочок, блюдце, циліндричну гирку, шклянку для чаю, чорнилицю, то-що.

Покажіть на цих тілах обвід кола. Щільно обгорнувши обвід кола вузенькою паперовою смужкою, відріжте від цієї смужки частину, що рівна буде довжині обводу кола, і випростайте її.

Зміряйте міліметрами довжину випростаного обводу кола й довжину його діяметра.

Поділивши ці числа, довідайтеся, у скільки разів обвід кола довший за свого діяметра [1]).

Висновок. Виявиться, що відношення всякого обводу кола до його діяметра визначатиметься тим самим числом.

Коли вимірювати досить уважно й обчислення обмежити тільки десятими долями, то ви знайдете, що це відношення $=3{,}1$.

§ 142. Обчислення π. Відношення всякого обводу кола до його діяметра означається тим самим числом. Це число, що показує, у скільки разів обвід кола довший буде від діяметра, означатимемо грецькою літерою π (пі) [2]).

Порівнюючи периметри правильних многокутників з довжиною кола, безпосередньо вимірювали їх [3]).

---

[1]) Відношення ці треба означити десятковим дробом, при чому досить буде десятих часток.

[2]) Таке означення почав уперше вживати в середині XVIII віку відомий учений Ейлер. Цю літеру він взяв від початку слова: „περιφερεια“, що грецькою мовою означає „коло“.

[3]) Здобути досить точні числа безпосереднім вимірюванням периметрів важко, бо в кожному мірянні може трапитися велика помилка. Далеко кращі наслідки матимемо, коли будемо не вимірювати, а обчисляти периметри описаних та вписаних многокутників.

Будемо вважати, що довжина обводу кола рівна кожному з цих периметрів. Правда, припущення це так само несе з собою помилку, але, без краю збільшуючи числа боків у наших многокутниках, можемо зробити ці помилки надзвичайно малими.

Радіус того обводу кола, що навколо нього ми рисували наші многокутники, був 100 мм; тому діяметр його був 200 мм. Поділивши кожен відповідний периметр на 200 мм, знайдемо ряд наближених чисел, що між ними мусить лежати відношення обводу кола до діяметра.

Число боків	Периметри вписаних многокутників	Діяметр обводу кола	Відношен. периметрів вписаних многокутників до діяметра	π	Відношен. периметрів описаних многокутників до діяметра	Діяметр обводу кола	Периметри описаних многокутників	Число боків
6	600 мм	200 мм	3,00	$< \pi <$	4,00	200 мм	800 мм	4
12	612 мм	200 мм	3,06	$< \pi <$	3,32	200 мм	664 мм	8
24	624 мм	200 мм	3,12	$< \pi <$	3,20	200 мм	640 мм	16
48	627 мм	200 мм	3,13	$< \pi <$	3,15	200 мм	630 мм	32
96	628 мм	200 мм	3,14	$< \pi <$	3,14	200 мм	629 мм	64

З цієї таблиці видно, що в правильного вписаного 96-кутника і правильного описаного 64-кутника (перший рядок знизу) наше π лежатиме поміж числами, що одне від одного відрізняються менше ніж одною сотою частиною.

Отже, коли ми вважатимемо, що

$$\pi = 3{,}14,$$

то помилимось менш як на 0,01 [1]).

[1]) Вже єгиптяни пробували дізнатися, у скільки разів обвід кола довший від діяметра. Так, один єгипетський жрець (Ахмес), що жив найменше за 1700 років до нашої ери, у своїх обчисленнях припускав, що $\pi = 3{,}16$.

Грецький учений Архімед (близько 250 р. до нашої ери) дав для π число $3^1/_7 = 3{,}1428...$

За наших часів π обчислили надзвичайно точно.

Так, в XVI віці вчений Лудольф, що мало не все своє життя витратив на те, щоб вирахувати π (це число надруковано на його надгробку), дав для π 35 знаків, а саме

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288$$

А в 1873 році Шенкс дав для π число з 707 знаками. Але така точність для π зайва, бо, наприклад, коли-б ви хотіли обчислити довжину екватора з похибкою меншою від 1 сантиметра, то для цього досить взяти

Для π можна взяти ще число $3^1/_7$. Помилка й тут буде не більш як одна сота. (Означіть це число десятковим дробом і порівняйте з даним угорі значінням π).

§ 143. Правило для обчислення довжини кола. Ми бачили, що обвід кола довший від свого діяметра в π разів, а тому:

Щоб обчислити довжину обводу кола, досить його діяметр помножити на π.

§ 144. Формула перша.

Коли діяметр кола має d см.

Тоді довжина обводу кола має πd см.

$$l = \pi d$$

Формула друга.

Коли замість діяметра зміряти радіус обводу кола, то формула буде така:

нехай радіус обводу кола має r см,

тоді діяметр його має $2r$ см,

а довжина обводу кола l має $2r\pi$ см.

$$l = 2\pi r$$

39. Як виміряти довжину дуги.

§ 145. *Задача 1.* Залізничний шлях від станції A до B описує дугу, що має 80°. Радіус цієї дуги 20 км (рис. 315). Який завдовжки цей шлях?

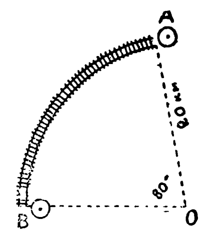


Рис. 315.

Розвязування.

Довжина всього обводу кола 20 км. 2.3,14 = =125,6 км.

Довжина дуги 1° . . . . . . $\frac{125,6}{360}$ км.

Довжина дуги 80° . $\frac{125,6 \cdot 80}{360} = 27,9$ км.

Задача 2. Знайти довжину дуги $n°$, коли радіус її $= r$ см.

Довжина всього обводу кола . . $2\pi r$

Довжина дуги 1° . . . . $\frac{2\pi r}{360}$

Довжина дуги $n°$ . . . . $\frac{2\pi r \cdot n}{360}$

π тільки з 9 знаками. А тому для практичної мети досить буде вважати $\pi = 3,14$, а коли потрібна вже надто велика точність, то можна взяти значіння $\pi = 3,1416$.

Формула.

$$S = \frac{2\pi r \cdot n}{360}$$

40. Як виміряти площу кола.

§ 146. *Задача.* В циліндрі парової машини пара тисне на толочій з силою 4,5 кг на кожен квадратовий сантиметр. Об-

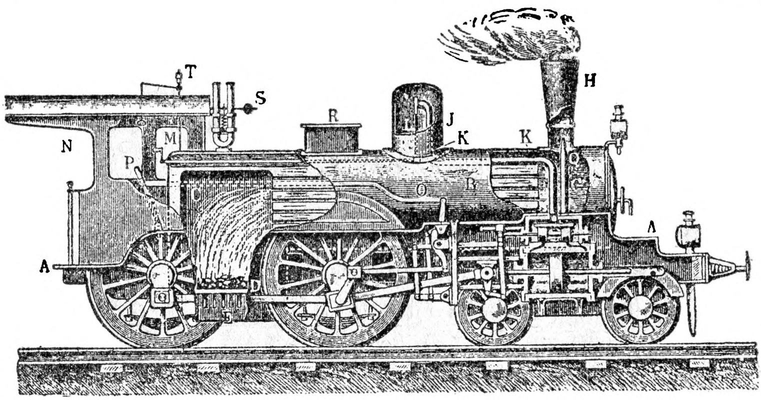


Рис. 316.

числіть, з якою силою тисне вона на ввесь толочій, коли діяметр цього толочія = 30 см.

Щоб розвязати цю задачу, треба виміряти, скільки квадратових сантиметрів має площа кола (толочія), на яку тисне пара. Навчімося вимірювати це.

Дослід. Виріжте з паперу коло. Розріжте його на 12 рівних

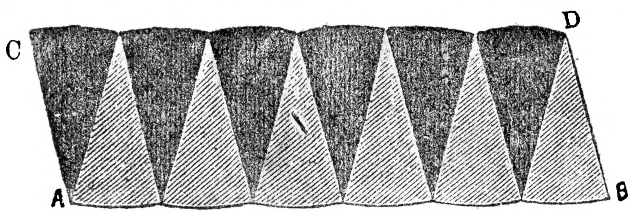


Рис. 317.

секторів. Шість із них приліпіть уздовж простої *AB*, а решту шість вставте гостряками в зубчики. Ви матимете фігуру, схожу на рівнобіжника (рис. 317)[1].

[1]) Коли розрізати коло на багато секторів, то матимемо фігуру, дуже схожу на прямокутник.

Покажіть лінію, що буде за основу в цій фігурі. Чим ця лінія була в обводі кола? А що буде висотою? На підставі цього досліду виведіть правило, як виміряти площу кола.

Висновок. Основою цієї фігури буде половина довжини кола, а висотою—радіус його, а тому площа кола дорівнює половині обводу його, помноженій на висоту.

Доведення. Впишемо в наше коло правильний многокутник. Площа цього многокутника дорівнює половині периметра його, помноженій на апотему (§ 137). Коли ми впишемо многокутник з великою кількістю боків, то заміняючи площу цього многокутника площею кола, периметр многокутника—довжиною кола, а апотему—радіусом, ми знайдемо таке правило для вимірювання площі кола:

Правило. Щоб довідатись, скільки квадратових одиниць має в собі площа кола, треба відповідними лінійними одиницями зміряти половину його обводу і здобуте число помножити на радіус.

Коротше це правило висловлюють так:

Площа кола дорівнює половині обводу його, помноженій на радіус.

§ 147. Формула перша.

Коли довжина обводу кола має C см,
коли радіус його має . . . . . r см,
то площа кола має $Q = \frac{1}{2} C \cdot r$ кв. см.

$$Q = \frac{1}{2} C\ r \,..\ (1)$$

Формула друга.

Але обвід кола $C = 2\pi r$ (§ 144).

Замінивши в нашій формулі (1) обвід кола цим виразом, знайдемо, що площа кола

$$Q = \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r.$$

Після спрощення остаточно матимемо, що площа кола

$$Q = \pi r^2$$

Отже, площа кола буде в π разів більша за площу квадрата, в якого бік рівний радіусові кола.

Приклад. Треба виміряти площу п'ятачка. Зміряймо діяметр його. Він буде 34 мм. Тому.

$r = 17$ мм.
$r^2 = 17 \times 17 = 289$ кв. мм.
Площа кола $= \pi r^2 = 3{,}14 \times 289 = 907$ кв. мм.

41. Як виміряти площу сектора й сегмента.

§ 148. Як виміряти площу сектора. Кожне крило цього вентилятора (вітрогона) обмежують два радіуси й дуга (рис. 318). Таку частину кола звемо с е к т о р о м (рис. 319).

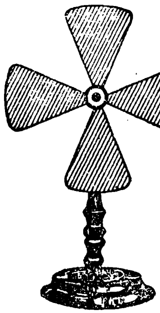


Рис. 318. Сектор

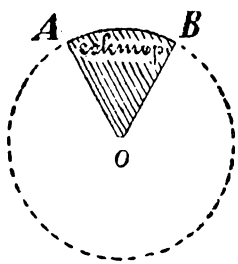


Рис. 319. Сектор.

Коли виміряємо площу сектора, може бути два випадки. Випадок перший: відомі будуть радіус і центральний кут; випадок другий: відомі будуть радіус і довжина дуги.

Розгляньмо кожен випадок окремо.

Задача 1. О б ч и с л и т и п л о щ у с е к т о р а, к о л и в и м і р я н о в ж е ц е н т р а л ь н и й к у т (n°) і р а д і у с й о г о (r).

Розвязування.

Площа всього кола . . . . πr^2 кв. см.

Площа сектора з центральним кутом 1° . . $\frac{\pi r^2}{360}$

Площа сектора з центральним кутом n° . . $\frac{\pi r^2 . n}{360}$

$$K = \frac{\pi r^2 . n}{360}$$

Приклад. Обчislімо площу сектора, що на рис. 319, $r = 15$ мм. Центральний кут $\angle AOB = 60^0$.

А тому

Площа всього кола $= 3{,}14 . 15^2 = 706{,}5$ кв. мм.

Площа сектора 1° . . . . $\frac{706{,}5}{360}$

Площа сектора 60^0 . . . . $\frac{706{,}5 . 60}{360} = 117{,}7$ кв. мм.

Задача 2. О б ч и с л и т и п л о щ у с е к т о р а, к о л и д о в ж и н а й о г о д у г и $= S$, а р а д і у с $= R$.

Сектор можна вважати за трикутник, в якому за основу є дуга AB, а за висоту — радіус (рис. 319).

Доведення. Щоб виміряти площу сектора, ми знайшли таку формулу:

$$K = \pi r^2 \frac{n}{360} \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Напишімо її так:

$$K = \frac{2\pi rn}{360} \cdot \frac{r}{2}$$

Згідно з формулою § 145, $\frac{2\pi rn}{360}$ це довжина дуги AB.

Нехай має вона S см; тоді площа сектора

$$K = S . \frac{r}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Отже, площа сектора рівна половині дуги, помноженій на радіус.

§ 149. Як виміряти площу сегмента.

Відріжте від кола частину, що обмежена хордою й дугою. Її звемо сегментом (рис. 320). Щоб обчислити площу сегмента, треба доповнити його до сектора і, вимірявши площу (рис. 319) цього останнього, відняти від неї площу трикутника OAB. Обчисліть, наприклад, площу сегмента на рисункові 320.

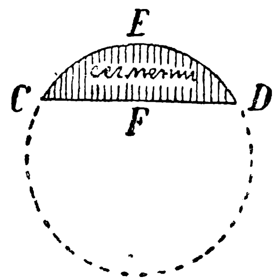


Рис. 320.

§ 150. Як виміряти площу криволінійної фігури. Щоб виміряти площу якої-небудь кривовілійної фігури, можна зробити так. Візьміть уздовж кривої лінії цієї фігури ряд точок і з'єднайте їх простими лініями. Матимете прямолінійну фигуру. Вимірявши площу цієї прямолінійної фігури, знайдете число, що більш-менш наближатиметься до точного значіння шуканої площі криволінійної фігури. Чим більше візьмете проміжних точок, тим менше знайдене наближене значіння відрізнятиметься від справжнього.

Можна також використати міліметровий папір, поділений на квадратові одиниці. Звичайно, цим способом удасться вам знайти тільки наближене значіння тієї площі, яку міряєте.

ВПРАВИ:

1 *). Круглий шаплик (чан) з діяметром 2 метри треба стягнути дерев'яними обручами. Які завдовжки обручі мусимо взяти?

2. Коли я на рівному місці навколо себе бачу на 3 кілометри, то який завдовжки буде обвід того горизонту, що бачу я?

---

*) Для цих задач можна брати $\pi = 3{,}1$.

3. Діяметр солом'яного бриля=20 см. Яку завдовжки стрічку треба купити, щоб обвязати нею (по обводу) цей бриль?

4. Нарисуйте будь-яку завдовжки просту лінію! Нарисуйте тепер таке коло, щоб у ньому обвід був завдовжки такий, як і ваша лінія.

5. Монета котиться стойма по столу і, обернувшись один раз, пробігає 9,3 см. Нарисуйте цю монету.

6. Діягоналя квадрата, вписаного в коло, 7 см. Який завдовжки буде обвід цього кола?

7. За який час можна об'їхати екватор (рівноденник), коли їхати по 15 км за годину? Радіус землі = 6000 км.

8. Сівалка звичайно завдовжки буває 2 метри. Діяметр колеса її = 3 метри. Треба цією сівалкою посіяти на кожній десятині по 5 пудів зерна. Скільки зерна має сипатися при кожнім обороті колеса?

9. Треба нам викопати круглу копанку 15,5 метра в обводі. Який завдовжки треба взяти радіус, щоб зазначити місце для копанки?

10. Щоб знайти висоту гори AB (рис. 321), поміряли довжину обвода кола, що лежить в основі гори, та її твірну AC. Завдовжки обвід 1860 метрів, AC = 500 метрів. Яка заввишки гора?

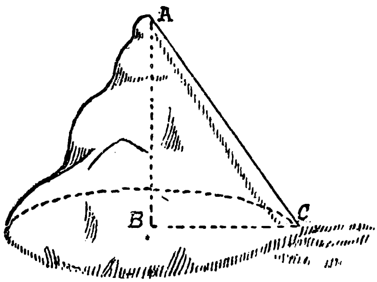


Рис. 321.

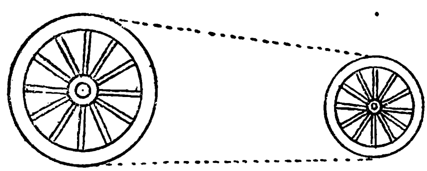


Рис. 322.

11. Троє хлопців, взявшись за руки, обхопили поверхню дуба. Який завтовшки (цеб-то який має діяметр) буде цей дуб, коли кожен хлопець може обхопити руками 1 сажень?

12. Двоє коліс з'єднані безконечним пасом (рис. 322). Велике колесо з поперечником 150 см робить 90 оборотів за хвилину. Скільки оборотів за хвилину робитиме мале колесо, в якого діяметр = 20 см? Якого діяметру має бути мале колесо, щоб воно оберталося 600 разів за хвилину?

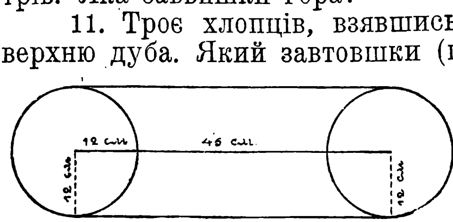


Рис. 323.

13. Обчисліть довжину всього пасу, що сполучає ці два шкиви (рис. 323).

14. Діяметр круглої пили = 70 см. Скільки оборотів на минуту повинна вона зробити, щоб скорість точок на обводі = 25 см/сек.?

15. З якою скорістю рухається поїзд, коли лічильник на паротяговi показав, що тяглове колесо, діяметр якого $d = 1{,}8$ м, робить оборотів $N = 192$ обор./минуту?

16. Тягловий шкив робить 100 оборотів на минуту. Він передає рух машинному шкивові, що має діяметр 200 мм і робить 120 оборотів на минуту. На ковзання втрачається 3% руху. Який діяметр тяглового шкиву?

17. 60-ту частину земного екваторіяльного градуса звуть „морська миля" або „морський узол". Вирахуйте довжину її.

18. Широта Київа 50°. На якому віддаленні Київ від північного бігуна?

19. Нарисуйте дугу в 60° радіусом 10 см. Обчисліть, на скільки ця дуга коротша за хорду, що стягує кінці цієї дуги.

20. Яка завдовжки ця дуга (рис. 324)?

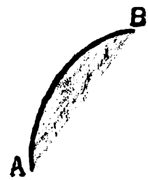


Рис. 324.

21. У „папірусі Ринда", що склав його писар єгипетського царя Рааус-Ахмеса (щось із 2000 років до нашої ери), дається таке правило, щоб виміряти площу кола: „Площа кола рівна площі квадрата, в якого бік рівний діяметрові кола, зменшеному на $^1/_9$ частину своєї довжини". На підставі цього правила вирахуйте, яке значіння π брали єгиптяни.

22. Виріжте з бляхи який-небудь кружечок. Зважте його. З такої самої бляхи виріжте квадрат, щоб його бік рівний був радіусові кружечка. Зважте й його. У скільки разів площа кружечка більша за площу квадрата? Через що? Як можна знайти з цього значіння π?

23. „К в а д р а т у р о ю к о л а" звуть таку задачу: „За допомогою циркуля та лінійки нарисувати такий квадрат, щоб площа його рівна була площі цього кола". Цю ніби надзвичайно легку задачу намагалося розвязати багато вчених математиків, але в наші часи вже впевнилися в тому, що такий квадрат нарисувати за допомогою самого тільки циркуля та лінійки не можна. Але деяким иншим приладдям розвязати квадратуру кола можна. Ось, наприклад, як розвязав цю задачу відомий італійський учений Леонардо-да-Вінчі. Маємо коло з радіусом $= r$ см. Візьміть циліндричну коробку, заввишки з радіус нашого кола r, при чому діяметр основи її повинен бути рівний висоті циліндра. Обгорніть бічну поверхню циліндра аркушем паперу й виріжте прямокутник, рівний цій поверхні. Порівняйте площу кола з площею здобутого прямокутника. Перетворивши прямокутник цей на рівновеликий квадрат, ви й знайдете квадратуру кола.

24. Маємо квадрат. Нарисуйте таке коло, щоб його площа рівна була площі квадрата. (Задачу цю звуть „ц и р к у л я т у р а к в а д р а т а“).

25. Коня прив'язано до кілка вірьовкою 7 метрів завдовжки. Вирахуйте розмір тієї площі, що на ній може пастися кінь.

26. Яку вагу може видержати залізний дріт (канат), сплетений з 20 дротинок, кожна по 3 мм завтовшки, коли відомо, що один кв. см „поперечного розрізу“ дроту може видержати не більш як 1000 кг (одну тону) ваги?

27. Зовнішній діяметр трубки = 12 см. Товщина стінок = 4 см. Яку площу має внутрішній поперечний розріз трубки?

28. На дротику завтовшки 6 мм почеплено 50 кг ваги. Скільки ваги припадає на кожен квадратовий сантиметр поперечного перерізу?

29. Воду подають на завод двома трубами, що їх діяметр 9 см та 16 см. Треба замінити ці дві труби однією так, щоб вона одна давала води стільки, скільки перші дві. Якого діяметра треба взяти цю нову трубу?

30. Знайдіть площу розрізу дерева, в якого довжина кола = 1550 см.

31. Виміряйте периметр та площу цього сектора (рис. 325).

32. Виміряйте світлову площу цього вікна (рис. 326).

33. Виміряйте площу такого сегмента (рис. 327).

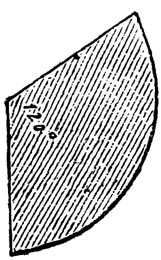


Рис. 325.

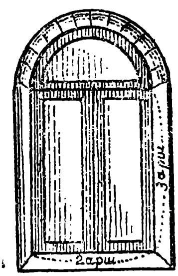


Рис. 326.

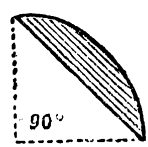


Рис. 327.

34. На рисункові 328 бачимо план Київа. Поділіть частину його, що обведена точкованими лініями, на знайомі вам геометричні фігури й виміряйте, скільки квадратових сантиметрів має площа Київа на цьому плані.

35. Скільки десятин під містом Київом, коли кожен квадратовий міліметр плану в дійсності відповідає одній десятині (рис. 328)?

36. Землеміри міряють площу криволінійної фігури ще й так. Вони рисують такий многокутник, щоб його боки „на око“ в і д р і з у в а л и від площі фігури стільки-ж, скільки вони п р и р і з у ю т ь в инших місцях.

Спробуйте й ви цим способом виміряти площу криволінійної фігури. Наприклад, візьміть географічну мапу і, змірявши на ній цим способом площу Европи й Америки,

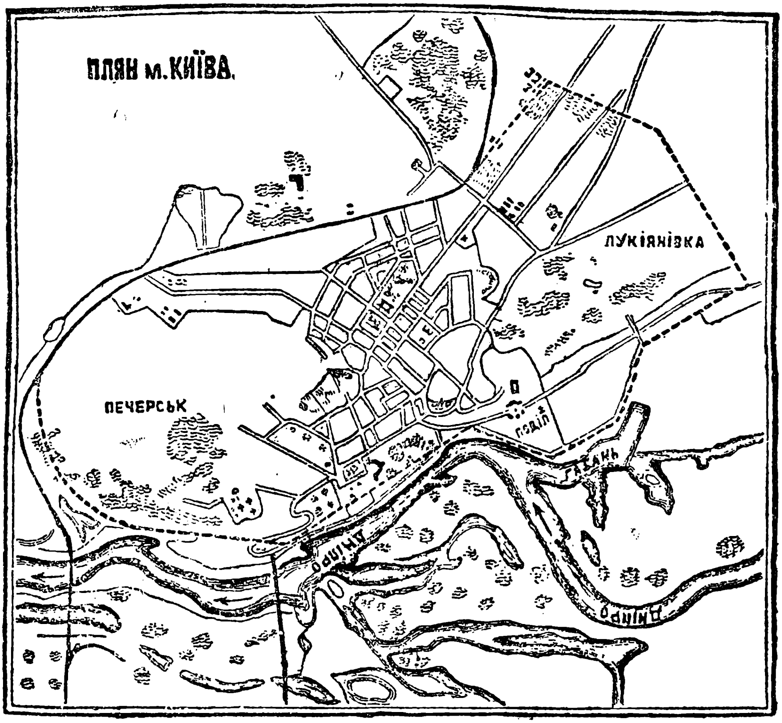


Рис. 328

порівняйте ці частини світу одну з одною. Порівняйте ще площу України з площею Франції, Германії, СРСР.

Розділ 12.

ПОДІБНІ ФІГУРИ.

42. Відношення та пропорції.

§ 151. Що таке відношення.

Задача. Порівняйте одну з одною довжину цих трьох колосків жита.

Дослід 1. Довжинам наших колосків (рис. 329) відповідають відтинки CD, C_1D_1 та AB. Накладаючи ці відтинки один на одного (§ 12), ми переконаємось, що

1) Довжини перших двох колосків однакові. $CD = C_1D_1$ (§ 12).

2) Довжини першого та третього колосків не однакові. AB більше за CD (§ 12). Довідаємось, у скільки разів один із цих колосків (AB) довший за другого (CD).

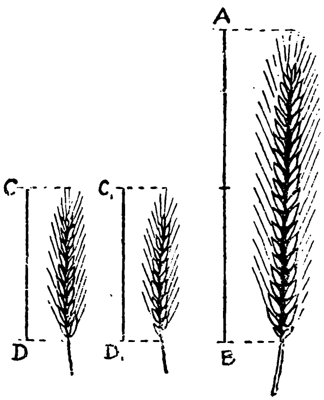


Рис. 329.

Дослід 2.

Задача. Треба довідатись, у скільки разів проста AB (рис. 330) буде більша за просту CD.

Спробуймо, чи не ляже ціле число разів менший відтинок CD на більшому AB. Будемо відкладати цир-

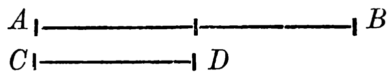


Рис. 330.

кулем відтинок CD на AB. Виявиться, що CD ляже на AB якраз двічі.

Отже, в цьому разі AB буде в два рази більший за CD, цеб-то $AB = 2CD$.

Вислід цей запишемо так:

$$\frac{AB}{CD} = 2.$$

Число 2, що показує, у скільки разів відтинок AB більший за CD, зватимемо **відношенням** відтинка AB до відтинка CD.

Коли відтинок CD ляже на AB двічі, то він буде $^1/_2$ відтинка AB, цеб-то $CD = {}^1/_2\,AB$; записати це можна так:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Число $^1/_2$, що показує, яку частину AB становить відтинок CD, будемо звати відношенням CD до AB.

Висновок. Отже, відношенням двох відтинків зватимемо число, що показує, у скільки разів перший відтинок більший за другий, або яку частину другого відтинка він собою становить.

§ 152. Як знайти відношення двох відтинків простої лінії.

Задача. Знайдіть відношення відтинка AB до CD на рис. 331.

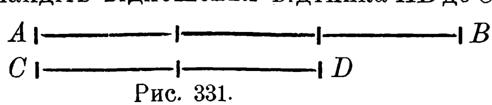


Рис. 331.

Спробуйте, чи не ляже й тут відтинок CD ціле число разів на відтинкові AB. Виявляється, що ні. Тому спробуймо знайти такий новий відтинок, що-б ліг ціле число разів і на відтинкові AB, і на відтинкові CD; відтинок такий звуть **спільною мірою**. Зміряймо однією й тією самою одиницею міри, наприклад, міліметром:

$$AB = 54 \text{ мм.}$$
$$CD = 36 \text{ мм.}$$

Отже, спільна міра наших відтинків у цьому разі буде міліметр[1]). Він ляже на CD 36 разів, а на AB—54 рази.

Тоді відношення AB до CD буде

$$\frac{AB}{CD} = \frac{54}{36}.$$

Дріб цей можна скоротити на 18; тоді остаточно знайдемо, що відношення

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{2}.$$

Отже, щоб здобути відтинок AB, треба CD поділити на 2 рівні частини й узяти їх 3.

Коли-ж ми хочемо по відтинкові AB знайти відтинок CD, то мусимо AB поділити на 3 рівні частини й узяти їх дві.

Цеб-то

$$\frac{CD}{AB} = \frac{2}{3}.$$

§ 153. Що таке маштаб.

Буває часто, що треба рисувати дуже довгі прості, наприклад, віддалення одного міста від другого, довжину та ширину будинка, висоту якої-небудь кімнати, то-що. Нарисувати всі ці прості, такі довгі, які вони є справді (натурального розміру), ми не можемо, і тому рисуємо їх зменшені.

Наприклад, щоб нарисувати людину, що в дійсності буде 2 метри заввишки, ми рисуємо її завжди далеко меншу. —Нарисуйте людину цю, наприклад, заввишки два сантиметри.— Обчисліть, яку частину справжньої висоти являє собою висота

---

[1]) У цьому прикладі міліметр хоча й буде спільна міра наших відтинків, але не буде найбільша. Тут найбільша спільна міра буде відтинок 18 мм завдовжки; він ляже ціле число разів і на AB (3 рази) і на CD (2 рази). Є спосіб, що дає змогу відразу знаходити спільну найбільшу міру двох відтинків, але тут ми його розглядати не будемо.

людини, що її ви так нарисували. Для цього треба знайти відношення 2 см до 2 метрів, а це дасть вам

$$2 : 200 = \frac{1}{100}$$

Отже число, що показує, яку частину справжніх розмірів становлять розміри нарисованих ліній, звуть м а ш т а б о м (м і р и л о м) рисунка. Таким чином, на нашому рисункові (332) людину намальовано в маштабі $\frac{1}{100}$.

Рис. 332.

Маштаб, що ми його обчислили ($^1/_{100}$), показує, що кожен метр справжньої довжини на рисункові зменшено в 100 разів, цеб-то нарисовано його у вигляді сантиметра. Тому додамо рисунок простої, поділеної на сантиметри, при чому пам'ятатимемо, що кожен сантиметр відповідає в дійсності одному метрові. Тоді виявиться, що рисунок наш нарисовано в маштабі 1 : 100 або „1 метр у сантиметрі". Маштаб звичайно рисуємо так, як показано це на рис. 333.

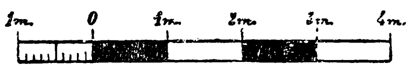


Рис. 333.

43. Пропорціональні лінії.

§ 154. Що звемо ми пропорціональними лініями.

Дослід. На рис. 334 намальовано мапу нашої України. Щодо рис. 335, то тут також намальовано мапу України, але в зменшеному розмірі.

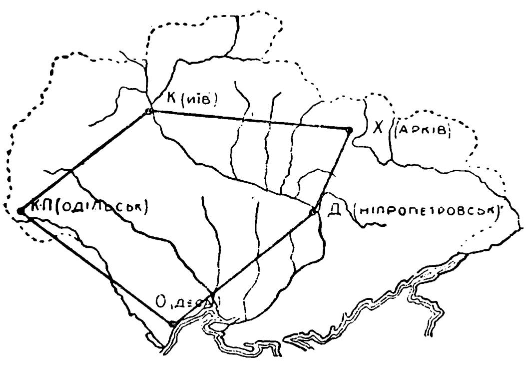


Рис. 334.

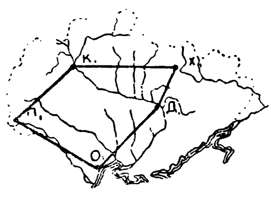


Рис. 335

Порівняйте ці фігури між собою. Щоб зручніше було порівнювати, сполучімо на обох мапах простими лініями найголовніші міста України: Харків, Київ, Кам'янець-Подільськ, Одесу та Дніпропетровськ. Одержимо два такі многокутники (рис. 334 та рис. 335).

Дослід. Порівняйте між собою відповідні [1]) боки наших многокутників. Чи будуть ці боки рівні?

А чи не будуть рівні їх відношення?

Перша пара відповідних боків.	Друга пара відповідних боків.
$XK = 28$ мм.	$K\Pi = 22$ мм.
$X_1K_1 = 14$ мм.	$K_1\Pi_1 = 11$ мм.
$\frac{XK}{X_1K_1} = 2$	$\frac{K\Pi}{K_1\Pi_1} = 2,$

цеб-то відношення ці однакові

$$\frac{XK}{X_1K_1} = \frac{K\Pi}{K_1\Pi_1}$$

Рівність двох відношень звуть пропорцією.

Коли відношення боків однакове, то самі боки звуть пропорціональними.

Знайдіть відношення третьої, четвертої та п'ятої пари боків. Виявиться, що відношення всіх відповідних боків будуть однакові

$$\frac{XK}{X_1K_1} = \frac{K\Pi}{K_1\Pi_1} = \frac{\Pi O}{\Pi_1 O_1} = \frac{O Д}{O_1 Д_1} = \frac{Д X}{Д_1 X_1} = 2.$$

Висновок. У наших многокутників відповідні боки пропорціональні.

44. Подібні многокутники.

§ 155. Які многокутники звемо подібними.

Дослід. Многокутники, що ми їх одержали в попередньому досліді (§ 154), хоча й не рівні один одному, але дуже схожі один на одного. Дослідімо їх докладніше. Ви вже переконалися, що всі відповідні боки їх пропорціональні.

Зверніть тепер увагу на всі відповідні кути цих многокутників (рис. 334, 335). Порівняте їх між собою.

У першого многокутника

$$\angle \Pi = 72°, \ \angle K = 138°, \ \angle X = 70°, \ \angle Д = 152°, \ \angle O = 108°.$$

[1]) Так звуть боки, що лежать проти рівних кутів, наприклад, XK та X_1K_1, $K\Pi$ та $K_1\Pi_1$.

У другого многокутника

$$\angle П_1 = 72°, \ \angle К_1 = 138°, \ \angle Х_1 = 70°, \ \angle Д_1 = 152°, \ \angle О_1 = 108°.$$

Виявилося, що відповідні кути один одному рівні.

Висновок. **Два многокутники, що в них, по-перше, відповідні кути рівні, а по-друге, всі схожі боки пропорціональні, звемо подібними многокутниками.**

Слово „**подібний**“ заміняють значком $\backsim$.

45. Ознаки подібности трикутників.

§ 156. Властивість простої, рівнобіжної до основи.

Задача. Виміряйте віддалення між двома точками A й C, коли між ними лежить яка-небудь перешкода (рис. 336).

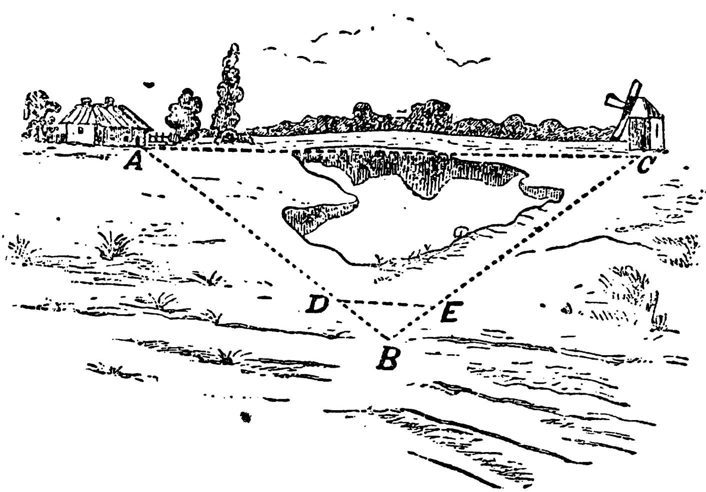


Рис. 336.

Коли місцевість навколо точки B досить рівна, то можна зробити так. Візьмімо на боці AB довільну точку D й проведімо просту DE рівнобіжно до основної лінії AC. Утвориться новий невеличкий трикутник DBE. Коли тільки нам удасться довести, що наша рівнобіжна DE відрізала $\triangle DBE$, подібний до $\triangle ABC$, тоді ми, довідавшися, в скільки разів бік AB більший за DB, одночасно довідаємось, у скільки разів проста AC довша за DE. (Чому?). А тому, вимірявши безпосередньо просту DE, нам не важко буде обчислити довжину AC.

Дослід. Нарисуйте який-небудь трикутник, наприклад, $\triangle ABC$ (рис. 337) і проведіть у ньому просту (DE) рівнобіжну з основою (AC). Проста ця відітне новий трикутник BDE. Вимірявши всі відповідні кути та всі схожі боки, ви побачите, що $\triangle ABC$ подібний буде до $\triangle DBE$.

Доведення. Рівність кутів. У трикутниках ABC та BDE всі кути повинні бути один одному рівні. Справді:

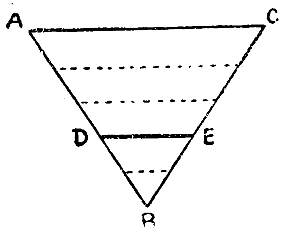


Рис. 337.

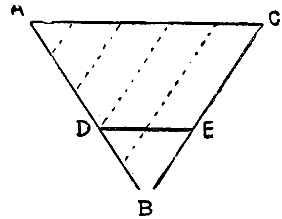


Рис. 338.

$\angle A = D$, яко кути відповідні ($DE \parallel AC$, AB січна).

$\angle E = C$, яко кути відповідні (при рівнобіжних DE та AC й січній BC).

$\angle B$ в них спільний.

Пропорціональність боків. 1. Спочатку знайдемо відношення першої пари схожих боків—AB та BD. Змірявши тією самою спільною мірою (міліметром) боки AB та BD (рис. 337) й поділивши ті числа, що матимемо після міряння, знайдемо, що

$$\frac{AB}{BD} = \frac{5}{2}$$

2. Розгляньмо тепер друге відношення $\frac{BC}{BE}$.

Відношення це можна знайти таким самим способом, як і перше, але ми знайдемо його по-инакшому.

Відношення першої пари боків $\frac{AB}{BD}$ було $\frac{5}{2}$; отже, коли ми поділимо BD на 2 рівні частини, то ті відтинки, що від того здобудемо, ляжуть на AB 5 разів.

Тепер проведімо через точки поділу на AB ряд простих рівнобіжних з DE (рис. 337). Цей ряд поділить боки BC та BE на ряд нових відтинків. Нові ці відтинки повинні бути один одному рівні (через що?), при чому на BC таких відтинків повинно лягти 5, а на BE—2. Отже, відношення $\frac{BC}{BE} = \frac{5}{2}$.

3. Треба ще знайти третє відношення $\frac{AC}{DE}$.

Через точки поділу на боці AB проведімо ряд простих, рівнобіжних з боком BC (рис. 338). Ряд цей поділить бік AC на п'ять рівних відтинків (для кута CAB візьміть теорему § 61); бік DE рядом цим поділиться на 2 рівні відтинки (візьміть ту саму теорему для кута BDE). Відтинки, що відклали ви на боках AC та DE, повинні бути один одному рівні (протилежні боки рівнобіжників), отже, вони можуть стати за спільну міру для боків AC й DE. Таким чином, і третє відношення мусить дати нам відношення

$$\frac{AC}{DE} = \frac{5}{2}.$$

Отже, всі троє відношень завжди повинні бути одне одному рівні:

$$\frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD} = \frac{AC}{DE}$$

Таким чином, у двох цих трикутниках — $\triangle ABC$ та $\triangle DBE$ — всі відповідні кути один одному рівні, а боки пропорціональні, тому трикутники наші будуть подібні:

$$\triangle ABC \backsim \triangle DBE,$$

Висновок. Проста, рівнобіжна з одним із боків трикутника, відтинає від нього новий трикутник, подібний до початкового.

Приклад. Щоб знайти віддалення млина від будинка (рис. 336), виміряли DE, AB та BD. З'ясувалося, що $DE = 50$ м, $AB = 189$ м, $BD = 35$ м.

Знайдімо, в скільки разів AB більше за BD.

$$\frac{AB}{BD} = \frac{189}{35} = 5{,}4$$

А тому й AC більше за DE також у 5,4 рази

$$\frac{AC}{DE} = 5{,}4$$

цеб-то $AC = 50 \text{ м} \times 5{,}4 = 270$ м.

§ 157. Перша ознака подібности трикутників.

Задача. Виміряйте, яка завширшки буде річка AB (рис. 339).

В цій задачі треба зміряти віддалення між двома точками A та B, коли до однієї з них (B) не можна підійти.

Задачу цю ми вже розвязували в § 43 так, що будували два однакові трикутники.

Але той спосіб був незручний. (Чому?).

Для розвязування цієї задачі пошукаймо зручнішого способу.

Дослід. Спочатку зміряймо в трикутникові ABC (рис. 340)

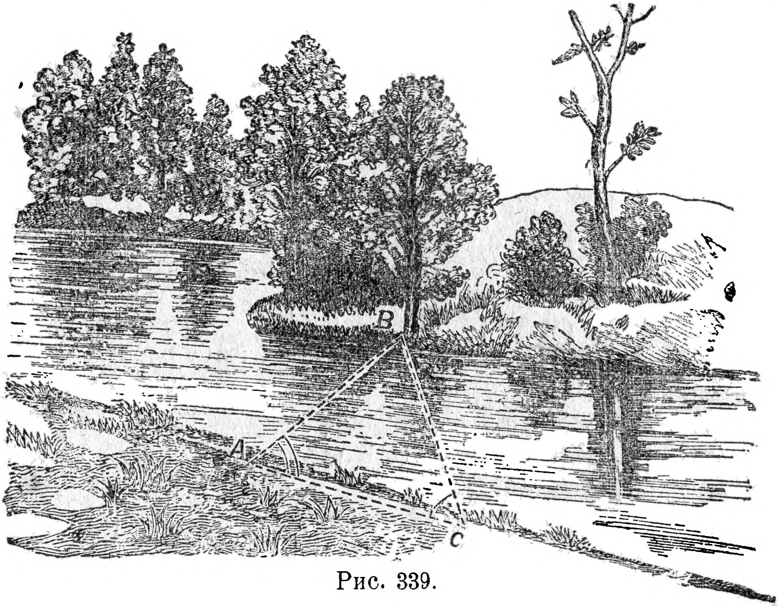


Рис. 339.

два його кути $\angle A$ та $\angle C$, а потім на папері нарисуймо просту A_1C_1 (довільної величини) й біля кінців її збудуймо два кути, що відповідно рівні кутам $\angle A$ та $\angle C$. Одержимо на папері невеличкий трикутник $A_1C_1B_1$ (рис. 340). Чи не будуть ці трикутники подібні? Чому? Пересвідчіться в цьому, зміривши безпосередньо боки та обчисливши їх відношення.

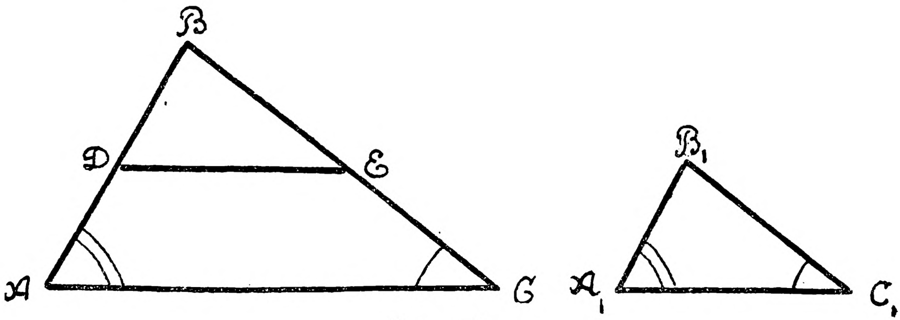


Рис 340

Коли вам удасться довести, що $\triangle A_1B_1C_1$, який ви нарисували на папері, подібний до $\triangle ABC$, збудованого на землі, тоді вимірявши на папері бік A_1B_1, ви дуже легко обчислите й ширину річки AB.

Доведення. Виріжмо менший з цих трикутників ($\triangle A_1B_1C_1$) і, накладімо його на більший ($\triangle ABC$) так, щоб рівні кути $\angle B_1$ та $\angle B$ (а чому ці кути рівні?) зіллялися один з одним. Годі бік B_1A_1 повинен піти по бокові BA, а бік B_1C_1 по BC. Тому що бік B_1A_1 коротший ніж AB, то кінець його A_1 ляже де-небудь на бокові BA в точці D. Через те, що кут A_1 рівний кутові A, бік A_1C_1 повинен піти рівнобіжно з AC (відповідні кути $\angle A_1$ та $\angle A$ рівні будуть тільки тоді, коли лінії DE й AC рівнобіжні). Коли-ж DE рівнобіжна з AC, то $\triangle A_1B_1C_1$ мусить бути подібний до $\triangle ABC$ (§ 156).

Висновок. Коли два кути одного трикутника відповідно рівні двом кутам другого трикутника, то ці трикутники будуть подібні.

§ 158. Друга ознака подібности трикутників.

Друге розвязування задачі § 156. Пригадайте, яким способом ми виміряли віддалення від будинка до млина (рис. 336).

Коли місцевість не дозволяє збудувати просту DE, то можна, зміpявши боки AB, BC та кут B, збудувати в себе в зшиткові $\triangle A_1B_1C_1$ так, щоб $\angle B_1 = \angle B$, а боки B_1A_1 та B_1C_1 нарисовано було в однаковому маштабі, цеб-то щоб вони являли собою ту саму дробову частину боків BA та BC, инакше кажучи, щоб боки B_1A_1 та B_1C_1 були пропорціональні до боків BA та BC.

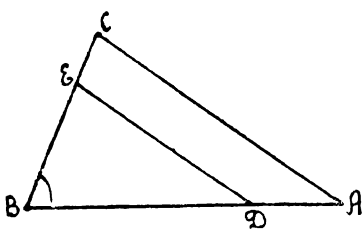


Рис. 341.

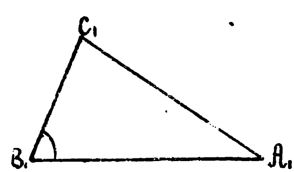


Рис. 341а.

Коли вам удасться довести, що $\triangle A_1B_1C_1$, який ви нарисували на папері, подібний до $\triangle ABC$, який ви збудували на землі, тоді зміpявши бік A_1C_1 і знаючи маштаб його, ви легко можете знайти, який завдовжки буде бік AC.

Дослід. Дано трикутник ABC (рис. 341). Зміряйте його кут B та два боки BA й BC, що до цього кута прилягають. Нарисуйте тепер другий трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб у нього кут B_1 рівний був кутові B, а боки B_1A_1 та B_1C_1 пропорціональні були до боків BA та BC, тоб-то, щоб відношення:

$$\frac{BA}{B_1A_1} \text{ та } \frac{BC}{B_1C_1}$$

означилися одним і тим самим числом.

Пересвідчіться, що в наших трикутників усі три схожі боки мають однакові відношення і всі три відповідні кути рівні, цеб-то пересвідчіться, що трикутники ці будуть подібні.

Доведення. Виріжмо трикутник $A_1B_1C_1$ і накладімо його на трикутник ABC (рис. 341). Кут B_1 зливається з кутом B. (Через що?)

Точка A_1 ляже в точку D, а точка C_1 в точку E, при чому точки D й E поділять боки AB та BC в тому самому відношенні. Отже, проста DE буде рівнобіжна до AC (§ 156), а тому трикутник $A_1B_1C_1$ мусить бути подібний до трикутника ABC.

Висновок [1]). Коли в двох трикутників (ABC та $A_1B_1C_1$) два боки пропорціональні і кути, що між цими боками, рівні ($\angle B = \angle B_1$), то трикутники такі будуть подібні.

§ 159. **Пропорціональний циркуль.** Підчас рисування на папері подібних трикутників потрібно ділити просту лінію на пропорціональні частини. Для цього можна зробити такий прилад. Зробіть з міцного картону дві лінійки і скріпіть їх шпилькою так, щоб вони поверталися навколо точки O (рис. 342). Поділіть обидві лінійки на рівні частини й позначте їх числами. Таке приладдя звуть пропорціональним циркулем. Як за допомогою цього циркуля знайти $^3/_8$ частини від AB?

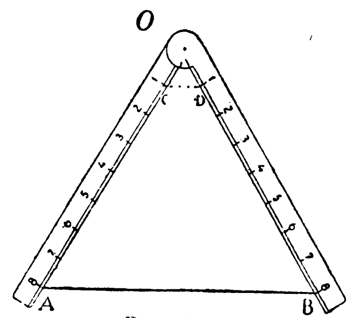


Рис. 342.

46. Як рисувати план.

§ 160. **Що таке план.** Були часи, коли люди, щоб збудувати який-небудь будинок, рисували план його в натуральному розмірі на тому місці землі, де мали будувати будинок.

---

[1]) Третю ознаку подібности трикутників — подібність через пропорціональні боки — практично дуже рідко використовують, а тому її випущено.

Але згодом люди замінили цей незручний спосіб на простіший, а саме, вони почали рисувати на папері фігуру, подібну до справжньої фігури участку землі або будинка, при чому кутів не міняли, а всі боки цієї фігури зменшували в певне число разів, беручи відповідний маштаб (§ 153).

Зміривши віддалення між будь-якими точками на плані та знаючи маштаб його, легко вже обчислити справжнє віддалення між цими точками (згадайте § 153).

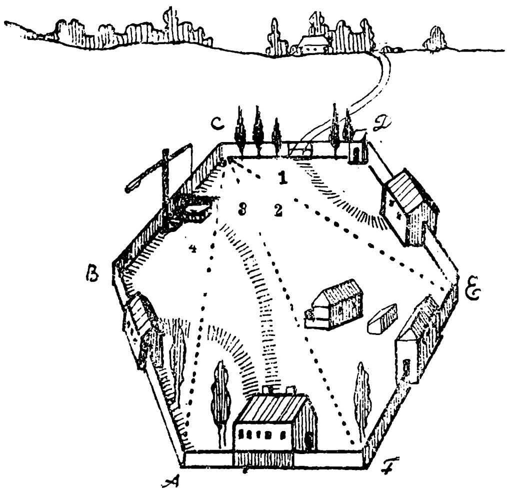


Рис. 343.

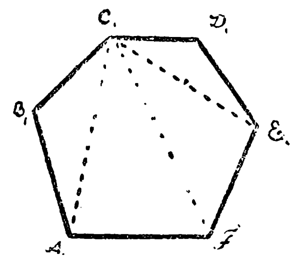


Рис. 344.

§ 161. Як нарисувати план за допомогою астролябії.

Спосіб 1-й. Припустімо, що наш участок землі має вигляд мрогокутника $ABCDEF$ (рис. 343). За допомогою астролябії зміряйте всі його кути. Землемірним ланцюгом зміряйте довжину всіх боків. На підставі цих даних за допомогою транспортира та вимірної лінійки нарисуйте многокутник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, подібний до многокутника $ABCDEF$, що його ми виміряли, зменшивши кожен бік його в те саме число разів, відповідно до взятого маштабу (рис. 344).

Одержаний многокутник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ й буде являти собою план нашої садиби.

Спосіб 2-й. Як місцевість не дозволяє зміряти безпосередньо всі боки садиби, або кути її, тоді роблять так. Проводять із однієї вершини (C) всі діягоналі (рис. 343). Тоді многокутник розіб'ється на трикутники. Вимірявши в цих трикутниках кути, що прилягають до вершини C ($\angle 1$; $\angle 2$; $\angle 3$; $\angle 4$), й боки, що утворюють ці кути (CD, CE, CF, CA, CB), треба, зменшивши довжину цих боків у відповідне число разів, нарисувати на папері всі трикутники, подібні до попередніх.

Одержимо многокутник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, подібний до многокутника $ABCDEF$, цеб-то одержимо план садиби $ABCDEF$.

Спосіб 3-й. Якщо місцевість не дозволяє зміряти безпосередньо всі боки садиби, або кути її, то можна зробити ще так. Треба вибрати в середині многокутника таку точку O (рис. 345), з якої видно всі вершини й з якої можна зміряти безпосередньо прості OA, OB, OC й т. д. Міряють усі кути, що утворилися при точці O. Потім міряють усі віддалення від точки O до вершин, цеб-то прості OA, OB, OC й т. д. Обміркуйте сами, як на підставі цих вимірів можна нарисувати план цієї садиби $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

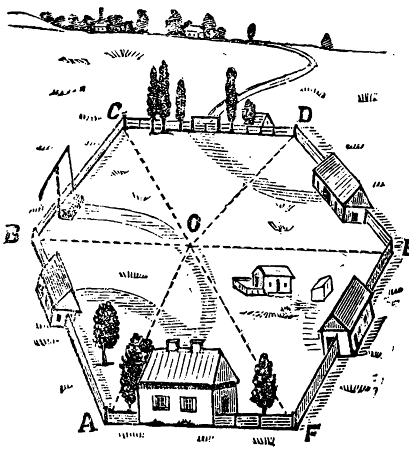


Рис. 345.

§ 162. Як нарисувати план за допомогою екера.

Коли у вас немає астролябії, а є тільки екер, то й він дає змогу нарисувати план. Можна це зробити таким способом.

1-й спосіб. Поза вашим многокутником (рис. 346) проведіть основну просту LM (її звуть б а з о ю). За допомогою екера спустіть на цю базу з усіх вершин многокутника перпендикуляри. Виміряйте всі ці перпендикуляри та відтинки, що на базі ab, be, ec, cd. Обміркуйте, як на підставі цих вимірів найзручніше нарисувати план цієї многокутної садиби.

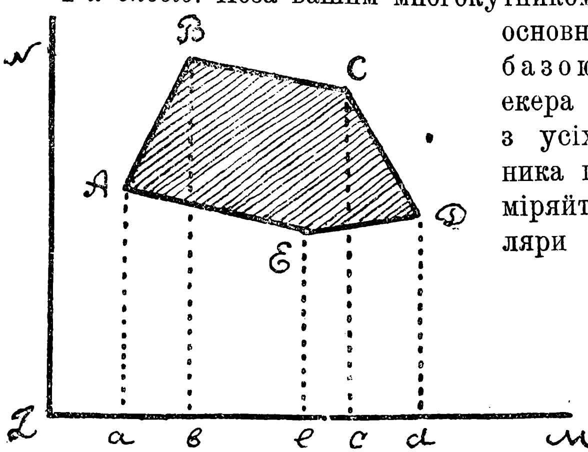


Рис. 346.

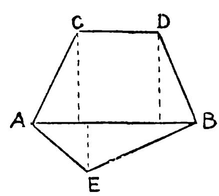


Рис. 347.

2-ий спосіб. Розгляньте уважно рис. 347. Він з'ясує вам, яким ще способом можна нарисувати план многокутника, користуючись екером.

§ 163. Як нарисувати план за допомогою мензули. Мензула дає змогу одночасно з вимірами на полі й рисувати самий план. Мензула (рис. 348) складається з тринога, до якого поземо приґвинчується дошку з прикріпленим до неї аркушем паперу.

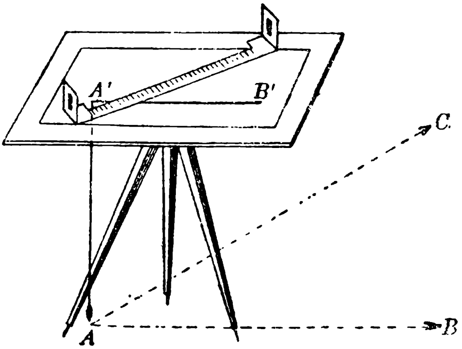


Рис. 348.

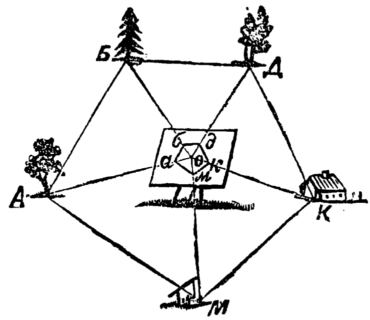


Рис. 349.

На цей аркуш паперу кладуть лінійку, що вільно ходить і на кінцях має вертикальні прорізи (лінійку робиться так само, як і в австролябії).

Припустімо, що треба нарисувати план місцевости, що має вигляд многокутника *АБДКМ* (рис. 349); тоді ставлять мензулу в яку-небудь точку *О*, що на середині участку, і за допомогою лінійки позначають напрямки *ОА*, *ОБ* й т. д. Змірявши віддалення від точки *О* до вершин *А*, *Б*, *Д* й т. д., відкладають ці віддалення на папері, зменшивши їх у те саме число разів, відповідно до того маштабу, що ми взяли. З'єднавши кінці відкладених ліній, ви йматимете многокутник *абдкм*, подібний до многокутника *АБДКМ*, що його міряєте.

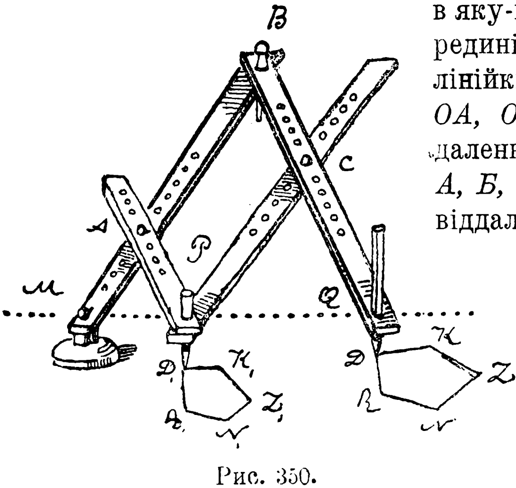


Рис. 350.

§ 164. Пантограф.

Задача. Нарисуйте многокутник, подібний до *DKLNR*, в маштабі $^1/_3$. Часто виникає потреба нарисувати яку-небудь фігуру, план, то-що в зменшеному вигляді. Для цього можна вживати пантографа. Це приладдя (рис. 350) складається з чотирьох лінійок, скріплених суставами (A, B, C, P) так, що ці лінійки завжди утворюють рівнобіжника, а точки M, P, Q завжди лежать на одній простій.

Коли треба боки фігури зменшити в 3 рази, то скріпляємо сустави пантографа так, щоб відношення $\frac{BC}{BQ} = 1/3$. Тоді й відношення $\frac{MP}{MQ} = 1/3$. (Чому?). Зробимо точку M нерухомою, а гостряком точки Q будемо обводити наш многокутник $DKLNR$, тоді олівець, що на точці P, нарисує потрібний нам многокутник $D_1 K_1 L_1 N_1 R_1$.

Зробіть і ви собі такий пантограф.

47. Площі подібних фігур.

§ 165. Залежність між площами та боками подібних трикутників.

Дослід. Нарисуйте який-небудь трикутник ABC (рис. 351). Подовжте боки його так, щоб утворився подібний трикутник, що матиме боки вдвоє довші (рис. 352). Розріжте цей новий трикутник на початкові трикутники. Скільки маєте їх? У скільки разів площа цього нового трикутника більша буде за площу початкового? Чому рівне буде відношення боків цих трикутників?

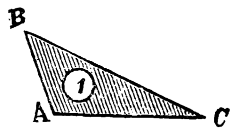


Рис. 351.

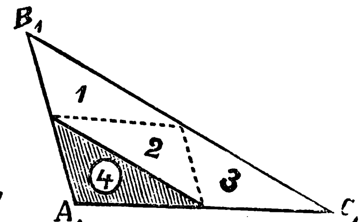


Рис. 352.

$$\frac{A_1 B_1}{A B} = 2.$$

Чому рівне буде відношення площ їхніх?

$$\frac{\text{пл. } \triangle A_1 B_1 C_1}{\text{пл. } \triangle ABC} = 4.$$

Коли ви помножите відношення боків саме на себе, то чи матимете число, що рівне буде відношенню площ?

Тепер подовжте бік початкового трикутника ABC так, щоб утворився трикутник, що має боки втроє довші. Поділіть його на початкові трикутники. Полічіть, скільки їх.

Чому рівне буде відношення схожих боків?

Чому рівне буде відношення площ?

Бік трикутника буде більший за схожий бік першого трикутника в три рази. А в скільки разів одна площа більша буде за другу?

Висновок. Отже, між площами наших подібних трикутників та їхніми схожими боками є певна залежність. А саме, коли ви хочете знайти відношення цих площ, то вам досить знайти відношення їхніх боків і знайдене число помножити саме на себе (піднести в квадрат). Добуток дорівнюватиме шуканому відношенню площ.

Це правило коротше висловлюють так: відношення площ подібних трикутників рівне квадратові відношення схожих боків.

§ 166. Залежність між площами та боками подібних многокутників.

Задача. План садиби нарисовано в маштабі $^1/_{20}$ (рис. 353). Яку частину дійсної площі становить площа, що на плані?

Поділіть садибу діягоналями на трикутники (рис. 354).

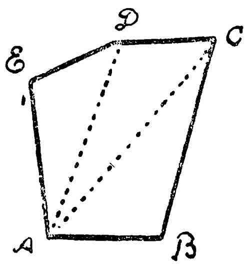


Рис. 353. План садиби.

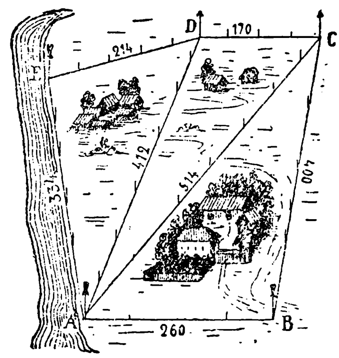


Рис. 354.

На плані площа кожного трикутника становитиме $\frac{1}{20.20}=\frac{1}{400}$ частину відповідного трикутника самої садиби, а тому площа всієї садиби на плані становитиме $(^1/_{20})^2$ частину дійсної площі садиби.

Отже, щоб знайти відношення площ подібних многокутників, досить знайти відношення будь-якої пари їхніх схожих боків $\left(\frac{1}{20}\right)$ і здобуте число піднести в квадрат $\left(\frac{1}{400}\right)$. Добуток $\left(\frac{1}{400}\right)$ і дасть нам відношення площ.

Це правило коротше висловлюють так:

Відношення площ подібних многокутників рівне квадратові відношення їхніх схожих боків.

Тому, довідавшися з маштабу, у скільки разів зменшено всі лінії на плані, треба це число помножити саме на себе. Знайдене число (добуток) і покаже, у скільки разів дійсна площа буде більша за нарисовану.

ВПРАВИ.

1. Довідайтеся про розміри цього маштабу (рис. 355).

2. Зробіть рисунки для таких маштабів: „25 метрів в 1 см“, „100 км в 1 см“, „0,1 мм в 1 см“.

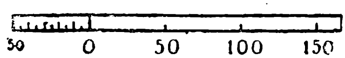


Рис. 355.

3. Знайдіть, який заввишки цей чоловік у дійсності (рис. 356).

4. На рисункові 357 ліворуч намальовано жука в натуральному розмірі, а праворуч зменшеного. Скажіть, в якому маштабі намальовано зменшеного жука.

5. Візьміть географічну мапу України й за допомогою зазначеного на ній маштабу вирахуйте віддалення між Київом, Полтавою, Харковом та Одесою.

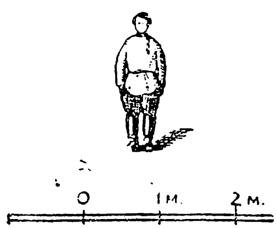


Рис. 356.

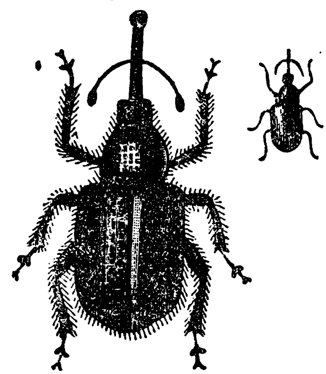


Рис. 357.

6. Собака заввишки буде 0,5 метра. Вовк—80 см. Кінь—1,2 м. Людина—170 см. Журавель—1,8 м. Верблюд—230 см. Слон—3,5 метра. Нарисуйте висоту цих тварин у відповідному маштабі.

7. Зазначіть горизонтальними відтинками, взявши відповідний маштаб, таку скорість руху:

Піша людина	4	кілометри	за годину
Самокатчик	20	„	„
Кінь	10	„	„
Поїзд	50	„	„
Муха	16	„	„
Грак	32	„	„
Ластівка	150	„	„
Орел	100	„	„
Аероплан	200	„	„

8. Грубина волосу в людини—0,1 міліметра. Деякі бактерії мають завдовжки 0,004 міліметра. Нарисуйте ці розміри у відповідному маштабі.

9. Знайдіть крок цього ґвинта та кількість нарізів на протязі одного сантиметра, коли розріз ґвинта нарисовано в маштабі $^2/_1$ (рис. 358).

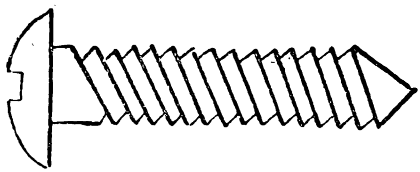


Рис. 358

10. Найвищі хмари—так звані баранці — ходять на висоті 9000 метрів; висота дощових хмар—1500 метрів, а гора Казбек 5000 метрів заввишки. Нарисуйте висоту цих хмар у відповідному маштабі й порівняйте з висотою гори Казбек.

11. На рис. 359 нарисовано план садиби, а на рис. 360 план будинку № 3 цієї садиби. Довідайтеся:

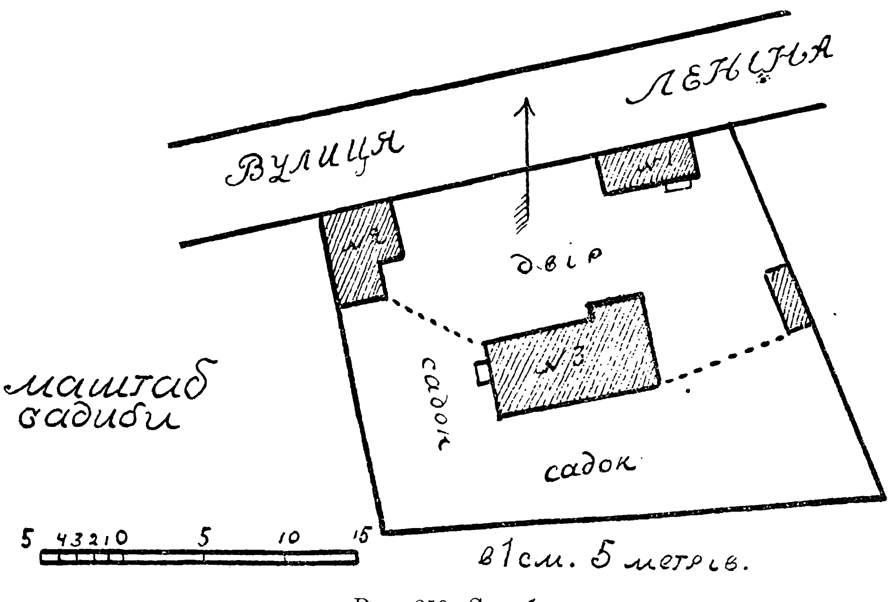


Рис. 359. Садиба.

1) Яка загальна площа всієї садиби, та скільки припадає площі на садок, будівлі, подвір'я. Який відсоток всієї садиби зайнято під будівлі?

2) На якому віддаленні від вулиці збудовано цей будинок, і яка завширшки буде вулиця?

3) Яку площу має цей будинок?

4) Скільки кімнат у цьому будинкові? Які з них „перехідні"? Скільки дверей, скільки груб у цьому будинкові?

5) Виміряйте площу підлоги в кожній кімнаті.

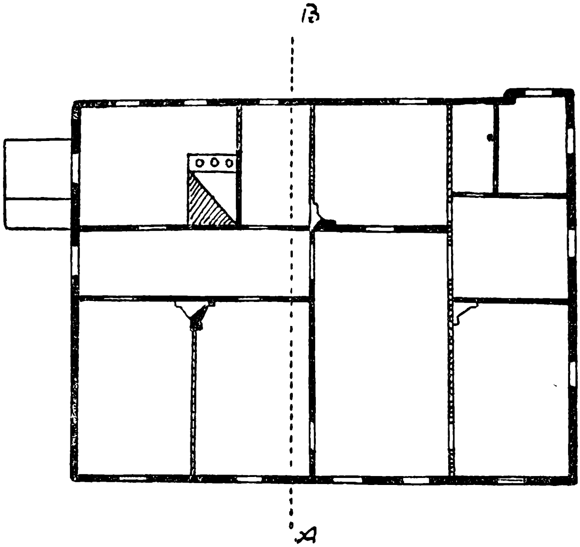


Рис. 360. План будинку № 3.

План садиби та будинку нарисовано в такому маштабі:

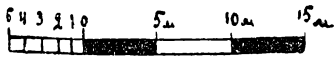
Маштаб садиби  в 1 см—5 метрів.

Рис. 361

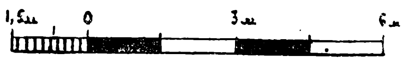
Маштаб будинку № 3  в 1 см—1,5 метра.

Рис. 362

12. Нарисуйте в маштабі $^1/_{200}$ план ділянки, що має форму рівнораменного прямокутного трикутника: катет у нього = 15 м, а гострий кут = 30°.

13. Кімната завдовжки 6 м, завширшки—4 м. Кімната має на одній з довгих стін двоє вікон по 12 дм завширшки на однаковому віддаленні від кутів кімнати й один від одного. В одній з коротших стін є посередині двері 16 дм завширшки. Нарисуйте план цієї кімнати в маштабі 1 : 50.

14. Обміркуйте, яким способом найзручніше „зняти" план цієї ділянки *ABCDE* (рис. 363).

15. Зменшити, або збільшити план (маштаб його) дуже зручно, користуючись картатим папером. Візьміть якунебудь мапу України та спробуйте нарисувати її в зменшеному вигляді

16. Вживають ще й такого пропорціонального циркуля (рис. 364). Ґвинт можна закріпити на бажаному віддаленні від кінців. Обидві ніжки поділено на рівні частини й по-

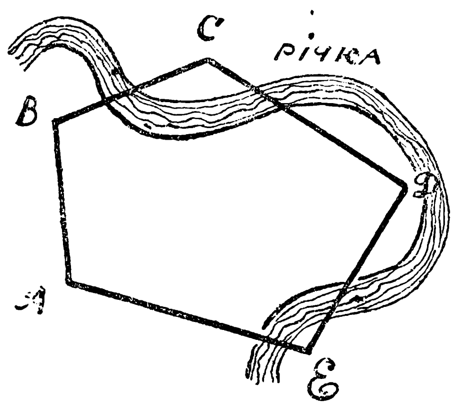


Рис. 363.

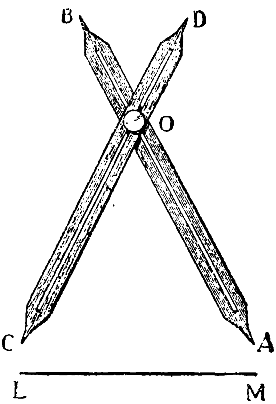


Рис. 364.

нумеровано. Спробуйте зробити такий циркуль з двох лінійок.

Знайдіть за допомогою цього циркуля (рис 364) $^3/_{10}$ частини відрізка LM

17. Розгляньте уважно цей рисунок (рис. 365) і довідайтеся, як за допомогою показаного тут приладдя міряти висоту.

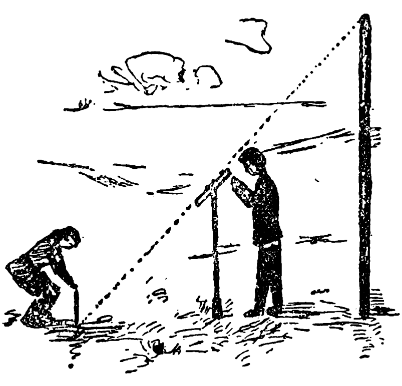


Рис. 365.

18. Грецький учений Талес стежив за довжиною своєї тіни і в той момент, коли вона завдовжки була така, як людина, Талес виміряв довжину тіни, що дає будинок, і вважав, що довжина тіни від будинка буде така, як і висота цього будинка. Чи правдива думка Талесова? Чому?

Спробуйте й ви зміряти висоту вашого будинка цим способом.

19. Встроміть сторч рейку, поділену на сантиметри, і трохи відійдіть від неї; запримітьте на рейці ті поділки (A та B), де перетинають рейку промені OL та OM (рис. 366). Зміряйте ще віддалення від вас до дерева (NM) і від вас до рейки. Як на підставі цього знайти висоту дерева LM?

20. Коли у вас немає рейки з сантиметрами, то замість неї візьміть тичку заввишки з ваш ріст. Ляжте коло дерева

на такому віддаленні, щоб кінець тички якраз покрив вершок дерева. Як на підставі цього знайти висоту дерева?

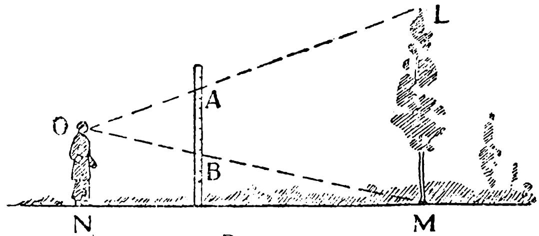


Рис. 366.

21. Ясного дня станьте в затінку від якого-небудь дерева або від будинка так, щоб тінь від вашої голови якраз торкалася кінця тіни від дерева (рис. 367). Як, вимірявши BO, DO та ріст CD, вирахувати висоту дерева AB?

22. Сядьте біля столу й за 20—30 сантиметрів від себе поставте лінійку, поділену на сантиметри. Між очима й цією лінійкою поставте сторч олівець. Затуліть рукою ліве око й подивіться правим оком, яку поділку на лінійці олівець покриває. Тепер затуліть праве око і лівим оком подивіться, яку поділку на лінійці покриває олівець. Як, вимірявши віддалення між цими поділками, віддалення олівця від лінійки та від очей, вирахувати віддалення вашого лівого ока від правого?

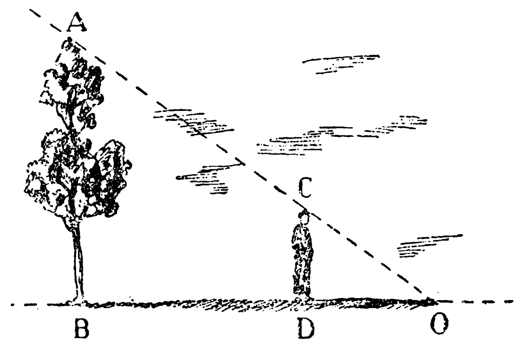


Рис. 367.

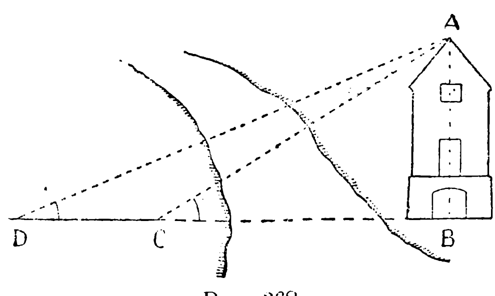


Рис. 368.

23. Для того, щоб знайти висоту будинка AB (рис. 368), що стоїть на тому березі річки, зміряли базу DC й два кути $\angle ACB$ й $\angle ADB$, що під ними видно цей будинок з кінців бази. За допомогою кутоміра знайшли, що $\angle ACB = 15°$, а $\angle ADB = 10°$. База $DC = 50$ метрів. Який заввишки буде будинок AB?

24. На віддаленні $AC = 15$ м (рис. 369) поклав я дзеркало C. Коли я одійшов від дзеркала на $CD = 3$ метри, то побачив у дзеркалі вершок дерева. Чи не можна на підставі цього довідатися про висоту дерева AB?

Мій ріст $DE = 140$ см.

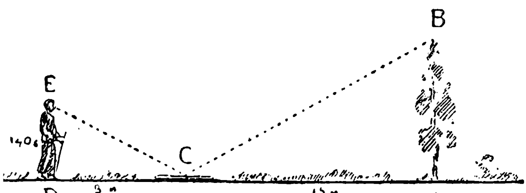


Рис. 369

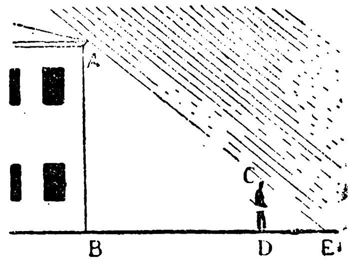


Рис. 370.

25. Далеко від берега пливе пароплав. Кутоміром виміряли той кут, що під ним видно трубу на цьому пароплаві; цей кут $= 5°$. На якому віддаленні від берега пливе пароплав, коли відомо, що труба його $= 20$ метрів?

26. Йде дощ. Людина стала під стіною (рис. 370) так, що дощ ледве тільки падає на голову. Чи не можна знайти висоту цієї стіни, коли відомо, що $BD = 18$ м, $DE = 6$ м, а ріст людини $CD = 150$ см?

27. В середині прямокутного двору 12 м $\times$ 20 м стоїть будка на віддаленні 4 м від південного боку та 6 м від західнього. Довший бік йде по меридіяну SN. Нарисуйте план цього двору з будкою.

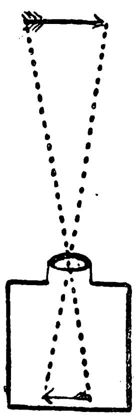


Рис. 371.

28. Олівець 25 см завдовжки, що стоїть сторч на 0,5 м від каганця, кидає на стінку тінь $2^1/_2$ м завдовжки. На якому віддаленні стоїть каганець від стінки?

29. Аероплан 12 м завширшки було зфотографовано знизу, коли він летів. На фотографічній платівці аероплан має 8 мм завширшки. „Глибина“ фотографічного апарату $= 12$ см. На якій висоті летів аероплан (рис. 371)?

30. Кімната на плані завдовжки 6 см, завширшки 4 см. Якого розміру ця кімната в дійсності, та в якому маштабі нарисовано план її, коли як оклеювано кімнату шпалерами, витрачено 36 м бордюри?

31. Поле на плані має форму прямокутного клина (трикутника). Найбільший бік його $=$ $= 2,5$ см. Найменший $= 1,5$ см. Скільки гектарів має площа цього клина, коли маштаб плану: „1 км в 5 см“?

32. На плані поле має завдовжки 12 см, завширшки 9 см. Який справжній розмір поля та в якому маштабі

нарисовано план, коли довжина поля на 480 м більша за ширину?

33. Боки чотирикутника 1 м, $2^1/_2$ м, $4^1/_2$ м і [illegible]$^1/_8$ м. Обчисліть боки чотирикутника, що подібний до першого, коли периметр цього другого = 105m + 0,5

34. Основа трикутника = 10 см. Обчисліть довжину простої, рівнобіжної до основи, що відтинає від одного з боків відтинок, який відноситься до всього цього боку як 1 : 4.

35. Основи трапеза 3 см та 8 см. Боки його 3,5 см та 5 см. Знайдіть довжину боків трикутника, що його утворює продовження боків і верхня основа трапеза.

36. З однієї садиби знято два плани в маштабі $^1/_{25}$ та $^1/_{200}$. У скільки разів площа цих планів більша одна за одну?

37. Площі двох правильних шостикутників відносяться як 4 : 9. Знайдіть периметр більшого з них, коли бік меншого = 3,6 см.

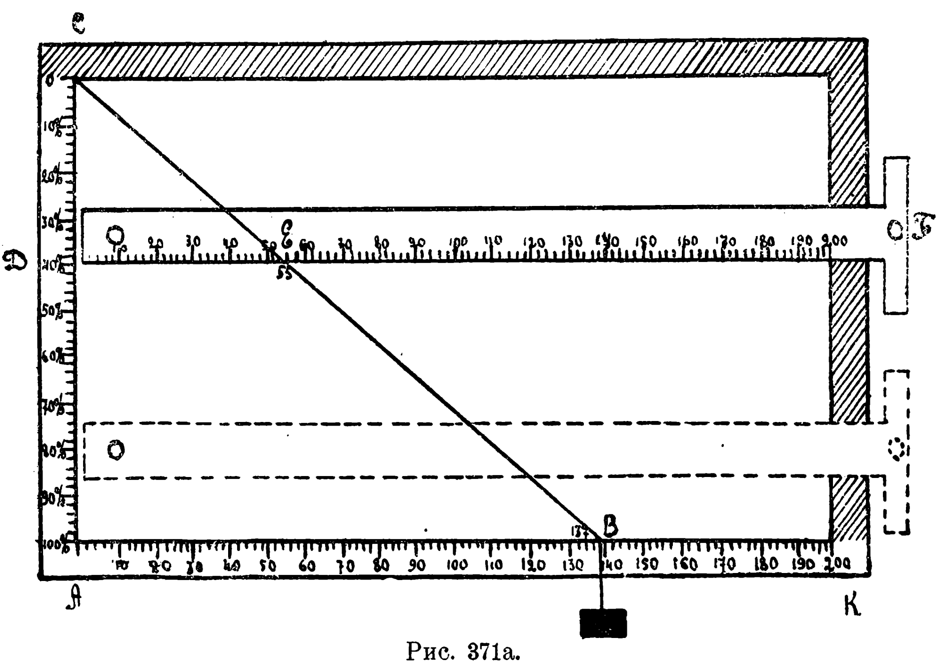


Рис. 371а.

38. Зробіть собі таке приладдя, щоб механічно обчисляти відсотки. Візьміть велику прямокутну дошку. (Для цього можна використати класну дошку, або поверхню стола). Один бік (AC) цього прямокутника поділіть рисками на 100 рівних частин (це будуть відсотки), а на другому боці (AK) відкладіть як-найбільше однакових поділок. Такі самі поділки нанесіть на рейшину DF, що її можна рухати рівнобіжно до AK. Хай нам треба знайти, скільки відсотків становить число 55 від 137. Знайдемо на AK число

137 й натягнемо тоненьку шворку від точки C до цієї поділки (до точки B). Далі пересунемо рейшину DF так, щоб вона перетяла цю шворку на 55 поділці (точка E). Тоді кінець рейшини D покаже на боці AC відповідну кількість відсотків (40%). На підставі яких властивостей збудовано це приладдя?

Розділ 13.

ФУНКЦІОНАЛЬНА ЗАЛЕЖНІСТЬ[1] МІЖ БОКАМИ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА.

48. Властивість перпендикуляра, спущеного з вершини прямого кута на гіпотенузу.

§ 167. Функціональна залежність між перпендикуляром на гіпотенузу та відтинками цієї гіпотенузи.

Дослід. Нарисуйте прямокутний трикутник ABC (рис. 372). З вершини прямого кута A спустіть на гіпотенузу BC перпендикуляр AD. Збудуйте на цьому перпендикулярі квадрат, а з двох відтинків гіпотенузи (BD та DC) збудуйте прямокутник (рис. 373). Порівняйте площі цього квадрата та прямокутника.

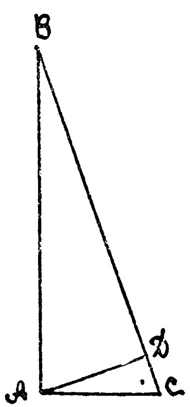


Рис. 372.

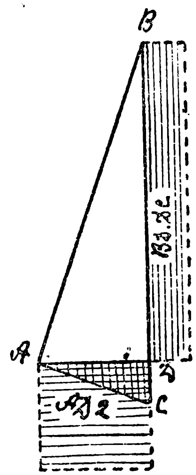


Рис. 373.

Висновок. Коли з вершини прямого кута спустити перпендикуляр на гіпотенузу, то площа квадрата, збудованого на цьому перпендикулярі, буде дорівнювати площі прямокутника, збудованого на відтинках гіпотенузи. Цеб-то

$$AD^2 = BD \cdot DC$$

Доведення. Треба знайти функціональну залежність між відтинками:

$$AD,\ BD \text{ та } DC.$$

---

[1]) Пояснення до цього див. наприкінці книги.

Вони входять у склад трикутників ABD та ADC (рис. 374).

У $\triangle ABD$ $\angle 4 = 90° - \angle 1$ (бо $\angle 1 + \angle 4$ дають разом $90°$, яко гострі кути прямокутного трикутника).

У $\triangle ADC$ $\angle 3 = 90° - \angle 1$ ($\angle 1 + \angle 3$ складають прямий кут).

Отже:

$$\angle 4 = \angle 3.$$

Через те саме

$$\angle 1 = \angle 2.$$

А тому: $\triangle ABD \backsim \triangle ADC$ (перша ознака подібности).

У подібних трикутників боки, що лежать проти рівних кутів, пропорціональні.

Отже матимемо пропорцію:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}$$

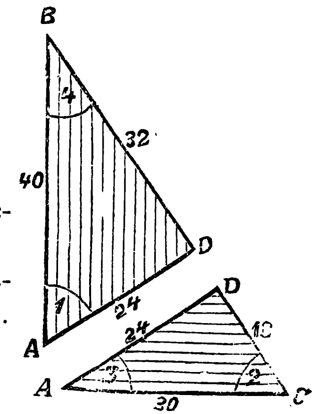


Рис. 374.

У пропорції добуток з середніх членів дорівнює добуткові з крайніх. Отже одержимо нашу залежність:

$$AD^2 = BD.DC.$$

У нашій пропорції середні члени (AD) однакові. Таку пропорцію звемо **неперервною**, а середній член її звемо „**середня пропорціональна**" між двома иншими членами.

А тому попередню залежність можна висловити ще й так: **У прямокутному трикутникові перпендикуляр, спущений з вершини прямого кута на гіпотенузу, є середня пропорціональна між відтинками гіпотенузи.**

§ 168. Функціональна залежність між катетом, гіпотенузою та її відтинком.

Дослід. Збудуйте квадрат, що має за бік один з катетів (AC). А на гіпотенузі збудуйте прямокутника, що його боками є ця гіпотенуза (BC) та той відтинок її (DC), що прилягає до попереднього катета (рис. 375).

Відтинки ці входять у склад двох прямокутних трикутників: ABC та ADC (рис. 376); у них

$$\angle BAC = \angle ADC \text{ (яко прямі)}$$

$$\text{й } \angle 4 = \angle 3 \text{ (див. § 167)}$$

а тому

$$\triangle ABC \backsim \triangle ADC.$$

Отже, гіпотенузи в цих трикутників будуть пропорціональні до катетів, що лежать проти $\angle 4$ та $\angle 3$.

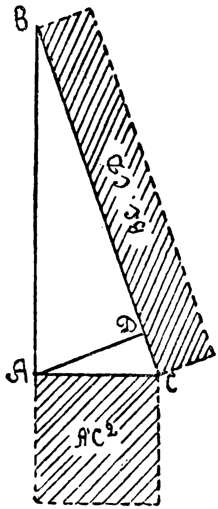


Рис. 375.

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC},$$

Звідси:

$$AC^2 = BC \, . \, DC \ (1).$$

В попередній пропорції AC є середня пропорціональна між BC та DC, а тому можна цю функціональну залежність висловити так:

Висновок. Коли з вершини прямого кута спустити на гіпотенузу перпендикуляр, то кожен з катетів буде середня пропорціональна між гіпотенузою та тим відтинком її, що прилягає до катета.

Доведіть сами, що й для другого катета AB існує така залежність

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$$

Цеб-то що:

$$AB^2 = BC \, . \, BD \ (2).$$

(Треба дослідити $\triangle ABC$ та $\triangle ABD$, рис. 376).

Порівняйте площі цього квадрата та прямокутника.

Висновок. Коли з вершини прямого кута спустити на гіпотенузу перпендикуляр, то площа квадрата, збудова-

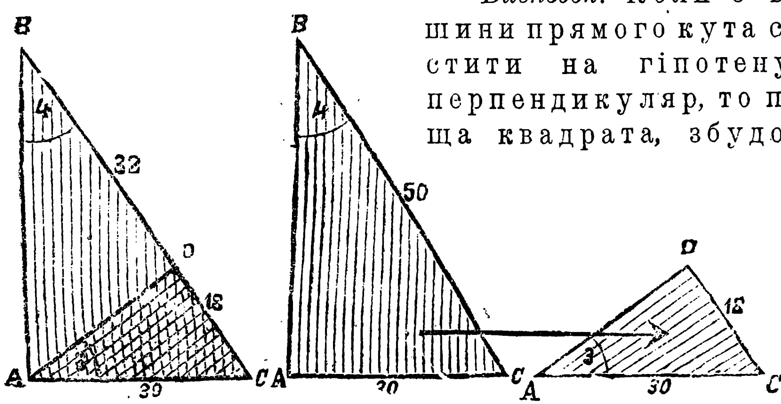


Рис. 376.

ного на одному з катетів, буде дорівнювати площі прямокутника, збудованого з гіпотенузи та її відтинка, що прилягає до цього катета.

Цеб-то:

$$AC^2 = BC \cdot CD.$$

Доведення. Треба звязати функціональною залежністю такі відтинки: 1) AC, BC, CD; 2) AB, BC, BD.

§ 169. Функціональна залежність між гіпотенузою та обома катетами (теорема Пітагора).

Дослід. Збудуйте квадрати на гіпотенузі та на обох катетах. Порівняйте між собою площі цих квадратів. Яка функція звязує їх між собою? (Пригадайте § 79 стор. 69).

Доведення. В попередньому параграфі ми знайшли, що

$$AB^2 = BC \cdot BD \quad (1)$$
$$AC^2 = BC \cdot DC \quad (2)$$

Додамо ці рівності одну до одної:

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot BD + BC \cdot DC$$

або $AB^2 + AC^2 = BC(BD + DC)$

Але $BD + DC = BC$ (див. рис. 376)

А тому $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (рис. 377).

Висновок. Сума квадратів катетів дорівнює **квадратові** гіпотенузи.

Цеб-то ми довели ту теорему Пітагора, якою користувалися раніш (§ 79).

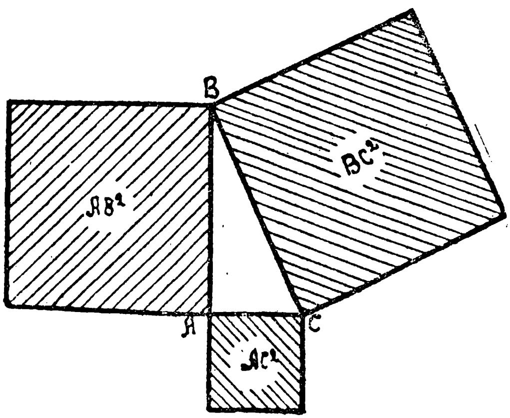


Рис. 377.

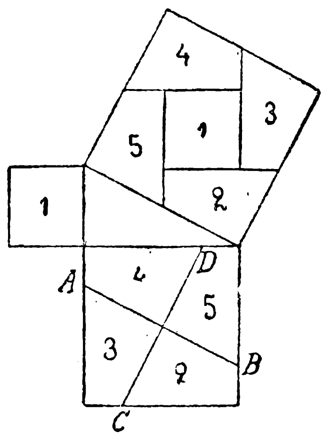


Рис. 378.

ВПРАВИ.

1. Спробуйте збудувати з квадратів катетів квадрата гіпотенузи на такий зразок (рис. 378), або на такий (рис. 379).

2. Нарисуйте такий квадрат, щоб площа його рівна була сумі двох таких квадратів (рис. 380).

3. Нарисуйте такий квадрат, щоб його площа рівна була різниці двох таких квадратів (рис. 380).

4. Нарисуйте такий квадрат, щоб його площа рівна була подвоєній площі даного квадрата (рис. 381).

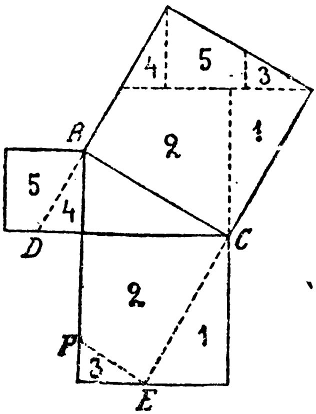


Рис. 379.

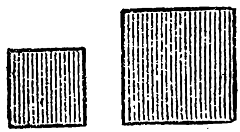


Рис. 380.

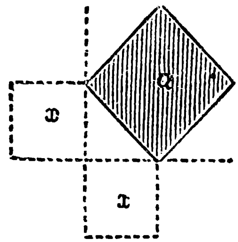


Рис. 381.

5. Перетворіть половину квадрата a на квадрат. Розвязати цю задачу вам допоможе рисунок 381.

6. Маємо два відтинки простої лінії. Нехай перший з них має в собі a сантиметрів, а другий b сантиметрів (рис. 382).

Рис. 382.

Виріжте з паперу такі фігури: 1) квадрат, в якого бік має a см, 2) квадрат з боком b см і 3) два прямокутники, в яких основа має a см, висота b см (рис. 382).

Складіть з цих чотирьох фігур (a^2; b^2; ab та ab) один квадрат. Чому рівний буде бік у цього квадрата?

Чи не можна на підставі цієї задачі написати таке рівнання:

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2.$$

7. Маємо два відтинки a й b (рис. 382). Виріжте чотири фігури: один квадрат з боком a см, другий квадрат з боком b см та два прямокутники з боками a й b см кожен. Прикладіть обидва квадрати a^2 та b^2 один до одного й відріжте від їхньої суми наші прямокутники (ab та ab) так, щоб утворився один квадрат, в якого бік має $a—b$ см. Чи можна на підставі цієї задачі написати, що

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2.$$

8. Від квадрата, в якого бік має a см, відріжте квадрат з боком $= b$ см. Решту перетворіть на прямокутник з боками $a + b$ та $a - b$ см. Чи можна через це написати:

$$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b).$$

9. Дерев'яні ворота, що мають форму прямокутника з боками 0,9 метра і 1,2 метра. треба скріпити по діягоналі поперечкою. Яку завдовжки мусимо зробити цю поперечку?

10. Крокви AB та AD (однакові завдовжки) в двосхилому дахові впираються в трям BD, 24 м завдовжки. Віддалення від вершини крокви A до середини тряму C 5 м. Яка завдовжки буде кроква AB?

11. Коло хати стоїть драбина AB 17 м завдовжки. Віддалення від нижнього кінця її B до основи стіни C рівне 8 м. Яка заввишки стіна хати AC (рис. 383)?

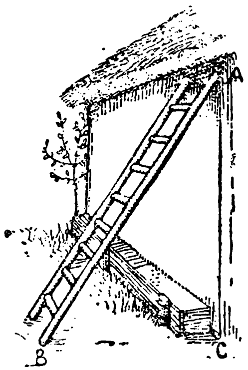


Рис 383

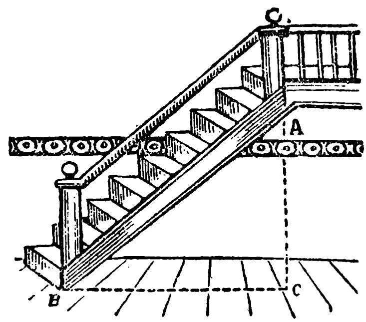


Рис. 384.

12. Сходи AB мають 16 східців, заввишки кожен 6 см. Віддалення $BC = 28$ см. Яка завдовжки буде AB (рис. 384)?

13. Зо станції A одночасно вийшло два поїзди; один іде на північ по 40 км за годину, а другий на схід по 30 км за годину. На якому віддаленні один од одного будуть ці поїзди через 4 години?

14. Через скільки годин віддалення між поїздами дорівнюватиме 100 кілометрам (див. № 13)?

15. Село C стоїть за 25 км од кожної з двох станцій A й B залізниці. Віддалення між станціями $AB = 30$ км. Знайдіть віддалення села C від залізничої колії (цеб-то довжину перпендикуляра CD).

16. $ACDE$ розріз залізничого насипу (рис. 385). Довжина $AC = DE = 5$ м. Ширина $CD = 6$ м. Заввишки колія BC має 4 м. Вирахуйте, яку ширину AE має основа насипу.

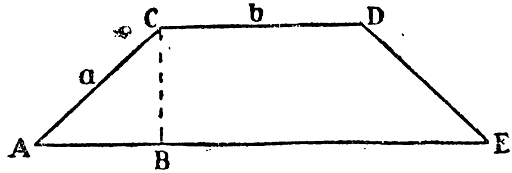


Рис. 385.

17. Телефонний дріт 15 м завдовжки протягнено до рогу будинка. Висота його біля стовпа 8 м, а біля будинка 20 м. Яка завширшки вулиця коло того будинка?

18. На березі річки сидить з вудкою хлопець (рис. 386). Довжина вудлища $AB = 260$ см. Довжина ліски BC (до

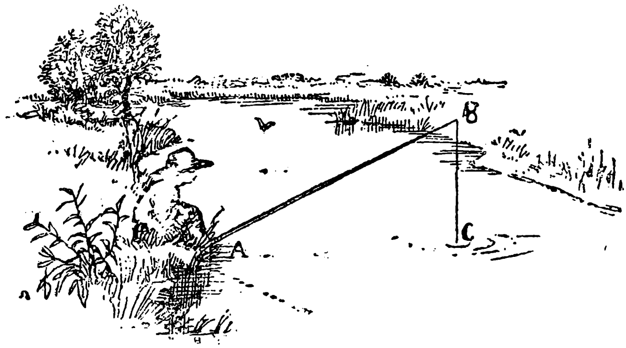


Рис 386.

поплавця) $= 100$ см. На якім віддаленні від хлопця (AC) плаває поплавець C?

19. Стоять на вулиці дві тополі A й B. Обчисліть віддалення між їхніми вершками, коли відомо, що одна тополя заввишки 15 м, друга 8 м, а віддалення між їхніми основами 24 м (рис. 387).

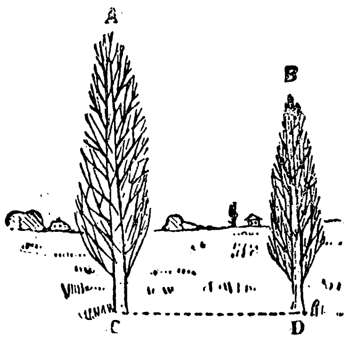


Рис. 387

20. Єгипетські „гарпедонапти" (фахівці-землеміри) зазначали напрямки країн світу так. Щоб знайти південний напрямок, вони встромляли сторч тичку й стежили за її тінню. Коли ця тінь ставала найкоротша, вона визначала напрямок з півдня на північ. Після того гарпедонапти брали довгий мотузок, ділили його на 12 рівних частин і кінці мотузка звязували так, щоб утворилося кільце. У напрямкові північ-південь вони встромляли дві тички на віддаленні 4 частин, зазначених на мотузку. Потім, за допомогою третьої тички, натягали мотузок так, щоб утворився трикутник, в якого один бік мав 3 частини, а другий 5 частин. Тоді біля тички A утворювався прямий кут, а бік його (в якого довжина $= 3$ частинам) показував напрямок на схід-захід. Через що матимемо прямий кут? (Такий прямокутний трикутник, в якого боки мають довжину 3, 4 та 5 одиниць, і в наші часи звуть єгипетським).

21. У дуже стародавній китайській аритметиці Кіу-Чанга, що записав її Цзін-Кіу-Чау за 2600 років до нашої ери, між иншим є така задача: „В центрі квадратового ставка, в якого бік $= 10$ ф., росте очерет, і підноситься він

над поверхнею води на 1 фут (рис. 388). Коли притягати очеретину до берега, то своїм вершком вона торкається середини берега ставка. Який глибокий буде ставок?“

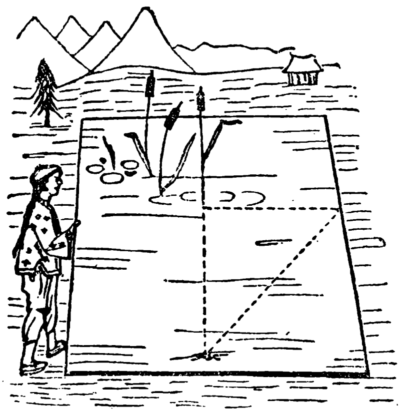


Рис. 388.

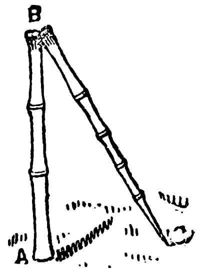


Рис. 389.

22. У Кіу-Чангу є ще й така задача: „Бамбук 9 м заввишки зламано так, що вершок його C торкається землі на віддаленні $AC = 3$ м від основи бамбука (рис. 389). На якій висоті AB зламано бамбук?“

23. Катети в прямокутного трикутника рівні

1) 3 см і 4 см	5) 24 см і 7 см
2) 5 см і 12 см	6) 1,5 см і 2 см
3) 2,4 см і 7 мм	7) 11 мм і 6 см
4) 12 мм і 9 мм	8) 18 см і 24 см

Обчисліть гіпотенузу.

24. Гіпотенуза й один з катетів відповідно рівні:

1) 13 см і 5 см	5) 3,7 см і $3^1/_2$ см.
2) 25 см і 7 см	6) 5 см і 48 мм
3) 41 см і 9 мм	7) 17 см і 15 см
4) 2 см і 12 мм	8) 4 см і 2,4 см

Обчисліть довжину другого катета.

25. Гіпотенуза на 1 см довша від катета. Другий катет = 5 см. Який завдовжки перший катет?

26. Гіпотенуза = 8 см. Один із катетів = 6 см. Обчисліть відтинки *) гіпотенузи.

27. Відтинки гіпотенузи 3,2 см та 1,8 см. Знайдіть катети та гіпотенузу цього трикутника.

28. Хорда завдовжки 6,4 см лежить на віддаленні 24 мм від центра. Який завдовжки радіус цього кола?

*) Тут мова йде про ті відтинки гіпотенузи, на які поділяє її перпендикуляр, спущений з вершини прямого кута на гіпотенузу.

Розділ 14.

ДЕЩО З ТРИГОНОМЕТРІЇ.

49. Тригонометрична величина Sn.

§ 170. Що таке синус даного кута.

Задача 1. На рис. 390 дано вертикальний розріз залізнич-

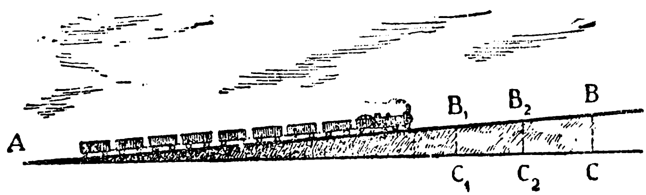


Рис 390.

ної колії, зроблений уздовж полотна колії (такий розріз звуть „подовжнім профілем“). Кут „під'йому“ цієї колії

$$\angle BAC = 5^\circ$$

Цією колією підіймається поїзд. Порівняйте ту висоту, до якої він підіймається, з тією дорогою (AB), що її він при цьому проходить.

У якому місці дороги буде поїзд	На яку висоту піднявся поїзд	Яку дорогу пройшов поїзд	Яку частину тієї дороги, що пройшов поїзд, становить висота підіймання *)
У точці B_1	$B_1C_1 =$	$AB_1 =$	$\frac{B_1C_1}{AB_1} =$
У точці B_2	$B_2C_2 =$	$AB_2 =$	$\frac{B_2C_2}{AB_2} =$
У точці B	$BC =$	$AB =$	$\frac{BC}{AB} =$

Висновок. Виявилося, що коли кут під'йому ($\angle A$) буде той самий, то й висота під'йому (BC) щоразу буде та сама частина дороги, яку пройшов поїзд (AB).

*) Усі ці відношення треба означати десятковим дробом з точністю до 0,1 або до 0,01.

Доведення. Вислід цей маємо ми не випадково. Дослідіть просту лінію в трикутниках AB_1C_1, AB_2C_2, ABC. Доведіть, що вони подібні. (Пригадайте § 157).

А в подібних трикутниках боки пропорціональні, тому повинно виявитися, що відношення:

$$\frac{B_1C_1}{AC_1},\ \frac{B_2C_2}{AC_2},\ \frac{BC}{AC}\ \text{однакові.}$$

Задача 2. Погляньмо тепер, чи мінятиметься відношення висоти під'йому до пройденої дороги, коли мінятиметься кут під'йому.

Дослід. Нехай кут під'йому дорівнюватиме 30^0. Нарисуйте кут 30^0. Візьміть на одному з боків його декілька точок B_1, B_2, B_3... і спустіть з них перпендикуляри (B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3...) на другий бік кута. Матимете ряд прямокутних трикутників. В кожному з цих прямокутників зміряйте довжину того катета, що лежить проти вашого кута A, і довжину гіпотенузи. Обчисліть, яку частину гіпотенузи становитиме відповідний до неї катет.

Тепер нарисуйте кут 45^0; обчисліть, яку частину його гіпотенузи становить той катет, що лежить проти цього кута.

Те саме обчисліть і для кута 60^0.

Вислід.

Кут A	Яку частину гіпотенузи становить катет, що лежить проти кута A: $\frac{BC}{AB}$
30^0	0,50
45^0	0,71
60^0	0,87

Отже, для кожного нового кута маємо своє окреме число.

Те число, що показує, яку частину всієї гіпотенузи становить той катет, що лежить проти даного кута, і звемо синусом даного кута.

Слово „синус“ коротше писатимемо так „Sn“.

Таким чином, ми знайшли, що Sn $\angle 30^0 = 0{,}50$. (Читається це так: синус кута 30^0 дорівнює 0,50).

§ 171. Як міняється Sn, коли міняється кут.

Дослід 1. Зробіть таке приладдя (рис. 391).

Це приладдя можна зробити так. На середині довгої лінійки *LM* (1 метр завдовжки) треба прикріпити транспортир і

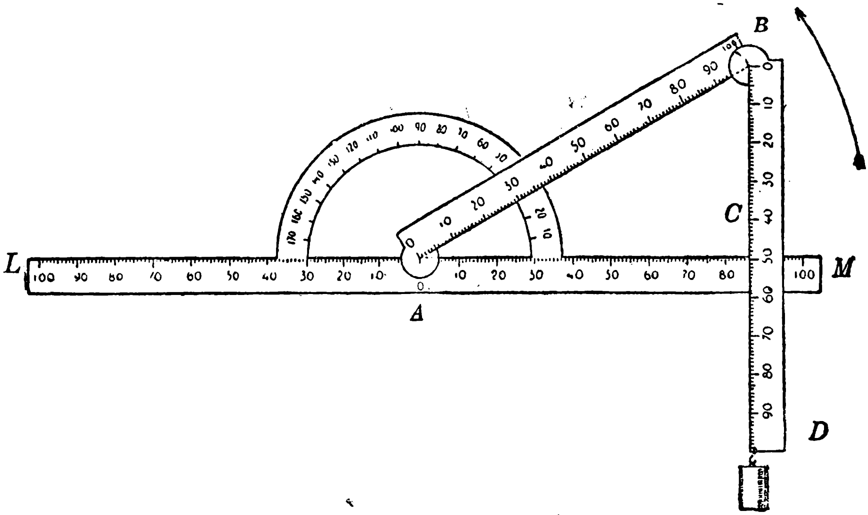


Рис. 391. Тригонометр.

лінійку *AB*, що може повертатися навколо точки *A*. До другого кінця *B* цієї лінійки треба приробити ще одну — таку саму завдовжки — лінійку *BD*, щоб вона вільно поверталася навколо точки *B*. На лінійках $AB = BD = AM = AL$ позначається 100 однакових поділок (коли *AB* завдовжки буде 50 см, то кожна поділка завдовжки буде $^1/_2$ см). Поставте приладдя так, щоб лінійка *LM* лежала горизонтально, а транспортир та лінійка *BD* були вертикальні.

Тепер повертайте лінійку *AB* так, щоб при точці *A* утворювалися кути: 10°, 20°, 30°... Зміривши довжину катета *BC*, що лежить проти цього кута *A*, та взнавши, яку частину гіпотенузи *AB* цей катет становитиме, обчисліть Sn-и всіх цих кутів.

∠ *A*	Катет *BC*	Гіпотенуза *AB*	Sn ∠ *A*
10°			
20°			
30°			
40°			

Дослід 2. Простежте уважно на приладді (рис. 391), як міняється Sn, коли кут збільшується від 0^0 до 90^0 та від 90^0 до 180^0.

Для якого кута Sn стає рівний 0? При якому куті він буде рівний 1?

Для якого кута маєте ви значіння найменше, а для якого найбільше?

Дослід 3. Якщо зробити цей тригонометр вам трудно, то Sn-и відповідних кутів можна знайти в той спосіб, що вжили ви його в задачі 2 § 170.

§ 172. Таблиця синусів. Отже, за допомогою дослідів, що показані в § 170, можете ви скласти собі таку таблицю, де для кожного кута показаний буде його синус (дивись стор. 173).

Треба тільки пам'ятати, що для дуже багатьох кутів не можна знайти точного Sn-а. На нашій таблиці дано наближені значіння деяких Sn-ів з точністю до 0,001. А шукаючи синуси тригонометром, ви повинні обмежитися точністю тільки до 0,01.

§ 173 Як використати таблицю Sn-ів для розвязування задач.

Задача 1. Крокви на даху $AB = 8$ метрів. Зі стелею дах утворює кут $A = 35^0$. Обчисліть висоту даху BC (рис. 392).

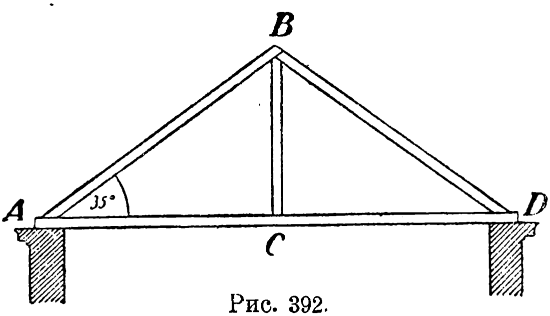


Рис. 392.

Розвязання. В таблиці Sn-ів знаходимо Sn $35^0 = 0{,}57$. Отже, катет BC, що лежить проти цього кута, є 0,57 частина гіпотенузи AB. А тому висота даху $BC = 8$ м $\times$ 0,57.

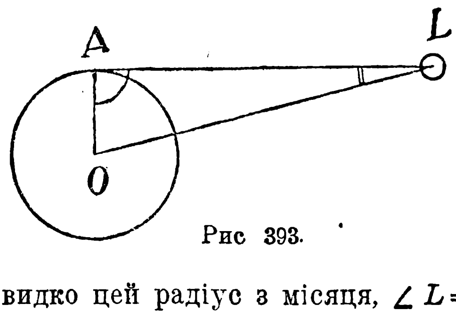


Рис 393.

Задача 2. На гору, що кут під'йому її рівний 38^0, іде чоловік. Як високо зійшов він, коли від підніжжя гори пройшов 350 сажнів?

Задача 3. Радіус землі OA (рис. 393) завдовжки буде 6000 кілометрів. Кут, під яким видко цей радіус з місяця, $\angle L =$ приблизно 1^0. (Кут цей звуть паралаксом місяця). Обчисліть, скільки буде від землі до місяця.

Розвязання. На таблиці знаходимо, що $\text{Sn} \angle 1^0 = 0{,}02$. Отже, радіус AO — це 0,02 частина віддалення OL. Звідци легко вже знайти й OL.

50. Косинус.

§ 174. Проєкція точки та відтинка простої на просту лінію.

Задача 1. Знайти проєкцію точки A на просту MN.

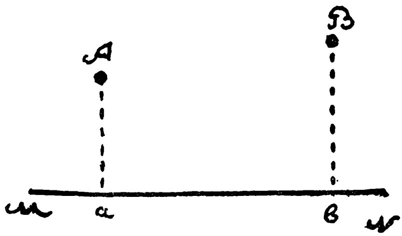


Рис 394.

Нарисуйте на аркуші паперу декілька точок (A, B) та якунебудь довільну завдовжки просту лінію MN (рис. 394). Спустіть перпендикуляр з точки A на нашу просту. Покажіть точку перетину перпендикуляра з нашою простою (слід цього перпендикуляра на нашій простій). Цю точку a звуть п р о є к ц і є ю т о ч к и A н а п р о с т у MN.

Задача 2. Знайдіть проєкцію на просту лінію відтинка AB, що лежить одним кінцем (A) на цій лінії (рис. 395).

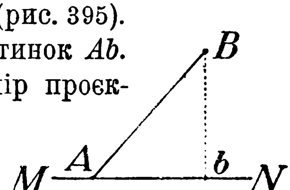


Рис. 395.

Проєкцією цього відтинка AB буде відтинок Ab.

Тепер подивіться, як зміняється розмір проєкції нашого відтинка AB через те, що змінилося місце цього відтинка проти простої MN.

Нарисуйте спочатку відтинок AB так, щоб обома своїми кінцями він лежав на простій MN. Тоді за проєкцію відтинка AB буде сам цей відтинок AB. Тепер почніть

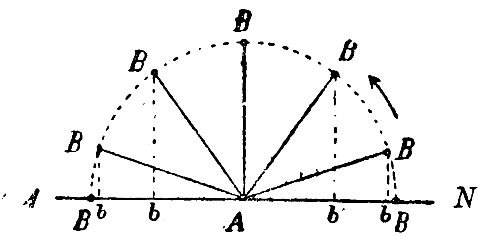


Рис. 396.

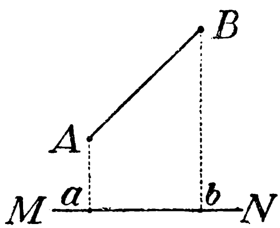


Рис. 397.

підіймати в напрямкові стрілки кінець відтинка B (рис. 396) і знаходьте проєкцію цього відтинка AB на ту саму просту MN. Повертайте відтинок доти, доки точка B ляже знов на просту MN.

Як мінялася ця проєкція, коли мінялося місце відтинка AB?

Задача 3. Знайдіть проєкцію відтинка простої на вісь *MN*, що лежить поза ним. Простежте, як міняється проєкція, коли відтинок робить повний оборот навколо одного з своїх кінців (рис. 397).

§ 175. Що таке косинус даного кута.

Задача 1. Ми вже дослідили, як міняється проєкція простої лінії, коли ця проста, залишаючись увесь час завдовжки однакова, мінятиме кут свого нахилу (§ 174). А тепер дослідімо, як міняється проєкція, коли кут нахилу простої не міняється, а зате міняється довжина самої цієї простої.

Дослід. Нарисуйте який-небудь кут *A*. На одному боці його візьміть ряд точок B_1, B_2, B_3... і з них спустіть перпендикуляри на другий бік (рис. 398).

Зміряйте відтинки AB_1, AB_2, AB_3... й відповідні до них проєкції AC_1, AC_2, AC_3...

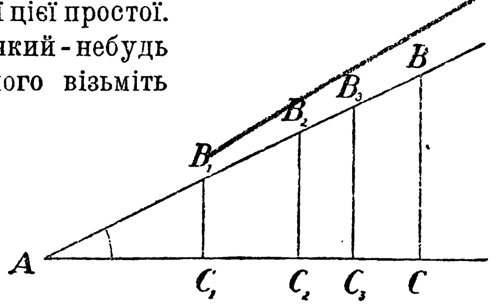


Рис. 398.

Обчисліть, яку частину відповідного відтинка становить його проєкція.

Довжина проєкції	Довжина відтинка	Яку частину відтинка становить проєкція?
$AC_1 =$	$AB_1 =$	$\frac{AC_1}{AB_1} =$
$AC_2 =$	$AB_2 =$	$\frac{AC_2}{AB_2} =$
$AC_3 =$	$AB_3 =$	$\frac{AC_3}{AB_3} =$
$AC =$	$AB =$	$\frac{AC}{AB} =$

Вислід. Виявиться, що для того самого кута *A* проєкція становить ту саму частину відповідного відтинка.

Задача 2. Тепер дослідіть, чи мінятиметься відношення проєкції *AC* до даного відтинка *AB*, коли мінятиметься кут $\angle A$.

Дослід. Нарисуйте кут 30°. На одному з його боків візьміть декілька точок B_1, B_2, B_3... і спустіть з них перпендикуляри (B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3....) на другий бік кута. Матимете ряд прямокутних трикутників. Зміряйте в кожному з них довжину гіпотенузи й довжину відповідного катета, що до нашого кута A прилягає (цей катет буде за проекцію гіпотенузі). Обчисліть, яку частину гіпотенузи становить той катет, що до нашого кута прилягає.

Те саме зробіть для кута 45° та 60°.

Вислід.

Для кута A	Катет, що до цього кута прилягає, становить таку частину гіпотенузи
$\angle A$	$\frac{AC}{AB}$
30°	0,87
45°	0,71
60°	0,50

Отже, для кожного нового кута маємо своє число.

Те число, що показує, яку частину гіпотенузи становить той катет, що до даного кута прилягає, звуть косинусом даного кута.

Коротше слово „косинус" будемо писати так: „Cs".

Таке речення: „Косинус кута 30° рівний буде 0,87" коротше ми можемо написати так: Cs $\angle$ 30° = 0,87.

Розуміти це треба так, що катет, який прилягає до кута 30°, становить 0,87 частин відповідної гіпотенузи.

§ 176. Як міняється Cs, коли міняється кут.

Дослід. За допомогою тригонометра (рис. 391) знайдіть Cs-и для різних кутів, починаючи від 0° й кінчаючи 180°, і складіть таблицю Cs-ів, обчисливши їх з точністю до 0,01.

Чому рівний буде Cs 0°, Cs 90°, Cs 108°?

Як міняється Cs, коли міняється кут від 0° до 90°? А як він міняється, коли кут збільшується від 90° до 180°? Зверніть увагу на те, по який бік від точки A відкладається проекція AC, коли кут збільшується від 90° до 180°.

Таблиця Sn, Cs, Tg [1]).

Кут	Sn	Cs	Tg	Кут	Sn	Cs	Tg	Кут	Sn	Cs	Tg
0^0	**0**	**1**	**0**								
1^0	0,017	0,9998	0,017	31^0	0,515	0,857	0,601	61^0	0,875	0,485	1,804
2^0	0,035	0,999	0,035	32^0	0,530	0,848	0,625	62^0	0,883	0,469	1,881
3^0	0,052	0,999	0,052	33^0	0,545	0,839	0,649	63^0	0,891	0,454	1,963
4^0	0,070	0,998	0,070	34^0	0,559	0,829	0,674	64^0	0,899	0,438	2,050
5^0	0,087	0,996	0,087	35^0	0,574	0,819	0,700	65^0	0,906	0,422	2,144
6^0	0,105	0,994	0,105	36^0	0,588	0,809	0,726	66^0	0,913	0,407	2,246
7^0	0,122	0,992	0,123	37^0	0,602	0,799	0,754	67^0	0,920	0,391	2,356
8^0	0,139	0,990	0,140	38^0	0,616	0,788	0,781	68^0	0,927	0,375	2,475
9^0	0,156	0,988	0,158	39^0	0,629	0,777	0,810	69^0	0,934	0,358	2,605
10^0	0,174	0,985	0,176	40^0	0,643	0,766	0,839	70^0	0,940	0,342	2,747
11^0	0,191	0,982	0,194	41^0	0,656	0,755	0,869	71^0	0,945	0,325	2,904
12^0	0,208	0,978	0,213	42^0	0,669	0,743	0,900	72^0	0,951	0,309	3,078
13^0	0,225	0,974	0,231	43^0	0,682	0,731	0,932	73^0	0,956	0,292	3,271
14^0	0,242	0,970	0,249	44^0	0,695	0,719	0,966	74^0	0,961	0,276	3,487
15^0	0,259	0,966	0,268	45^0	**0,707**	**0,707**	**1**	75^0	0,966	0,259	3,732
16^0	0,276	0,961	0,287	46^0	0,719	0,695	1,035	76^0	0,970	0,242	4,011
17^0	0,292	0,956	0,306	47^0	0,731	0,682	1,072	77^0	0,974	0,225	4,331
18^0	0,309	0,951	0,325	48^0	0,743	0,669	1,111	78^0	0,978	0,208	4,705
19^0	0,325	0,945	0,344	49^0	0,755	0,656	1,156	79^0	0,982	0,191	5,145
20^0	0,341	0,940	0,364	50^0	0,766	0,643	1,192	80^0	0,985	0,174	5,671
21^0	0,358	0,934	0,384	51^0	0,777	0,629	1,235	81^0	0,988	0,156	6,314
22^0	0,375	0,927	0,404	52^0	0,788	0,616	1,280	82^0	0,990	0,139	7,115
23^0	0,391	0,920	0,424	53^0	0,799	0,602	1,327	83^0	0,992	0,122	8,144
24^0	0,407	0,913	0,445	54^0	0,809	0,588	1,376	84^0	0,994	0,105	9,515
25^0	0,422	0,906	0,466	55^0	0,819	0,574	1,428	85^0	0,996	0,087	11,430
26^0	0,438	0,899	0,488	56^0	0,829	0,559	1,483	86^0	0,998	0,070	14,300
27^0	0,454	0,891	0,509	57^0	0,839	0,545	1,540	87^0	0,999	0,052	19,081
28^0	0,469	0,883	0,532	58^0	0,848	0,530	1,600	88^0	0,999	0,035	28,636
29^0	0,485	0,875	0,554	59^0	0,857	0,515	1,664	89^0	0,9998	0,017	57,29
30^0	**0,500**	0,866	0,577	60^0	0,866	**0,500**	1,732	90^0	**1**	**0**	∞

Складіть график Sn, Cs, Tg, відкладаючи на осі абсцис кути (від 0^0 до 180^0), а на ординатах відповідні до цих кутів значіння Sn, Cs та Tg.

[1]) За допомогою тригонометра можна знайти наближені значіння Sn, Cs і Tg з точністю до 0,01; а в цій таблиці дається їхнє значіння з точністю до 0,001.

§ 177. Як використовувати таблицю Cs-ів для розвязування задач.

Задача. Відтинок BA утворює з віссю MN кут 25°. Як знайти довжину проекції цього відтинка AB на просту MN (рис. 399)?

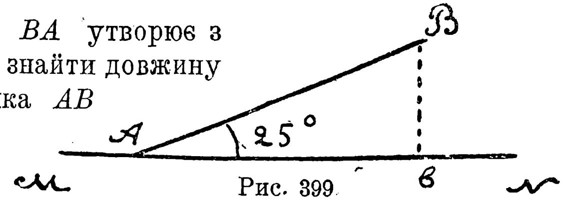


Рис. 399

Cs $25^0 = 0{,}906$.

Цеб-то проекція AB становить 0,906 частину самого відтинка AB.

51. Тангенс та котангенс.

§ 178. Що таке тангенс даного кута.

Задача 1. Про те, який великий буде під'йом залізничної колії, звичайно довідуються ще так: дізнаються, яку частину горизонтальної проекції цієї колії становить висота під'йому. Наприклад, для залізничної колії, що на рисункові 390, беруть такі відношення: $\frac{B_1C_1}{AC_1}$, або $\frac{B_2C_2}{AC_2}$, або $\frac{BC}{AC}$, цеб-то беруть відношення того катета, що лежить проти кута під'йому ($\angle A$), до того катета, що до цього кута прилягає.

Погляньмо, чи будуть ці відношення однакові для того самого кута під'йому A.

Дослід. Нарисуйте кут A, що дорівнює 30° (рис. 398). На одному боці візьміть яку-небудь точку B_1 і з неї спустіть перпендикуляр на другий бік. Матимете прямокутний трикутник. Змірявши довжину обох катетів, обчисліть відношення катета (B_1C_1), що лежить проти нашого кута A, до катета (AC_1), що до цього кута прилягає.

На тому самому боці AB візьміть нову точку B_2. Спустіть з неї перпендикуляр на AC і знову знайдіть відношення відповідних катетів.

Порівняйте здобуті числа одне з одним.

Катет, що лежить проти кута A	Катет, що лежить при куті A	Катет, що лежить проти кута A, становить ось яку частину катета, що до цього кута прилягає
$B_1C_1 =$	$AC_1 =$	$\frac{B_1C_1}{AC_1} =$
$B_2C_2 =$	$AC_2 =$	$\frac{B_2C_2}{AC_2} =$
$BC =$	$AC =$	$\frac{BC}{AC} =$

Вислід. Той катет, що лежить проти кута 30^0, завжди становить 0,58 частин того катета, що до цього кута прилягає.

Доведіть, що при тому самому куті A цю властивість мають усі катети. (Використайте тут першу ознаку подібности трикутників).

Задача 2. Дослідіть тепер, як мінятиметься відношення наших катетів, коли мінятимемо розмір кута A.

Дослід. Нарисуйте кут 30^0, потім 45^0, нарешті 60^0. Довідайтесь, яку частину того катета AC, що прилягає до нашого кута, становить той катет BC, що лежить проти цих кутів.

Для кута A	Відношення катета, що лежить проти кута A, до катета, що лежить при цьому куті $\frac{BC}{AC}$
30^0	0,58
45^0	1
60^0	1,73

Отже, для кожного нового кута маємо инше число.

Те число, що показує, яку частину катета AC, що лежить при даному куті A, становить катет BC, що лежить проти нашого кута A, назвемо тангенсом цього кута.

Коротше слово це писатимемо так: Tg.

Замість речення: „Тангенс кута 30^0 рівний є 0,58“ можна написати так:

$$\text{Tg} \angle 30^0 = 0{,}58.$$

Розуміти цей запис треба так: „той катет, що лежить проти кута 30^0, становить 0,58 частин того катета, що до цього кута прилягає“.

Для кута 60^0 матимемо такий запис:

$$\text{Tg} \angle 60^0 = 1{,}73. \text{ (Прочитайте його!).}$$

Запис цей означає, що той катет, що лежить проти кута 60^0, у 1,73 раза більший буде від того катета, що до цього кута прилягає.

А як зрозуміти такий запис:

$$\text{tg} \angle 45^0 = 1?$$

§ 179. Як міняється tg, коли міняється кут. За допомогою тригонометра (рис. 391) знайдіть tg-и для різних кутів, починаючи від 0^0 й кінчаючи 180^0, і складіть таблицю tg-ів, обчисливши їх з точністю до 0,01 (стор. 173).

Чому рівний буде tg 0^0; tg 45^0; tg 90^0; tg 180^0?

Як міняється тангенс, коли кут збільшується від 0^0 до 45^0 та від 45^0 до 90^0?

При якому куті tg рівний буде 1?

При яких кутах той катет, що лежить проти кута, буде менший від того катета, що до нього прилягає? Починаючи з якого кута стає він більший від того катета, що до кута прилягає?

§ 180. Як використати таблицю tg-ів для розвязування задач.

Задача 1. За допомогою транспортира дізнано, що, коли відійти від дерева BC на віддалення $AC = 20$ метрів, то дерево це видко буде під кутом: $\angle A = 50^0$. Обчисліть висоту дерева (рис. 400).

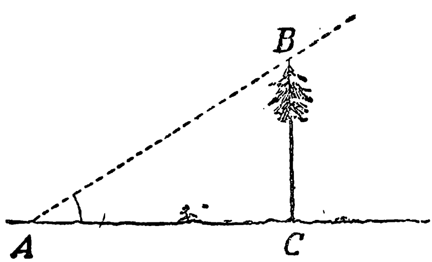


Рис. 400.

Пояснення. Щоб обчислити BC, треба AC помножити на tg A.

§ 181 Як знайти кут, знаючи його Sn, Cs або Tg.

Задача 1. Ширина будинка $AD = 24$ метри (рис. 392). Довжина крокви в нього $BD = 20$ метрів. Який кут під'йому ($\angle A$) в цього даху?

Пояснення. Коли знайдемо відношення $\frac{AC}{AB}$, ми взнаємо Cs $\angle A$. Таблиця Cs-ів покаже нам, якому кутові цей Cs відповідає.

§ 182. Що таке котангенс даного кута.

Задача. Ген далеко пливе пароплав; щогла на ньому BC заввишки 25 метрів; з берега видно її під кутом $A = 15^0$.

За скільки метрів од берега пливе цей пароплав (рис. 401)?

Розвязування. Будемо називати відношення катета AC, що прилягає до кута A, до катета BC, що лежить проти цього кута,

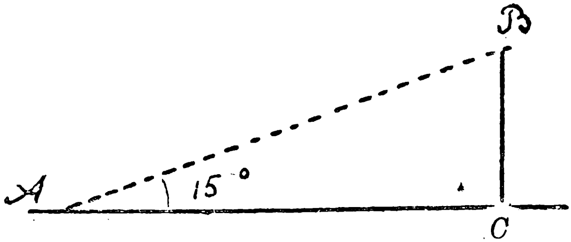


Рис. 401.

котангенсом кута A. Тоді $\operatorname{Ctg} A = \frac{AC}{BC}$. Цеб-то $AC = BC \cdot \operatorname{Ctg} A$.

§ 183 Функціональна залежність поміж Sn, Cs, Tg та Ctg.

Ми вже знаємо чотири тригонометричні величини: синус, косинус, тангенс і котангенс. Для того самого кута ці тригонометричні величини мають своє окреме значіння. Наприклад, для кута 30° синус буде 0,50, косинус 0,87, тангенс—0,58; а ctg—1,73. Погляньмо тепер, чи залежні одне від одного ці числа, чи немає поміж ними якоїсь залежности, що одне з одним їх звязує.

Пошукаймо спочатку залежности поміж синусом та косинусом того самого кута.

§ 184. Залежність поміж Sn та Cs того самого кута.

Дослід. Для кожного кута безпосереднім мірянням ми знайшли sn і cs.

Візьмімо який-небудь з цих кутів, наприклад, кут 36° і на таблиці (стор. 173) знайдімо значіння його sn й cs. Те саме зробімо і з яким небудь довільним кутом; скажемо, з кутом 78°.

$\operatorname{sn} 36^0 = 0{,}59$	$\operatorname{sn} 78^0 = 0{,}98$
$\operatorname{cs} 36^0 = 0{,}81$	$\operatorname{cs} 78^0 = 0{,}21$

Відразу, здається, дуже важко помітити будь-який звязок поміж sn та cs того самого кута.

Але спробуйте зробити так: піднесімо в квадрат sn кута 36°. Те саме зробімо і з cs цього кута.

Маємо:

$(\operatorname{sn} 36^0)^2 = 0{,}36\ldots$[1]	$(\operatorname{sn} 78^0)^2 = 0{,}95$
$(\operatorname{cs} 36^0)^2 = 0{,}65\ldots$	$(\operatorname{cs} 78^0)^2 = 0{,}04$

[1]) Коли підносимо в квадрат, то досить у висліді залишити два тільки знаки, обмежившись точністю до 0,01

Придивіться уважно до цих чисел. Чи не знайдете ви поміж ними якогось звязку?

Вислід. Коли до $(\mathrm{sn}\ 36^0)^2$ додати $(\mathrm{cs}\ 36^0)^2$, то матимемо число, близьке до одиниці.

Цеб-то

$$(\mathrm{sn}\ 36^0)^2 + (\mathrm{cs}\ 36^0)^2 = 1{,}01.$$

Ту саму залежність знайдемо ми й для синуса та косинуса кута 78^0. А саме

$$(\mathrm{sn}\ 78^0)^2 + (\mathrm{cs}\ 78^0)^2 = 0{,}99.$$

І в першому, і в другому разі маємо число, близьке до одиниці.

Візьміть ще кілька випадкових кутів і на таблиці знайдіть значіння їхніх sn і cs. Обчисляючи, ви пересвідчитеся, що знов матимете число, близьке до одиниці. Для sn і cs брали ми приблизно тільки їхнє значіння; тому це наводить нас на думку, чи не буде поміж точними значіннями sn і cs того самого кута такої залежности:

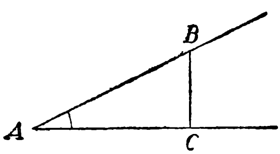


Рис. 402

$$\mathrm{sn}^2\ A + \mathrm{cs}^2\ A = 1.$$

Доведімо, що ця залежність поміж sn і cs того самого кута є в дійсності. Справді, нарисуймо довільний кут A і знайдімо його sn і cs (рис. 402).

$$\mathrm{sn} \angle A = \frac{BC}{AB}$$

$$\mathrm{cs} \angle A = \frac{AC}{AB}\ .$$

Піднесімо в квадрат sn і cs.

$$(\mathrm{sn} \angle A)^2 = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{BC^2}{AB^2}$$

$$(\mathrm{cs} \angle A)^2 = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{AC^2}{AB^2}$$

Складімо ці квадрати.

$$(\mathrm{sn} \angle A)^2 + (\mathrm{cs} \angle A)^2 = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2}$$

або, коли додати один до одного дріб, то матимемо

$$(\mathrm{sn} \angle A)^2 + (\mathrm{cs} \angle A)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

Тепер подивіться на рис. 402. BC й AC—це катети прямокутного трикутника, а ще-ж Пітагор знав, що суму квадратів катетів ($BC^2 + AC^2$) можна замінити квадратом гіпотенузи AB^2.

Зробімо це:

$$(\text{sn } A)^2 + (\text{cs } A)^2 = \frac{AB^2}{AB^2}$$

або

$$(\text{sn } A)^2 + (\text{cs } A)^2 = 1$$

Отже, скориставшись з алгебри, ми пересвідчилися, що така залежність завжди існує поміж sn і cs всякого кута.

§ 185. Знаючи Sin та Cos того самого кута, як обчислити його Tg?

Дослід. Візьміть з таблиці (стор. 173) sn і cs будь-якої пари кутів; наприклад:

$\text{sn } 33^0 = 0{,}54$	$\text{sn } 68^0 = 0{,}93$
$\text{cs } 33^0 = 0{,}84$	$\text{cs } 68^0 = 0{,}37$

Спробуйте зробити таку дію з sn та cs того самого кута, щоб мати число близьке до tg того самого кута.

Вислід. Після кількох спроб ви може помітите, що коли sn якого-небудь кута поділити на його cs, то буде число, близьке до tg цього кута.

Справді

$\dfrac{\text{sn } 33^0}{\text{cs } 33^0} = 0{,}64$	$\dfrac{\text{sn } 68^0}{\text{cs } 68^0} = 2{,}5$
$\text{tg } 33^0 = 0{,}65$	$\text{tg } 68^0 = 2{,}5$

Доведімо, що коли-б ми знайшли точне значіння sn й cs, то відношення їхнє неминуче дало-б tg того самого кута.

На рис. 402 маємо

$$\text{sn } \angle A = \frac{BC}{AB}; \quad \text{cs } \angle A = \frac{AC}{AB};$$

поділімо їх одне на одне.

$$\frac{\text{sn } A}{\text{cs } A} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB}.$$

Поділивши $\dfrac{BC}{AB}$ на $\dfrac{AC}{AB}$, після скорочення матимемо

$$\frac{\text{sn } A}{\text{cs } A} = \frac{BC}{AC}.$$

Подивіться на рис. 402. Адже $\frac{BC}{AC}$ це tg A.

Отже, завжди

$$\frac{\text{sn } A}{\text{cs } A} = \text{tg } A$$

А тому, коли ми знаємо sn і cs якого-небудь кута, то знайти tg цього кута дуже легко. Треба тільки sn кута поділити на cs його.

§ 186. Залежність між tg та ctg.

$$\text{ctg } A = \frac{AC}{BC} \quad \text{tg } A = \frac{BC}{AC}$$

Перемножимо

$$\text{ctg } A \,.\, \text{tg } A = 1$$

Цеб-то, щоб обчислити ctg, знаючи tg цього кута, досить одиницю поділити на цей tg.

$$\text{tg } A \,.\, \text{ctg } A = 1$$

ВПРАВИ.

1. Напишіть як-найкоротше, що: „синус кута 60^0 дорівнює 0,87“, а „тангенс кута 45^0 дорівнює одиниці“.

2. Прочитайте, що тут написано:

$$\text{sn } \angle\ 45^0 = 0{,}71$$

$$\text{cs } \angle\ 75^0 = 0{,}26$$

$$\text{tg } \angle\ 30^0 = 0{,}58$$

3. Яку частину гіпотенузи становить той катет, що лежить проти кута 60^0? А проти кута 30^0? Збудуйте такий кут A, щоб у ньому tg $A = \frac{3}{4}$.

4. Складіть график sn, cs та tg, відкладаючи на осі абсцис кути від 0^0 до 180^0, а на ординатах відповідні до цих кутів значіння sn, cs та tg.

5. Знайдіть на таблиці (стор. 173): sn 35^0; cs 48^0; tg 78^0; sn 83^0; cs 39^0; tg 22^0.

6. Простежте на таблиці, як міняється sn, cs та tg, коли кут збільшується від 0^0 до 180^0.

7. Знайдіть у таблиці такий кут A, щоб у нього

$$\text{sn } A = 0{,}743 \qquad \text{cs } A = 0{,}122 \qquad \text{tg } A = 4{,}011$$

$$\text{sn } A = 0{,}242 \qquad \text{cs } A = 0{,}707 \qquad \text{tg } A = 1{,}801$$

8. На гору, що кут під'йому її дорівнює 38^0, іде чоловік. Як високо зійшов він, коли від підніжжя гори пройшов 350 сажнів?

9. Дізнано, що коли відійти від дерева BC на віддалення $AC = 20$ метрів, то дерево це видно буде під кутом $A = 50^0$: Обчисліть висоту дерева (рис. 403).

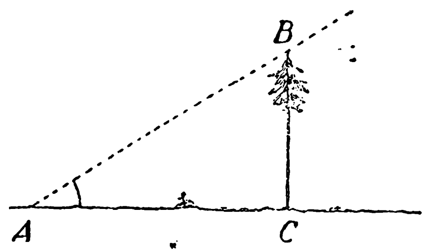


Рис. 403.

10. Нехай вам треба виміряти ширину річки AB. Просту AC проведіть так, щоб при точці A утворився прямий кут (використайте для цього екер). Змірявши довжину простої AC й $\angle C$ (астролябією) і маючи таблицю тангенсів, ви зовсім легко обчислите довжину катета BA.

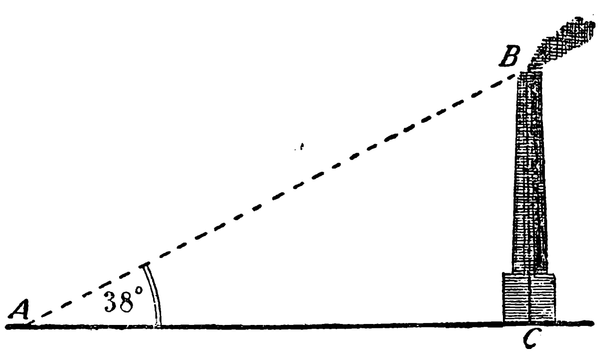


Рис. 404.

11. Знайдіть висоту фабричної труби, коли відомо, що $AC = 45$ м, $\angle A = 38^0$ (рис. 404).

12. Крокви на даху $AB = 8$ метрів. Зі стелею дах цей утворює кут $A = 35^0$. Обчисліть висоту даху BC (рис. 405).

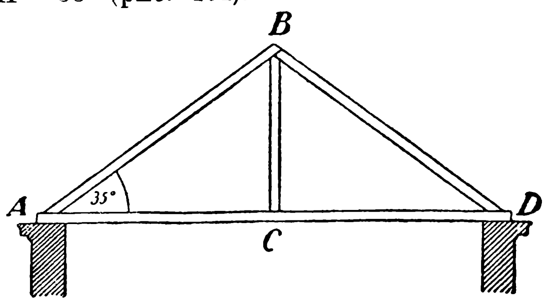


Рис. 405.

13. Дахи мають різний нахил в залежності від того, з якого матеріялу дах зроблено. Для залізного даху BC (рис. 405), звичайно становить $^1/_5$ частину його ширини AD. Для солом'яного даху він мусить бути не нижчий як $^1/_2$ цієї ширини, а для черепиці він може становити всього $^1/_3$ її.

Обчисліть, чому дорівнюватиме кут нахилу даху ($\angle A$), коли дах зроблено з заліза, черепиці або соломи.

14. На рисункові 406 маємо поперечний профіль залізничої колії. Висота насипу $AL = 1{,}3$ м, а його бік $AC = 2{,}3$ метра. Обчисліть кут узбіччя цього насипу ($\angle C$).

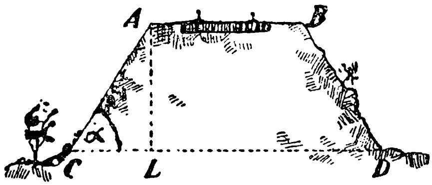


Рис. 406.

15. Кут під'йому гори $\angle BAC = 25^0$. Довжина $AB = 320$ саж.

Обчисліть, на якому віддаленні буде верховина A від її підніжжя B, беручи напрямок горизонтальний.

16. За нормальний кут узбіччя в залізничого насипу (див. поперечний профіль на рис. 406) вважають такий кут, коли на кожен метр висоти AL припадає $1^1/_2$ метри ширини CL. Чому дорівнюватиме тоді кут нахилу ($\angle C$)?

17. Звичайно висоту під'йому залізничої колії пишуть у вигляді дробу; цей дріб показує, яку частину цілої горизонтальної проекції залізничої колії (AC) ця висота (BC) становить.

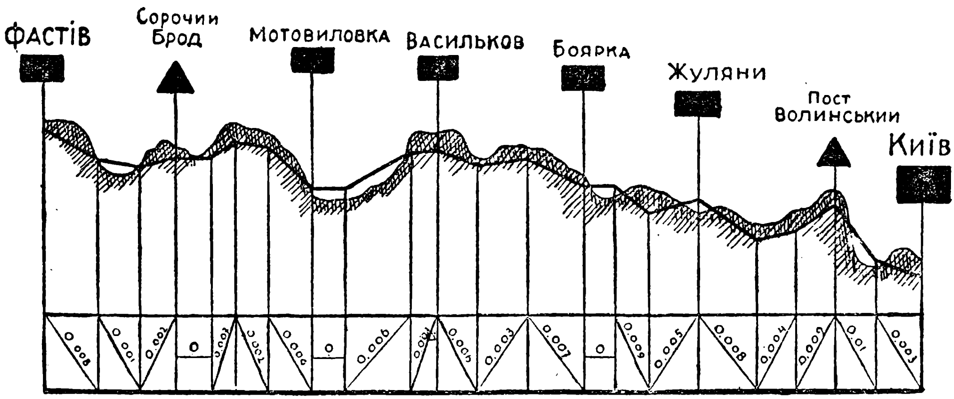


Рис. 407

Найбільший під'йом, що дозволяє його звичайно залізнича колія,—це $^1/_{40}$. Якій тригонометричній величині цей дріб відповідає? Який буде кут під'йому в такої залізничої колії?

Иноді дріб цей, що показує, яку частину горизонтальної проекції залізничої колії висота під'йому становить, означають **в і д с о т к а м и**.

Для зубчастої залізниці в горах дозволяється максимальний найбільший під'йом $25^0/_0$.

Обчисліть кут під'йому.

18. На рис. 407 маємо повздовжній профіль залізничого шляху від Київа до Фастова. Внизу зазначені відхи-

лення шляху й відповідні числа, що показують, яку частину цього шляху становить висота під'йому. На підставі цих чисел вирахуйте кути під'йому шляху між Київом та Фастовом на відповідних участках.

19. $\angle\ CAB = 23^0$. Довжина $AB = 26,4$ м. Яка заввишки гора AD (рис. 408)?

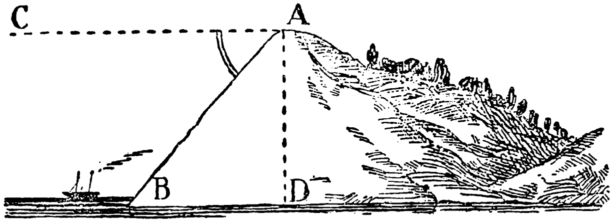


Рис 408.

20. Коли зійти на гору Монблан, що заввишки буде мало не 5 кілометрів, то зо шпиля її видно обрій під $\angle\ CAB = 89^0$. Обчисліть радіус видимого обрію BC (рис. 409).

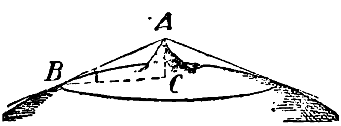


Рис 409.

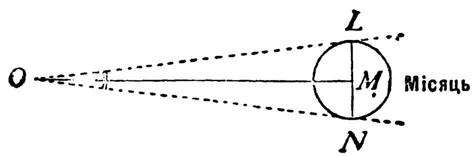


Рис. 410.

21. Ми знаємо, що від землі до місяця приблизно 360000 кілометрів. $OM = 360000$ км.

$\angle\ LON$, під яким видно з землі діяметр місяця, $= {}^1/_2{}^0$ (приблизно). Обчисліть радіус місяця й порівняйте його з радіусом землі (рис. 410).

Увага: $\operatorname{tg}\ {}^1/_4{}^0$ вважайте за 0,005.

22. Для того, щоб виміряти височінь сонця, поставили сторч тичку $BC = 150$ см і зміряли довжину її тіни $AC = 200$ см. Обчисливши кут $\angle\ A$, знайдете височінь сонця (рис. 411).

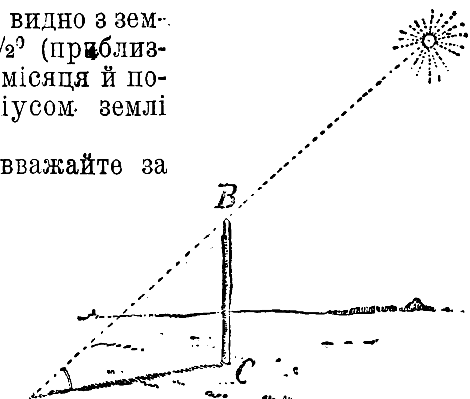


Рис. 411.

23. На даху лежить сніг, що важить 50 кг на кожному кв. метрі. З якою силою цей сніг намагається рухатися вдовж даху (напрямком BC)? Кут під'йому даху $\angle A = 12^0\ 30'$ (рис. 412).

24. На дротині ACB висить ліхтар C. Вага його $= 8$ кг. Яке напруження дроту в напрямі AC (рис. 413)? $\angle C = 120^0$.

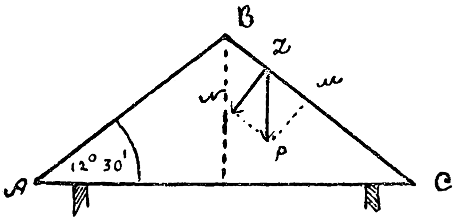


Рис. 412.

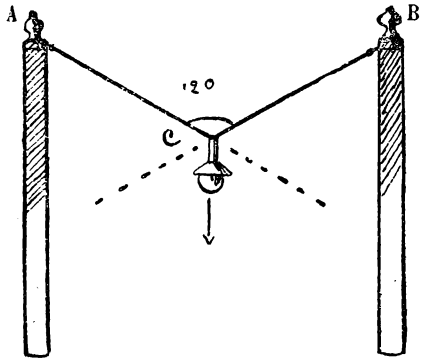


Рис. 413.

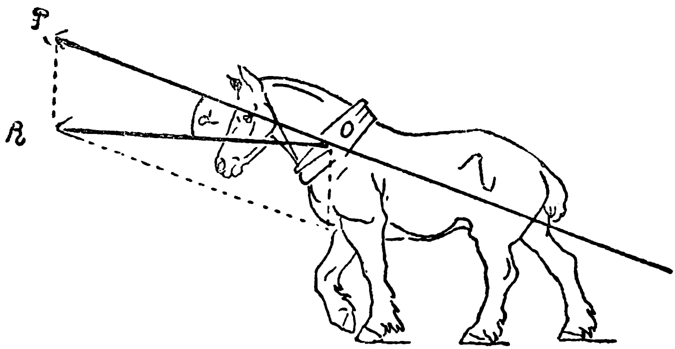


Рис. 414.

25. Кінь везе віз з напруженням $P = 80$ кг. Голобля з горизонтом утворює кут $= 17^0 20'$ (рис. 414).

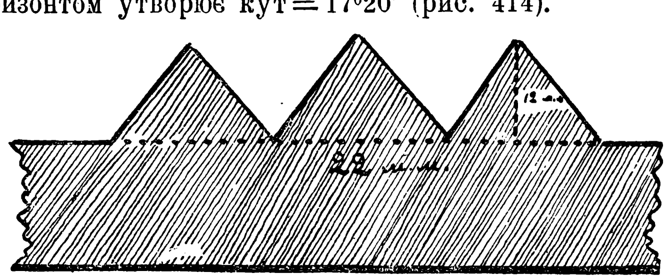


Рис. 415.

Яка сила R рухає цей віз в горизонтальному напрямі?

26. Обчисліть кут при вершині цієї пили, коли кожен зубець має 22 мм завширшки та 12 мм заввишки (рис. 415).

27. Треба зробити на колі 10 дірок на віддаленні 4 см одну від одної. Якого діяметра коло треба для цього взяти?

28. З круглої колоди, що має діяметр 46 см, треба обтесати правильний восьмикутний брус. Який завширшки бік буде в цьому брусі?

29. Вісі двох шестернів перетинаються під прямим кутом. Завширшки вони: $AB = 40$ см, $AC = 20$ см (рис. 416).

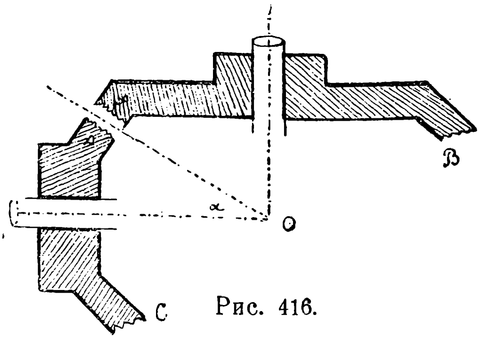


Рис. 416.

Який кут утворюють зубці кожної шестерні з своєю віссю?

Розділ 15.

ПЛОЩИНИ ТА ПРОЄКЦІЇ.

52. Площина й точка.

§ 187. Що таке плоска поверхня або площина.

Дослід. На столі лежить аркуш картону (рис. 417).

Кладіть на поверхню картону в найрізноманітніших напрямках просту лінію (край лінійки, то-що) так, щоб дві які-небудь точки простої лежали на поверхні картону.

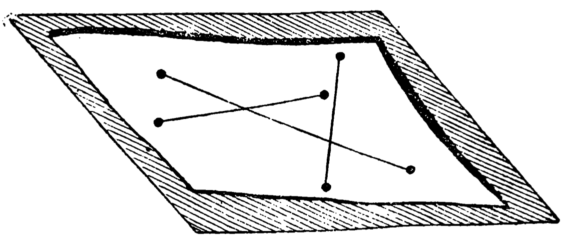


Рис. 417.

Коли виявиться, що всі проміжні точки простої лежатимуть на нашій поверхні, тоді таку поверхню звемо плоскою поверхнею або площиною.

Отже плоскою поверхнею або площиною ми звемо поверхню, що має таку властивість: проста, що з'єднує дві будь-які точки на цій поверхні, лежатиме на ній і всією рештою проміжних точок.

§ 188 Скількома точками визначається положення площини.

Запитання. Чому тринога стоїть на площині нерухомо, а табуретка, що має чотири ніжки, може хитатися?

Дослід 1. Поставте, нарешті, три олівці будь-які заввишки і, вважаючи гостряки їхні за геометричні точки, спробуйте провести через них площину (рис. 418).

Поклавши плоский шматок картону на дві обрані точки (*А* й *В*), обертайте його доти, доки він не ляже на третю точку *С*. Таким чином, через ці три точки можна провести тільки одну площину.

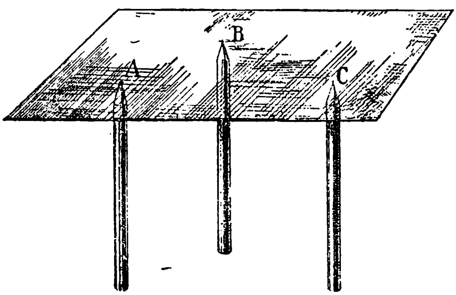


Рис. 418. Через три точки *А*, *В* й *С* можна провести одну тільки площину.

Дослід 2. Розмістіть три ваші олівці так, щоб гострячки їхні лежали на одній простій.

Скільки площин можна провести через ці три точки?

Висновок. Отже, щоб визначити положення площини, досить показати на ній положення трьох яких-небудь точок, що не лежать на одній простій лінії.

53. Площина та проста лінія.

§ 189. Проста, перпендикулярна до площини.

Задача. Колесо обертається в площині, що перпендикулярна до віси *АВ* (рис. 419). А який кут утворюють з цією віссю всі шпиці колеса?

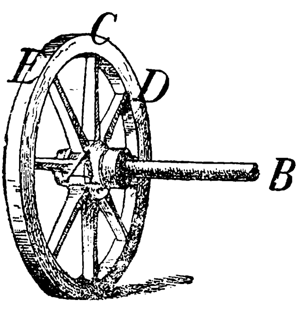


Рис. 419.

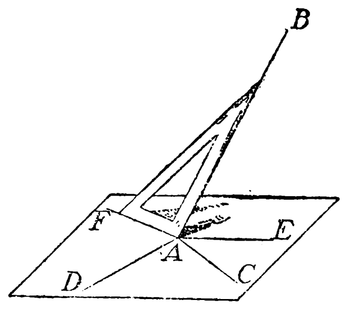


Рис. 420.

Дослід. Примістіть олівець *BA* так, щоб один кінець його (на рис. 420 кінець *A*) лежав на площині. Через точку *A* проведіть на площині декілька простих ліній (*AC*, *AD*, *AE* та *AF*).

Коли ви поставите олівець так, щоб він був перпендикулярний до однієї тільки простої (*AF*), то олівець цей може утворювати косі кути з простими *AC*, *AD* і т. д.

Тепер почніть нахиляти просту *BA* так, щоб кут *BAF* зоставався ввесь час прямий.

Коли ви поставите олівець так, щоб він був перпендикулярний до двох простих (*AF* та *AD*), нарисованих на площині,

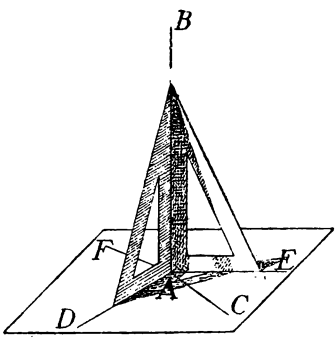


Рис. 421.

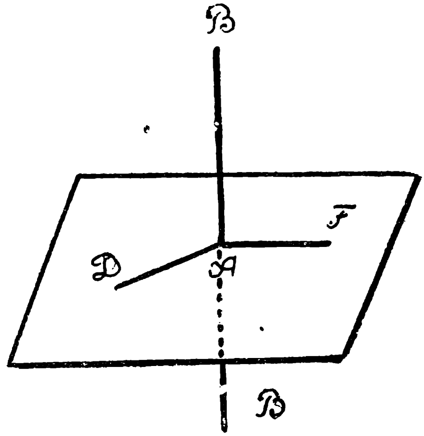


Рис 422.

то олівець цей буде перпендикулярний до всієї решти простих, що лежать на нашій площині й проходять через основу олівця (рис. 42[illegible]).

(Перевірте це косинцем!).

Висновок 1. Простою, перпендикулярною до площини, звуть таку лінію, що утворює прямі кути з усіма простими на площині, які через її основу проходять. (Через точку *A* на рис. 421).

Висновок 2. Коли ми хочемо довідатить, чи буде наша проста (напр. *BA* на рис. 422) перпендикулярна до площини, то досить пересвідчитися тільки в тому, що вона перпендикулярна до двох яких-небудь простих, нарисованих на нашій площині.

§ 190. Похила проста та її проєкція на площину.

Задача. Щоб телеграфний стовп міцніше стояв, його прикріплено до землі двома дротами *BC* та

BA (рис. 423). Знайдіть проєкції цих дротів на поверхню землі.

Дослід 1. Візьміть плоский шматок картону й поставте похило до нього дротик (рис. 424). Один кінець дротика спирається на площину. З другого кінця *B* спустіть на площину перпендикуляр (*Bb*). З'єднайте простою лінією основу *A* похилої та основу *b* перпендикуляра. Точку *b* будемо звати проєкцією точки *B*, а відтинок простої *Ab* назвемо проєкцією нашої похилої *AB* на площину.

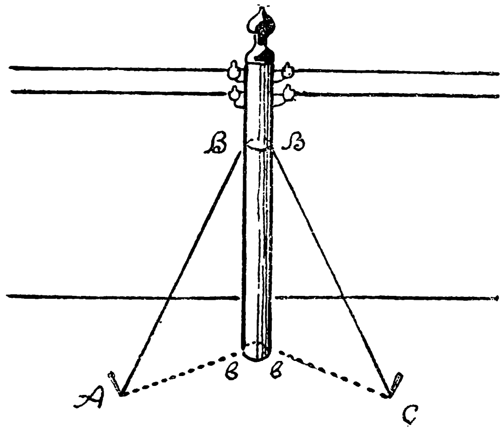


Рис. 423.

Почніть підіймати вгору кінець *B* похилої *AB*. Як змінятиметься проєкція?

На що перетвориться проєкція відтинка *AB*, коли цей відтинок стане перпендикулярно до площини?

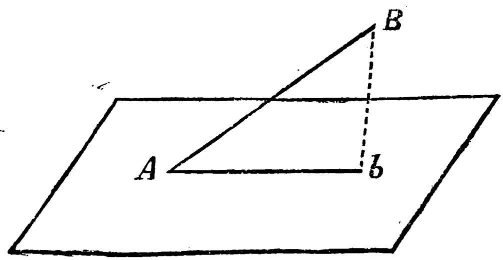


Рис. 424.

Дослід 2. Покладіть на стіл плоский шматок картону й примістіть над ним який-небудь відтинок простої (наприклад, олівець) так, щоб обидва його кінці були поза площиною. Як знайти проєкцію цієї простої на площину (рис. 425)?

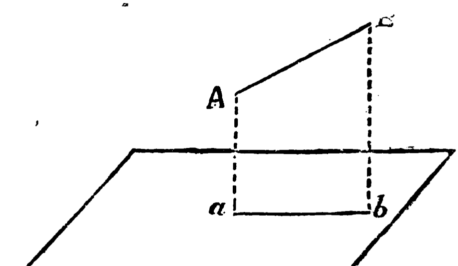


Рис. 425.

Змінюючи нахил відтинка *AB*, дослідіть, як від цього змінюється проєкція.

Порівняйте довжину здобутої проєкції (*ab*) з довжиною простої *AB*, коли ця проста зробиться рівнобіжна до нашої площини.

§ 191. Нівелювання. *Перший спосіб.* Зміряти висоту точки *A* від підгір'я *B* (рис. 426). В задачі треба знайти проєкцію лінії AB на вертикальну площину, цеб то зміряти висоту A_1D_1. Поставте в точці B прямовисно рейку (KB), поділену на

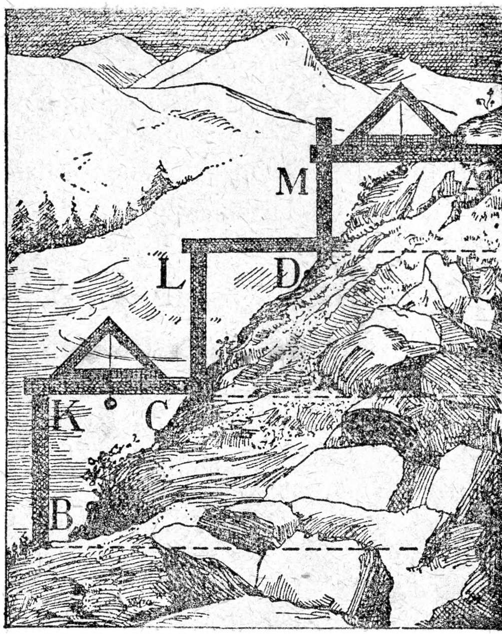


Рис. 426. Як нівелюють.

сантиметри, й на вершку її покладіть довгу лінійку (KC) так, щоб вона була позема (горизонтальна) (перевіряємо це за допомогою ватерпасу). Зазначивши на горбі точку C, де наша позема л н йка до-

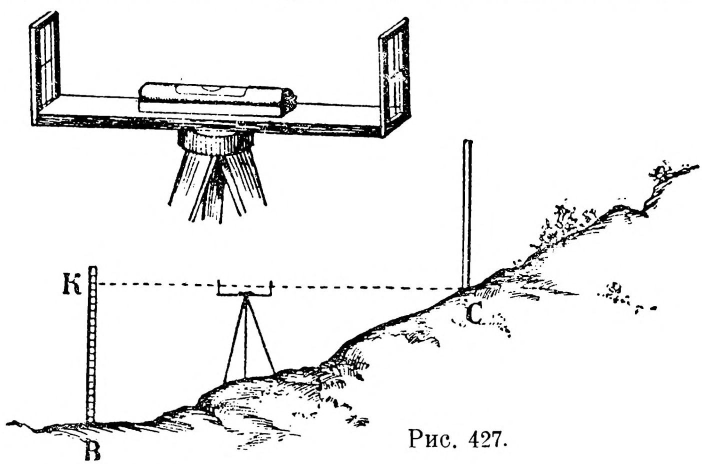


Рис. 427.

торкнулась до горба, перенесемо нашу рейку (KB) в цю точку C і, встромивши її сторч, ще раз покладемо на неї позему лінійку

LD і позначимо на горбі точку D. Йдучи що-разу вище, ми досягнемо вершини горба A. У точці A покладемо лінійку AM не на вершок рейки DM, а з боку її так, щоб ця лінійка була позема. Вимірявши на рейці BK, LC і DM, ми знайдемо проєкції C_1D_1, B_1C_1, B_1A_1 й т. д. Звідси легко знайти й усю проєкцію A_1D_1, цеб-то знайти висоту точки A над підгір'ям B.

Другий спосіб. Коли гора не крута, то нівелювати поземою лінійкою незручно (чому?). Тоді можна використати такий нівелір (рис. 427). Поміркуйте, як таким невеліром зробити „нівелювання“.

54. Дві перпендикулярні площини.

§ 192. Що таке двогранний кут. Двосхилий дах складається з двох площин, що перетинаючись одна з одною, утворюють двогранний (двостінний) кут. Ці площини звуть гранями (стінками) цього кута, а ту просту LM (гребінь даху), по якій перетинаються грані, звуть рубом двогранного кута.

§ 193. Як виміряти двогранний кут його лінійним кутом.

Задача. Як виміряти кут нахилу даху, що утворюється біля гребеня.

Дослід. На рубі (гребені даху) AB двогранного кута візьміть яку-небудь точку, наприклад, O (рис. 428). Через цю точку в кожній грані нарисуйте по простій лінії, перпендикулярній до руба AB. Матимете плоский кут COD, що його звуть лінійним кутом двогранного кута.

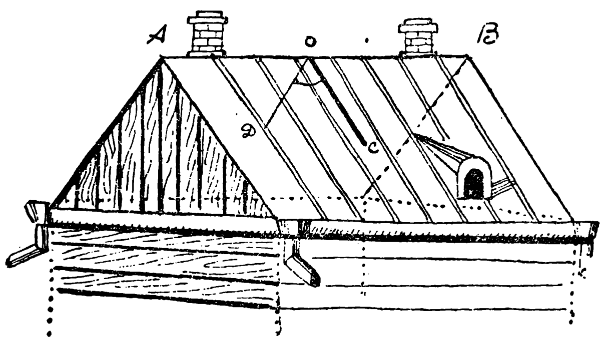


Рис. 428

Коли двогранний кут даху почне збільшуватися, то разом з ним почне збільшуватися й лінійний кут. Коли зменшується двогранний кут, то зменшується й його лінійний кут.

Можна довести, що двогранні кути пропорціональні будуть до своїх лінійних.

От чому про розмір (великість) двогранного кута можна судити на підставі розміру його лінійного кута.

Як-же виміряти цей лінійний кут? Можна зробити так. Взявши малку (§ 19), розсунути ніжки її на кут, що дорівнює лінійному. Наклавши малку на транспортир, ви знайдете, скільки градусів буде в лінійному куті. Замість малки зручніше використати приладдя „г о н і о м е т р“, що являє собою сполучення малки з транспортиром. Довідайтеся сами, як таким приладдям виміряти лінійний кут.

§ 194. Площини, перпендикулярні одна до одної.

Задача. Під яким кутом перетинаються дві сусідні стінки цього бруса?

Накладаючи косинець, ви переконаєтесь, що лінійний кут двогранного кута, утвореного двома сусідніми стінками бруса, прямий (рис. 429).

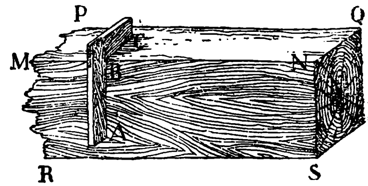


Рис. 429.

Висновок. Такий двогранний кут, що його лінійний кут прямий, звуть п р я м и м д в о г р а н н и м к у т о м, а про площини кажуть, що вони о д н а д о о д н о ї п е р п е н д и к у л я р н і.

55. Рівнобіжні площини.

§ 195. Як узнати, чи рівнобіжні площини. Всі ці коліщата настромлені (рис. 430) перпендикулярно до дротини.

Зверніть увагу, в якому напрямкові йдуть площини цих коліщат одна що-до одної. Площини цих коліщат, хоч-би як далеко ви їх подовжували, ніколи одна з одною не зустрінуться.

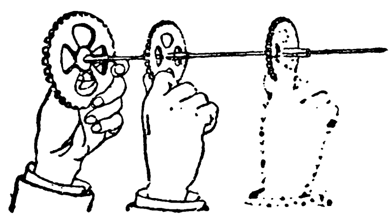


Рис. 430 Площини цих коліщат рівнобіжні. Через що?

Такі площини, що не перетинаються, хоча-б як далеко їх подовжувати, звуть рівнобіжними.

Отже, к о л и д в і п л о щ и н и п е р п е н д и к у л я р н і д о т і є ї с а м о ї п р о с т о ї, т о в о н и б у д у т ь о д н а з о д н о ю р і в н о б і ж н і.

56. Проєктування на дві площини.

§ 196. Проєктування точки на дві площини. Проєктувати на одну тільки площину не завжди досить. Наприклад, знаючи довжину цієї проєкції та кут, що утворює самий відтинок AB

з площиною, можна довідатися про довжину відтинка *AB* (§ 190), але не можна з'ясувати напрямки цього відтинка в

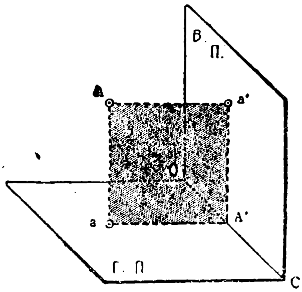


Рис. 431. Проєктування точки *A* на дві площини проєкцій (вертикальну та горизонтальну).

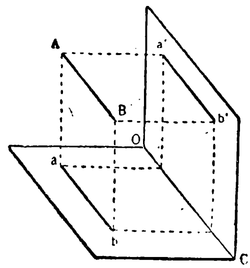


Рис. 432. *AB* рівнобіжна до обох площин.

просторі. Ось чому завжди проєктують точки нашої фігури не на одну площину, а на дві; за такі площини проєкцій беруть грані (стінки) прямого двогранного кута, при чому цей кут ставлять так, щоб одна площина його була горизонтальна, а друга вертикальна.

§ 197. Проєктування відтинка *AB* на дві площини. Розгляньте уважно вигляд про-

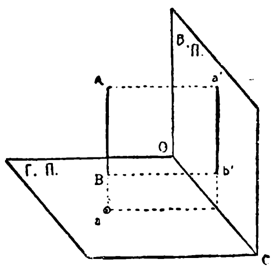


Рис. 433. *AB* перпендикулярна до одної та рівнобіжна до другої площини. (До якої саме?).

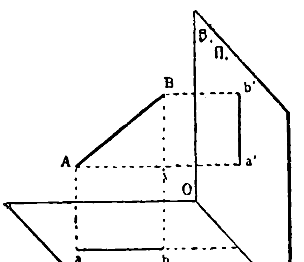


Рис. 434. *AB*—похила до обох площин.

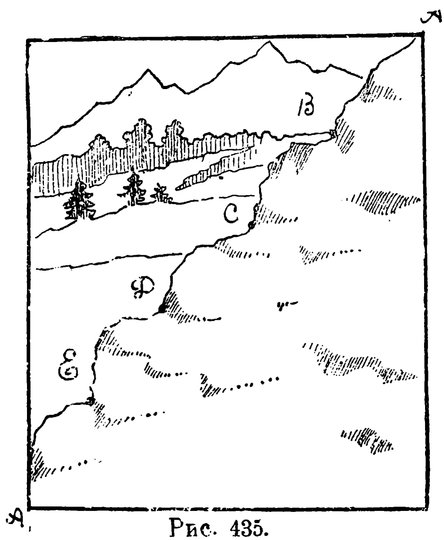


Рис. 435.

єкції відтинка простої *AB* на горизонтальну та вертикальну площини. Покажіть у натурі, який напрямок має відтинок *AB* в просторі.

А чи не навчитеся ви й сами рисувати ці проєкції?

§ 198. *Задача.* З н а й д і т ь п р о є к ц і ю г о р и AA_1 н а д в і п л о щ и н и п р о є к ц і й: н а г о р и з о н т а л ь н у п л о щ и н у й н а в е р т и к а л ь н у (рис. 435).

Инакше кажучи, довідайтеся:

1) На скільки точка A вища за точку A_1.

2) Яке віддалення між точками A та A_1 по горизонтальній лінії.

57. Проєктування на три площини проєкцій.

§ 199. Три площини проєкцій. Коли ми проєктуємо на дві площини, ми можемо нарисувати нашу річ тільки з двох боків:

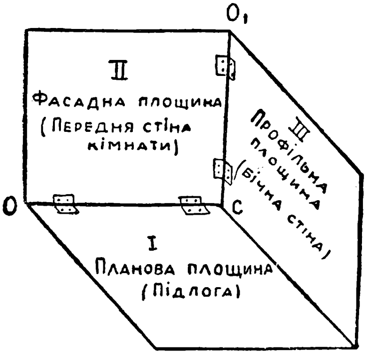


Рис. 436.

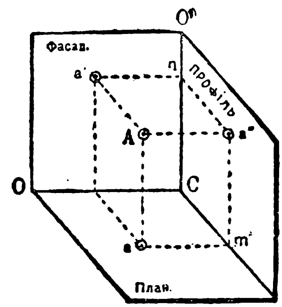


Рис. 437.

спереду й згори. А уявити її вигляд збоку не можна? А тому, коли бажано уявити вигляд нашої речи з усіх боків, то проєктують її на три взаємно перпендикулярні площини.

Ці площини мають такі назви:

1) Передню вертикальну площину звуть ф а с а д о м.

2) Бічну вертикальну—п р о ф і л е м.

3) Горизонтальну площину (підлогу) звуть п л а н о м (рис. 436, 437).

§ 200. Проєктування точки та простої. На малюнках 438, 439, 440 подається основні випадки положення в просторі точки й відтинка та їх проєкції на 3 площини. Розгляньте уважно всі ці проєкції й обміркуйте,

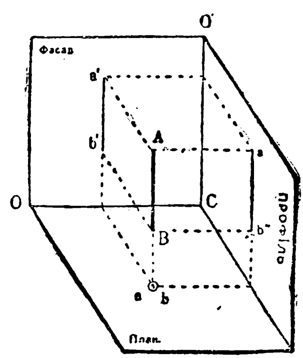


Рис. 438.

яке положення матиме відтинок в просторі. Покажіть його положення в натурі!

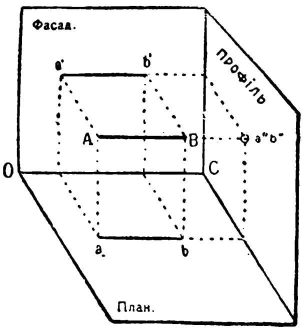


Рис 439.

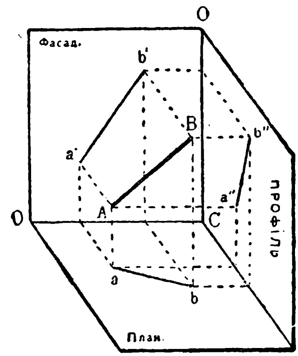


Рис. 440.

§ 201. *Задача 1.* Коли інженери будують будинок, то вони перш за все рисують проєкції його в трьох площинах. Бо тільки тоді вони зможуть добре уявити собі форму та розміри цього

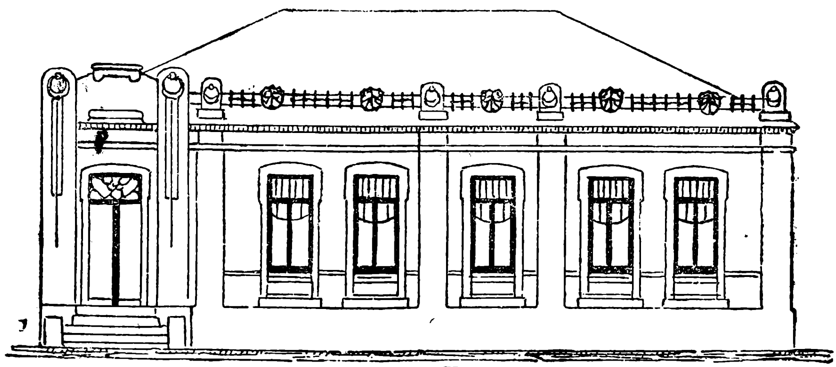


Рис. 441. Чоло.

Маштаби

Чола — 5 4 3 2 1 0 5 10 15 — в 1 дм. — 2 саж.

Плану будинка — 10 5 0 1 2 3 — в 1 дм. — 4 саж.

Плану садиби (рис. 359). — 10 5 0 1 3 5 7 — в 1 дм. — 10 саж.

будинка. Тут (рис. 441, 442, 443) дається: план будинка фасад його та профіль (пригадайте попередній §).

Вивчіть докладно на цих трьох проєкціях цей будинок, а саме, змірявши на плані, що буде потрібно, дайте відповідь на такі запитання:

1. Яка площа тієї садиби, де збудовано будинок? Яка частина цієї садиби під будівлями, а яка—під подвір'ям та садом?

2. На якому віддаленні від вулиці збудовано цей будинок, і яка завширшки вулиця?

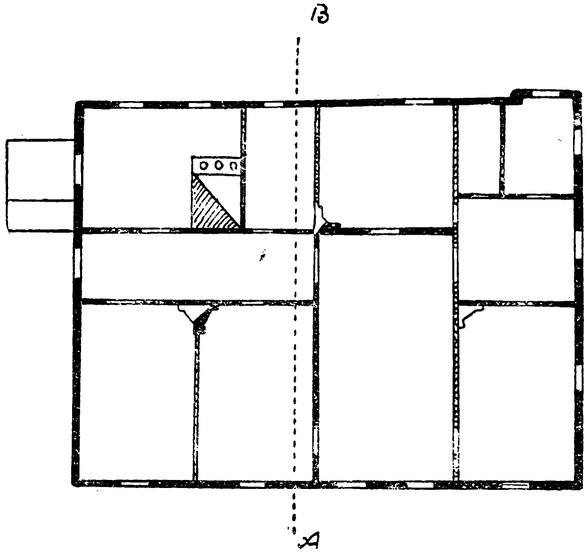


Рис. 442. План.

3. Яке заввишки й завдовжки чоло будинку? Який заввишки дах на будинкові? Скільки сходів у ґанку і який він буде заввишки?

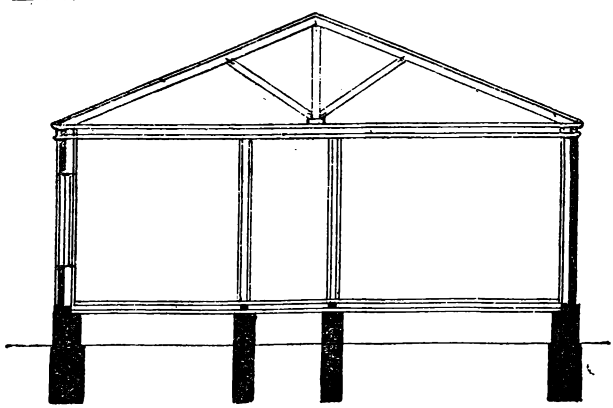


Рис. 443. Розріз по *AB*.

4. Який завглибшки буде фундамент? Які завтовшки стіни: яку частину їх зроблено з цегли, а яку—з дерева?

5. Яку площу має цей будинок?

6. Скільки кімнат у цьому будинкові? Які з них перехідні? Скільки дверей, скільки груб у цьому будинкові?

7. Виміряйте площу підлоги в кожній кімнаті.

8. Скільки вікон у цьому будинкові? Виміряйте площу вікон. Які заввишки ці вікна?

9. Щоб кімната освітлювалася нормально, треба, щоб площа вікон була не менша як $^1/_{10}$ частина площі підлоги. Чи додержано цієї норми в нашому будинкові?

10. Які заввишки будуть кімнати?

11. У цьому будинкові зараз — дитячий притулок. Нормально на кожну дитину повинно припадати не менш як 1 кубічний сажень повітря.

Виміряйте кубатуру повітря в цьому будинкові і дізнайтеся, скільки дітей за нормальних умов можна було-б умістити в ньому.

Задача 2. Кут під'йому (рис. 426) $\angle B = 25^0$. Довжина $AB = 320$ саж.

Обчисліть, на якому віддаленні буде верховина A від її підніжжя B, рахуючи в напрямку поземому.

Пояснення. Треба на таблиці знайти cs $\angle$ 25°. Цей cs покаже, яку частину гіпотенузи AB становить потрібний нам катет B[illegible]

Задача 3. Будуючи будинок, інженери рисують проекцію будинка на горизонтальну площину (її звуть п л а н о м) і дають крім того проекції цього будинку на вертикальні площини (так звані п о в з д о в ж н і й п о п е р е ч н і розрізи будинка).

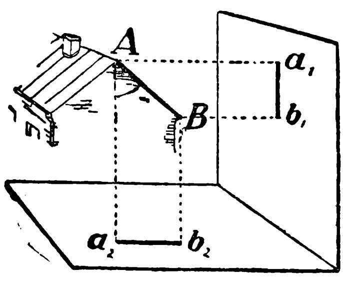


Рис. 444.

На рис. 444 дано поперечний розріз даху. Цей дах треба спроектувати на горизонтальну площину (нарисувати план його) й дати повздовжній його розріз.

Кроква AB завдовжки 6 метрів, а кут під'йому $\angle A = 28^0$. Обчисліть, яка завдовжки буде проекція крокви AB на плані (a_2b_2) і в повздожньому розрізі (a_1b_1).

ВПРАВИ.

1. Зробіть нівелювання вашої вулиці.
2. Виміряйте висоту берега у вашої річки.

3. Обміркуйте, як користуючись нівеліром, виміряти віддалення від вершини горба до його підніжжя в горизонтальному напрямкові.

4. Знайдіть проекції цих точок на вертикальну та на горизонтальну прості лінії (рис. 445).

5. Похила проста $AB = 30$ см перетинає площину під

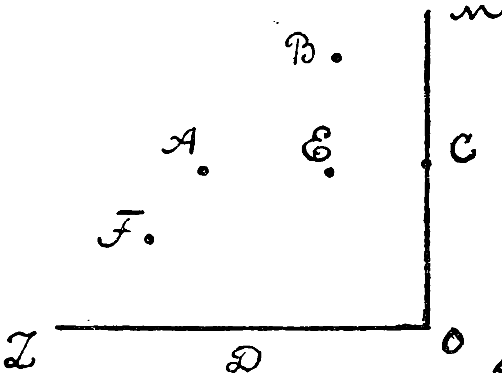


Рис. 445

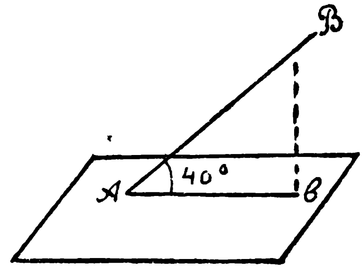


Рис. 446.

кутом 40°. Обчисліть довжину проекції AB на цю площину [1]) (рис. 446).

6. Обчисліть довжину проекції ab (рис. 447), коли проста AB утворює з площиною кут α.

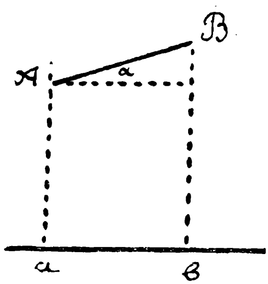


Рис. 447

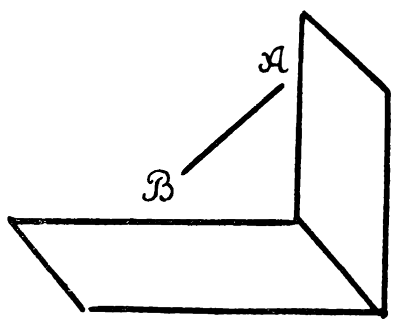


Рис. 448.

7. Знайдіть проекцію цієї лінії на горизонтальну та вертикальну площини.

8. Відтинок $AB = 10$ см. Точка A лежить на віддаленні 20 см, а точка B — 14 см від горизонтальної площини. Яка завдовжки проекція AB на цю площину (рис. 448)?

---

[1]) В цих задачах треба користати з тригонометрії.

Розділ 16.

ПРИЗМА, ЯК ЗРАЗОК МНОГОГРАННИКА.

58. Різні види призм.

§ 202. Якого вигляду бувають многогранники. На цьому рисункові ми бачимо декілька брусків різної форми. Дослідімо уважніше форму їх. Подивімося, що в них схожого, та чим вони відрізняються один від одного. Перш за все кидається в вічі, що кожен брусок з усіх боків обмежений площинами. Ці площини звуть гранями (або стінками), а тому такий брусок будемо звати многогранником (або многостінником).

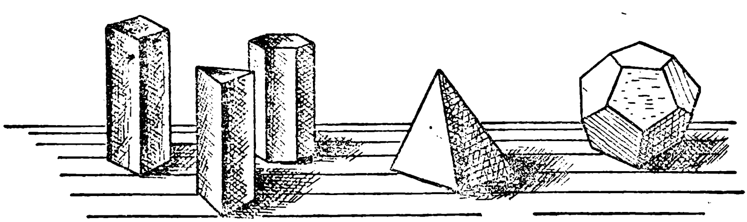


Рис. 449

Кожні дві грані, перетинаючись одна з одною, дають прості лінії. Ці прості звуть рубами. Покажіть на многогранникові ту точку, в якій перетинаються руби. Точку цю звуть вершиною многогранника.

§ 203. Що таке призма. З усіх цих многогранників ви поки що знаєте такий (рис. 450). Це — прямокутна призма. Виберіть з усіх многогранників такі, що схожі з прямокутною призмою. Ви матимете такі многогранники (рис. 450, 451, 452, 453).

Всі вони схожі ось чим: По-перше, всі вони мають дві рівні й одну з одною рівнобіжні основи. По-друге, всі бічні руби в них завдовжки однакові й один з одним рівнобіжні.

Тіла, що мають такі властивості, звуть призмами.

Отже, всі наші коробки мають форму призми.

Різні види призми. А чим ці призми одна від одної відрізняються?

Перша (рис. 450) призма має чотири бічні грані, тому її звуть чотиригранною.

Друга призма (рис. 451) має три бічні грані, тому її звуть тригранною.

А як назвати третю призму (рис. 452)?

Зверніть ще увагу на останню, четверту призму (рис. 453). Подивіться на напрямок її бічних рубів. Тимчасом як у попе-

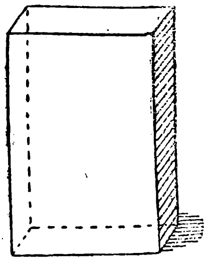


Рис. 450.

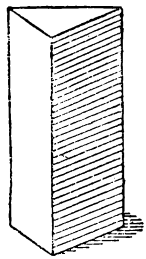


Рис. 451.

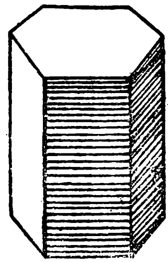


Рис. 452.

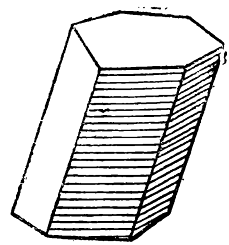


Рис. 453.

редніх призмах бічні руби були перпендикулярні до основи, у цій призмі бічні руби йдуть похило.

Призму, у якої бічні руби перпендикулярні до основи, будемо звати прямою.

Призму з похилими бічним рубами будемо звати похилою.

§ 204. Рівнобіжностінник. Дуже часто ми бачимо чотиригранну призму, в якій основи паралелограми. Таку призму звемо рівнобіжностінником.

Коли бічні руби в рівнобіжностінника йдуть похило до основ, то такий рівнобіжностінник звемо похилим. Поверхня його має шість рівнобіжників.

Виріжте з мила рівнобіжностінник, щоб основами в нього були рівнобіжники, а бічні руби до основ перпендикулярні. Бічними гранями в нього будуть прямокутники. Такий рівнобіжностінник звемо прямим.

Коробка на сірники—це рівнобіжностінник, його основи—прямокутники. Поверхня його складається з шости прямокутників. Такий рівнобіжностінник звемо прямокутним рівнобіжностінником (раніш ми звали його прямокутною призмою).

59. Як виміряти поверхню призми.

§ 205. Як виміряти поверхню прямої призми.

Задача. Треба обклеїти папером бічну поверхню коробки, що має форму прямої призми. Скільки на це піде паперу?

Коли розгорнути бічну поверхню коробки в одну площину, то матимемо прямокутника, в якого основа—периметр основи призми, а висота—бічний руб її.

Отже, **щоб виміряти бічну поверхню прямо призми, треба периметр її основи помножити на бічний руб.**

§ 206. Як виміряти поверхню похилої призми.

Візьміть будь-яку похилу призму, напр., таку (рис. 454).

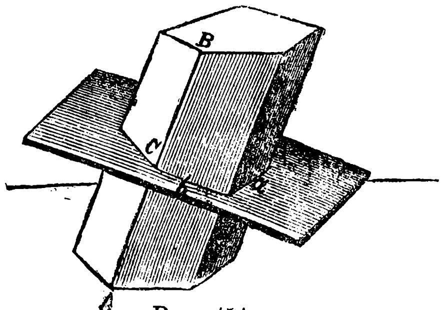


Рис. 454.

Обчисліть бічну її поверхню. Для цього треба скласти площі всіх бічних гранів її; вони мають форму паралелограмів.

У цих паралелограмів за основу зручніше вважати бічний руб (AB). Здобути високу паралелограмів можна так. Розріжте бічну поверхню площиною, перепендикулярною до бічних рубів (рис. 454). Тоді кожен бік цього перпендикуляного розтину (a, b, c...) буде висотою наших паралелограмів.

Формула. Нехай бічний руб призми AB має l лінійних одиниць.

Висота першої грани	має a	лін.	од.
Висота другої грани	„ b	„	„
Висота третьої грани	„ c	„	„
Висота четвертої грани	„ d	„	„
Висота п'ятої грани	„ e	„	„

Тоді бічна поверхня має

$S = (a\,.\,l + b\,.\,l + c\,.\,l + d\,.\,l + e\,.\,l)$ кв. од.,

або $S = (a + b + c + d + e)\,l$ кв. од.

$a + b + c + d + e$ — це периметр перпендикулярного розтину. Нехай периметр цей має $p = a + b + c + d + e$ лін. од. Тоді матимемо таку формулу:

$$S = p\,.\,l$$

§ 207. Як виміряти поверхню призми. Знаючи бічну поверхню призми, легко обчислити й усю повну поверхню її. Для цього досить до бічної поверхні додати подвійну площу будь-якої основи її.

60. Як міряти об'єм призми.

§ 208. Об'єм прямокутного рівнобіжностінника. Щоб виміряти об'єм прямокутного рівнобіжностінника, вивели ми таке правило: щоб знайти, скільки кубічних одиниць має об'єм прямокутного рівнобіжностінника, треба зміряти висоту його лінійними одиницями й площу основи відповідними квадратовими одиницями. Перемноживши ці числа, ми знайдемо, скільки відповідних кубічних одиниць матиме об'єм нашого прямокутного рівнобіжностінника. Перечитайте ще раз увесь цей розділ і згадайте, як ми це правило вивели (розділ 8).

Запам'ятати це правило в такому вигляді незручно: дуже воно довге.

Скажемо його коротше:

Об'єм прямокутного рівнобіжностінника дорівнює площі його основи, помноженій на висоту.

(Яку робимо помилку, коли даємо таку коротку формулу цього правила?)

§ 209. Об'єм прямого рівнобіжностінника.

Задача. Який об'єм має такий кусок мила (рис. 455)?

Цей кусок має форму прямого рівнобіжностінника; в основі його лежить рівнобіжник, а бічні руби— перпендикулярні до основи.

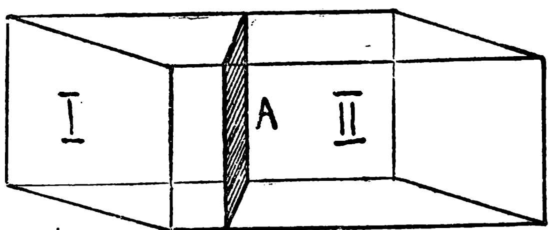


Рис. 455.

Перетворимо його на рівнобіжностінник з прямокутником в основі. Для цього розріжте його площиною, перпендикулярною до основ, на два куски I та II. Помінявши їх місцями, ви й одержите потрібний рівнобіжностінник (рис. 456). Об'єм цього останнього дорівнюватиме площі основи, помноженій на висоту. Площі основи й висота в наших рівнобіжностінниках відповідно рівні одна з одною (через що?), а тому об'єм нашого прямого рівнобіжностінника дорівнює площі основи, помноженій на висоту.

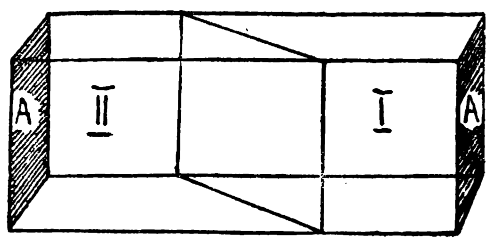


Рис. 456.

§ 210. Як виміряти об'єм тригранної прямої призми.

Задача. З чавуну треба вилити таку підставку (рис. 457). Якого об'єму форму треба для цього наготовити?

Щоб розвязати цю задачу, треба навчитись виміряти об'єм триграної призми.

Дослід. Виріжте з мила пряму т р и г р а н н у призму (рис. 458). Спробуймо перетворити її на рівновелику їй чотиригранну призму.

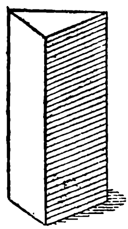


Рис. 457.

Проведімо середню лінію DE верхньої й спідньої основи її й через ці дві рівнобіжні прості проведімо площину. Розріжмо по цій площині нашу призму на дві частини. Меншу частину повернімо навколо руба DD_1 (рис. 459) так, щоб грань BDD_1B_1 зіллялася всіма точками з рівною їй гранню ADD_1A_1. Тоді триграння наша призма перетвориться на рівновелику їй чотиригранну (рис. 460). Вимірявши об'єм цієї останньої, ви знайдете разом з тим об'єм і нашої призми.

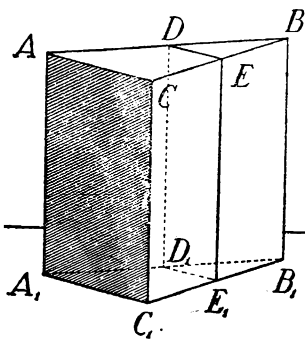


Рис. 458.

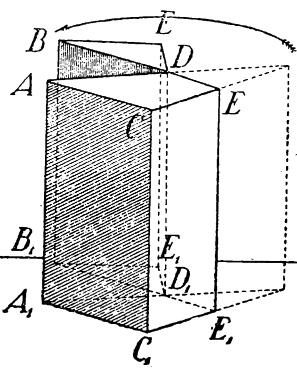


Рис 459.

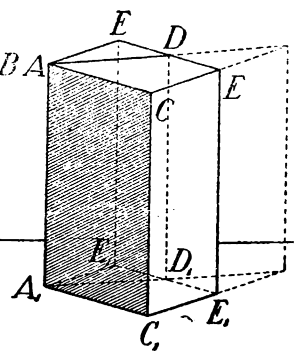


Рис. 460.

Площа основи й висота чотиригранної призми, що здобули ми, відповідно рівні площі основи та висоті даної триграної призми; тому ми, щоб виміряти об'єм нашої триграної призми, матимемо таке правило: о б'є м т р и г р а н н о ї п р и з м и д о р і в н ю є п л о щ і о с н о в и ї ї, п о м н о ж е н і й н а в и с о т у.

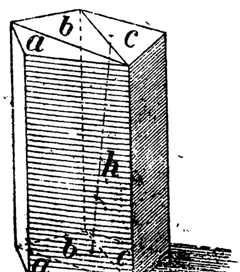


Рис. 461.

§ 211. Як вивести формулу, щоб виміряти об'єм многогранної призми. Треба ще розглянути многогранну призму. Її легко розбити на ряд триграних призм (рис. 461).

В и с о т и в цих призмах завдовжки всі однакові; нехай к о ж н а з н и х має h лінійних одиниць. Коли площа основи першої тригранної призми має a кв. один., площа другої—b кв. один., площа третьої—c кв. один., то матимемо:

Об'єм першої призми $= a \,.\, h$ куб. од.

Об'єм другої призми $= b \,.\, h$ куб. од.

Об'єм третьої призми $= c \,.\, h$ куб. од.

Тому об'єм всієї призми $= ah + bh + ch$ куб. од.

Винесімо h за дужки:

Об'єм призми $= (a + b + c)\, h$ куб. од.

Коли площа всієї основи призми має:

$a + b + c = B$ кв. од.,

а об'єм її має V куб. од.,

то тоді.

$$V = B \,.\, h$$

§ 212. Як виміряти об'єм похилої призми.

Задача. Виміряйте об'єм зрізаного навкоси, тряму (рис. 462).

Рис. 462

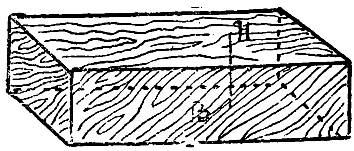


Рис. 463.

Цей трям являє собою похилу призму.

Коли порізати її на тоненькі шари площинами, рівнобіжними до її основи, й зсунути ці шари, то можна похилу призму перетворити на пряму. Зробіть цей дослід на колоді карт (рис. 464).

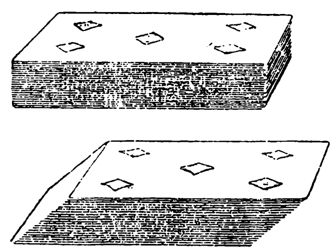


Рис. 464.

Чим тонші будуть ці шари, тим з меншою помилкою можна вважати одержане тіло за пряму призму.

Ці призми мають однакові основи.

За висоту похилої призми будемо вважати перпендикуляр, спущений з верхньої основи на спідню. Висота наших похилої та прямої призм однакові.

Об'єм прямої призми дорівнює добуткові з площі основи та висоти, а тому й

об'єм похилої призми дорівнює площі основи, помноженій на висоту.

$$V = B \,.\, H$$

ВПРАВИ.

1. Виміряйте об'єм вашої кімнати, взявши на увагу піч, виступи біля вікон, дверей, то-що.

2. Коли будували залізничу колію, то довелося викопати рів з трикутним розрізом 1,5 метра завширшки та 1,2 метра завглибшки. Скільки важить земля, що треба її викинути з цього рову на протязі 1 кілометра, коли кожен кубічний сантиметр землі важить 1,7 грама? Скількома підводами можна вивезти цю землю, коли кожна підвода бере не більш як 1 тону?

3. Із прямокутної смужки паперу розміром 18 см × 10 см склеєно бічну поверхню правильної шостикутної призми, у якої бік 10 см був висотою. Який об'єм призми?

4. Розріз залізничного насипу такий (рис. 465). Скільки кубічних метрів землі витрачено на 2 км цього насипу?

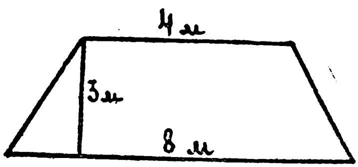


Рис. 465.

5. Поперечний переріз каналу має форму рівнобічного трапеза з основами 16,5 м та 8,5 м. Бік його 5 м. Скільки води протікає через цей розріз що-секунди, коли скорість води 1,6 км/год.?

6. Дах двосхилого хліва має горище такої форми (рис. 466). Скільки пудів сіна можна покласти на це горище? (Куб. метр сіна важить 4,3 п.).

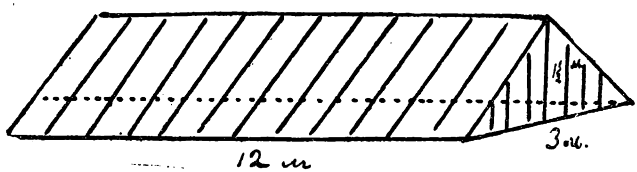


Рис. 466.

7. Основа мідної платівки має форму трикутника. Основа трикутника 7,5 см. Висота—4 см. Вага платівки—13,2 грама. Яка вона завтовшки? (Про питому вагу міди довідайтеся сами).

8. Який об'єм має призма 2,6 м заввишки, коли в основі її лежить рівнораменний трикутник, бік у якого = = 1,3 м, а основа = 1 м?

9. Колона має 3,8 метра заввишки. В основі її лежить правильний шостикутник, бік у якого = 0,34 м. Який об'єм та яка бічна поверхня цієї колони?

10. Обчисліть об'єм похилої призми, що має в основі правильний трикутник з боком 10 см. Висота її 2 м.

11. Обчисліть повну поверхню похилої призми, що має в основі квадрат з боком 20 см. Бічний руб її = 50 см. Бічна грань являє собою рівнобіжника з гострим кутом 30°.

12. Скільки повітря вміщає цей намет, коли він

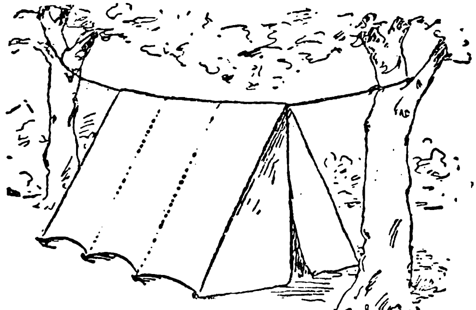


Рис. 467.

(рис. 467) завширшки $2\frac{3}{4}$ м, завдовжки $6\frac{1}{2}$ м, заввишки $3\frac{1}{2}$ м?

Розділ 17.

ПІРАМІДА.

61. Різні види пірамід.

§ 213. Грані пірамід. Дах на будці „Ларка“ має форму такого геометричного тіла (рис. 468). Чи можна назвати це тіло многостінником (многогранником)? Чому? Чим відрізняються бічні грані цих многостінників від бічних гранів призми?

Скільки основ було в призми? А в цього многостінника?

§ 214. Руби піраміди. Як звуть ті прості лінії, що по них перетинаються грані? Покажіть бічні руби в цих многостінників (рис. 469, 470, 471). Ми знаємо, що бічні руби в призми один з одним рівнобіжні. А гляньте на бічні руби цих многогранників: чи вони рівнобіжні?

Рис. 468. Піраміда.

§ 215. Вершина піраміди. Усі бічні руби в цих многостінниках перетинаються в одній точці. Покажіть її. Цю точку, звуть в е р ш и н о ю.

§ 216. Що таке піраміда. Такі многостінники, що їх бічні грані мають форму трикутників, а бічні руби перетинаються в одній точці, звуть п і р а м і д а м и.

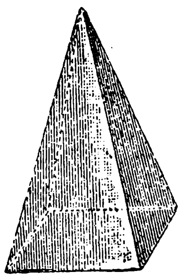


Рис. 469.

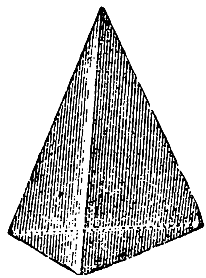


Рис. 470.

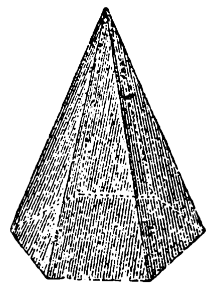


Рис. 471.

П і р а м і д и.

§ 217. Різні види пірамід. Скільки бічних гранів має перша піраміда (рис. 469)? Тому що ця піраміда має чотири бічні грані, її звуть чотиригранною[1]) (або чотиристінною). У другої піраміди (рис. 470) бічних гранів—три. Як назвати її?

А як назвати третю піраміду (рис. 471)?

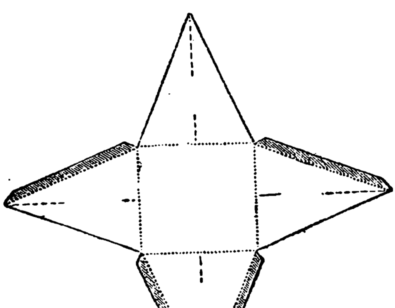


Рис. 472.

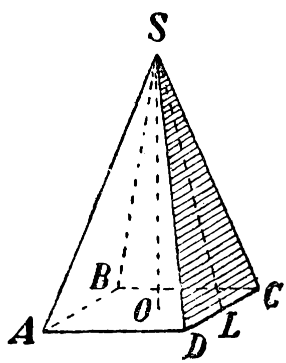


Рис. 473.

§ 218. Правильна піраміда. Зробіть з цієї викройки піраміду (рис. 472). Дослідімо її. У цій піраміді за основу є правильний

---

[1]) Цю піраміду можна ще назвати чотирикутною, бо в основі її лежить чотирикутник.

многокутник, а висота (SO) проходить через центр основи. Таку піраміду звемо *правильною*.

У правильної піраміди всі бічні руби один одному рівні, а бічні грані—однакові рівнораменні трикутники.

Проведіть висоти в цих рівнораменних трикутниках. Звемо їх *апотемами* піраміди (SL).

Чи рівні будуть апотеми в правильної піраміди? Через що?

§ 219. Апотеми та висоти в пірамід. Проведіть висоти в тих рівнораменних трикутниках, що з них складаються бічні грані піраміди. Звемо їх *апотемами* пірамід (рис. 473).

Чи будуть рівні ці апотеми в неправильної піраміди? Чому? А через що в правильній піраміді всі апотеми (SL) будуть рівні? Спустіть з вершини піраміди на основу перпендикуляр. Його звуть *висотою* піраміди.

У правильній піраміді висота (SO) пройде через центр основи.

62. Як виміряти поверхню піраміди.

§ 220. Як виміряти бічну поверхню правильної піраміди.

Задача. Треба покрасити дах будки (рис. 468). Скільки для цього треба купити фарби? (Щоб покрасити один квадратовий метр даху, треба 0,2 кг фарби).

Щоб розвязати цю задачу, треба навчитися виміряти бічну поверхню піраміди.

Щоб обчислити бічну поверхню піраміди, треба виміряти площі всіх тих трикутників, що є їй за бічні грані, і додати їх одну до одної.

У правильної піраміди бічні грані всі однакові; тому, щоб обчислити бічну поверхню її, досить буде виміряти площу однієї з них і помножити її на число всіх бічних гранів.

Знайдімо, наприклад, площу грани SDC (рис. 473). Для цього треба зміряти лінійними одиницями основу цього трикутника DC й висоту його SL (цеб-то апотему піраміди).

Нехай проста DC має . . . . a лін. один.

Апотема SL має . . . . l лін. один.

Тоді площа грани SDC має $^1/_2\, al$ кв. од.

Коли наша піраміда має n бічних гранів, то вся бічна поверхня піраміди має $P = \frac{1}{2} al \cdot n$ кв. од.

Дамо инший вигляд цьому виразові:

$$P = \frac{1}{2}(a \, . \, n) \; l$$

Але an—це периметр основи піраміди. Означмо це число літерою p.

Тоді в нас буде формула така:

$$P = \frac{1}{2} p \, . \, l,$$

цеб-то бічна поверхня правильної піраміди дорівнює половині периметра її основи, помноженій на апотему.

§ 221. Як виміряти повну поверхню піраміди. Щоб знайти повну поверхню піраміди, треба спочатку обчислити бічну її поверхню, а потім уже додати площу основи.

Приклад. У правильної чотиригранної піраміди бік основи = 6,5 см а апотема = 20 см. Обчислимо поверхню цієї піраміди:

$a = 6{,}5$ см, апотема $l = 20$ см.

Тоді периметр $p = 6{,}5$ см. $\times 4 = 26$ см.

Бічна поверхня $P = {}^{1}\!/_{2} \, . \, 26 . 20 = 260$ кв. см.

Площа основи $6{,}5 \times 6{,}5 = 42{,}25$ кв. см.

Повна поверхня = 260 кв. см + 42,25 кв. см = 302,25 кв. см.

63. Об'єм піраміди.

§ 222. *Задача.* Коли складали кошторис на збу-

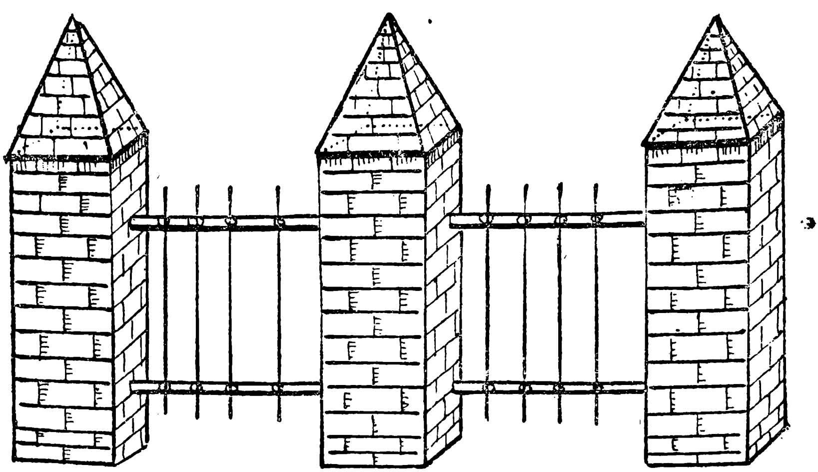


Рис. 474.

дування такого паркану, треба було обчислити скільки цеглин піде на колонки (рис. 474).

Як обчислити це?

Кількість потрібних на колонки цеглин залежить від об'єму колонок. Колонки являють собою призму з пірамідою нагорі (рис. 474). Об'єм призм ми виміряти вміємо. Повчімося виміряти об'єм пірамід.

§ 223. Властивість тих пірамід, що мають рівновеликі основи та рівні висоти.

Дослід. Зробіть декілька таких пірамід, щоб у них були однакові висоти й однакові площі основ.

Спробуймо порівняти один з одним їхні об'єми.

Для цього візьмімо посудину, що на рисункові 475, та „вимірну" шклянку (так звуть циліндричну шклянку з поділками, що показують, скільки кубічних сантиметрів має об'єм тієї рідини, в якої рівень торкається до даної поділки: рис. 475).

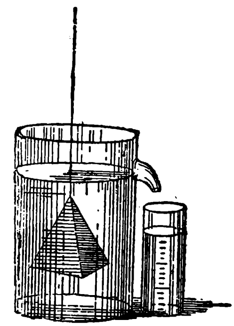


Рис. 475.

Налийте в цю посудину стільки води, щоб лишок її вилився носиком. Під цей носик підставте вимірну шклянку і впустіть у посудину одну з пірамід[1]). Знайшовши за допомогою вимірної шклянки об'єм води, що витиснула піраміда, ви разом з тим знайдете й об'єм самої піраміди.

Зробивши той самий дослід з рештою пірамід[2]), ви побачите, що в усіх ваших пірамід, як тільки вони мають однакові висоти та рівні площі основ, об'єми будуть однакові.

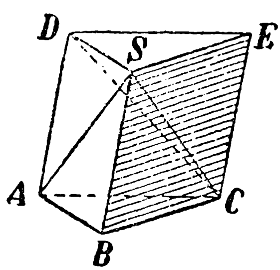


Рис. 476.

§ 224. Як виміряти об'єм тригранної піраміди.

Дослід. Зробіть з мила яку-небудь тригранну призму, наприклад, таку (рис. 476). Спробуйте розрізати її на тригранні піраміди.

Перш за все площиною SAC відріжемо піраміду $SABC$, що має таку саму основу й висоту, як і наша призма. Ту чотиригранну піраміду

---

[1]) Щоб воскова піраміда не спливала наверх, можна замінити нитку дротиком.

[2]) Дослід цей можна замінити на такий: зробити всі наші піраміди порожні і, насипавши в одну з них повно піску (або води), пересипати його в решту пірамід.

SADEC, що залишилася, розріжемо площиною *SDC*; тоді в нас буде ще дві триграні піраміди (*SDEC* й *SADC*). Виміряйте шклянкою, поділеною на градуси, об'єм води, яку витискує кожна піраміда. Ви побачите, що три ці піраміди—рівновеликі.

Як, вимірявши об'єм усієї призми, обчислити об'єм однієї піраміди *SABC?*

Доведення. Порівняймо спочатку об'єм першої (*SABC*) й другої (*SDEC*) піраміди. Коли в другої піраміди за основу вважати грань *DSE,* то вершина її буде в точці *C*; тоді в першої і в другої піраміди і основи, і висоти будуть однакові, а згідно з § 223 такі піраміди рівновеликі (рис. 477).

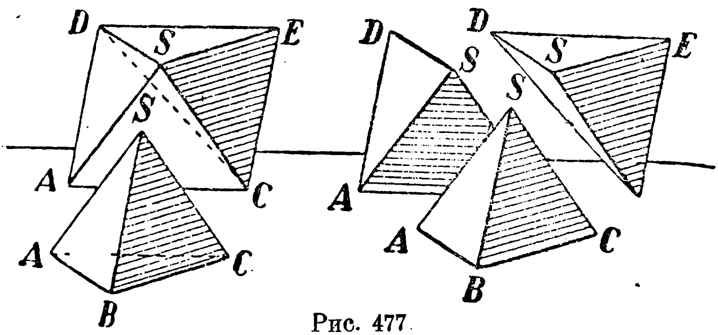


Рис. 477

Порівняймо тепер об'єми другої піраміди *SDEC* й третьої *SDAC.* Коли за вершини цих пірамід вважати точку *S*, то їхні основи (*DAC* й *DEC*) складатимуть рівнобіжник *ADEC.* Отже, ці піраміди матимуть однакові основи (діягоналею *DC* рівнобіжник поділяється на рівні трикутники) й рівні висоти, а через те піраміди ці—рівновеликі (§ 223).

Отже всі три піраміди, що складають призму, мають об'єми однакові, а через те об'єм однієї піраміди (*SABC*) буде в три рази менший від об'єму призми.

Об'єм призми дорівнює добуткові з площі основи (*ABC*) на висоту.

Об'єм нашої піраміди (*SABC*) становить $^1/_3$ об'єму призми; основи й висоти в двох цих тіл однакові, а тому, щоб виміряти об'єм триграної піраміди, треба квадратовими одиницями виміряти площу основи її, відповідними лінійними одиницями висоту, і здобуті числа перемножити. Поділивши добуток на три, ми знайдемо, скільки кубічних одиниць має об'єм нашої призми.

Це правило коротше можна сказати так:

Об'єм тригранної піраміди дорівнює $^1/_3$ добутку з площі основи на висоту.

§ 225. Як виміряти об'єм многогранної піраміди. Треба зміряти об'єм такої многогранної піраміди (рис. 478). Через бічні руби проведімо ряд площин, що розіб'ють нашу піраміду на кілька тригранних пірамід.

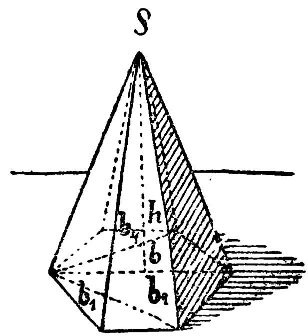


Рис. 478.

Нехай площі основ кожної з цих пірамід мають $b_1, b_2, b_3...$ кв. од., а висота має h лін. од., тоді об'єми пірамід матимуть:

$\frac{1}{3} b_1 h \quad \frac{1}{3} b_2 h \quad \frac{1}{3} b_3 h...$ куб. од.

Отже, об'єм всієї многогранної піраміди

$$V = \frac{1}{3} b_1 h + \frac{1}{3} b_2 h + \frac{1}{3} b_3 h + \ldots \text{ куб од.}$$

Цеб-то

$$V = \frac{1}{3} (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)\, h$$

Коли площа многокутника, цеб-то основа многогранної піраміди, має B кв. од., то $b_1 + b_2 + b_3... = B$.

Отже,

$$V = \frac{1}{3} B \,.\, h.$$

Висновок. Об'єм многогранної піраміди дорівнює $^1/_3$ площі основи, помноженій на висоту.

64. Зрізана піраміда.

§ 226. *Задача.* Ви напевне бачили в млині кіш (рис. 479), що з нього сиплеться зерно на жорна. (Пригадайте сторінку 8). Скільки треба взяти дощок, щоб зробити такий кіш та чи багато зерна вміститься в ньому?

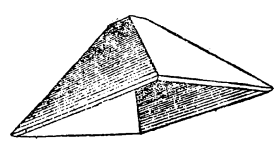


Рис. 479.

§ 227. Зрізана піраміда. Цей кіш являє собою таке геометричне тіло (рис. 480). Одержати його можна із піраміди, коли розріжемо її площиною, що рівнобіжна з основою. Матимемо многогранник (рис. 480). Звемо його зрізаною пірамідою. Зрізана піраміда з боків має трапези, а зверху й зісподу два подібні многокутники, що звуть їх основами піраміди. Покажіть їх.

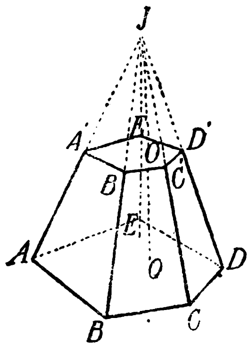


Рис. 480.

Коли ви зробите зрізану піраміду з правильної піраміди, то її так само зватимемо правильною. У правильної зрізаної піраміди основи — правильні многокутники, а бічні грані — рівнобічні трапези.

Висоти трапезів у правильної зрізаної піраміди будуть завдовжки однакові. Звемо їх апотемами. (Не плутайте апотеми піраміди з її висотою).

§ 228. Як виміряти бічну поверхню правильної зрізаної піраміди. Щоб довідатися, скільки дощок потрібно, щоб зробити наш кіш, нам треба вміти виміряти його поверхню.

Коли бік AB спідньої основи в піраміди має a лін. од., бік $A'B'$ верхньої основи має b лін. од., апотема має l лін. од., то площа однієї бічної грани має

$$\frac{a+b}{2} . l \text{ (кв. од.)}$$

Коли піраміда має n бічних гранів, то бічна її поверхня

$$S=\frac{a+b}{2} . \ l . n \text{ (кв. од.)}$$

а це можна написати так:

$$S=\frac{an+bn}{2} . l$$

Означмо периметр спідньої основи піраміди літерою p_1, а периметр верхньої літерою p_2, тоді

$$an=p_1; \ bn=p_2.$$

А

$$S=\frac{p_1+p_2}{2} . \ l$$

Отже, щоб виміряти бічну поверхню правильної зрізаної піраміди, треба півсуму периметрів основ її помножити на апотему.

А як знайти повну поверхню цієї піраміди?

§ 229. Як виміряти об'єм зрізаної піраміди.

Спосіб перший. Припустімо, що нам треба виміряти об'єм зрізаної піраміди (рис. 480). Доповнимо її до тієї повної піраміди, що з неї маємо нашу зрізану. Вимірявши об'єм двох цих пірамід і віднявши від більшого об'єму менший, ми знайдемо об'єм зрізаної піраміди.

Спосіб другий. Щоб виміряти об'єм зрізаної піраміди, можна ще використати таку формулу:

коли площа спідньої основи її має B кв. од.
коли площа верхньої основи її має b кв. од.
коли висота піраміди має H лін. од.
а об'єм піраміди має V куб. од.

то $$V = \frac{H}{3}\left(B + b + \sqrt{Bb}\right).$$

ВПРАВИ.

1. Десяток ухналів важить 35 г. Форма такого ухналя— правильна чотиригранна піраміда. Периметр квадратової основи $= \frac{1}{2}$ см. Кожен куб. см заліза важить 7 г. Які завдовжки будуть ці ухналі?

2. В Єгипті стоїть піраміда, в якої основа має форму квадрата з боком 180 м. Об'єм її $=$ 540.000 куб. м. Яка заввишки ця піраміда? Довідайтеся у знайомих, який заввишки найвищий будинок у вашому місті, і порівняйте висоту єгипетської піраміди з висотою вашого будинка.

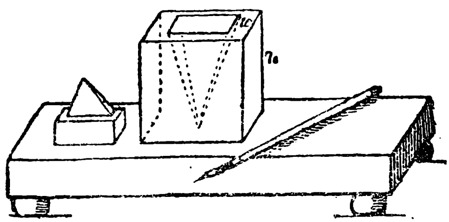


Рис. 481

3. Скляний каламар (рис. 481) має форму куба з рубом 7 см. Заглибина для чорнила має форму правильної чотиригранної піраміди. Від вершини цієї піраміди до спідньої основи каламаря 2 сантиметри. Від рубів верхньої основи цього каламаря до боків основи піраміди 1 см. Вирахуйте, скільки чорнила можна налляти в цей каламар.

4. Будка, що її треба покрасити, має такий розмір (рис. 468): $AB = 4$ дм. $BD = 7{,}5$ дм. $BC = 6$ дм. $EF = 4$ дм. Скільки фарби піде на те, щоб покрасити стіни та дах цієї будки, коли на кожен квадратовий метр іде 0,2 кг фарби?

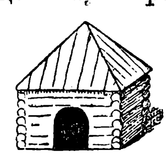


Рис. 482.

5. Дах цієї будки має в основі квадрат з боками 6 м. Решта гранів цього даху (рис. 482) являє собою рівнораменні трикутники, з бічним рубом 5 м.

Скільки днів роботи (на одного робітника), скільки заліза та гвіздків потрібно, щоб зробити цей дах, коли на 1 кв. метр іде 0,25 дня роботи, 2,67 листа $1^1/_2$ метрового аркушевого заліза та 14 гвіздків?

6. Скільки сіна можна скласти на горище цього сараю? Висота даху—2 метри. Завдовжки та завширшки він 12 м та 4 м. Довжина гребеня—8 м (рис. 483). (Зауваження: розбийте горище на 2 піраміди та на одну лежачу призму).

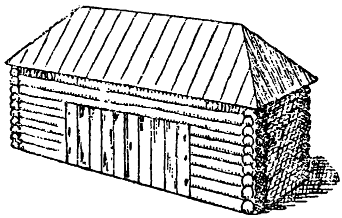


Рис. 483.

7. Знайти повну поверхню піраміди, що має в основі рівнобічний трикутник з боком 24 м, а бічні руби по 15 дм.

8. Скільки відер води в копанці, що має форму зрізаної піраміди? Глибина копанки—1,5 м. Бік спіднього квадрата, що лежить в основі, дорівнює 0,8 м. Бік верхньої основи—1,2 м.

9. Обчисліть об'єм зрізаної піраміди, що в її основі лежать правильні трикутники з боками 0,4 м та 0,2 м. Висота піраміди 3 м.

10. Піраміда та куб мають однакові основи по 16 кв. см. Яка заввишки піраміда, коли об'єм цих тіл однаковий?

11. Скільки пірамід 6 см заввишки і з основою 16 кв. см можна утворити з призми такого розміру: 8 см $\times$ 12 см $\times$ 16 см?

12. Цеглина має форму куба, в якого руб $=$ 16 см. Скільки можна з цієї цеглини зробити пірамід 6 см заввишки і з основою 64 кв. см?

13. Піраміда заввишки 8 см має прямокутну основу з рубами 2 см і 3 см. З піраміди вода переливається в прямокутну призму з рубами 4 см, 6 см та 8 см.

Скільки разів доведеться наповнювати цю піраміду, щоб налляти в призму води по вінця?

14. Обчисліть найменший об'єм прямокутної скриньки, в яку можна покласти піраміду. Об'єм піраміди $=$ 360 куб. см, а основа має форму прямокутника з боками 6 см і 9 см.

15. Кусок олива має форму прямокутної призми 3 см $\times$ $\times$ 5 см $\times$ 6 см. З нього треба вилляти пірамідки заввишки 5 см і з квадратовою основою, в якої бік $=$ 3 см. Скільки всього пірамідок у вас утвориться?

Розділ 18.

КРУГЛІ ТІЛА.

65. Циліндр.

§ 230. Що таке циліндр. На кожному заводі ви напевне бачили

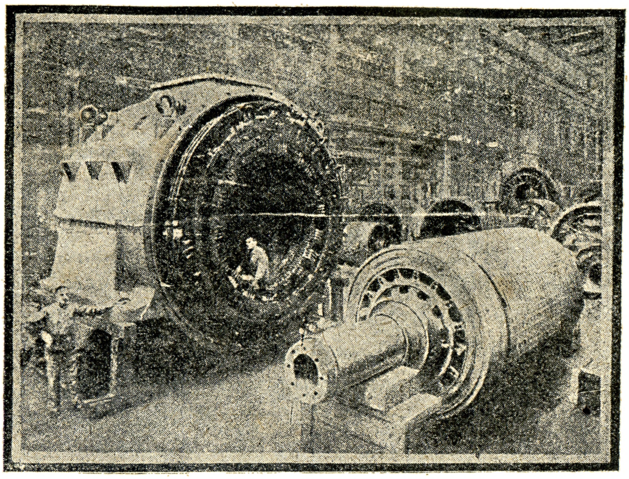


Рис. 484.

ці циліндри. Пригадайте: головний вал, паровик двигуна, шкиви, колеса; все це — циліндри.

Дослідімо уважніше форму цього циліндра.

Прикладаючи до бічної поверхні циліндра площину в різних напрямках (рис. 485), ви помітите, що наша поверхня є поверхня не плоска, а крива.

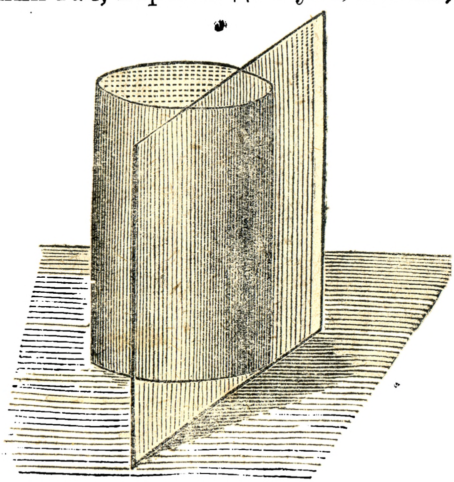


Рис. 485.
У циліндра бічна поверхня крива.

Що-до обох основ циліндра, то обидві вони — плоскі.

§ 231. Циліндр, як тіло обертання. Найчастіше циліндр утворюється, як тіло обертання. А саме, коли прямокутник обертається навколо свого боку, то він утворює циліндр (рис. 487).

Яку поверхню утворює при цьому обертанні проста *a*? Цю просту звемо твірною циліндра.

Що описують прості *a* й *c*?

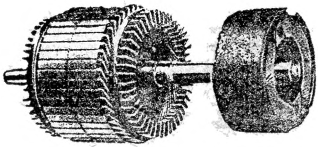


Рис. 486.

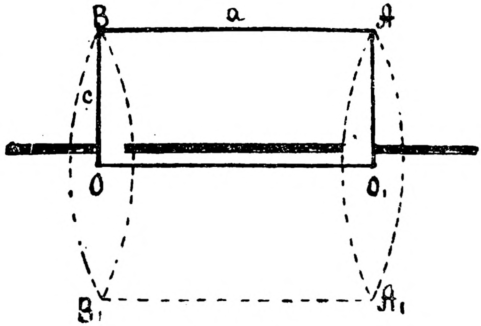


Рис. 487.

§ 232. Висота та вісь циліндра. Спустимо з верхньої основи на спідню перпендикуляр. Його звуть висотою циліндра. Висота циліндра дорівнює осі циліндра. Просту *OO*, що сполучає центри обох основ циліндра, звуть віссю циліндра.

§ 233. Бічна поверхня циліндра.

Задача. В паровому циліндрі вставлено 250 штук вогневих трубок діяметром 5 см кожна. Яка загальна „площа нагріву" всіх цих трубок та якою була-б вона, коли-б цих трубок не було? (Діяметр основного циліндра = 1,5 м).

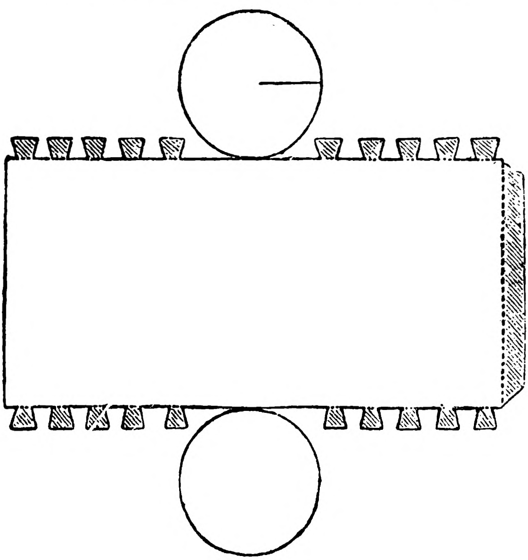


Рис 488

Щоб розвязати цю задачу, треба навчитися виміряти бічну поверхню циліндра.

Розріжмо поверхню циліндра по обводу верхньої й спідньої основи і вздовж твірної циліндра розгорнімо цю поверхню на площині. Тоді матимемо розгортку (рис. 488). Бічна поверхня циліндра матиме вигляд прямокутника, в якого основа рівна довжині обводу кола в основи циліндра, а висота — це твірна його. Тому:

Висновок. Бічна поверхня циліндра дорівнює довжині обводу основи, помноженій на твірну.

§ 234. Формула.

Коли радіус основи циліндра має r лін. од.
а висота циліндра має . . . . . . h лін. од.
Тоді довжина обводу основи має $2\pi r$ лін. од.
Отже бічна поверхня має . . . . $2\pi rh$ лін. од.

$$S = 2\pi rh.$$

§ 235. Повна поверхня циліндра. Щоб вирахувати повну поверхню циліндра, треба до бічної поверхні додати площі обох основ його.

Коли радіус основи має r лін. од., то площа однієї з основ має πr^2 кв. од., а площа обох основ має $2\pi r^2$ кв. од. Отже повна поверхня циліндра має

$$P = 2\pi rh + 2\pi r^2 \text{ кв. од.}$$

або

$$P = 2\pi r(h + r) \text{ кв. од.}$$

Приклад. Паровик має завдовжки 4 метри. Діяметр основи = 1,5 м. Обчислімо поверхню цього паровика.

Коли діяметр основи $2r = 1{,}5$ м,
тоді довжина кола основи $2\pi r = 1{,}5 \,.\, 3{,}1 = 4{,}65$ м,
бічна поверхня паровика $2\pi r \,.\, h = 4{,}65 \,.\, 4 = 18{,}6$ м,
площа однієї основи $\pi r^2 = 3{,}1 \,.\, 0{,}75^2 = 1{,}7$ м^2
площа двох основ $2\pi r^2 = 3{,}4$ м^2
повна поверхня паровика $18{,}6 + 3{,}4 = 22$ м^2

§ 236. Як виміряти об'єм циліндра.

Доведення. Впишімо в наш циліндр яку-небудь правильну призму, наприклад, чотиригранну (рис. 489). Коли площа її основи має b_1 кв. од., а висота (що рівна висоті циліндра) має h лін. один., тоді об'єм цієї призми

$$V_1 = b_1 h \text{ куб од.} \qquad (1)$$

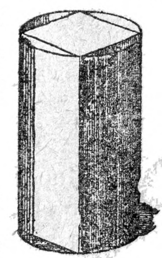


Рис. 489.

Почнімо тепер збільшувати без кінця число гранів у цій уписаній призмі (замінімо 4-гранну, призму спочатку на 8-гранну, потім на 16-гранну 32-гранну й т. д.). Тоді об'єм її почне наближатися до об'єму циліндра (V), а площа основи призми (b_1) — до площі основи циліндра (b).

А тому об'єм циліндра

$$V = bh \text{ куб. од.} \qquad (2)$$

Але площа основи циліндра

$$b = \pi r^2 \text{ кв. од.,}$$

де r буде радіус основи, тому об'єм циліндра

$$V = \pi r^2 h \text{ куб. од.}$$

Приклад. Обчислімо, скільки води вміщає повний паровий циліндр (без труб), діяметр якого 1,6 м, а довжина 5 м.

Радіус основи $r = 1{,}6 : 2 = 0{,}8$ м.
Площа основи $\pi r^2 = 3{,}1 \,.\, 0{,}8^2 = 1{,}984$ м^2
Об'єм $\pi r^2 \,.\, h = 1{,}984 . 5 = 9{,}92$ м^3
$V = 9{,}92$ м^3

66. Конус.

§ 237. Що таке конус. Назвіть декілька речей, що мають форму конуса (рис. 490).

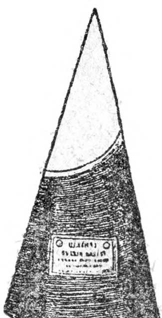


Рис. 490. Конус.

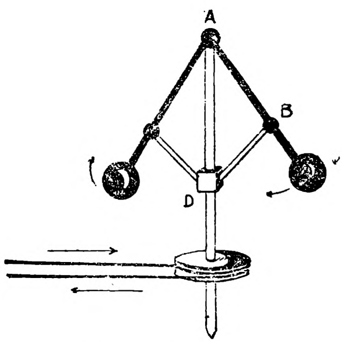


Рис. 491. Відосередковий регулятор (дивись раніш).

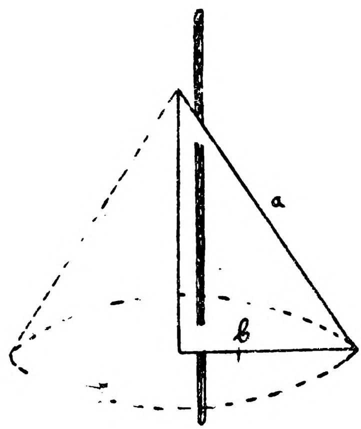


Рис. 492.

Дослідіть бічну поверхню цього конуса. Як переконатися в тому, що ця поверхня крива (§ 3 і 230)?

Що-до основ, то їх у конуса одна тільки. Зісподу наш конус обмежує плоска поверхня, що має форму кола. Коло це звемо **основою** конуса. Покажіть її.

Площина основи перетинається бічною поверхнею по кривій лінії. Лінія ця — обвід кола.

Поверхня нашого конуса зверху кінчається точкою. Покажіть її. Точку цю звемо **вершиною** конуса.

§ 238. Конус, як тіло обертання.

Дослід 1. Зверніть увагу на ту поверхню, що її описують прості AB та CD регулятора на паровому двигуні (рис. 491).

Дослід 2. Виріжте з картону трикутник з прямим кутом. Дротиком проткніть один із тих боків, що утворюють прямий кут так, як це показано на рисункові 492.

Обертайте швидко трикутник навколо дротика.

При цьому обертанні трикутник опише конус. Проста b опише основу конуса, проста a опише конічну поверхню. Цю просту звемо **твірною** конуса.

§ 239. Як виміряти поверхню конуса.

Задача. Якого розміру треба взяти аркуш бляхи, щоб зробити з неї лійку в формі конуса.

Дослід. Зробімо викройку (розгортку конуса). Вона буде мати (рис. 494) таку фігуру:

Вимірявши площу здобутого сектора, ми й

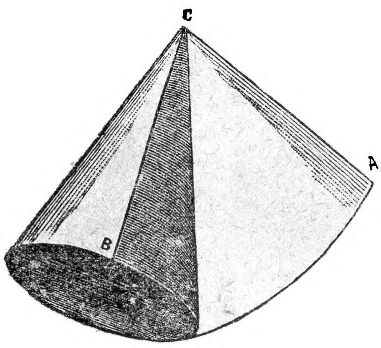


Рис. 493.

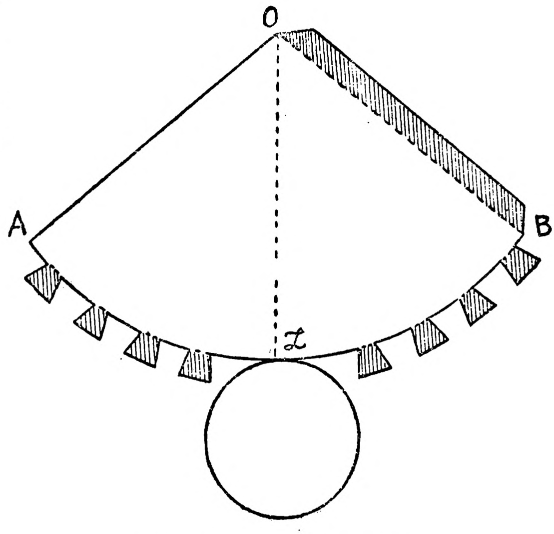


Рис. 494. Викройка конуса.

знайдемо, скільки квадратових одиниць матиме бічна поверхня конуса.

Площа цього сектора дорівнюватиме половині дуги AB, помноженій на радіус сектора OL (§ 148); але довжина дуги AB рівна обводові кола основи конуса, а OL — його **твірна**, тому бічна поверхня конуса дорівнюватиме половині довжини обводу кола, помноженій на твірну (не на висоту).

Щоб обчислити повну поверхню конуса, треба до бічної поверхні додати площу основи.

Формула. Коли радіус основи конуса має r лін. од.
коли твірна конуса має l лін. один.,
то бічна поверхня його має

$$S = \frac{2\pi rl}{2} = \pi rl \text{ кв. один.}$$

Повна поверхня його має:

$$P = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r) \text{ кв. один.}$$

Приклад. Треба зробити з бляхи конуса, у якого тв рна — 30 см, а радіус основи $= 10$ см Скільки на це треба взяти бляхи?

Бічна поверхня $\pi rl = 3{,}1 \cdot 10 \cdot 30 = 930$ см^2
Площа основи $\pi r^2 = 3{,}1 \cdot 10^2 = 310$ см^2
Повна поверхня $930 + 310 = 1240$ см^2

§ 240. Як виміряти об'єм конуса.

Задача. Щоб брукувати вулицю, склали жорству (дрібні камінці) в купу. Як виміряти, скільки привезено жорстви?

Купа ця являє собою конус, а тому треба вміти виміряти об'єм конуса.

Дослід. Порівняйте об'єми конуса й циліндра, в яких площі основ та висоти однакові. Насипавши циліндр повен піску (або води) і пересипаючи з нього пісок (або воду) в конус, ви побачите, що об'єм такого конуса становить $1/3$ частину об'єму циліндра. Отже, як виміряти об'єм конуса?

Доведення. Впишімо в наш конус яку-небудь правильну піраміду. Об'єм її рівний $1/3$ площі основи, помноженій на висоту.

Почнемо без кінця збільшувати кількість гранів цієї піраміди. Тоді об'єм її почне необмежено наближатися до об'єму конуса, а площа основи наближатиметься до площі кола, що є за основу конусові (а висота піраміди увесь час рівна буде висоті конуса). А тому:

Висновок. Об'єм конуса дорівнюватиме $1/3$ площі основи, помноженій на висоту.

§ 241. *Формула.* Коли радіус основи конуса має r лін. од.,
коли висота конуса має h лін. од.

то об'єм конуса має $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ куб. од.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Приклад. Купа піску має форму конуса. Діяметр основи $= 3$ м Висота 1,2 м. Скільки в купі піску?

Радіус основи $r = 3$ м $: 2 = 1,5$ м

Площа основи $\pi r^2 = 3,1 \,.\, 1,5^2 = 3,1 \cdot 2,25 = 7,0$ м²

Висота $h = 1,2$ м

Тоді об'єм $\frac{1}{3}\, \pi r^2 h = \frac{1}{3} \,.\, 7,0 \,.\, 1,2 = 7,0 \,.\, 0,4 = 2,8$ м³

$$V = 2,8 \text{ м}^3$$

§ 242. Зрізаний конус. Щоб передати рух одного валу A од другого валу B, що перетинає перший вал, вживають такі шестерні (рис. 495). Ці шестерні мають форму конуса, коли відрізати його верх площиною, рівнобіжною до основи (рис. 496, 497). Таке тіло звуть з р і з а н и м к о н у с о м. Висотою цього конуса буде перпендикуляр, що спущено його з верхньої основи на спідню, наприклад, OO_1 (рис. 497).

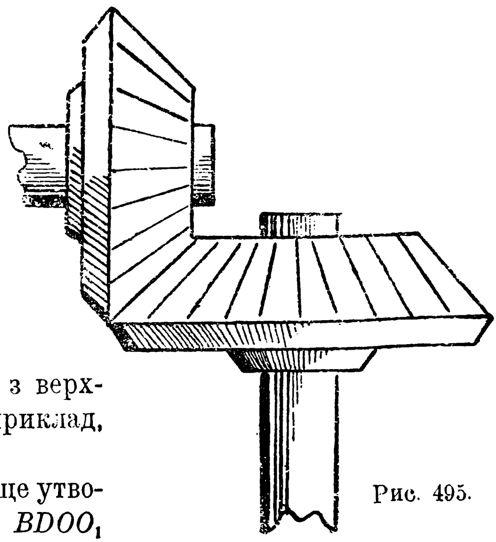


Рис. 495.

Зрізаний конус можна ще утворити, обертаючи трапецію $BDOO_1$ навколо OO_1 (рис. 497). Тоді BD опише бічну поверхню конуса, а боки BO_1 та DO опишуть основи його. OO_1 буде в і с с ю конуса. Просту BD звемо т в і р н о ю.

§ 243. Поверхня зрізаного конуса. Поверхню та об'єм зрізаного конуса можна вважати за границю, до якої наближається поверхня

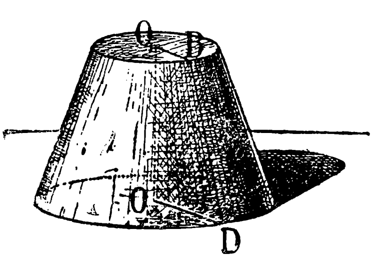


Рис. 496.

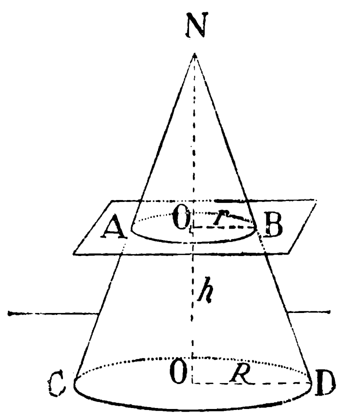


Рис. 497.

та об'єм правильних зрізаних пірамід, що вписані в конус, коли число їхніх гранів безмежно збільшується.

При цьому основи пірамід наближаються до основи конуса, апотема до твірної конуса, а висота в піраміді й у конусі та сама.

А тому

Висновок. Бічна поверхня зрізаного конуса дорівнює півсумі обводів кола двох його основ, помноженій на твірну.

Формула. Коли радіус нижньої основи зрізаного конуса має R лін. од.,

коли радіус верхньої основи має r лін. один.,

коли твірна має l лін. од.,

то бічна поверхня

$$S = \pi l\ (R + r) \text{ кв. од.}$$

Повна поверхня зрізаного конуса дорівнює бічній поверхні, доданій до площ обох основ.

§ 244. Об'єм зрізаного конуса. Об'єм зрізаного конуса виміряти можна двома способами:

Спосіб перший. Доповнивши зрізаний конус до повного (рис. 497), треба від об'єму повного конуса (NCD) відняти об'єм конуса додаткового (NAB).

Спосіб другий. У формулу для об'єму зрізаної піраміди (§ 229) вставмо замість змінних величин ті границі, що до них наближаються ці змінні величини. Тоді знайдемо, що об'єм зрізаного конуса

$$V = \frac{1}{3} h\ (B + b + \sqrt{Bb}),$$

де h — висота конуса, b — площа верхньої основи, B — площа спідньої основи.

Коли замість площ кол b та B вставимо їхні означення через радіуси r та R і зробимо алгебричні спрощення, то матимемо формулу таку:

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr).$$

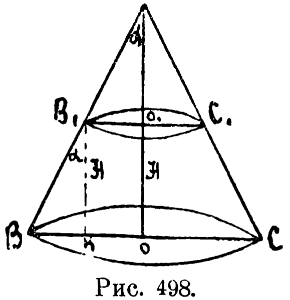


Рис. 498.

Цю формулу можна знайти так.

Об'єм зрізаного конуса (рис. 498).

1) $V = \frac{1}{3} \pi OB^2 . AO - \frac{1}{3} \pi O_1B_1{}^2 . AO_1$

$OB = R,\ O_1B_1 = r$

$AO = R\mathrm{ctg}\alpha\,(\Delta AOB),\ AO_1 = r\mathrm{ctg}\alpha\,(\Delta AO_1B_1)$

Підставмо все це в перше рівняння

2) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 . R\mathrm{ctg}\alpha - \frac{1}{3}\pi r^2 r\mathrm{ctg}\alpha$

$V = \frac{1}{3}\pi(R^3 - r\ )\ \mathrm{ctg}\alpha$

3) Із (ΔB_1BK) маємо $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{B_1K}{BK}$ $\quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{H}{R-r}$

Заміняємо цим виразом $\mathrm{ctg}\alpha$ в 2)

4) $V = \frac{1}{3}\pi\,(R^3 - r^3)\frac{H}{R-r}$ $\quad V = \frac{1}{3}\pi\frac{R^3 - r^3}{R-r} . H$

Поділивши $R^3 - r^3$ на $R - r$, одержимо $R^2 + Rr + r^2$

А тому

$V = \frac{1}{3}\pi\,(R^2 + Rr + r^2)\,H$

67. Куля.

§ 245. *Задача.* Яку найбільшу вагу може підняти вгору повітряна куля, що діяметр у неї дорівнює 12 метрам? Літр повітря важить 1,3 г. Літр водня, що ним наповнено кулю, важить 0,09 г. Кв. метр тканини, що з неї зшито оболонку кулі, важить 0,3 кг.

Вся сила, що тягне вгору повітряну кулю, дорівнює величиною вазі повітря в об'ємі цієї кулі. Частина цієї сили витрачається на піднесення вгору самого газу (водня), що наповнює кулю, та оболонки, що з неї зшито кулю. А тому, щоб обчислити так звану „під'ємну силу“ кулі, треба від ваги повітря (в об'ємі кулі) відняти вагу газу, що наповнює її, та вагу оболонки цієї кулі. Ці обчислення можна зробити тільки тоді, коли ми навчимося обчисляти об'єм та поверхню кулі.

Повчімось це робити.

§ 246. Прикладаючи до поверхні кулі аркуш плоского картону[1]) в найрізноманітніших напрямках, ви помітите, що наша площина (картон) має з поверхнею кулі тільки одну спільну точку (рис. 499).

Куля має поверхню крив у. Площину, що з кулею має тільки одну спільну точку, будемо звати дотичною площиною.

---

[1]) Ще краще брати скляну площину.

§ 247. Мале та велике коло. Від перетинання кулі площиною ми завжди матимемо коло.

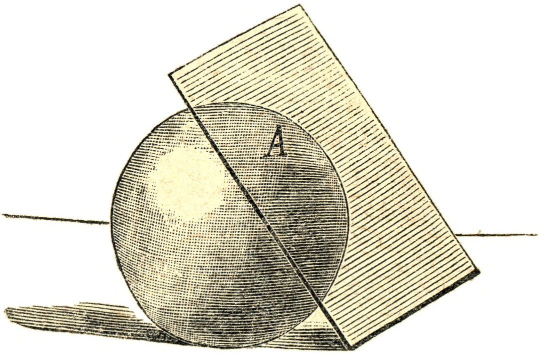


Рис. 499. Куля й дотична до неї площина.

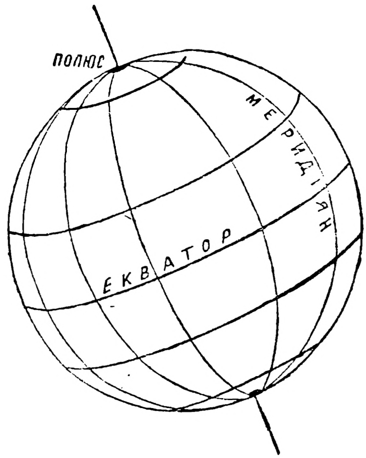


Рис. 500. Куля.

Порівнюючи один з одним великість (розмір) цих кол, ви побачите, що найбільшим колом буде те, яким наша куля пе-

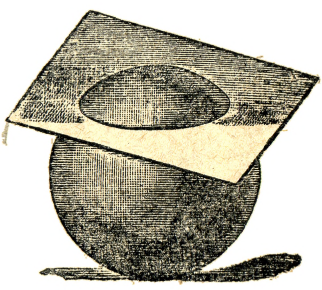


Рис. 501. Мале коло.

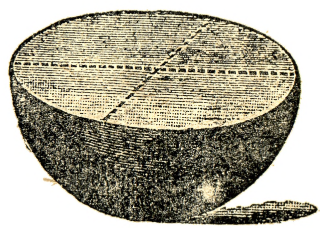


Рис. 502. Велике коло

ретята на дві рівні півкулі (рис. 502). Це коло звуть в е л и к и м к о л о м к у л і.

§ 248. Радіус та діяметр кулі. На поверхні кулі зазначіть декілька точок.

Прості, що з'єднують ці точки з центром кулі, завдовжки будуть однакові. Прості ці звемо р а д і у с а м и к у л і.

Просту лінію, що з'єднує дві точки поверхні кулі й проходить через центр, звемо д і я м е т р о м к у л і.

§ 249. Як виміряти поверхню кулі.

Дослід. З глини[1]) або з воску зробіть акуратно велику кулю і розріжте її навпіл.

Обмотайте досить товстим мотузком[2]) поверхню півкулі й площу великого кола (рис. 503).

Порівняйте довжини цих мотузків і знайдіть, у скільки разів поверхня кулі більша за площу великого кола.

Висновок. У вас виявиться, що поверхня кулі дорівнює площі великого її кола, взятій 4 рази.

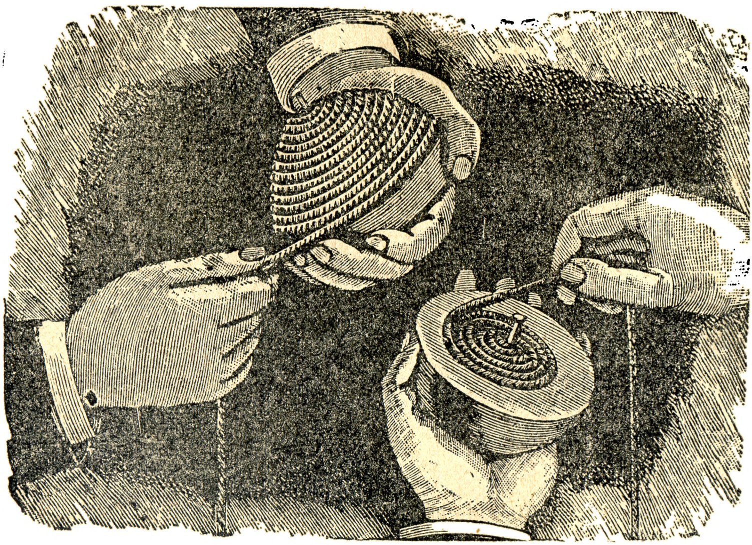


Рис. 503.

§ 250. *Формула.* Коли радіус кулі має . . . r лін. од.
то площа великого кола має . . . . πr^2 кв. од.
Тому, поверхня кулі має . . . . $4\pi r^2$ кв. од.

$$S = 4\pi r^2$$

Дослід. Візьміть яку-небудь кулю, наприклад, опуку, і покладіть її в таку циліндричну коробку, щоб поверхня кулі доторкалась поверхні циліндра (вздовж екватора) та щоб обидві основи циліндра (своїми центрами) доторкалися поверхні кулі (рис. 504). Про такий циліндр говорять, що він описаний навколо кулі.

---

[1]) Найзручніше взяти півкулю, виточену з м'якого дерева.

[2]) Для цього досліду можна взяти мотузок 5—6 мм завгрубшки.

Порівняймо поверхню кулі з бічною поверхнею описаного навколо неї циліндра.

Спочатку розгорнімо в площину бічну поверхню циліндра.

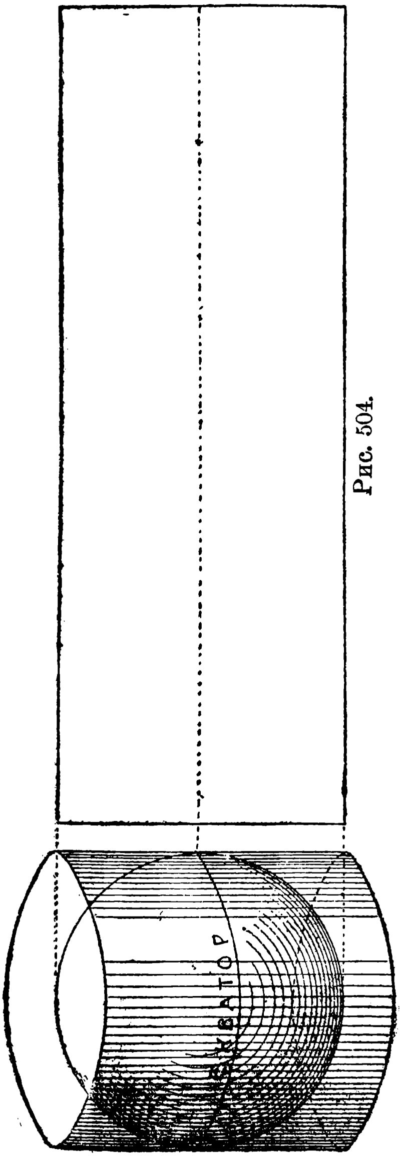


Рис. 504.

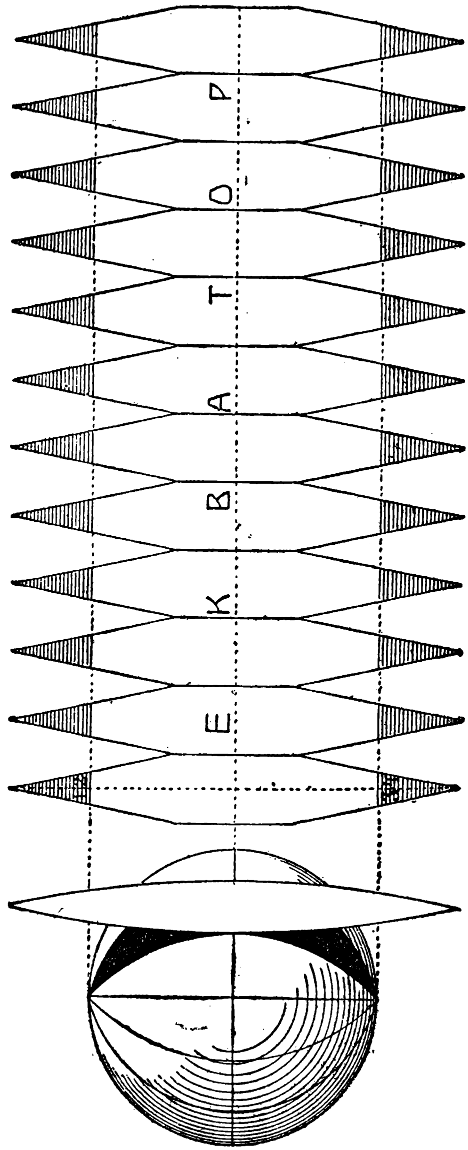


Рис. 505.

Матимемо прямокутник (рис. 504). Що буде за основу та висоту в цього прямокутника? Через що?

Тепер спробуймо перетворити на прямокутник і поверхню кулі. Для цього розріжмо цю поверхню вздовж меридіанів на

12 рівних частин і розгорнімо[1]) їх у одну площину. У нас буде фігура дуже схожа на таку (рисунок 505).

По обидва боки від екватору маємо дві рівнобіжні прості на віддаленні, що дорівнює діяметрові кола.

Відрізавши вздовж по цих простих частини зубчиків і вклавши їх у ті проміжки, що залишилися поміж зубчиками, матимемо такий прямокутник (рис. 506).

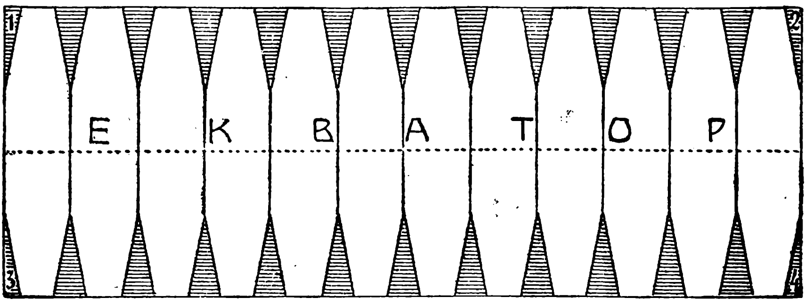


Рис. 506.

У цього прямокутника за основу буде екватор кулі, а за висоту діяметр її.

Висновок. Виявилося, що поверхня кулі дорівнює бічній поверхні описаного циліндра.

§ 251. Формула.

Коли радіус кулі має	r см,
то екватор її має	$2\pi r$ см,
висота описаного циліндра має	$2r$ см,

Отже поверхня кулі має $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$ кв. см,

$$S = 4\pi r^2.$$

§ 252. Як виміряти об'єм кулі.

Розріжмо кулю по площинах, що проходять через її центр. Тоді наша куля розрізана буде на такі куски (рис. 507 ліворуч). Кожен з цих кусків схожий буде на піраміду, що за основу в неї є частина поверхні кулі *ABC*, а за висоту—радіус кулі. Чим на більше кусків розріжете ви кулю, тим більше кожен кусок наближатиметься формою своєю до піраміди.

---

[1]) Коли говорити точно, то поверхня кулі розгорнутися якраз у площину не може; це можна зробити тільки наближено. До наближеного способу находити розгортку кулі доводиться звертатись, наприклад, у географії, коли рисують поверхню земної кулі на плоскій географічній мапі.

Об'єм кожного куска дорівнює $^1/_3$ поверхні основи, помноженій на радіус кулі. Отже об'єм усіх цих кусків дорівнює $^1/_3$ поверхні кулі, помноженій на радіус.

А тому об'єм кулі

$$V = \frac{1}{3} r.S \text{ куб. од.,}$$

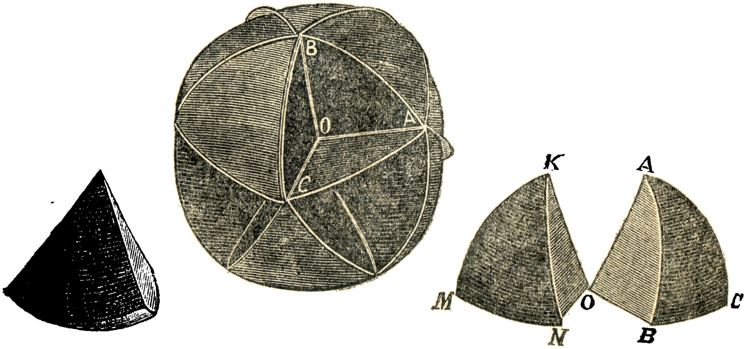


Рис. 507.

цеб-то об'єм кулі $= ^1/_3$ її поверхні, помноженій на радіус. Ми знаємо вже, що $S = 4\pi r^2$ (§ 251), тому

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

ВПРАВИ.

1. Скільки треба взяти бляхи, щоб зробити з неї циліндричний кухоль і накришку до нього? Кухоль повинен мати радіус основи 5 см, а заввишки бути 20 см.

2. Скільки води тече за кожну хвилину з водопровідної труби, в якої діяметр $= 16$ см, коли скорість води 1 метр за секунду?

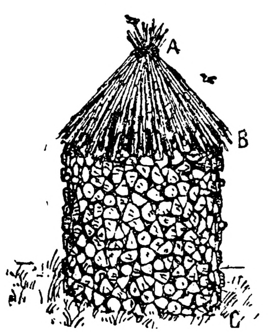


Рис. 508.

3. Скільки кубічних метрів дров буде в такому стосі (рис. 508)? До A від землі 9 метрів; $AB = 5$ метрів; $BC = 6$ метрів. Діяметр основи $= 8$ метрів.

4. Скільки всього десятин має земна куля, коли діяметр її $= 12000$ кілометрів, а суходіл становить 30% усієї земної поверхні?

5. Підчас дощу вода з даху наповнила чотири діжки з діяметром $=$ $= 100$ см і висотою $= 200$ см кожна. Вода ця зібралася з площі 31 кв. метра. Якої „висоти“ випав дощ?

6. Треба було виміряти об'єм колони, що мала циліндричну форму. Для цього зміряли висоту її; виявилося, що вона має 6 метрів. Потім знайшли, що довжина обводу основи цієї колони 3,1 метра. Який об'єм цієї колони?

7. Знайдіть об'єм найбільшого такого циліндра, що його можна вмістити в кубічну скриньку 3 см заввишки.

8. Обчислить поверхню шклянки, що в ній вміщається 1 літер. Денце її має площу 80 см^2.

9. У одній коробці (циліндричній) діяметр дна = 16 см, висота = 8 см. Друга коробка має таку саму місткість, але діяметр її дна = 12 см. На яку з цих двох коробок витрачено більше матеріялу?

10. Пляшка має таку форму (рис. 509). Візьміть якунебудь шклянку для чаю і, змірявши об'єм її, обчисліть, скільки цих шклянок вміщається в тій пляшці. (Для цієї задачі π рахуйте рівним $^{22}/_{7}$).

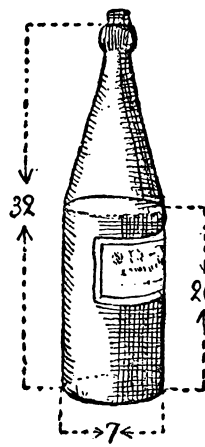


Рис. 509.

11. Цурпалок дерева має форму куба з рубом 10 см. З цього цурпалка треба виточити як-найбільший конус. Вирахуйте об'єм цього конуса.

12. Прямокутний трикутник з боками 12 см, 16 см та 20 см обертається по черзі навколо обох катетів. Чи однакові об'єми та поверхні утворює цей трикутник? Порівняйте їх один з одним.

13. Площа основи конуса = 40,24 см^2, висота = 16 см. Обчисліть його бічну поверхню.

14. Скільки важить купа піску 2 м заввишки, коли твірна з основою утворює кут 45^0? Вага 1 куб. метра піску = 1800 кг.

15. Викройка конуса являє собою сектор з кутом 216^0. Радіус сектора = 10 см. Обчисліть об'єм цього конуса.

16. Довжина обводу кола верхньої основи зрізаного конуса = 3,1 см; спідньої = 9,3 см, твірна конуса = 2,5 см. Обчисліть бічну поверхню та об'єм цього конуса.

17. Висота зрізаного конуса = 1,2 м. Радіус верхньої основи 0,4 м, спідньої = 0,9 м. Обчисліть бічну поверхню конуса.

18. Згідно з сучасними будівельними правилами жорству для брукування шляхів треба складати в такі купи, щоб довжина основ у них була = 36,25 м, а висота = 1,23 м. Питома вага жорстви = 2 г. Обчисліть, скількома хурами звезено цю жорству, коли кожна хура може повезти 0,4 тони.

19. Скільки дробинок можна зробити з 1 кілограма олива, коли діяметр дробинки 2 міліметри? Куб. см олива важить 12 грамів.

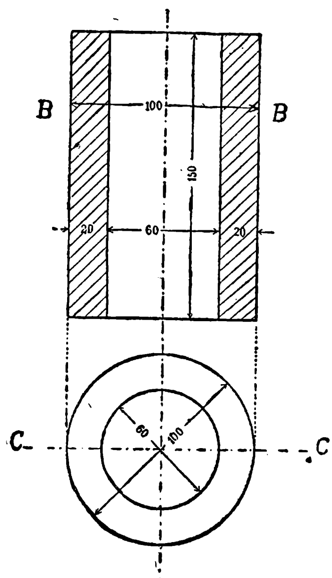
20. Полічіть, скільки крапель води вміщається в куб. сантиметрі води. На підставі цього досліду вирахуйте діяметр кожної краплі води.

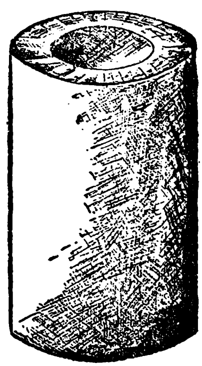
21. 8 опук (радіусом 3 см) треба запакувати в кубічну скриньку, в якої руб = 12 см. Вільні місця скриньки засипано тирсою. Скільки на це треба взяти тирси?

22. Діяметр місяця = 3.500 км (приблизно). Який об'єм має місяць?

23. Порівняйте об'єм місяця з об'ємом землі, коли радіус землі = 6.000 км (приблизно).

24. Дерев'яний куб обточено на токарному варстаті так, що з нього одержано кулю, діяметр якої дорівнює завдовжки рубові куба. Який відсоток дерева, з якого зроблено куб, сточено, коли вироблялося кулю?





A

Рис. 510.

25. Яка під'ємна сила повітряної кулі, діяметр якої = 12 м? Літр повітря важить 1,3 г. Літр водня важить 0,09 г. Кожен кв. метр тканини, що з неї зшито кулю, важить 0,3 кг.

26. Скільки пасажирів або ваги може підняти вгору повітряна куля з діяметром 10 м? Один куб. метр повітря важить 1,3 кг. Оболонка, знаряддя та пілоти важать разом 2.100 кг.

27. На рис. 510 ви маєте залізну циліндричну трубу (рис. *A*). Ліворуч (вгорі, під літерами *BB*) дано вертикальний розріз цієї труби, а ліворуч внизу (літери *CC*) горизонтальний. Числами позначено відповідні розміри труби

(на міліметри). Розгляньте уважно цей малюнок і, взявши числа, що на ньому позначені, вирахуйте, який об'єм має ця труба.

28. Вирахуйте, скільки важить цей прогонич (рис. 511). Вгорі (*BB*) ви маєте вертикальний розріз його, а нижче

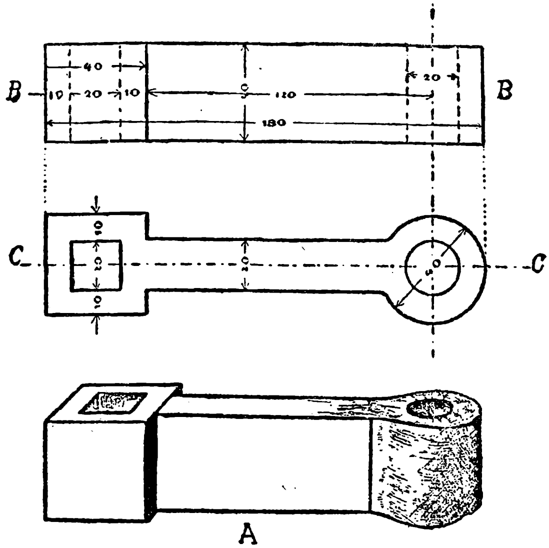


Рис. 511.

(*CC*)—горизонтальний. Числа дають розміри на міліметри. Прогонича зроблено з заліза; кожен куб. сантиметр його важить 7,5 грама.

ПОЯСНЕННЯ ДО РОЗДІЛУ 13.

Сталою (або *постійною*) величиною звуть таку величину, що в умовах даного завдання має тільки одне значіння.

Змінною величиною звуть таку, що в умовах даного завдання може мати більш як одне значіння. Якщо при тому ми вибираємо будь-яке значіння змінної величини, то ми зватимемо таку величину *незалежною змінною*.

Коли-ж значіння якої-небудь змінної величини міняються відповідно до того, які ми вибрали значіння для другої або для кількох инших змінних, то першу величину звуть *функцією* від другої або від усіх инших змінних.

Той закон, що на підставі його обчисляється значіння функції, коли нам відоме значіння її незалежних змінних (і що звичайно виражається формулою, що має в собі всі дані величини), ми звемо *функціональною залежністю* між даними величинами.

ПОМІЧЕНІ ПОМИЛКИ.

Сторінка:	Рядок:	Надруковано:	Треба:
9	20 знизу	поверхну	поверхню
17	13 „	дециметра	сантиметра
35	1 „	(рис. 95)	(рис. 92)
39	14 „	Теорема	
41	16 згори	Теорема	
53	16 „	§ 48	§ 51
57	5 „	DL	D_1L
61	15 знизу	Прямокутники	Прямокутник
67	23 згори	$\frac{1}{3}h = 7\frac{1}{2}$ (м)	$h = 7\frac{1}{2}$ (м)
92	3 „	призми та куба	призми
157	3 „	$4\frac{1}{8}$ м	$5\frac{1}{8}$ м
157	5 „	95	105
162	1 „	рівно	рівна
162	4 „	двха	двох
167	6 „	$\frac{B_1C_1}{AC_1}, \frac{B_2C_2}{AC_2}, \frac{BC}{AC}$	$\frac{B_1C_1}{AB_1}, \frac{B_2C_2}{AB_2}, \frac{BC}{AB}$
168	6 знизу	AC	AB
179	9 „	2,4	2,5
187	13 згори	421	422
196	19 знизу	BB_1	BD_1
200	1 згори	прямо	прямої
200	18 „	лінійний	лінійних
207	1 знизу	піраміда	піраміди

ЗМІСТ

Передмова 3

Частина перша

Розділ 1. Геометричне тіло та його елементи

1. Об'єм та поверхня тіла (§§ 1—5) 5

Розділ 2. Проста лінія

2. Як нарисувати просту лінію (§§ 6—10) 10
3. Додавання та віднімання простих ліній (§§ 11—12) 12
4. Як виміряти просту лінію (§§ 13—17) 13

Розділ 3. Кут

5. Кут та його рисування (§§ 18—20) 21
6. Кути гострі, тупі та прямі (§§ 21—23) 23
7. Прямий кут і перпендикуляр (§§ 24—25) 24
8. Як міряти кути (§§ 26—30) 26
9. Властивість суміжних кутів (§ 31) 29
10. Вершкові кути (§§ 32, 33) 29

Розділ 4. Трикутник

11. Типи трикутників (§§ 34—36) 34
12. Симетрія та рівнораменний трикутник (§§ 37—40) 36
13. Ознаки рівности (пристайности) трикутників (§§ 41—44) 42
14. Як рисувати за допомогою циркуля та лінійки (§§ 45—48) 42

Розділ 5. Рівнобіжні прості

15. Рівнобіжні прості та їх симетрія (§§ 49—51) 50
16. Кути, що їх утворюють дві рівнобіжні та січна (§§ 52—53) 52
17. Як будувати рівнобіжні прості (§§ 56—61) 54
18. Сума кутів трикутника (§ 62) 57

Розділ 6. Прямокутник, квадрат

19. Як нарисувати прямокутник (§§ 63—64) 61
20. Діягоналі та боки прямокутника (§§ 65—70) 62
21. Як виміряти площу прямокутника (§§ 71—74) 64
22. Як виміряти площу квадрата (§§ 75—79) 67

Розділ 7. Рівнобіжник, трикутник, трапез, ромб

23. Рівнобіжник (§§ 80—85) 74
24. Трикутник (§§ 86—87) 78
25. Трапез (§§ 88—92) 80
26. Ромб (§§ 93—95) 82

Розділ 8. Прямокутна призма та куб

27. Що таке прямокутна призма та куб (§§ 96—100) 89
28. Поверхня прямокутної призми та куба (§§ 101—102) 91
29. Як виміряти об'єм прямокутної призми (§§ 103—106) 92
30. Як виміряти об'єм куба (§§ 107—109) 94

Частина друга

Розділ 9. Коло

31. Коло й проста лінія (§§ 110—114) 101
32. Дотична й січна (§§ 115—117) 103
33. Взаємне положення двох кол (§§ 118—120) 105
34. Коло й кут (§§ 121—125) 107

Розділ 10. Многокутник

35. Різні види многокутників (§§ 127—128) 113
36. Рисування правильних многокутників (§§ 129—133) 114
37. Як виміряти площу многокутника (§§ 134—138) 116

Розділ 11. Довжина та площа кола

38. Як виміряти довжину обвода кола (§§ 139—144) 121
39. Як виміряти довжину дуги (§ 145) 127
40. Як виміряти площу кола (§§ 146—147) 128
41. Як виміряти площу сектора й сегмента (§§ 148—150) 130

Розділ 12. Подібні фігури

42. Відношення та пропорції (§§ 151—153) 135
43. Пропорціональні лінії (§ 154) 138
44. Подібні многокутники (§ 155) 139
45. Ознаки подібности трикутників (§§ 156—159) 140
46. Як рисувати план (§§ 160—164) 145
47. Площі подібних фігур (§§ 165—166) 149

Розділ 13. Функціональна залежність між боками прямокутного трикутника

48. Властивість перпендикуляра, спущеного з вершини прямого кута на гіпотенузу (§§ 167—169) 158

Розділ 14. Дещо з тригонометрії

49. Тригонометрична величина Sn (§§ 170—173) 166
50. Косинус (§§ 174—177) 170
51. Тангенс та котангенс (§§ 178—186) 175

Розділ 15. Площини та проєкції

52. Площина й точка (§§ 187—188) 185
53. Площина та проста лінія (§§ 189—191) 186
54. Дві перпендикулярні площини (§§ 192—194) 190
55. Рівнобіжні площини (§ 195) 191
56. Проєктування на дві площини (§§ 196—198) 191
57. Проєктування на три площини проєкцій (§§ 199—201) 193

Розділ 16. Призма, як зразок многогранника

58. Різні види призм (§§ 202—204) 198
59. Як виміряти поверхню призми (§§ 205—207) 199
60. Як міряти об'єм призми (§§ 208—212) 200

Розділ 17. Піраміда

61. Різні види пірамід (§§ 213—219) 205
62. Як виміряти поверхню піраміди (§§ 220—221) 207
63. Об'єм піраміди (§§ 222—225) 208
64. Зрізана піраміда (§§ 226—229) 211

Розділ 18. Круглі тіла

65. Циліндр (§§ 230—236) 215
66. Конус (§§ 237—244) 218
67. Куля (§§ 245—252) 222